XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.IV: С.6-7, 2001.

УДК 517.956.4

О.С.Рыкова (5 курс, каф. ПМ), В.М.Чистяков, д.ф.-м.н., проф.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ОДНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения параболического типа, в частности, квазилинейные, встречаются во многих разделах математической физики. Чрезвычайно важным аспектом исследования дифференциальных уравнений является разрешение проблемы их регулярности.

Одним из возможных подходов к решению этого вопроса является построение итерационного процесса, который позволяет доказать разрешимость уравнения или системы и установить гладкость их решений.

Такой универсальный итерационный процесс, с помощью которого была доказана разрешимость и гладкость решений для общих эллиптических систем, был построен А. И. Кошелевым [4], а для параболических систем был модернизирован В. М. Чистяковым в работе [6].

В настоящей работе исследуется разрешимость и гладкость решений квазилинейных параболических уравнений дивергентного типа с одной пространственной переменной при помощи этого итерационного процесса.

Рассматривается следующее квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = 0 \tag{1}$$

с оператором L вида

$$L(u) \equiv \frac{d a_1(t,x;u,u_x)}{dx} - a_0(t,x;u,u_x) \tag{2}$$

в конечной области $Q_T = [0,T] \times [0,1]$.

Ищется решение u, удовлетворяющее нулевому начальному условию

$$u(0,x) = 0, \qquad x \in [0,1] \tag{3}$$

и однородным граничным условиям на концах промежутка $[0,1]$

$$u(t,0) = 0 \quad u(t,1) = 0\,. \tag{4}$$

Относительно функций $a_i(t,x;p_0,p_1)$, где $p_0 = u$, а $p_1 = \partial u / \partial x$, делаются следующие предположения:

1) функция $a_1(t,x;p_0,p_1)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и p_i и один раз по t, а функция $a_0(t,x;p_0,p_1)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам;

2) кроме того, для любых $(t,x) \in Q_T$ и $\xi \in R^2$ справедливы неравенства

$$|a_0| \le \kappa_0 (1+|p|)^{1/2} \qquad \sum_{i,k=0}^{1} \frac{\partial a_i}{\partial p_k} \xi_i \xi_k \ge \mu_0 |\xi|^2 , \qquad \left| \frac{\partial a_i}{\partial p_k} \right| \le \nu_0 \tag{5}$$

где p - вектор (p_0, p_1); κ_0, μ_0 и ν_0 - положительные постоянные, а $|\xi|$ и $|p|$ - длины векторов ξ и p.

Рассматривается следующий итерационный процесс:

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x^2} - u_{n+1}\right) = \frac{\partial u_n}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - u_n\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - L(u_n)\right), \tag{6}$$

$u_n(0,x) = 0$ при $x \in [0,1]$; $u_n(t,0) = 0$, $u_n(t,1) = 0$ $(n = 0,1,\ldots)$. Здесь α и ε положительные параметры. Сходимость процесса (6) в нормах $W_p^{1,0}$ была доказана в [2]. Здесь $W_p^{1,0}$ – пространство функций, принадлежащих $L_p(Q_T)$, и таких, что их производные по x также принадлежат $L_p(Q_T)$.

В настоящей работе исследуется сходимость процесса в пространстве $W_2^{2,0}$, которое определяется аналогичным образом.

Доказана **Теорема 2:**

Пусть выполнены условия 1) и 2). Пусть, кроме того, функция $a_0(t,x;p_0,p_1)$ также дважды непрерывно дифференцируема по x и p_i.

Тогда решение задачи (1), (2), (3) принадлежит $W_2^{2,0}$ и, если α достаточно велико, а ε - достаточно мало, то итерационный процесс (6) сходится к этому решению, начиная с любого начального приближения из $W_2^{2,0}$.

В рассматриваемом случае уравнения с одной пространственной переменной исследование сходимости достаточно производить в шкале пространств С. Л. Соболева, а результаты по гладкости могут быть установлены на основании теорем вложения для анизотропных пространств. Наличие у решения гладкости позволяет строить численные процедуры высокой степени точности по h.

Процесс (6) численно реализован и протестирован на модельных примерах.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Кошелев А. И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. – М., 1986.
2. Чистяков В. М. О сходимости одного итерационного процесса для квазилинейных параболических уравнений. – Изв. Вузов. Матем. 1984, №1, с. 41-46