XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.IV: С.14-15, 2001.

УДК 519.872

Д.А.Соловьев (5 курс, каф. ПМ), О.И.Заяц, к. ф.-м. н., доц.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНКУРЕНЦИИ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Для описания процессов обслуживания используются различные вероятностные модели. Эти модели одинаково применимы как к производственным, так и к непроизводственным задачам из самых различных сфер экономики. В настоящей работе рассматривается одна из таких задач, касающаяся конкуренции систем обслуживания в условиях рыночной экономики.

Для упрощения задачи исследуется система, на вход которой поступает случайный поток требований, в котором интервалы между требованиями распределены по одному и тому же показательному закону с плотностью вероятности $a(\tau)=\lambda e^{-\lambda\tau}$, $(\tau \geq 0)$, где λ - интенсивность поступления требований. Система состоит из рабочей части, включающей m одинаковых каналов обслуживания, и накопителя. В накопителе содержатся требования, ожидающие обслуживания. Общее число требований, которые одновременно могут находится в системе k наз-ся емкостью системы. Время обслуживания для всех каналов является случайным и распределено по одному и тому же показательному закону с плотностью $b(x)=\mu e^{-\mu x}$, $(x \geq 0)$, где μ - интенсивность обслуживания требований. Если все каналы и места ожидания заняты, то требование в систему не попадает и безвозвратно теряется. Таким образом на выходе системы получаем случайный выходящий поток, состоящий из обслуженных требований, а на ее входе возникает некоторый случайный поток потерь, состоящий из требований, которым отказано в обслуживании.

Такая система обозначается сокращенно как M/M/m/k и для нее существуют простые формулы вероятностных характеристик, получаемые на основе теории марковских процессов. Конкретные выражения всех этих характеристик получены в ТМО, но они не затрагивают экономической деятельности системы. Если дополнить эту классическую модель описанием затрат и доходов, связанных с функционированием системы, то получится модель экономического поведения системы, которая позволяет решить ряд практически значимых оптимизационных задач. В работе рассматриваются две такие задачи. Их решение получалось численным путем на ЭВМ. Разработанные программы использовались затем при решении основной задачи.

В задаче оптимального формирования входящего потока все параметры системы фиксированы, за исключением затрат на формирование входящего потока c_0. При этом задается зависимость $\lambda=\lambda(c_0)$. Требуется определить оптимальное значение $c_0=c_0^{(opt)}$ по критерию максимума прибыли ($\bar{r} \to \max\limits_{c_0}$).

В задаче оптимизации тарифа варьируется тариф c_6, при этом задана некоторая зависимость $\lambda=\lambda(c_6)$. Требуется определить оптимальное значение тарифа по критерию максимума прибыли($\bar{r} \to \max\limits_{c_6}$).

В качестве основной рассматривается задача оптимизации тарифа в условиях конкуренции двух систем. В ней предполагается, что имеется общий поток требований интенсивностью λ_0, который определенным образом перераспределяется между двумя системами “A” и “B” в зависимости от тарифов в этих системах. Для системы “A”: $\lambda=\lambda_0\varphi$, а для системы “B”: $\tilde{\lambda}=\lambda_0\tilde{\varphi}$, где φ - вероятность того, что клиент изберет первую систему, а $\tilde{\varphi}$ -аналогичная вероятность для второй системы. Тарифы каждой из систем в зависимости от их коэффициента использования выражаются следующим образом:

$$c_6(\rho) = \widetilde{c}_6\left(\frac{\lambda_0}{\rho m \mu} - 1\right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad 0 \le \rho \le \frac{\lambda_0}{m\mu}, \ \widetilde{c}_6(\widetilde{\rho}) = c_6\left(\frac{\lambda_0}{\widetilde{\rho}\widetilde{m}\widetilde{\mu}} - 1\right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad 0 \le \widetilde{\rho} \le \frac{\lambda_0}{\widetilde{m}\widetilde{\mu}}.$$

Задача рассматривалась в игровой постановке, каждый ход игры заключался в оптимальном изменении тарифа одной из систем, право сделать ход поочередно предлагалось каждой системе. Численный эксперимент показал, что результат не зависит от того, какая система делает первый ход. Процесс конкуренции теперь описывается следующим образом: берется вначале $c_6 = c_6^{(0)}$, $\widetilde{c}_6 = \widetilde{c}_6^{(0)}$. Далее на нечетных шагах меняется тариф первой системы и решается для нее задача оптимизации тарифа. При этом $\widetilde{c}_6$ берется с предыдущего шага. Аналогично на четных шагах для второй системы. Если на каком-то шаге *k* оказывается, что $c_6^{(k)}$ приводит к значению $\rho = \rho_*$, при котором $\widetilde{r} < 0$, то разоряется система “B”. Если же на *k*-м шаге имеем $\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}_*$ и $r < 0$, то разоряется система “A”. Если r_k и $\widetilde{r}_k$ устанавливаются положительными за конечное число шагов, то процесс конкуренции конечный, если же только в пределе, то конкуренция длится бесконечно долго.

При решении контрольных примеров в качестве конкурирующих систем использовались два завода, занимающихся изготовлением однотипных взаимозаменяемых изделий: завод “A”, для которого решались вспомогательные оптимизационные задачи и завод “B”, технология изготовления изделий на котором такая же, как и на заводе “A”, за исключением того, что сборкой готовых изделий занимаются в два раза меньше сборщиков.

В результате решения вспомогательных задач для завода “A” выяснилось, что при определенных его характеристиках более выгодно варьировать тариф за обслуживание нежели оптимизировать план выпуска изделий. Для задачи конкуренции удалось получить два финальных состояния: когда завод “B” разоряется и когда конкуренция длится бесконечно долго.