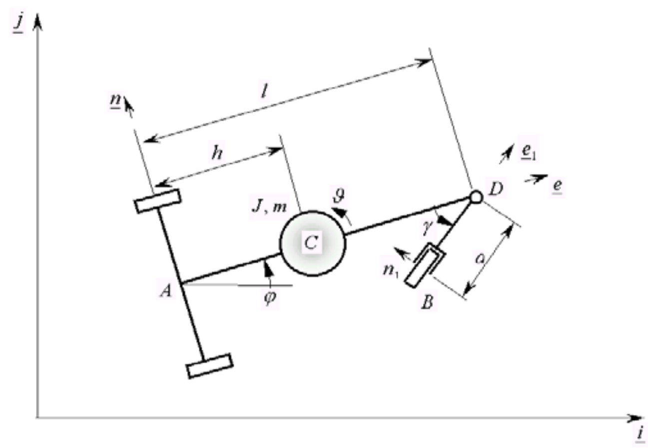
XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.IV: С.23-24, 2001.

УДК 531.384:616-009.11-78

М.А.Дружинин (5 курс, каф. МПУ), Ю.Г.Исполов, д.ф-м.н., проф.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОГО КОЛЕСНОГО ТРЕНАЖЕРА



Предметом исследования является неголономный трехколесный тренажер, предназначенный для реабилитации детей с поражением опорно-двигательного аппарата. Устройство тренажера следующее: ось, несущая два свободно насаженных на нее колеса, жестко прикреплена к корпусу тренажера; третье колесо расположено на горизонтальном стержне, который может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Тренажер, по своей конструкции, похож на детский трехколесный велосипед с тем отличием, что он не имеет педалей и переднее рулевое колесо смещено относительно вертикальной оси вращения не вперед, а назад. Человек, сидящий на тренажере, может управлять движением, поворачивая руль и корпус вокруг вертикальной оси. В отличие от велосипеда, где разгон осуществляется за счет продольных реакций, пропорциональных крутящему моменту на ведущих колесах, разгон тренажера происходит за счет поперечных реакций неголономных связей.

Цель работы — исследование возможности такого неголономного движения.

Для описания положения введем $\underline{R}_c$ – вектор-радиус центр инерции, φ – угол поворота тренажера, γ – угол поворота руля и ϑ – угол поворота корпуса человека. Повороты γ и ϑ – это управляющие движения. Они изменяются человеком, сидящим на тренажере, по заданному закону. Примем, что качение колес по опорной плоскости происходит без проскальзывания. Тогда скорость в точке А направлена перпендикулярно к оси задних колес. Скорость точки В, расположенной на оси переднего колеса, – по стержню BD. Отсутсутствие компонент скорости вдоль соответствующих осей выражают уравнения неголономных связей

$$\dot{\underline{R}}_C \cdot \underline{n} - h\dot{\varphi} = 0, \qquad \dot{\underline{R}}_C \cdot \underline{n}_1 + \dot{\varphi}(l-h)\cos\gamma - (\dot{\varphi}+\dot{\gamma})a = 0$$

Введем так называемую квазискорость V – скорость точки А. Тогда обычные скорости легко выразятся через квазискорость

$$\dot{\underline{R}}_C = V\underline{e} + h\dot{\varphi}\underline{n}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{V\sin\gamma + a\dot{\gamma}}{l\cos\gamma - a} \tag{1}$$

Таким образом, движение определяется тремя независимыми обобщенными координатами, обобщенные скорости связаны двумя уравнениями неголономных связей и выражаются в терминах квазискорости. Имеем одну степень свободы.

Пренебрежем массой тренажера. Человека представим как твердое тело с центром масс на продольной оси тренажера, смещенном на расстояние h от оси задних колес, совершающего вращательное движение вокруг центра инерции. Воспользуемся уравнениями в форме Аппеля для чего запишем энергию ускорений

$$S = \tfrac{1}{2} m\ddot{\underline{R}}_C \cdot \ddot{\underline{R}}_C + \tfrac{1}{2} J(\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta})^2$$

где m –масса человека, J –его осевой момент инерции. Энергию ускорений необходимо выразить через квазискорость. Ввиду громоздкости формула не приводится. Включим в уравнения силу трения, подразумевая её пропорциональной скорости точки А: $\underline{F}^d = -bV\underline{e}$, где b – коэффициент сопротивления. Соответствующая обобщенная сила будет $F = -bV$. Уравнение Аппеля для движения неголономного тренажера $\partial S / \partial \dot{V} = F$ или

$$\left[m + I\frac{\sin^2\gamma}{z^2}\right]\dot{V} + \left[b - m\frac{ha\dot{\gamma}\sin\gamma}{z^2} + I\left(\frac{\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma}{z^2} + \frac{l\dot{\gamma}\sin^3\gamma}{z^3}\right)\right]V = \\ = m\left(\frac{ha^2\dot{\gamma}^2}{z^2} + \frac{h^2\ddot{\vartheta}\sin\gamma}{z}\right) - I\left(\frac{a\ddot{\gamma}\sin\gamma}{z^2} + \frac{la\dot{\gamma}^2\sin^2\gamma}{z^3} + \frac{\ddot{\vartheta}\sin\gamma}{z}\right) \quad (2)$$

где введены обозначения $z = l\cos\gamma - a$ и $I = J + mh^2$. Уравнение (2) определяет зависимость квазискорости V от управляющих движений γ, ϑ. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Оно может быть записано в виде $\dot{V} + P(t)V = Q(t)$ и допускает решение в квадратурах

$$V(t) = e^{-\int_0^t P(t_1)dt_1}\left(\int_0^t Q(t_1)e^{-\int_0^{t_1} P(t_2)dt_2}dt_1 + V(0)\right)$$

Интегрированием соотношений (1) находится положение тренажера на плоскости. Таким образом, проблема динамики неголономного трехколесного тренажера полностью решена в квадратурах.

Для исследования уравнений рассмотрим случай малых управляющих движений, меняющихся по гармоническому закону $\gamma = \gamma_0 \sin\omega t,\ \vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \beta)$. Применяя метод усреднения к уравнению (2), получим

$$m\dot{\overline{V}} + b\overline{V} = \frac{\omega^2\gamma_0}{2(l-a)}\left[m\frac{ha^2\gamma_0}{l-a} + I\frac{a\gamma_0}{l-a} + (I - mh^2)\vartheta_0\cos\beta\right] \quad (3)$$

Величина, стоящая в правой части уравнения (3) представляет собой среднюю силу тяги. Сдвиг по фазе β необходимо подобрать таким образом, чтобы разгон тренажера происходил максимально интенсивно, то есть сила тяги была бы наибольшей. Так будет, если положить, например, $\beta = 0$. Этот результат означает, что для максимального разгона повороты руля и тела человека должны происходить синфазно. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами (3) имеет вид $V(t) = (V_0 - V_\infty)e^{-t/\tau} + V_\infty$, где V_∞ – установившееся значение скорости.

Выводы. В работе была рассмотрена динамика неголономного тренажера. Исследованию подверглась возможность движения, т.е. набора скорости и ее поддержания при помощи неголономных реакций в точках касания колес с плоскостью. Был сделан важный качественный вывод о синхронизации управляющих движений, делающих установившуюся скорость максимальной.