XXX Юбилейная Неделя науки СПбГТУ.Материалы межвузовской научной конференции. Ч.VI: С.74, 2002.© Санкт-Петербургский государственный технический университет, 2002.
УДК 330.43

Д.В. Чернушенко (асп. каф. ММ), Э.М. Косматов, к.т.н., проф.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА КОЛИЧЕСТВА СОТРУДНИКОВ ДЛЯ ОДНОРЕСУРСНЫХ И МНОГОРЕСУРСНЫХ ФИРМ

Часто перед руководством фирмы возникает вопрос: не нанять ли еще одного работника. Существует, однако, очень простое правило для разрешения подобного вопроса: нанимать следует только тогда, когда дополнительный доход, полученный от этого работника, превысит назначаемую ему зарплату.

Цель данной работы – математически описать данное правило, получившее название «золотое правило» экономики. Для этого необходимо отдельно рассмотреть одноресурсные и многоресурсные фирмы.

Одноресурсная фирма. Предположим, фирма выпускает один товар, и его количество обозначим через y. Используется только один ресурс. Фирма полностью характеризуется своей производственной функцией y = *F(x)* – зависимостью объема выпускаемого товара от объема затраченного ресурса *x.*

Предполагается, что производственная функция удовлетворяет двум аксиомам:

1) Хотя бы на части ее области определения, называемой экономической областью *E,* эта функция неубывающая, в этой области производная *F'(x)* неотрицательна. Она называется предельным продуктом.

2) Существует выпуклое подмножество S экономической области, для которой подмножества $\{x \in S : F(x) \ge a\}$ также выпуклы для всех *a.* В этом подмножестве вторая производная неположительна.

Остановимся на экономическом содержании этих двух аксиом.

Первая аксиома утверждает, что производственная функция отражает бесспорное и, в то же время, тривиальное утверждение: в мало-мальски разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Из второй аксиомы поясним только экономический смысл требования неположительности второй производной. Это свойство называется в экономике законом убывающей отдачи или убывающей доходности: по мере увеличения объема затраченного ресурса начиная с некоторого момента (при входе в область S!) начинает уменьшаться предельный продукт. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производство зерна на фиксированном участке земли.

В дальнейшем будем считать, что производственная функция имеет необходимые производные и удовлетворяет обеим аксиомам на всей области определения.

Пусть *p* – цена единицы ресурса и *v* – цена единицы выпускаемого товара. Следовательно, прибыль W*,* являющаяся в итоге функцией x (и цен, но они считаются постоянными), есть *W*(*x*) = *vF(x) – px.* Следовательно, приходим к задаче фирмы

$$\begin{aligned} & W(x) \to \max \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Приравнивая производную функции *W*(*x*) нулю получим:

$$F'(x) = p/v. \qquad (2)$$

Очевидно, что объем перерабатываемого ресурса положителен и, следовательно, точка, даваемая соотношением (2), оказывается внутренней, т.е. точкой экстремума, и, поскольку еще предполагается неположительность второй производной, то это точка максимума.

Выводы. При естественных предположениях на производственную функцию (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение (2) дает решение задачи фирмы, т.е. определяет объем перерабатываемого ресурса, в результате чего получается выпуск, дающий максимальную прибыль. Точку *a,* даваемую соотношением (2), назовем оптимальным решением фирмы.

Многоресурсная фирма. В общем случае, т.е. когда фирма использует не один ресурс, а несколько, многое в теории аналогично.

Итак, фирма выпускает один товар и его количество обозначим *y*. Вектор ресурсов-затрат $X=(x_1 ,..., x_n)$. Затраты однозначно определяют выпуск, и эта связь есть производственная функция $y =F(X)$.

Будем предполагать, что производственная функция удовлетворяет необходимым условиям дифференцируемости, а также условиям, аналогичным изложенным в аксиомах 1, 2:

1) Она неубывающая в экономической области *E;* отсюда следует, что ее частные производные, называемые предельными продуктами, неотрицательны в этой области.

2) В рассматриваемом выпуклом подмножестве S всякое подмножество $\{X \in E : F(X) \geq a\}$ также выпукло для всех *a.*

Пусть $P = (p_1, ..., p_n)$ – вектор цен на ресурсы и v – цена единицы выпускаемого товара. Тогда прибыль *W*, являющаяся в итоге функцией X (и цен v, $p_1, ..., p_n$, но они считаются постоянными), есть **W**(X) $= vy - PX = vF(X) - PX$. Следовательно, приходим к задаче многоресурсной фирмы:

$$W(X) \to \max$$
$$X \geq 0$$

Приравнивая частные производные функции W(x) нулю получим:

$$v * \partial F/\partial X = P. \qquad (3)$$

Будем предполагать, что все затраты строго положительны (нулевые можно просто исключить из рассмотрения). Тогда точка, даваемая соотношением (3), оказывается внутренней, т.е. стационарной точкой. Второе же условие, которому должна удовлетворять производственная функция, гарантирует, что это точка максимума.

Выводы. При естественных предположениях на производственную функцию (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение (3) дает решение задачи многоресурсной фирмы, т.е. определяет объем X^* перерабатываемых ресурсов, в результате чего получается выпуск $y^* = F(X^*)$. Точку X^* или (y^*, X^*) назовем оптимальным решением фирмы.