XXXI Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. VI: С.154-155, 2003.
© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2003.

УДК 62.50

А.М. Дорошко (5 курс, каф. САиУ), В.Е. Куприянов, к.т.н., проф.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Стационарный линейный дискретный объект управления (ОУ) может быть описан системой разностных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \\ x_0 = x^0 \end{cases} \quad (1)$$

В соотношениях (1) $x(t)\{x_k\} \in \Re^n$ – вектор фазовых координат (иначе – вектор состояния), полностью определяющий состояние объекта в соответствующий момент времени; $u(t)\{u_k\} \in \Re^m$ – вектор входных переменных, определяющий воздействие, оказываемое на вход; $y(t)\{y_k\} \in \Re^r$ – вектор выходных переменных; $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{r\times n}$, $D \in \Re^{r\times m}$ – постоянные числовые матрицы, характеризующие свойства конкретного объекта.

Задача управления объектом состоит в определении входного воздействия u, которое обеспечит требуемое поведение ОУ. Для эффективного управления вводят обратную связь пропорционального типа

$$u_k = K \cdot x_k, \quad (2)$$

и задача управления превращается в задачу поиска матрицы настроек $K \in \Re^{m\times n}$.

На кафедре «Системный анализ и управление» разрабатывается программный пакет автоматизированного проектирования систем автоматического управления (САУ). Для оценки качества управления системой (то есть качества переходного процесса системы (1)) используется квадратичный функционал следующего вида:

$$I = \sum_{t=0}^{T\max} \left(x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t \right), \quad (3)$$

где $Q \in \Re^{n\times n}$– симметричная неотрицательно определенная матрица, $R \in \Re^{m\times m}$– симметричная положительно определенная матрица.

При численном решении задачи проектирования САУ обращение к процедуре вычисления функционала (3) происходит большое количество раз. Кроме того, часто бывает необходимо вычислить (3) при $T\max \to \infty$. Указанные причины заставляют отказаться от вычисления функционала по определению (3), так как это потребовало бы неоправданно много компьютерного времени. Далее будет рассмотрен быстро реализуемый на ЭВМ метод вычисления квадратичной суммы (3).

В литературе встречается идея численного вычисления сумм, основанная на удвоении шага. То есть каждая следующая итерация такого метода удваивает количество учтенных слагаемых, а не увеличивает на одно (как было бы в случае вычисления суммы (3) по определению). Эта идея применима для рассматриваемой задачи и действительно позволяет за небольшое число итераций получать значение функционала (3) для больших значений верхнего предела суммирования $T\max$. Но такой метод применим лишь для случая, когда число слагаемых в сумме (3) равно двум в некоторой натуральной степени, то есть $T\max = 2^k - 1$.

В данной статье предлагается метод вычисления квадратичного функционала (3), основанный на идее удвоения шага, но обобщенный на случай произвольного конечного верхнего предела суммирования $T\max$. Для реализации метода необходимо представить верхний предел суммирования в виде числа в двоичной системе счисления:

$$T\max_{(2)} = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0}, \quad (4)$$

где $\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_p = 1$.

Тогда значение функционала определяется формулой (5):

$$I = x_0^T \cdot S_p \cdot x_0, \tag{5}$$

где матрица S_p определяется по итеративной схеме (6) на p-ом шаге:

$$\begin{gathered} M_0 = \widetilde{Q}, \quad \Phi_0 = \widetilde{A}, \quad S_0 = \alpha_0 \cdot \widetilde{Q} \\ M_{\ell+1} = M_\ell + \Phi_\ell^T \cdot M_\ell \cdot \Phi_\ell, \\ \Phi_{\ell+1} = \Phi_\ell \cdot \Phi_\ell, \\ S_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1} \cdot (M_{\ell+1} + \Phi_{\ell+1}^T \cdot S_\ell \cdot \Phi_{\ell+1}) + (1 - \alpha_{\ell+1}) \cdot S_\ell \\ \ell = \overline{0, p-1} \end{gathered} \tag{6}$$

В записи итеративной схемы использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \widetilde{Q} = Q + K^T R K \\ \widetilde{A} = A + BK \end{gathered} . \tag{7}$$

Проведенные исследования подтверждают высокую эффективность предложенного метода. Наибольший выигрыш во времени вычислений наблюдается при больших размерностях матриц и при больших значениях верхнего предела суммирования *T*max, а именно такие задачи чаще всего встречаются на практике.

На вход соответствующей процедуры для ЭВМ подаются матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{Q} \in \Re^{n \times n}$, вектор начального состояния $x^0 \in \Re^n$ и верхний предел суммирования *T*max. На выходе процедуры – признак корректного завершения работы процедуры и, собственно, значение функционала *I*, если вычисления прошли успешно. Если же при вычислении возникло переполнение разрядной сетки, то процедура выдает такой предел суммирования, при котором значение суммы еще представимо в виде конечного числа и само значение такой суммы. Отметим, что при любых входных данных достигается безаварийное завершение процедуры. Разработанная подпрограмма станет частью программного пакета автоматизированного проектирования САУ.