XXXI Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. VI: С.163-165, 2003.


УДК 662.642: 621.926.7

А.В. Чугунцев (5 курс, каф. САиУ), Р.И. Ивановский, д.т.н., проф.

# АНАЛИЗ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Целью данной работы является построение алгоритма анализа погрешностей сигналов на выходе расчетной динамической системы помещенной в условия функционирования, отличающиеся от расчетных условий. Рассматриваемая ситуация в технике имеет место так как часто динамические системы функционируют в сложных средах, все значения параметров которых часто учесть не представляется возможным. Особенностью данной работы является построение анализа отклонений сигналов на базе ковариационной матрицы рассматриваемых величин, как объекта отражающего всю совокупность и взаимосвязь анализируемых параметров – дисперсий сигналов динамической системы. Построение алгоритма анализа рассмотрено в рамках задачи оптимальной фильтрации фильтром Калмановского типа (ФКТ).

Оптимальный ФКТ для оценки вектора состояния динамической системы в непрерывном времени вида (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A * x(t) + B * w(t) \\ z(t) = H(t) * x(t) + v(t) \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \Re^n$ - вектор состояния системы, $w(t) \in \Re^r$ - вектор типа белого шума на входе системы с матрицей интенсивности $Q \in \Re^{r \times r}$, $v(t) \in \Re^m$- вектор типа белого шума на входе системы с матрицей интенсивности $R \in \Re^{m \times m}$, $z(t) \in \Re^m$ - вектор выхода системы, $A \in \Re^{n \times n}$ - матрица динамики объекта, $B \in \Re^{n \times r}$ - матрица коэффициентов усиления входного сигнала, $H \in \Re^{m \times n}$ - матрица выхода системы, записывается как динамическая система (2) или (3):

$$\dot{\overline{x}} = A * \overline{x} + K * [z - H * \overline{x}] \tag{2}$$

$$\dot{\overline{x}} = A * \overline{x} + P * H^T * R^{-1} * [z - H * \overline{x}] \tag{3}$$

где $\overline{x}$ - оценка вектора состояния, $K$ – произвольная матрица усиления ФКТ, $P$ - ковариационная матрица вектора состояния, записывающаяся следующим образом:

$$P = M[(e - m_e)(e - m_e)^T] = \operatorname{cov}(e) \tag{4}$$

где $e = x - \overline{x}$ - ошибка оценки вектора состояния, $m_e$ - математическое ожидание ошибки. Система (2) обеспечивает не смещенность оценки, а (3) дополнительно реализует минимум её отклонения от истинной величены. Характер отклонений оценки вектора состояния анализируется на основе матрицы $P$ получаемой решением матричного дифференциального уравнения Риккати (5).

$$\dot{P} = P * A^T + A * P + B * Q * B^T - P * H^T * R^{-1} * H * P, \; P(0) = P_0 \tag{5}$$

Рассмотрим поведение оценки вектора состояния и характер её отклонения в случае, когда оптимальному ФКТ рассчитанному на систему (1) приходится оценивать вектор состояния системы (6), имеющей отличные от системы (1) параметры.

$$\begin{cases} \dot{x}_д(t) = A_д * x_д(t) + B_д * w_д(t) \\ z_д(t) = H_д(t) * x_д(t) + v_д(t) \end{cases} \tag{6}$$

Тогда фильтр (2) будет иметь структуру (7).

$$\dot{\overline{x}} = A * \overline{x} + K * (z_д - H * \overline{x}) \tag{7}$$

Вводя действительную ошибку оценки (8), учитывая (7) и (6), получаем (9).

$$e_д = x_д - \overline{x} \tag{8}$$

$$\dot{e}_д = \dot{x}_д - \dot{\overline{x}} = (A - K * H) * e_д + (\Delta A - K * \Delta H) * x_д + B_д * w_д - K_д * v_д \tag{9}$$

где $\Delta H = H_д - H$ $\Delta A = A_д - A$ - величины отражающие разницу между расчетными условиями и действительными.

Введем расширенные векторы:

$$e_\Sigma = \begin{bmatrix} e_д \\ x_д \end{bmatrix}; \qquad w_\Sigma = \begin{bmatrix} w_д \\ v_д \end{bmatrix} \tag{10}$$

Тогда дифференциальное уравнение для $e_\Sigma$ запишется в виде (27).

$$\dot{e}_\Sigma = A_\Sigma * e_\Sigma + B_\Sigma * w_\Sigma \tag{11}$$

где - $A_\Sigma = \begin{bmatrix} A - K*H & \Delta A - K*\Delta H \\ 0 & A_д \end{bmatrix} \qquad B_\Sigma = \begin{bmatrix} B_д & -K \\ B_д & 0 \end{bmatrix}$ (12)

При независимости шумов $w_д$ *и* $v_д$ матрица $Q_\Sigma$ интенсивностей вектора является блочно-диагональной и содержит блоки $Q_д$ и $R_д$.

Из теории линейных дифференциальных уравнений вида (11) следует, что ковариационная матрица для вектора удовлетворяет выражению:

$$\begin{cases} \dot{P}_\Sigma = A_\Sigma * P_\Sigma + P_\Sigma * A_\Sigma^T + B_\Sigma * Q_\Sigma * B_\Sigma^T \quad P_\Sigma = M(e_\Sigma * e_\Sigma^T) \\ P_\Sigma(0) = P_\Sigma(t_0) \;\; Q_\Sigma = \begin{bmatrix} Q_д & \\ & R_д \end{bmatrix} \end{cases} \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует:

$$P_\Sigma = \begin{bmatrix} P_д & P_c^T \\ P_c & P_{хд} \end{bmatrix} \tag{14}$$

где $P_д = M[e_д * e_д^T]$ - ковариационная матрица действительной ошибки оценки; $P_{хд} = M[x_д * x_д^T]$ - ковариационная матрица вектора состояния реальной модели; $P_{хд} = M[x_д * e_д^T]$ - взаимная ковариационная матрица вектора состояния реальной модели с действительной ошибки оценки.

Подставив уравнение (12) в выражении (13) и произведя операции с блочными матрицами, получим расчетные формулы для ковариационных матриц $P_д$, $P_{хд}$, $P_C$ - блоков матрицы (14).

$$\begin{cases} \dot{P}_д = I * P_д + P_д * I^T + \Delta I * P_c + P_c^T * \Delta I^T + Q_c^* + K * R_д * K^T \\ \dot{P}_c = A_д * P_c + P_c * I^T + P_{хд} * \Delta I^T + Q_д^* \quad I = A - H * K \\ \dot{P}_{хд} = A_д * P_{хд} + P_{хд} * A_д^T + Q_д^* \quad \Delta I = \Delta A - K * \Delta H \\ Q_д^* = B_д * Q_д * B_д^T \qquad P_д(0) = P_{хд}(0) = P_{д0} \end{cases} \tag{15}$$

Аналогичным образом строится алгоритм анализа в случае систем с дискретным временем.

*Выводы.* Построен алгоритм анализа ошибок оценки вектора состояния динамической системы в задаче фильтрации ФКТ в случае помещения фильтра в действительные условия функционирования отличающиеся от расчетных на базе ковариационной матрицы, отражающей отклонения для всей совокупности оцениваемых элементов вектора состояния.