XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.33

УДК 519.632

Н.Б.Явич (5 курс, каф. ПМ), С.И.Репин, д.ф.-м.н., проф.

СРАВНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ И СМЕШАННЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ

В данной работе производится сравнение классического метода и группы схем смешанного метода конечных элементов. Акцент делается на случае, когда ячейки сетки близки к вырождению. Сравнение производится по погрешностям вычисления как решения так и нормальных составляющих градиента решения на рёбрах ячеек сетки. Такие задачи возникают, в частности, в геофизике.

Классический и смешанный методы конечных элементов применялись к решению диффузионного уравнения в прямоугольной области. На двух смежных сторонах области стояло краевое условие Дирихле, на двух противоположных смежных сторонах – Неймана. Сравнение методов проводилось на сетках двух типов: на регулярной, где ячейки сетки – квадраты, и нерегулярной, где ячейки сетки – трапеции, длины оснований которых относятся как 1 к 15.

Смешанный метод позволяет вводить вспомогательные весовые множители, учитывающие конфигурацию ячеек нерегулярной сетки. Другим отличием смешанного метода является то, что нормальные составляющие градиента определяются одновременно с решением, а при применении классического метода нужно дополнительно прибегать к численному дифференцированию. Однако это отличие приводит к увеличению размерности матрицы жёсткости смешанного метода в 3-4 раза по сравнению с классическим методом. Были реализованы четыре схемы смешанного метода: схема с ¼, весовая схема, схема с постоянной дивергенцией и двудиагональная схема с постоянной дивергенцией. Первые две относятся к разряду неконформных. В статье [1] был предложен метод (схемы с постоянной дивергенцией), позволяющий строить конформное аффинное восполнение поля из $H(\mathrm{div};\Omega)$ на многоугольных ячейках с любой геометрией, даже невыпуклой. В данной работе приведены первые численные эксперименты с применением этих схем.

Другим принципиальным отличием смешанного метода от классического является то, что в нём краевое условие Дирихле – естественное, а Неймана – главное. Это позволяет использовать для аппроксимации решения функции, не имеющие следов на границе. В этой работе использовалась аппроксимация кусочно-постоянными функциями.

Проведённые численные эксперименты позволяют заключить следующее. Классический метод неприменим на вырождающихся сетках. Все смешанные методы так или иначе обеспечивают аппроксимацию как на регулярных, так и на вырождающихся сетках. Наибольшее преимущество имеет двудиагональная схема с постоянной дивергенцией, а также смешанный весовой метод. Их превосходство заключается в том, что качество аппроксимаций вообще не ухудшается с вырождением сетки. Это даёт основание полагать, что указанные методы найдут широкое применение в прикладных задачах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Repin S. I. “Finite Element Method for Simplicial Meshes”, (to appear).
2. Raviart P.-A., Thomas J. M. “A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems”, Lecture Notes in Mathematics #606 (1977).
3. Brezzi F., Fortin M., “Mixed and Hybrid Finite Element Methods”, Springer Series in Computational Mathematics, 15, Springer Verlag, Berlin, 1991.
4. Сьярле Ф. “Метод конечных элементов для эллиптических задач” М: 1980.