XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.III: С.34-35, 2005.

УДК 539.3: 534-141

Т.В.Зиновьева (асп., каф. КТМ), В.В.Елисеев, д.ф.-м.н., проф.

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В настоящее время в глубоководных районах континентального шельфа для бурения скважин и добычи нефти используются плавучие буровые платформы. Многие из этих установок удерживаются над точкой бурения при помощи стальных тонкостенных труб, длина которых значительно превышает диаметр поперечного сечения.

Для оценки прочности подобных конструкций необходимо знать их частоты свободных колебаний с учетом реакции жидкости. Однако расчет реальных объектов чрезвычайно сложен, поэтому предлагается начать анализ с рассмотрения задачи о свободных колебаниях более простой модели – длинной цилиндрической оболочки, полностью погруженной в жидкость.

Рассматриваются линейные колебания оболочки в идеальной сжимаемой жидкости. Для описания жидкости используется акустическое приближение, т. е. рассматривается движение жидкости с малыми возмущениями давления $\tilde{p} = p - p_0$, плотности $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ и скорости $\underline{v}$. Считая эти величины малыми одного порядка и пренебрегая массовыми силами, получим линеаризованную систему уравнений:

$$\nabla\tilde{p} + \rho_0 \dot{\underline{v}} = 0 \text{ – уравнение баланса сил,} \tag{1}$$

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}\,,\ c^2 \equiv \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_0 \text{ – уравнение состояния,} \tag{2}$$

$$\dot{\tilde{\rho}} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{v} = 0 \text{ – уравнение неразрывности.} \tag{3}$$

Из этой системы получим волновое уравнение для давления:

$$\Delta\tilde{p} = \frac{1}{c^2}\ddot{\tilde{p}}\,. \tag{4}$$

Предположение о значительном преобладании длины оболочки над диаметром поперечного сечения позволяет рассмотреть плоскую задачу о движении сечения оболочки в жидкости (рис.1).

Идеальная жидкость не сопротивляется перемещениям оболочки вдоль касательной, поэтому достаточно задать перемещение вдоль нормали

$$u_n(\vartheta, t) = U_n \sin n\vartheta e^{i\omega t}\,. \tag{5}$$

На поверхности оболочки должно выполняться условие безотрывности течения, т. к. задача линейная, то это условие ставится на недеформированной поверхности

$$\underline{v}\cdot\underline{n} = \dot{\underline{u}}\cdot\underline{n}\Big|_{r=R}\,. \tag{6}$$

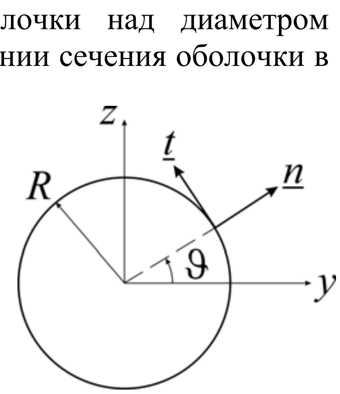

Рис. 1.

На бесконечности ставится условие излучения. Решение ищем в виде $\tilde{p}(r,\vartheta,t) = P(r)\sin n\vartheta e^{i\omega t}$. Для функции $P(r)$ получим обобщенное уравнение Бесселя, его решение выражается через функции Ханкеля.

В результате находим давление жидкости и искомое выражение реакции жидкости на колебания в ней оболочки

$$\underline{q}^{Ж}(\vartheta,t)=-\tilde{p}\big|_{r=R}\underline{n}=-\frac{\rho_0 c\omega}{\dot{H}_n^{(2)}\left(\frac{\omega R}{c}\right)}H_n^{(2)}\left(\frac{\omega R}{c}\right)U_n\sin n\vartheta e^{i\omega t}\,\underline{n}\,. \tag{7}$$

Реакция жидкости оказалась линейной относительно амплитуды смещения оболочки и нелинейной относительно частоты.

Далее для нахождения собственных частот оболочки найденная реакция подставляется в уравнения равновесия оболочки. Используются уравнения нового варианта классической теории оболочек [1].

В силу сложности уравнений колебания и граничных условий, собственные частоты могут быть найдены только численно. В системе компьютерной математики Maple 6 была написана программа по нахождению этих частот.

В табл. 1 сведены результаты расчета первых трех собственных частот оболочки, закрепленной на одном крае и свободном на другом. Длина оболочки $l=100$ м, радиус $R=3$ м, толщина $h=0.3$ м, материал – сталь с модулем Юнга $E=2.1\cdot10^{11}$ Н/м^2, коэффициентом Пуассона $\nu=0.28$ и плотностью $\rho_*=7800$ кг/м^3. Скорость звука в жидкости $c=1500$ м/с, плотность жидкости $\rho_0=1028$ кг/м^3.

Таблица 1.

n = 1	Собственные частоты	
	“Сухая” оболочка, Гц	Оболочка в жидкости, Гц
1	0.61	$0.47 + 6\cdot10^{-6}\,i$
2	3.71	$2.90 + 0.001\,i$
3	9.89	$7.65 + 0.02\,i$

Расчет показал, в частности, что идеальная сжимаемая жидкость не только изменяет инерционные свойства оболочки, но и демпфирует колебания.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.