

УДК 539.3

А.Н.Левандовский (4 курс, каф. МиПУ), Д.С.Михалюк, асс., А.И.Боровков, к.т.н., проф.

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БУССИНЕКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МНОГОУРОВНЕГО СУБМОДЕЛИРОВАНИЯ

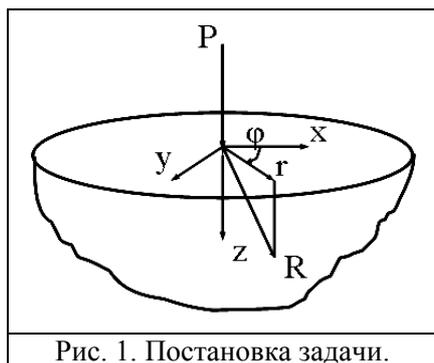


Рис. 1. Постановка задачи.

Целью настоящего исследования является получение решения задачи Буссинэка [1] и результатов, приведенных в работе [2], с помощью метода конечных элементов. В задаче Буссинэка требуется найти напряженно-деформированное состояние (НДС), возникающее при нормальном нагружении упругого полупространства сосредоточенной силой  $P$  (рис. 1). В [2,3] можно найти подробное аналитическое решение, которое является сингулярным, т.е. выражения для напряжений и перемещений имеют особенности вида  $r^{-1}$  и  $r^{-2}$ . В работе [2] особый интерес представляют полученные

зависимости знаков радиального перемещения, радиального и окружного напряжения от угла, отсчитываемого от линии действия силы  $P$  (рис. 1): поверхности смены знаков (далее – “поверхности”) вышеупомянутых величин образуют конусы с вершиной в точке приложения нагрузки.

Для проведения численного анализа в программной системе *ANSYS* [4] разработана многоуровневая КЭ модель, учитывающая осевую симметрию задачи (используется осесимметричный восьмиузловой элемент).

Метод многоуровневого субмоделирования – *multilevel submodeling* [4] – применен в настоящем исследовании для уточнения грубого решения в зоне сингулярности напряжений путём рассмотрения отдельной задачи для этой области. Причём в качестве граничных условий используется интерполяция перемещений узлов грубой модели на точки, соответствующие узлам суб-модели.

В рассматриваемой задаче при построении КЭ макромодели её размеры определялись компонентами тензора напряжений: вдали от точки  $P$  они должны быть достаточно малыми по модулю и гладкими функциями от  $R$ . Бесконечное полупространство моделировалось цилиндром высотой  $1\text{ м}$  и радиусом  $2.6\text{ м}$ , так как при дальнейшем увеличении линейных размеров модели значения напряжений меняются менее чем на  $1\%$  (рис. 3, 4). Уже на первом шаге решения, при рассмотрении макромодели, для точек, удалённых от места приложения силы  $P$  на  $0.025 - 0.25\text{ м}$  были получены результаты, отличающиеся от аналитических на  $1 - 5\%$  (рис. 5, 6).

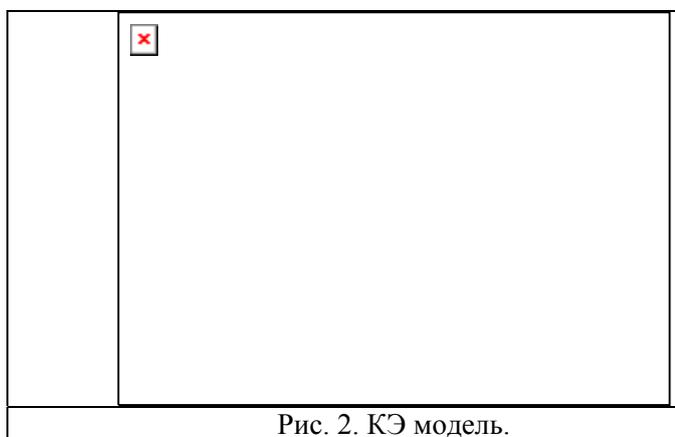


Рис. 2. КЭ модель.

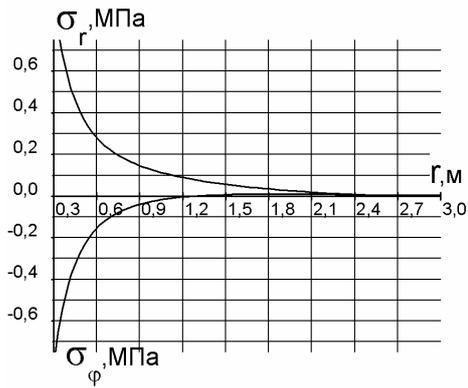


Рис. 3.  $\sigma_r, \sigma_\phi$  на дневной поверхности.

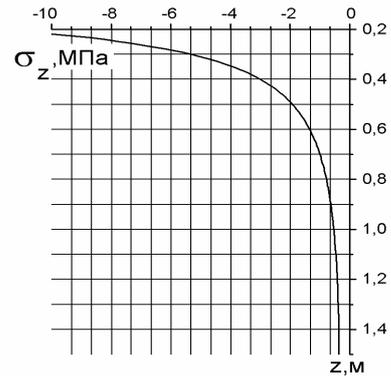


Рис. 4.  $\sigma_z$  под точкой приложения силы.

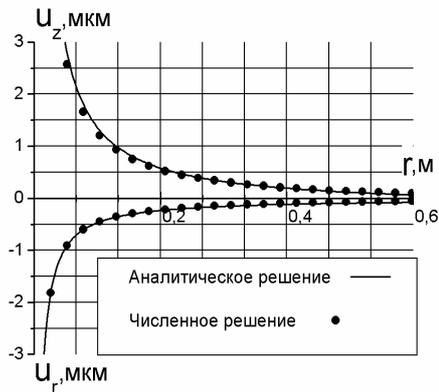


Рис. 5. Перемещения  $u_z, u_r$  на дневной поверхности  $z = 0$ .

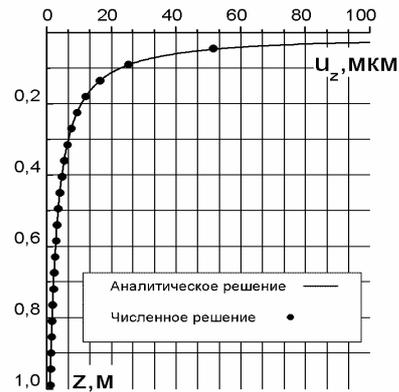


Рис. 6. Вертикальные перемещения  $u_z$  под точкой приложения силы.

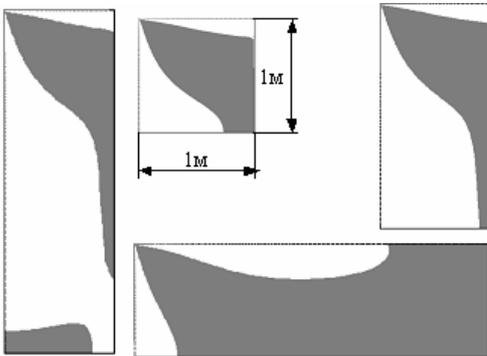


Рис. 7. Знак напряжений  $\sigma_z$  на разных моделях.

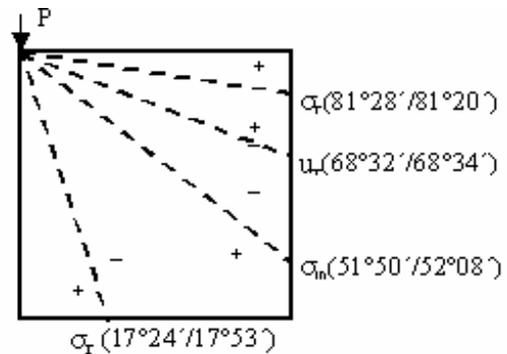


Рис. 8. Конусы характеристик напряженно-деформированного состояния.

Также на этом этапе были получены поверхности на моделях разной ширины и высоты (при этом была косвенно подтверждена правильность сделанного ранее выбора размеров модели). Однако оказалось, что они имеют форму конусов только вблизи точки приложения силы, и уже на расстоянии  $0.5 - 1$  м значительно деформируются (рис. 7).

Таким образом, поверхности, полученные на макромодели в зоне приложения нагрузки (именно там эти поверхности являются конусами и представляют наибольший интерес), нуждаются в уточнении из-за недостаточной густоты КЭ сетки; возникает необходимость применения метода *submodeling*. Результаты, представленные на рис. 8, получены для sub-модели размеров  $1 \times 1$  м с предварительным расчётом грубой модели  $6 \times 13$  м.

На рис. 8 в скобках первое число обозначает теоретическое значение соответствующего угла, второе – численное. Разность между ними не превышает 3%. Таким образом, с

использованием метода *submodeling* получены конусы вблизи точки приложения силы  $P$ , практически совпадающие с конусами, полученными в аналитическом решении. В то же время с использованием МКЭ для области конечных размеров получены поверхности, отличные от конических на удалении от точки приложения силы  $P$ .

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Boussinesq J.V. Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solids elastiques. Paris, 1885.
2. Евтушенко А.А. Проверка принципа Сен-Венана при нормальном нагружении полупространства: Бакалавр. раб., научн. рук. к.ф.-м.н., доц. В.А. Пупырев / СПбГПУ - СПб, 2003.
3. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970.
4. ANSYS Theory Reference. ANSYS Inc., Canonsburg, PA. USA. Eleventh edition. 1999. 1286 p.