XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.54-55

УДК 539.3

В.В.Меркушев (асп., каф. МПУ), А.И.Боровков, к.т.н., проф.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАКРОСКОПИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ. 1. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ КОМПОЗИТОВ С МОНОКЛИННОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ

Композиционные материалы (композиты) представляют собой материалы, состоящие из двух или нескольких компонентов с отчетливо выраженными поверхностями сопряжения и различными физико-механическими свойствами. Одной из важнейших проблем в механике композиционных материалов является задача о нахождении эффективных (эквивалентных, макроскопических) свойств.

Рассмотрим композит, который имеет только одну плоскость упругой симметрии, т.е. упругие свойства материала не изменяются вдоль одной оси (OZ). Рассматриваемый материал принадлежит к классу моноклинных композитов. Подставив в обобщенный закон Гука для общего случая анизотропного материала [1] осредненные значения полей микронапряжений и микродеформаций, получим эффективные определяющие соотношения для моноклинного композита:

$$E_1^*\langle\varepsilon_{11}\rangle=\langle\sigma_{11}\rangle-\nu_{12}^*\langle\sigma_{22}\rangle-\nu_{13}^*\langle\sigma_{33}\rangle+\eta^*{}_{12,1}\langle\sigma_{12}\rangle$$
$$E_2^*\langle\varepsilon_{22}\rangle=\langle\sigma_{22}\rangle-\nu_{21}^*\langle\sigma_{11}\rangle-\nu_{23}^*\langle\sigma_{33}\rangle+\eta^*{}_{12,2}\langle\sigma_{12}\rangle$$
$$E_3^*\langle\varepsilon_{33}\rangle=\langle\sigma_{33}\rangle-\nu_{31}^*\langle\sigma_{11}\rangle-\nu_{32}^*\langle\sigma_{22}\rangle+\eta^*{}_{12,3}\langle\sigma_{12}\rangle$$
$$G_{23}^*\langle\gamma_{23}\rangle=\mu^*_{31,23}\langle\sigma_{13}\rangle+\langle\sigma_{23}\rangle$$
$$G_{13}^*\langle\gamma_{13}\rangle=\langle\sigma_{13}\rangle+\mu^*_{23,31}\langle\sigma_{23}\rangle$$
$$G_{12}^*\langle\gamma_{12}\rangle=\eta^*{}_{1,12}\langle\sigma_{11}\rangle+\eta^*{}_{2,12}\langle\sigma_{22}\rangle+\eta^*{}_{3,12}\langle\sigma_{33}\rangle+\langle\sigma_{12}\rangle$$

Уравнения содержат *20* так называемых “технических констант”, некоторые из них связаны между собой следующими соотношениями:

$$E_i^*\nu_{ji}^*=E_j^*\nu_{ij}^* \quad i,j=1..3$$
$$E_k^*\eta_{k,12}^*=G_{12}^*\eta_{12,k}^* \quad k=1..3$$

что сводит число независимых констант до *13;* E_1, E_2, E_3 – модули Юнга при растяжении-сжатии в направлениях осей x, y, z; G_{12}, G_{23}, G_{31} – модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным; ν_{12}, ν_{23}, ν_{31}, ν_{21}, ν_{31}, ν_{13} – коэффициенты Пуассона, характеризуют сокращение в направлении одной оси при растяжении в направлении другой; $\mu_{31,23}$, $\mu_{23,31}$ – коэффициенты Ченцова, характеризуют сдвиги в плоскостях, параллельных координатным, вызванные касательными напряжениями; $\eta_{12,1}$, $\eta_{12,2}$, $\eta_{12,3}$ – коэффициенты взаимного влияния первого рода, характеризуют удлинения в направлениях осей координат, вызванные касательными напряжениями, действующими в координатных плоскостях; $\eta_{1,12}$, $\eta_{2,12}$, $\eta_{3,12}$ – коэффициенты взаимного влияния второго рода, выражают сдвиги в координатных плоскостях от нормальных напряжений, действующих в направлении осей координат. Такая развернутая система технических констант для общего случая анизотропного тела была предложена А.Л.Рабиновичем [2].

Для определения эффективных упругих характеристик материала применим метод прямой гомогенизации [3] – решим серию задач для представительного элемента объема композита: растяжение вдоль оси OX, растяжение вдоль оси OY, поперечный сдвиг в плоскости OXY (плоская деформация), продольный сдвиг в плоскости OXZ, продольный сдвиг в плоскости OYZ (антиплоская деформация). Используя приведенные выше эффективные определяющие соотношения, соотношения между техническими константами и средние значения полей микронапряжений, полученные в результате решения серии задач, составим систему уравнений относительно эффективных упругих характеристик. Эффективный модуль Юнга в направлении оси OZ определим по правилу смесей.

Для нахождения истинных значений эффективных упругих характеристик будем решать задачу нахождения эффективных характеристик для нескольких моделей композита (*50-200* реализаций), сохраняя объемную концентрацию включений постоянной во всех реализациях. Истинные значения эффективных упругих характеристик найдем на основе метода Монте-Карло [4]. Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a: $M(X)=a$. Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений X; вычисляют их среднее арифметическое $\bar{x}$ и принимают его в качестве оценки (приближённого значения) a^* искомого числа a:

$$a \simeq a^* = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Таким образом, применив метод Монте-Карло к результатам решения задачи для n моделей, получим истинные значения эффективных упругих характеристик для композита с моноклинной микроструктурой.

Разработанный метод позволяет определять эффективные упругие характеристики макроскопически анизотропных композитов с моноклинной структурой и существенно приближает расчетную модель к реальному материалу.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977.
2. Рабинович А.Л. Об упругих постоянных и прочности авиационных материалов // Тр. ЦАГИ, №582, 1946, 1-56.
3. Borovkov A.I. et al. Finite Element Analysis of Effective Mechanical and Thermal Characteristics of Micro Heterogeneous Superconducting Toroidal Field Coils // IEEE Transactions on Magnetics. 1992. V.28. N 1. 927-930.
4. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1972.