XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.76-77

СЕКЦИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТАМАТИКА»

УДК 519.632.4

А.Сальгадо (5 курс, каф. ПМ), В.Г.Корнеев, д.ф.-м., проф.

ПРОВЕРКА ОЦЕНОК АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ключевым шагом для получения оценок ошибки метода конечных элементов (МКЭ) является построение оценок для ошибки интерполяции на каждом элементе. Как известно (см. [1,2]), в простейшем случае (т.е. если коэффициенты матрицы жесткости и вектора нагрузок вычислены точно, вычислительная область Ω_h совпадает с исходной областью Ω, главные краевые условия точно аппроксимируются и решение достаточно гладкое) ошибку метода конечных элементов в энергетической норме $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ можно оценить следующим образом

$$\|u-u_h\|_{\mathrm{E}} \le \|u-\prod u\|_{\mathrm{E}},$$

где u - точное решение задачи, u_h - МКЭ решение и $\prod u$ - проекция u в пространство конечных элементов. Оценку ошибки интерполяции на каждом элементе можно свести к нахождению оценки ошибки на базисном элементе и формулированию условий, гарантирующих сохранение этой оценки на реальном элементе.

Оценка ошибки интерполяции на каждом элементе сводится к оценке ошибки на базисном элементе, если выполняются условия квазиоднородности (масштабирования). Для криволинейных элементов высоких порядков условия квазиоднородности были рассмотрены в [2-4] для симплициальных, и в [2-5] для элементов, ассоциированных с кубом.

В данной работе излагается простой способ масштабирования криволинейных элементов ассоциированных с кубом. Оказываются более простыми как условия квазиоднородности, как и доказательство с их использованием оценок ошибки интерполяции.

Определим множество функций $Q_k = P_k \otimes P_k$, где P_k - множество полиномов степени $k \in N$, кроме того, рассмотрим множество мультииндексов длины k, $K = \{(k,0),(0,k)\}$. Тогда для фактор-пространства $\mathbf{Q} = W_2^{k+1}(\Omega)/Q_k$ можно доказать, что существует постоянная C такая, что

$$\sum_{\gamma\in K}\|D^\gamma u\|_{2,\Omega} \le \|\langle u\rangle\|_{\mathbf{Q}} \le C\sum_{\gamma\in K}\|D^\gamma u\|_{2,\Omega}, \quad \forall u \in W_2^{k+1}(\Omega), \tag{1}$$

где $\langle u\rangle$ - класс эквивалентности элемента u, $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}$ - естественная норма в фактор-пространстве. Из этого следует, что полунорма $[u]_{k+1,2,\Omega} = \max_i \left\{\left\|\partial^{k+1}u/\partial x_i^{\,k+1}\right\|_{2,\Omega}\right\}$ есть норма в рассматриваемом фактор-пространстве, и она эквивалентна исходной норме.

На базисном элементе $\tau_0 = (-1,1)^2$ рассмотрим оператор интерполяции на Q_k. Обозначим его $\hat{\Pi}$, тогда можно доказать, что $\left\|\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}\right\|_{1,2,\tau_0} \le C[\hat{u}]_{k+1,2,\tau_0}$. На реальном элементе τ, эквивалентном τ_0 посредством билинейного отображения X, оператор интерполяции Π определяется условием $(\Pi u)^{\wedge} = \hat{\Pi}\hat{u}$. При достаточно общих предположениях, с помощью (1) можно получить, что

$$|u - \Pi u|_{1,2,\tau} \le C\sqrt{\frac{\sup\limits_{\tau_0}|J_X|}{\inf\limits_{\tau_0}|J_X|}}\left\|DX^{-1}\right\|_{\tau}\left[DX\right]_{\tau_0}^{k+1}\|u\|_{k+1,2,\tau}, \tag{2}$$

где $\left\|DX^{-1}\right\|_{\tau}^2 = \sup\limits_{\tau}\sum\limits_{i,j}\left|\frac{\partial X_j^{-1}}{\partial x_i}\right|^2$ и $\left[DX\right]_{\tau_0} = \sup\limits_{\tau_0}\max\limits_{i,j}\left|\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j}\right|$. В этом случае ошибка интерполяции будет порядка $O(h^k)$, где h - любая геометрическая характеристика реального элемента.

Предположим, что у нас есть элемент τ порядка k с криволинейными сторонами, который эквивалентен базисному посредством отображения X. Предположим, что это отображение можно представить в виде

$$X = Y \circ Z, \tag{3}$$

где отображение Y^{-1} спрямляет стороны элемента τ и переводит его в элемент $\tilde{\tau}$, а отображение $Z : \bar{\tau}_0 \to \bar{\tilde{\tau}}$ является билинейным. Тогда если все производные отображений Y и Y^{-1} до порядка $k+1$ включительно ограниченные некоторой константой C, независящей от h, то ошибку интерполяции на этом элементе с помощью (2) можно оценить как

$$\left|\tilde{u} - \tilde{\Pi}\tilde{u}\right|_{1,2,\tilde{\tau}} \le C_1 h^k \|\tilde{u}\|_{k+1,2,\tilde{\tau}} \le C_2 h^k \|u\|_{1,2,\tau} = O(h^k).$$

До данной работы (насколько известно авторам) оценки ошибки интерполяции с помощью факторизации отображения в базисный элемент вида (3) были получены только для случая, когда отображение Z аффинное. Главные преимущества этого подхода это то, что для справедливости оценок необходимы только условия квазиоднородности для билинейных элементов (они хорошо известны, [4]) и гладкость отображений Y и Y^{-1}, которую легко удовлетворить.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Becker E. Carey G. Oden T. Finite elements, an introduction. Vol I. Prentice Hall Inc. USA 1981.
2. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Л 1977.
3. Ciarlet P.G. Raviart P.A. Arch Rational Mech. Anal. 46 (1972) 177-199.
4. Ciarlet P.G. Lions E. Editors. Handbook of numerical analysis. Vol II: Finite element methods. Elsevier science ltd. USA 1991.
5. Ciarlet P.G. Raviart P.A. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1 (1971) 217-249.