XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.115-116

СЕКЦИЯ «ТЕПЛОФИЗИКА»

УДК 532.5:51

А.Н.Лобанов (6 курс, каф. КТиЭТ), В.А.Талалов, к.т.н., доц.

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ДВУМЕРНОЙ МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ

В настоящее время при обращении к теме моделирования процессов речь идет о решении трехмерных пространственных задач (в том числе нестационарных). Создано множество программных пакетов на основе метода конечных объемов и конечных элементов. Из конечно-разностных методов на практике чаще обращаются к итерационным методам, забывая о прямых методах. При наличии в литературе развернутой информации по итерационным методам довольно сложно найти информацию о прямых методах. В источниках, таких как [1], есть общие данные и, самое большее, определения методов для решения двумерных задач.

Целью данной работы являлась адаптация прямого метода, разработанного для решения двумерной пространственной задачи, к решению трехмерной.

Для рассмотрения была выбрана трехмерная стационарная задача теплопроводности, модифицированный метод Томаса (метод двумерной матричной прогонки) для ее решения и девятиточечная конечно-разностная схема для моделирования трехмерной области

Выбранный метод является прямым, а, значит, решает дифференциальное уравнение путем его перевода в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) конечно-разностных (КР) аналогов. Рассматриваемая область представляется сеткой, каждый узел которой сохраняет свойства области в данной точке.

Рассмотрим трехмерную задачу. Для каждого узла справедливо алгебраическое уравнение

$$ax_{ijk}\,T_{i+1jk} + ay_{ijk}\,T_{ij+1k} + az_{ijk}\,T_{ijk+1} + b_{ijk}\,T_{i+1jk} + cx_{ijk}\,T_{i+1jk} + cy_{ijk}\,T_{ij+1k} + cz_{ijk}\,T_{ijk+1} = d_{ijk}\quad, \tag{1}$$

где T – узлы сетки искомого температурного поля, ax, ay, az, b, cx, cy, cz, d – КР коэффициенты. Для реализации алгоритма Томаса рассматриваем систему как:

$$MT = D\quad, \tag{2}$$

где M – матрица КР коэффициентов, T – вектор решений размером (i×j×k), D – вектор свободных слагаемых СЛАУ также размером (i×j×k). Матрица M – блочная трех диагональная матрица, имеющая следующую структуру

$$
M = \begin{pmatrix}
B_{1jk} & CX_{1jk} & & & & & \\
AX_{2jk} & B_{2jk} & CX_{2jk} & & & 0 & \\
 & . & . & . & & & \\
 & & AX_{ijk} & B_{ijk} & CX_{ijk} & & \\
 & & & . & . & . & \\
 & 0 & & & AX_{n-1jk} & B_{n-1jk} & CX_{n-1jk} \\
 & & & & & AX_{njk} & B_{njk}
\end{pmatrix}. \qquad (3)
$$

Для решения системы необходимо определить вид матриц AX, CX и B. Матрица AX (аналогично CX) – блочная диагональная матрица:

$$
AX\big|_{i=const} = \begin{pmatrix}
AX'_{(i)1k} & & & & \\
 & . & & 0 & \\
 & & AX'_{(i)jk} & & \\
 & 0 & & . & \\
 & & & & AX'_{(i)nk}
\end{pmatrix}_{i=const}, \qquad (4)
$$

где блоки AX’(CX’) – диагональные матрицы. Матрица B – трехдиагональная блочная матрица вида (3), в которой матрицы AY и CY – диагональные матрицы, а на главной диагонали матрицы B стоят трехдиагональные матрицы B’:

$$
B'\big|_{i,j=const} = \begin{pmatrix}
b_{(ij)1} & cz_{(ij)1} & & & & & \\
az_{(ij)2} & b_{(ij)2} & cz_{(ij)2} & & & 0 & \\
 & . & . & . & & & \\
 & & az_{(ij)\,k} & b_{(ij)\,k} & cz_{(ij)\,k} & & \\
 & & & . & . & . & \\
 & 0 & & & az_{(ij)n-1} & b_{(ij)n-1} & cz_{(ij)n-1} \\
 & & & & & az_{(ij)n} & b_{(ij)n}
\end{pmatrix}_{i,j=const}.
$$

Подставив эти матрицы в выражение для AX, CX и B, получаем их полную запись. Матрицы AX и CX остаются диагональными, матрица B становится пятидиагональной, размером $(j\times k)^2$. Для их обработки потребуется, как минимум, несколько массивов памяти размером $(i\times(j\times k)^2)$ и векторов размером $(i\times j\times k)$. Это плата за точность и скорость решения прямым методом. Но необходимо учитывать и другую более важную проблему, которая может свести преимущества прямого метода к нулю – в процедурах матричной арифметики большинство операций будет совершаться с нулевыми элементами матриц, что приведет к потере времени на общий расчет. Для оправданного использования необходима оптимизация.

Алгоритм оптимизации очевиден при рассмотрении матриц как блочных. Диагональные матрицы можно хранить как вектора $(i\times j\times k)$, трех диагональные матрицы как три вектора размером $(i\times j\times k)$ каждый. Соответственно преобразуются процедуры матричной арифметики (самая сложная из которых для оптимизации – процедура обращения матрицы)

После оптимизации нам необходимо всего два массива памяти размером $(i\times j\times k\times 5)$ и несколько массивов размером $(j\times k\times 1)$. И ни одной лишней арифметической операции.

Далее подставляем полученные матрицы в алгоритм двумерной матричной прогонки Томаса и получаем искомое трехмерное поле.

Таким образом, можно сделать следующие выводы о характеристиках рассматриваемого алгоритма:

- недостатки – большие затраты оперативной памяти, отставание по скорости расчета в задачах с малыми градиентами полей свойств объекта и, следовательно, искомого поля в сравнении с итерационными методами
- преимущества – полностью прямой метод, превосходство по скорости и точности над итерационными методами при решении задач с большими градиентами полей свойств объекта или задач с фазовыми переходами в 3-х мерной области, перспектива решения системы дифференциальных уравнений как единого целого.

Планируется реализация этого алгоритма в программном пакете и дальнейшее его тестирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1,2. М., «Мир», 1991.