XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.129-130

УДК 532.516

Д.Р.Магидов (асп., каф. ГАД), М.Х.Стрелец, д.ф.-м.н., проф.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОСРЕДНЕННЫХ ПО РЕЙНОЛЬДСУ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Во многих практических областях, связанных с течением жидкости и газа, существенный интерес представляет такое явление как переход к нестационарному режиму и возникновение колебаний.

Одним из возможных путей определения возможности перехода течения к нестационарному режиму является анализ его восприимчивости к малым возмущениям, то есть решение задачи линейной теории устойчивости. Существенным достоинством такого подхода является возможность определить ряд характеристик нестационарного течения при вычислительных затратах, сравнимых с затратами на получение стационарного решения.

В данной работе анализ устойчивости течений осуществляется на основе подхода, в рамках которого численно решаются уравнения для малых возмущений стационарного численного решения уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа. Такой подход позволяет рассматривать как ламинарные, так и турбулентные двумерные течения. Суть реализованного метода состоит в следующем.

Пусть вектор основных переменных $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, T, \nu_t\}$ является решением нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа, замкнутых с помощью модели турбулентности Спаларта-Алмараса [1] (URANS-SA). Далее, пусть вектор $\overline{\mathbf{q}} = \{\overline{\rho}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{T}, \overline{\nu}_t\}$ является стационарным решением этой системы уравнений, то есть, $\partial\overline{\mathbf{q}}/\partial t = 0$. Тогда $\overline{\mathbf{q}}$ удовлетворяет соответствующей стационарной системе уравнений (RANS-SA).

Пусть $\mathbf{q}' = \{\rho', u', v', T', \nu_t'\}$ – малое возмущение к стационарному решению $\overline{\mathbf{q}}$. Подставим $\mathbf{q} = \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q}'$ в систему уравнений URANS-SA, пренебрежем нелинейными относительно $\mathbf{q}'$ членами и вычтем из полученной системы систему уравнений RANS-SA. В результате получим систему линейных относительно возмущений дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + L \cdot \mathbf{q}' = 0 , \qquad (1)$$

где $L = L(\overline{\mathbf{q}})$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка.

Рассмотрим гармоническое представление для возмущений $\mathbf{q}' = \mathbf{q}'' \cdot \exp(i\omega t)$, где $\mathbf{q}''$ и ω – амплитуда и частота, соответственно. В общем случае $\mathbf{q}''$ и ω – комплексные величины. Подставляя данное представление в (1), получаем окончательную систему уравнений для амплитуд возмущений $\mathbf{q}''$ в виде

$$i\omega\,\mathbf{q}'' + L(\overline{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{q}'' = 0 . \qquad (2)$$

Система уравнений (2) с соответствующими линеаризованными граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора $L(\overline{\mathbf{q}})$.

Пусть уравнения RANS-SA решаются на некоторой разностной сетке с общим количеством узлов N. Введем одномерную (“общую”) нумерацию узлов:

$$n = 1,...,N\,. \qquad (3)$$

Пусть вектор $\mathbf{a}''$ – конечно-разностный аналог поля амплитуд возмущений. Тогда, используя общую нумерацию узлов (3), имеем

$$\mathbf{a}'' = [\rho''_1, u''_1, v''_1, T''_1, v''_{t1}, ..., \rho''_n, u''_n, v''_n, T''_n, v''_{tn}, ..., \rho''_{N_p}, u''_{N_p}, v''_{N_p}, T''_{N_p}, v''_{tN_p}]^T\,. \qquad (4)$$

Конечно-разностная аппроксимация системы (2) с соответствующими граничными условиями могут быть представлены в следующей матричной форме:

$$(i\omega I + S)\cdot \mathbf{a}'' = 0\,, \qquad (5)$$

где матрица S является аппроксимацией дифференциального оператора $L(\overline{\mathbf{q}})$ на рассматриваемой сетке.

Конкретная форма матрицы S зависит от аппроксимации производных по пространству в дифференциальном операторе $L(\overline{\mathbf{q}})$. В данной работе стационарные уравнения RANS-SA решались с использованием схемы Роу третьего порядка [2] для невязких потоков и центрально-разностной схемы второго порядка для вязких и тепловых потоков. Конвективные члены в модели Спаларта-Алмараса аппроксимировались противопоточной схемой первого порядка.

Окончательно, выражение (5) представляет собой матричную задачу на собственные значения, решение которой позволяет определить возможность возникновения нестабильных колебаний в рассматриваемом течении.

Результаты решения задач устойчивости для ламинарного обтекания цилиндра и турбулентного трансзвукового обтекания крылового профиля NACA0012 хорошо совпадают с экспериментальными данными. Таким образом, можно сделать вывод о применимости данного подхода и обоснованности дальнейшего исследования его возможностей.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Spalart P.R., Allmaras, S.R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAA Paper, 1992, AIAA-92-0439.
2. Roe P. L. Approximate Rieman Solvers. Journal of Computations Phys., 1981, Vol. 43, pp. 357-378.