XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.132-133

УДК [534-8:534.28:534.222]::004.942

Б.Н.Цветков (5 курс, каф. ГАД)
П.А.Войнович, к.ф.-м.н., зам. дир. СПб Филиала МСЦ РАН

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБРАЩЕНИЯ ВОЛНОВОГО АКУСТИЧЕСКОГО ФРОНТА В МАГНИТОСТРИКЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ

В настоящей работе исследуется точность численного метода, предназначенного для моделирования явления обращения волнового фронта (ОВФ) ультразвукового сигнала в акустически-активном материале.

Под ОВФ понимается такое преобразование волнового поля, при котором направление распространения волн меняется на противоположное с сохранением первоначального пространственного распределения амплитуд и фаз. В отличие от обычного зеркального отражения, соответствующего инверсии одной из пространственных координат, ОВФ представляет собой преобразование инверсии времени. Принципиальная возможность его реализации обеспечивается инвариантностью уравнений волнового поля в прозрачной среде по отношению к изменению знака времени.

ОВФ может применяться в физических исследованиях, неразрушающем контроле, технологии и медицине.

Основу используемой математической модели составляют так называемые уравнения эластодинамики, записанные в форме интегральных законов сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V Q dv = \int_S (Fn_x + Gn_y) ds,$$

где n_x, n_y – декартовы проекции вектора нормали к поверхности S, ограничивающей объем V, а векторы зависимых переменных Q и потоков F, G имеют следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho U_x \\ \rho U_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \rho c_1^2 U_x \\ \rho c_2^2 U_y \\ \rho c_3^2 U_x \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \rho c_3^2 U_y \\ \rho c_2^2 U_x \\ \rho c_1^2 U_y \end{pmatrix}.$$

Первые два уравнения системы представляют собой уравнения сохранения импульса. Остальные уравнения получены дифференцированием по времени уравнений обобщенного закона Гука. С помощью теоремы Остроградского-Гаусса объемные интегралы затем преобразуются в поверхностные.

Для численной реализации модели применяется широко используемая в вычислительной газовой динамике схема Годунова повышенного порядка аппроксимации по пространству и времени. Схема записывается в расщепленной форме на равномерной декартовой сетке в двух пространственных измерениях.

На границах расчетной области ставятся условия симметрии с использованием двойного слоя фиктивных ячеек, окружающих расчетную область.

Для анализа точности численной реализации конвективных операторов поставлена следующая одномерная задача. В двух приграничных ячейках формируется начальное гармоническое возмущение длительностью $3T$ (три периода), затем делается несколько шагов по времени (в нашем случае – 10), чтобы сформированное возмущение отошло от границы. Полученное решение принимается в качестве исходного. В ячейках, использовавшихся для первоначального формирования волнового пакета, значения зависимых переменных обнуляются, чтобы исключить «расплывание» волнового пакета. Затем выполняются повторяющиеся циклы из N шагов по времени, смены знака у скоростей деформаций U и еще N шагов по времени. В результате, за вычетом вычислительной погрешности, получаем исходное решение. Повторяя достаточное число таких циклов, можно достичь заданных эффективных значений времени либо дистанции распространения сигнала.

Данный подход дает возможность ограничить размеры расчетной области для анализа вычислительной погрешности и исследовать погрешность в широком диапазоне отношения длины волны к пространственному шагу сетки. Относительная погрешность определяется как

$$\delta = \max_i((W_i - W_{i0}) / \max_i W_{i0}),$$

где W_i – текущее значение какой-либо переменной в ячейке i , а W_{i0} – ее исходное значение в той же точке сетки.

В результате расчетов получены следующие результаты.

Основную долю погрешности конвективного оператора составляет схемная диссипация.

Эффективный порядок аппроксимации конвективных операторов, вычисленный по максимумам погрешности скорости деформации, составил 1,45. Причиной снижения регистрируемого порядка аппроксимации по сравнению с теоретическим значением 2 являются высокочастотные возмущения на краях волнового пакета.

Среднее значение эффективного порядка аппроксимации схемы для середины волнового пакета составляет 1,89.

В зависимости от значения коэффициента сжатия в ограничителе потоков эффективный порядок аппроксимации схемы составил от 1.85 до 2, что представлено в табл. 1.

Таблица 1.

Коэффициент сжатия в ограничителе потоков	Эффективный порядок аппроксимации схемы
1,0	1,85
1,5	2,00
2,0	1,89