XXXIV Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции.
Ч.IV: С.85-86, 2006.

УДК 517.956

А.Б.Гульцева (5 курс, каф. ПМ), Ю.К.Шиндер, к.ф.-м.н., доц.

ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ГАЗОВОЙ СМАЗКИ

Асимптотический аналог уравнения Рейнольдса газовой смазки широко применяется в расчётах, поэтому исследование связанных с ним математических проблем является крайне актуальным.

Уравнение Рейнольдса теории газовой смазки описывает распределение давления в смазочном слое опорного газодинамического узла. Опорные узлы с газовой смазкой широко применяются в различных областях техники и имеют ряд преимуществ по сравнению с другими типами опорных узлов, поэтому их теоретическое исследование имеет важное значение.

Часто геометрия смазочного слоя имеет периодическую микроструктуру, период которой много меньше характерного размера узла. В этом случае применение для расчета методов конечных разностей или конечных элементов может потребовать использования слишком густых сеток, так как размеры сеточных ячеек должны быть много меньше периода профиля. Одним из выходов в данной ситуации является использование так называемых асимптотических методов, основанных на том, что вместо исходного уравнения с быстро меняющимися коэффициентами решается другое уравнение (называемое асимптотическим аналогом исходного), коэффициенты которого меняются медленно, а решение в определенном смысле близко к решению исходного уравнения.

Целью работы является, во-первых, доказательство существования и единственности решения краевой задачи для асимптотического аналога уравнения Рейнольдса, а во-вторых, построение примера, иллюстрирующего возможность существования более одного решения асимптотического уравнения Рейнольдса с периодическими краевыми условиями.

Уравнение Рейнольдса (случай сжимаемой смазки) с граничными условиями имеет вид:

$$div\left(h^3 p\nabla p - \Lambda hp\underline{v}\right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad p\big|_{\partial\Omega} = 1,$$

где h – толщина смазочного слоя, нормированная по своей минимальной величине, p – давление в газовом слое, отнесенное к давлению во внешней среде p_a, Λ>0 – число сжимаемости (включает в себя некоторые геометрические и физические параметры задачи), $\underline{v}$ – вектор скорости одной из смазываемых поверхностей, нормированный по характерной скорости V_0 (при этом другая поверхность предполагается неподвижной).

В первой части работы кратко приведен вывод асимптотического уравнения Рейнольдса с помощью метода двухмасштабной сходимости (использовались [1] и [2]). Получаем краевую задачу для усредненного уравнения Рейнольдса следующего вида:

$$\begin{cases} div(p\underline{\underline{Q}} \cdot \nabla p - \Lambda p\underline{\underline{R}} \cdot \underline{v}) = 0 \quad \text{в } \Omega \\ p\,|_{\partial\Omega} = 1, \end{cases}$$

где компоненты $\underline{\underline{Q}}$ и $\underline{\underline{R}}$ вычисляются по формулам:

$$Q_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y h^3(x,y)\left(\delta_{ij} + \frac{\partial w_j}{\partial y_i}\right)dy; \qquad R_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y h(x,y)\left(\delta_{ij} + \frac{\partial w_j}{\partial y_i}\right)dy,$$

где w_j является Y-периодическим решением уравнения: $div_y(h^3(x,y)\nabla_y w_j) = -\dfrac{\partial h^3}{\partial y_j}$, $j=1,2$

Во второй части сформулирована краевая задача Дирихле для асимптотического уравнения и доказано существование и единственность классического решения этой задачи при некоторых дополнительных предположениях относительно коэффициентов уравнения. Для этого сначала проводится регуляризация задачи, чтобы сделать уравнение эллиптическим, независимо от знака неизвестной функции. После этого к задаче уже можно применять теорию разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений [3,4].

В заключительной части работы строится пример неединственности решения асимптотического уравнения в случае периодических краевых условий по одной переменной. Рассматриваем асимптотическое уравнение Рейнольдса (1) в прямоугольной области Ω с краевыми условиями, одно из которых является периодическим. На Рис. 1. изображена структура микропрофиля, который нанесен на несущую поверхность газодинамического узла. Ищем решение задачи в виде $p = p(x_2)$. Тогда уравнение (1) переписывается следующим образом:

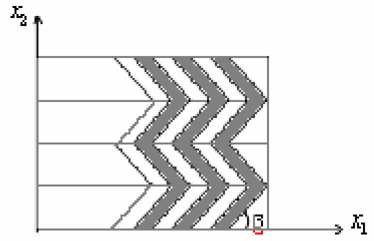

Рис. 1. Микропрофиль

$$\frac{d}{dx_2}\left[p\left(Q_{22}\frac{dp}{dx_2} - \Lambda R_{21}v_0 \right)\right] = 0\,.$$

Задаем конкретное значение скорости движения одной из смазываемых поверхностей, считаем, что канавки микропрофиля имеют прямоугольный вид. При этих, а также некоторых других предположениях удается построить сразу несколько решений, удовлетворяющих уравнению и краевым условиям (рис. 2-4).

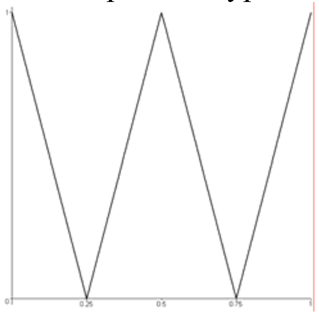

Рис. 2. $p_1(x_2)$

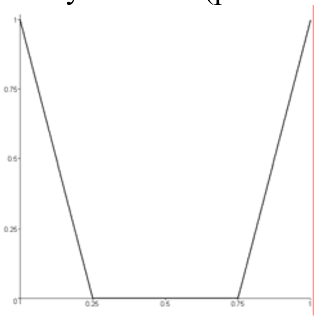

Рис. 3. $p_2(x_2)$

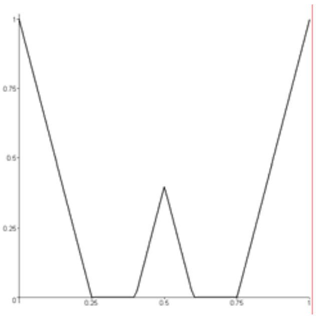

Рис. 4. $p_2(x_2)$

Основные выводы: 1) приняв некоторые дополнительные предположения относительно коэффициентов уравнения удается доказать существование и единственность решения поставленной задачи Дирихле. 2) Показано, что в случае периодических краевых условий может существовать более одного решения. В данной работе рассматривалась конкретная задача и были построены три ее обобщенных решения. Таким же способом можно показать неединственность классического решения задачи, взяв вместо разрывных коэффициентов непрерывные. Таким образом, принципиальным моментом является не разрывность коэффициентов, а периодичность краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Allaire G. STAM J. MATH ANAL., Vol. 23, No.6, 1992, pp. 1482-1518.
2. Jai M. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 29, No.2, 1995, pp. 199-233.
3. Гилбарг Д, Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Пер. с англ. Под ред. А.К.Гущина. // М.: Наука, 1989, 464 с.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. // М.: Наука, 1973. 576 с.