XXXIV Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции.
Ч.IX: С 108-109., 2006.

УДК 531/534.01

Н.А.Берковский (соиск., каф. общей физики)

МОДИФИКАЦИЯ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ ДЛЯ ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

При решении задач обтекания плоской решетки газотурбинных профилей используется обобщенная формула Коши, впервые указанная Н.Е.Кочиным [1]. Более поздние источники [2-4] ссылаются именно на [1]. Автор установил, что строгого вывода формулы нет [1-4]. В данной работе этот пробел восполнен.

Кратко рассмотрим постановку задачи обтекания. В комплексной плоскости имеется решетка профилей (рис. 1). Требуется найти скорость течения на обводах профилей по заданным скоростям на входе и выходе из решетки. Для потенциального и соленоидального течения в каналах между профилями скорость $w(z)$ является голоморфной функцией во внешности решетки [5]. Кроме того, считаем, что скорость $w(z)$ периодична по мнимой оси, непрерывна на границах профилей и имеет пределы $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to+\infty} w(z)=w_2$ и $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to-\infty} w(z)=w_1$. Выберем в решетке какой-нибудь профиль и обозначим его L_0, остальные профиля занумеруем символами $\{L_{\pm k}\}_{k\in \mathrm{N}}$ (рис. 1). Шаг решетки обозначим t, таким образом, скорость $w(z)$ будет являться периодической функцией с периодом it. Обобщенная формула Коши:

$$w(z)=\frac{1}{2ti}\oint\limits_{L_0} cth\frac{\pi(z-\xi)}{t}w(\xi)d\xi+w_0\,, \tag{1}$$

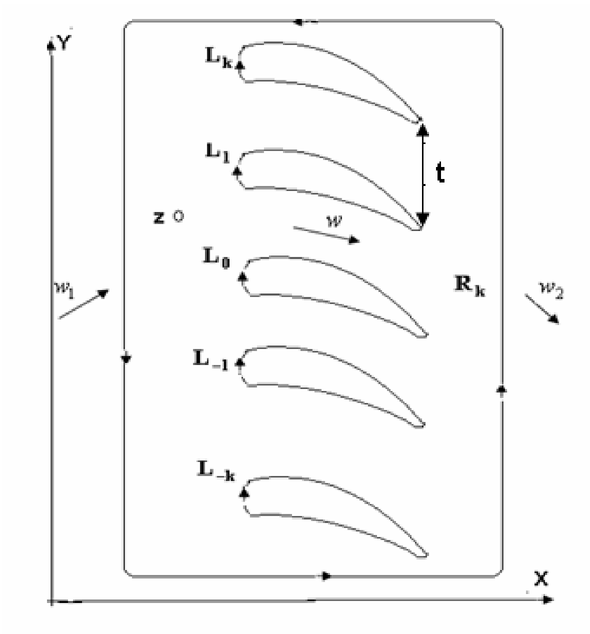

Рис. 1. Схема обтекания решетки

где w_0 − некоторая постоянная [1]. Приведем суть доказательства, которое дано в книге [1].

Рассмотрим конечный набор профилей с индексами от -к до к включительно и обведем их контуром R_k (рис. 1). Будем считать, что при росте индекса к диаметр контура R_k стремится к ∞, при этом сами контуры вложены друг в друга. Поэтому, какую бы точку z мы не взяли, то, начиная с некоторого номера k, она будет содержаться во всех контурах R_k. Значит, для любой точки z, внешней к решетке, при достаточно больших k можем написать интегральную формулу Коши для многосвязной области [5].

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{R_k}\frac{w(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_0}\frac{w(\xi)d\xi}{\xi-z}-\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_k}\frac{w(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_{-k}}\frac{w(\xi)d\xi}{\xi-z}\right]. \tag{2}$$

Используя периодичность $w(z)$, соотношение (2) можно записать:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_0} w(\xi)\left[\frac{1}{z-\xi}+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{z-\xi-jti}+\frac{1}{z-\xi+jti}\right)\right]d\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint_{R_k}\frac{w(\xi)d\xi}{\xi-z}. \qquad (3)$$

Рассмотрим разложение $ctg(u)=\frac{1}{z}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u-\pi j}+\frac{1}{u+\pi j}\right)$. Известно[5], что этот ряд сходится равномерно на любом компакте, не содержащем точки вида πn, где n − целое. Так как $cth(z)=\frac{1}{i}ctg\left(\frac{z}{i}\right)$, то квадратная скобка в (3) равна

$$\frac{\pi}{ti}\left(\frac{1}{\pi(z-\xi)/ti}+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{\pi(z-\xi)/ti-\pi j}+\frac{1}{\pi(z-\xi)/ti+\pi j}\right)\right)=\frac{\pi}{ti}ctg(\pi(z-\xi)/ti)=\frac{\pi}{t}cth\left(\frac{\pi}{t}(z-\xi)\right). \qquad (4)$$

Ряд (4) сходится равномерно на любом компакте, не содержащем точки профилей. Значит, в первом слагаемом правой части можно перейти к пределу и получить первое слагаемое правой части формулы Коши (1). Про второе же слагаемое говорится, что в пределе оно определяет «функцию аналитическую и конечную во всей комплексной плоскости», и «по теореме Лиувилля такая функция равна постоянной». Последнее станет верным, только если слово конечную заменить на ограниченную, согласно формулировке теоремы Лиувилля. Подозревая опечатку, автор статьи пришел к выводу, что доказать можно только аналитичность. Значит, нельзя доказать постоянство w_0 из (1). Но постоянство w_0 используется в построении интегральных уравнений для комплексно-сопряженной скорости [3]. Если верить этому утверждению, то $cth\left(\frac{\pi}{t}(z-\xi)\right)$ в формуле (1) можно заменить на $\frac{1}{z-\xi}$ и непонятно, зачем нужна такая сложная формула с гиперболическим котангенсом. В итоге, формула (1) не является строгим следствием из основных фактов комплексного анализа. Однако расчеты по интегральным уравнениям, использующим эту формулу, хорошо согласуются с экспериментом [3]. Заметим, что если рассмотреть конечную решетку профилей, то для течения, ограниченного на бесконечности, можно написать строго доказуемое соотношение:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_0} w(\xi)\left[\frac{1}{z-\xi}+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{z-\xi-jti}+\frac{1}{z-\xi+jti}\right)\right]d\xi+w_k, \qquad (5)$$

где w_k − постоянная, зависящая от размера взятого отрезка решетки. При этом вместо периодичности появится условие ограниченности при $|\mathrm{Im}\, z|\to\infty$. Если в интеграле (5) конечную сумму заменить на сумму ряда и считать, что течение через конечную решетку около профиля L_0 при достаточно больших k близко к периодическому течению, то получим формулу (1). На уровне «физической строгости» это вполне приемлемое рассуждение.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кочин Н.Е. Гидродинамическая теория решеток. М., Л., Гостехиздат, 1949.
2. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
3. Жуковский М.И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах. Л., Машиностроение, 1967.
4. Сухаревский И.В. Об эффективном вычислении скорости и циркуляции потока при потенциальном обтекании решетки. Труды ХПИ, 1955, т. 5.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1969.