К.С.Апельганц, С.И.Филиппов (3 курс, РФФ), В.И.Чуркин, к.т.н., доц.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОНОПОЛЬНОГО РЫНКА

Сбыт продукции предприятия зависит не только от текущих цен, но также и от сбыта, который имел место ранее (возникшее перенасыщение, дефицит). Это тем более актуально для монополиста, поскольку скорость изменения спроса и предложения в этом случае весьма ограничена. Все это подчеркивает ценность динамических моделей. Предположим, что монополист в t–й период времени сбывает товары по цене p_t. Количество проданных в этот период товаров обозначим через x_t. В работе динамика задается с помощью следующей связи между продажами и ценами:

$$x_t = x_{t-1} + \frac{(p_t - p_{t-1})}{p_{t-1}} \cdot \varepsilon(p_{t-1}, x_{t-1}) \cdot x_{t-1} \Rightarrow x_t = [1-(1-\frac{p_t}{p_{t-1}})\varepsilon(p_{t-1}, x_{t-1})]x_{t-1}, \qquad (1)$$

где ε - эластичность предельной выручки по цене. Начальные условия p_0, x_0 задаются.

Можно показать, что упомянутая эластичность предельной выручки следующим образом связана с эластичностью спроса по цене $\hat{\varepsilon}$ и эластичностью спроса по производной кривой спроса $\hat{\varepsilon}_x$:

$$\varepsilon = \frac{\hat{\varepsilon}(2+\hat{\varepsilon}_x^{-1})}{1+\hat{\varepsilon}^{-1}},$$

где эластичность $\hat{\varepsilon}_x$ равна процентному изменению спроса на однопроцентное изменение производной кривой спроса dp/dx. Определение динамики (1) через эластичность можно аргументировать тем, что последняя легко измеряется на практике.

Оборот за t-й период равен $U_t = x_t p_t$, а издержки - K_t. Прибыль в t-й период равна $G_t = U_t - K_t$, а прибыль за весь, представляющий интерес промежуток времени $\{1,2,...,T\}$, равна $G = \sum_{t=1}^{N} G_t$.

Сформулируем задачу оптимального управления для монополиста:

$$G = \sum_{t=0}^{T} G_t \to \max, где\, G_t = U_t - K_t; U_t = x_t p_t; K_t = K_t(x_t). \qquad (2)$$

Условие оптимальности 1-го порядка:

$$\begin{gathered}\sum_{i=t}^{T} \frac{\partial U_i}{\partial p_t} = \sum_{i=t}^{T} \frac{dK_t}{dx_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_t}, t=\overline{1,T}\, или \\ (p_t \frac{\partial x_t}{\partial p_t} + [1-(1-\frac{p_t}{p_{t-1}})\varepsilon(p_{t-1}, x_{t-1})]x_{t-1}) + \sum_{i=t+1}^{T} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_t} = \sum_{i=t}^{T} \frac{dK_t}{dx_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_t}, t=\overline{1,T}\end{gathered} \qquad (3)$$

Условия (3) содержат T уравнений для определения T неизвестных $\{p_1,\ldots,p_T\}$.

Учитывая большую размерность задачи оптимизации, ограничимся случаем T=3. Тогда:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = x_0 \frac{\varepsilon(p_0, x_0)}{p_0}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -\frac{p_2}{p_1^2}\varepsilon(p_1, x_1) - (1 - \frac{p_2}{p_1})\varepsilon_p^{'}(p_1, x_1)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(x_0[1-(1-\frac{p_1}{p_0})\varepsilon(p_0, x_0)][1-(1-\frac{p_2}{p_1})\varepsilon(p_1, x_1)][1-(1-\frac{p_3}{p_2})\varepsilon(p_2, x_2)] \right) =$$

$$= x_0[1-(1-\frac{p_3}{p_2})\varepsilon(p_2, x_2)]\{\frac{\varepsilon(p_0, x_0)}{p_0}[1-(1-\frac{p_2}{p_1})\varepsilon(p_1, x_1)] +$$

$$+[1-(1-\frac{p_1}{p_0})\varepsilon(p_0, x_0)][-\frac{p_2}{p_1^2}\varepsilon(p_1, x_1) - (1-\frac{p_2}{p_1})\varepsilon_p^{'}(p_1, x_1)]\}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = x_1 \frac{\varepsilon(p_1, x_1)}{p_1}$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_2} = x_1\{\frac{\varepsilon(p_1, x_1)}{p_1}[1-(1-\frac{p_3}{p_2})\varepsilon(p_2, x_2)] -$$

$$-[1-(1-\frac{p_2}{p_1})\varepsilon(p_1, x_1)][\frac{p_3}{p_2^2}\varepsilon(p_2, x_2) + (1-\frac{p_3}{p_2})\varepsilon_2^{'}(p_2, x_2)]$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_3} = x_2 \frac{\varepsilon(p_2, x_2)}{p_2} \tag{4}$$

Условия оптимальности первого порядка при T=3:

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + [1-(1-\frac{p_1}{p_0})\varepsilon(p_0, x_0)]x_0 + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + p_3 \frac{\partial x_3}{\partial p_1} = \frac{dK}{dx_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{dK}{dx_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{dK}{dx_3}\frac{\partial x_3}{\partial p_1}$$

$$p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + [1-(1-\frac{p_2}{p_1})\varepsilon(p_1, x_1)]x_1 + p_3 \frac{\partial x_3}{\partial p_2} = \frac{dK}{dx_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \frac{dK}{dx_3}\frac{\partial x_3}{\partial p_2} \tag{5}$$

$$p_3 \frac{\partial x_3}{\partial p_3} + [1-(1-\frac{p_3}{p_2})\varepsilon(p_2, x_2)]x_2 = \frac{dK}{dx_3}\frac{\partial x_3}{\partial p_3}$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial p_t} = x_t, \frac{\partial U_{t+1}}{\partial p_t} = p_{t+1}\frac{\partial x_{t+1}}{\partial p_t} = p_{t+1}x_t\frac{1}{p_{t-1}}\varepsilon(p_{t-1}, x_{t-1})$$

$$\frac{\partial U_{t+2}}{\partial p_t} = p_{t+2}\frac{\partial x_{t+2}}{\partial p_t} = p_{t+2}x_{t+1}[-\frac{p_{t+1}}{p_t^2}\varepsilon(p_t, x_t) - (1-\frac{p_{t+1}}{p_t})\varepsilon_p^{'}(p_t, x_t)] +$$

$$+ p_{t+2}[1-(1-\frac{p_{t+1}}{p_t})\varepsilon(p_t, x_t)]x_t\frac{1}{p_{t-1}}\varepsilon(p_{t-1}, x_{t-1})$$

Решение этой системы, реализованное в среде Mathcad для нескольких видов функций спроса и издержек, показало сходимость к статическому оптимуму монополиста.

Если последовательно использовать эти результаты, полученные для T=3, на интервалах большей продолжительности, то траектория не будет оптимальной. Формально она будет таковой при следующем ограничении: на 4-м шаге используется рандомизация, например, на 4-м шаге выбор p_4, x_4 делается случайно. Этот выбор принимается за новые начальные условия $p_0=p_4$, $x_0=x_4$, опять решается система (5) и т.д.