Cours 1

LA STATIQUE du CORPS SOLIDE

L'introduction.

L'objet et les Modèles de la Mécanique.

Mécanique Classique (Newtoneén) est une partie de la physique, dans laquelle on étudie les lois fondamentales de mouvement des corps solides sous l'action mécanique.

Histoire du développement de la Mécanique compte les millénaires. Pratiquement les gens ont commencé à s'intéresser par Mécanique et utiliser ses lois intuitivement , quand ils tâchaient de jeter la pierre pendant la chasse plus exactement . Depuis ce temps-là la Mécanique a fait la voie immense. De tels penseurs de l'antiquité, comme Archimede (3 me siècle avant notre ère), Leonardo d'Avinchi (15 siècle), Galilee et D'Ecarte (16 siècle) ont pu généraliser l'expérience des premiers chercheurs et formuler les bases de la Mécanique, qui a acquis la forme moderne grâce aux génies de Galilée et Newton (17 siècle), Euler et Lagrange (18 siècle).

Traditionnellement on divise la Mécanique en trois parties principales : la STATIQUE, la CINÉMATIQUE et la DYNAMIQUE. Dans la STATIQUE on étudie les conditions du repos des corps, la CINÉMATIQUE est la langue de la description de leur mouvement, mais c'est dans la DYNAMIQUE, qui est proprement la Mécanique, on formule les lois du mouvement des corps sous l'action des forces. Comme le repos est le cas particulier du mouvement, il serait plus facile de déduire les équations de la statique des lois du mouvement du corps. Mais ils vous sont nécessaires déjà à l'étude d' autres disciplines mécaniques, c'est pourquoi nous commençons par la statique.

Les modèles de la Mécanique

Comme n'importe quelle science exacte la Mécanique examine les objets non réels, qui sont infiniment complexes, mais leurs modèles, qui reflétent leur propriétés principales dans les conditions données.

L'objet de la Mécanique est un système des points matériels en interaction (système ponctuel) nommés *le système mécanique*.

L'exemple particulier du système mécanique, est ***le corps solide*** - le modèle du corps réel représentant le système des points materiels, la distance entre lesquels ne change pas avec le temps. Les déformations de la plupart des constructions mecaniques sont infiniment petites, c'est pourquoi le modèle du corps solide est justifié. D'autant plus qu'elle simplifie beaucoup l'étude du mouvement et du repos du corps dont les résultats sont applicables au corps réel.

Force comme Mesure de l'interaction

Force. Projection et les composants de la force.

Tous les corps se trouvent dans l'interaction. Par exemple, une petite bille suspendue sur le fil, subit l'action de la Terre et du fil. Les deux actions ont le point de l'application (la bille même), la ligne de l'action (la verticale), les directions (opposés) et la grandeur (le module). Les grandeurs caractérisées par la ligne de l'action, la direction et le module s'appellent les vecteurs dans la mathématique . C'est pourquoi la mesure de l'action avec qui un point agit sur l'autre est représentée par le vecteur **F**, qui s'appelle ***Force.***

Nous considérons les opérations formelles mathématiques avec les vecteurs des forces. Le sens physique de ces opérations sera éclairci dans le chapitre sur les transformations équivalents des forces appliqués au corps solide.

Conviendrons suligner les vecteurs dans l'écriture et les écrire en caractères gras **F** dans le texte typographique. Le module du vecteur nous désignerons par le même caractère, mais sans ligne : F. Le module de la force est mesuré en kg (le système Technique des unités) ou en Newtons H (le système International SI).

Dans les calculs pratiques nous ne pouvons qu'opérer avec des grandeurs scalaires. C'est pourquoi on utilise une présentation matricielle en formant la matrice colonne de ses projections sur les axes x, y, z

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Rappellerons, qu'on appelle ***projection*** du vecteur sur l'axe x la grandeur scalaire égale a

$$Fx = FCos\alpha \qquad (2)$$

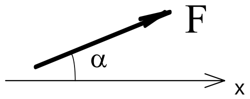
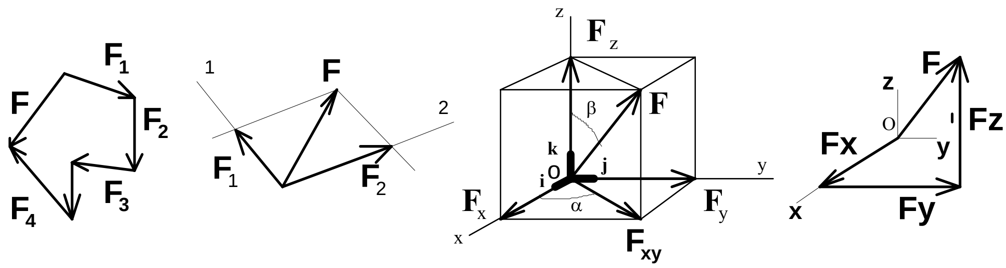


Рис.2

Il est évident, que le signe de la projection est cel du cosinus de l'angle α entre les directions de la force et l'axe. Si l'angle α est aigu, la projection est positive s'il est obtus , la projection est négative. Plus facilement, la projection est positive, si la direction de la force « coïncide » (à près Π/2) avec la direction de l'axe.

Il est important de se rappeler, que la projection de la force, perpendiculaire a l'axe, EST ÉGALE au ZÉRO.

On sait, que les vecteurs se composent selon la règle du parallélogramme (le Riz 3 b).



a) b) c) d)

Fig. 3

Le même dessin donne la règle de la décomposition d'un vecteur le long de deux directions 1 et 2. Pour cela on fait les lignes parallèles aux directions données par les fins du vecteur **F**.

En général, on nomme ***le composant*** du vecteur chacun de membres de la somme $\mathbf{F}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+...+\mathbf{F_n}$. Les composants du vecteur **F** formeront ***le polygone vectoriel***. (Fig. 3á)

Présenterons le vecteur force **F** dans la base **i, j, k**.

$$\mathbf{F}=F_x\,\mathbf{i}+F_y\,\mathbf{j}+F_z\,\mathbf{k} \qquad (3)$$

Nommerons F_x **i** - ***un composant orthogonal*** du vecteur F le long de l'axe x . Maintenant la force peut être présentée par la somme vectorielle des trois composants orthogonaux (Fig. 3ß) :

$$\mathbf{F}=\mathbf{F_{xy}}+\mathbf{F_z} \quad \mathbf{F_{xy}}=\mathbf{F_x}+\mathbf{F_y} \quad \mathbf{F}=\mathbf{F_x}+\mathbf{F_y}+\mathbf{F_z} \quad \mathbf{F_x}=F_x\mathbf{i};\ \mathbf{F_y}=F_y\mathbf{j};\ \mathbf{F_z}=F_z\mathbf{k} \qquad (4)$$

$$F_{xy}=FSin\alpha \qquad F_x=F_{xy}Cos\beta=FSin\alpha Cos\beta \qquad F_y=F_{xy}Sin\beta=FSin\alpha Cos\beta \qquad F_z=FCos\alpha$$

Le module de la force se trouve par formule : $F^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2$ (5)

Système de forces. Vecteur principal du système de forces.

On appelle ***système de forces*** **{F} = {$F_1F_2F_3... F_n$}** (Fig. 4) la multitude de forces appliques aux points du système mécanique.

On appelle ***vecteur principal*** du système de forces la somme vectorielle de toutes les forces du système :

$$\mathbf{V=\Sigma F_k} \qquad (6)$$

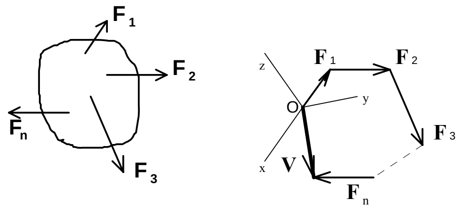


Fig. 4

Pour trouver le vecteur principal on construit le polygone vectoriel au centre arbitraire O (le fig. 4). Le vecteur fermant du polygone est le vecteur principal **V** du système de forces.

Il est pratiquement difficile construire le polygone des forces pour un système arbitraire. Dans ce cas c'est plus facile de trouver le vecteur principal analytiquement. En projetant la formule (6) sur les axes des coordonnées, nous trouverons les projections du vecteur principal, son module et les cosinus dirigeant :

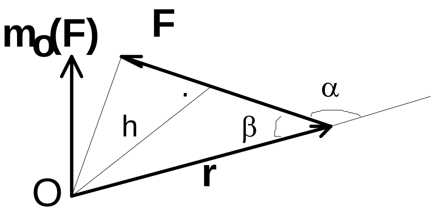
$$V_x=\Sigma F_{kx};\ V_y=\Sigma F_{ky};\ V_z=\Sigma F_{kz} \qquad (7)$$

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2;\ \ Cos(V,x)=V_x/V;\ \ Cos(V,y)=V_y/V;\ \ Cos(V,z)=V_z/V$$

Moment comme caractéristique rotatoire de la force

Le moment de la force par rapport a un centre. Deux théorèmes sur le moment

La notion du moment de la force se présente quand on considére un corps solide. L'expérience montre, que si on fixe un certain centre O dans le corps, la force **F,** joint à un autre point du corps peut tourner le corps autour de O. Cette capacité de la force de tourner le corps est caractérisé par le moment.

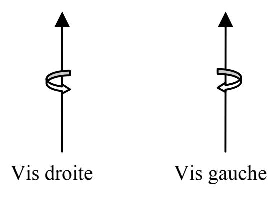


Désigneront par **r** le rayon - vecteur du point M ou la force est appliquee par rapport au centre O. On appelle ***moment de la force F par rapport au centre O*** le vecteur produit vectoriel

$$\mathbf{mo\ (F) = r} \times \mathbf{F} \qquad (8)$$

La direction du produit vectorielle dépend de ***l'orientation de l'espace :*** une règle acceptée de la conformité des flèches directes et arquées: selon la vis droite ou gauche.

Un vecteur, dont la direction dépend de ***l'orientation de l'espace***, s'appellent ***vecteur axial.*** Il est important, que pour ceux-ci la flèche arquée indique la direction réelle de la rotation, mais la direction du vecteur est conventionnelle.

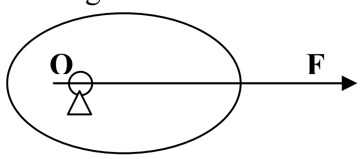


Nous ne travaillerons que dans l'espace orienté selon ***la vis droite*** C'est pourquoi depuis la fin du vecteur $\mathbf{m_o}$ on voit, que la force « tourne » le corps contre les aiguilles d'une montre.

Le module du moment est égal

$$mo\ (F) = FrSin\alpha = FrSin\beta = Fh \qquad (9)$$

au produit du module de la force par ***l'épaule*** h: la longueur de la perpendiculaire omise du centre O sur la ligne de l'action de la force.



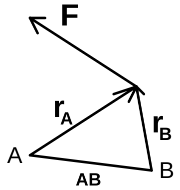
Nous voyons, que le moment de la force est proportionel a son épaule, et il est egale au zéro pour n'importe quel centre sur la ligne de l'action de la force. Ce résultat est attendu, puisque l'expérience montre, que une telle force ne peut tourner le corps .

Le moment est donc une caractéristique de la capacité de la force tourner le corps autour du centre O, si on livre la un support. Pour un corps libre centre de gravité du corps joue le rôle du support et la force ne peut pas tourner le corps au repos, si la ligne de l'action de la force passe par le centre de gravité du corps.

Théorème 1 ***Dépendance du moment du centre.***

Trouverons la liaison entre les moments de la force F par rapport aux centres B et À. De C'est claire (Fig. 6), que

$$\mathbf{r_A= AB+r_B} \qquad \mathbf{m_A(F)=r_A x F=(AB+r_B)xF= r_B x F +AB x F}$$



Donc $\mathbf{mA\ (F) = mB\ (F) +ABxF}$ (10)

La formule (10) montre, que :

a) dans le cas general le moment de la force dépend du centre

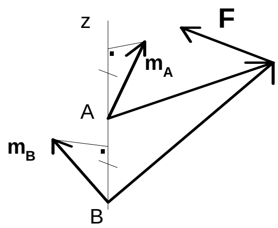
б) le transfert du centre parallèlement a la ligne de l'action de la force ne change pas du moment

Fig. 6

Le théorème 2. ***Projections des moments.***

En projetant (10) sur l'axe z, qui passe par B et À, nous trouvons

$$\text{пр}_{AB}\mathbf{m_A(F)}=\text{пр}_{AB}\mathbf{m_B(F)} \qquad (11)$$



comme le produit **AB** X **F** est perpendiculaire a AB et sa projection sur z est égale au zéro. Nous venons ainsi vers la lemme :

Les projections des moments de la force par rapport a tous les points d'un axe sur cet axe sont égales. On peut donc dire que la projection des moments sur l'axe caractérise l'action de la force par rapport à cet axe. C'est pourquoi on appelle cette projection ***moment de la force par rapport a l'axe.***

fig. 7

Calcul matriciel du produit vectorielle. Matrice jointe.
Expression analytique du moment.

On sait, que dans les coordonnées x, y, z du repère **i, j, k** le produit vectorielle

$$\mathbf{c=a\ x\ b}$$

des vecteurs $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ et $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$

peut être présenté par le déterminant de la matrice $D=\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$

$$\mathbf{c=a\ x\ b} = [D]= \mathbf{c=a\ x\ b} = (a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k} \qquad (12)$$

Donc

$$c_x= a_yb_z-a_zb_y \quad c_y= a_zb_x-a_xb_z \quad c_z= a_xb_y-a_yb_x$$

Les matrices colonne suivants correspondent aux vecteurs **a, b** et **c**.

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \qquad (13)$$

On peut recevoir la matrice colonne *c* comme produit d'une matrice 3x3 par matrice colonne *b*. Il est évident, que les éléments de cette matrice doivent être les projections du vecteur **a**, c'est pourquoi nous la désignerons par *A*. Donc,

$$c = Ab, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Après la substitution, compte tenu de (12), nous recevons

$$c_x = a_{11}b_x + a_{12}b_y + a_{13}b_z = a_xb_y - a_yb_x$$
$$c_y = a_{21}b_z + a_{22}b_y + a_{23}b_z = a_zb_x - a_xb_z$$
$$c_z = a_{31}b_z + a_{32}b_y + a_{33}b_z = a_xb_y - a_yb_x$$

Ainsi, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ $a_{21} = - a_{12} = a_z$ $a_{13} = -a_{31} = a_y$ $a_{32} = -a_{23} = a_x$
donc *A* est une matrice antisymétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

On appelle la matrice *A* ***matrice jointe du vecteur a***

Nous venons, donc, a la formule matricielle du produit vectoriel **c=a** X **b**

$$c = Ab \qquad (16)$$

L'inverse est aussi correcte : une expression de la forme (16), correspond au produit vectorielle.

Expression analytique du moment

Maintenant nous pouvons presenter une formule matricielle correspondant à la formule vectorielle du moment $\mathbf{m_o(F)=r}$ X **F**

$$m_0(F) = Rf$$

Où *R*-la matrice jointe du rayon du vecteur **r** (x, y, z)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous recevons les expressions analytiques des projections du moment de la force par rapport aux axes x, y, z:

$$m_x(F) = yF_z - zF_y \qquad m_y(F) = zF_x - xF_z \qquad m_z(F) = xF_y - yF_x$$

qui permettent de trouver le module et la direction du moment.