**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

**РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ**

**Л.А.Бабенко**

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ. СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

Конспект лекций. Часть I

2006

Л.А.Бабенко**.** Электродинамика и распространение радиоволн. Основные уравнения электродинамики. Статические и стационарные поля. Конспект лекций. Часть I

Конспект лекций (часть I) соответствует группе разделов дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн» направлений подготовки бакалавров 552500 «Радиотехника», а также специальности 2015000 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура».

Рассмотрены основные уравнения электродинамики, граничные условия для векторов электромагнитного поля, энергетические характеристики, статические и стационарные электромагнитные поля.

Предназначено для студентов третьего курса радиофизического факультета, изучающих дисциплину «Электродинамика и распространение радиоволн».

## Содержание

## Введение.

В современной физике при рассмотрении многих явлений наряду с понятием вещества вводится понятие поля: электромагнитное, гравитационное, поле ядерных сил. Иными словами, предполагается, что возможны две формы существования материи: вещество и поле. Поле – пространственное распределение некой величины, которая может быть функцией времени. Электромагнитное поле, так же как и вещество, характеризуется энергией, массой, импульсом. Масса и импульс характерны только для распространяющегося электромагнитного поля (электромагнитных волн). В отличие от вещества электромагнитное поле не обладает массой покоя. Энергия электромагнитного поля может переходить в другие виды энергии. Существование жизни на земле обусловлено преобразованием электромагнитной энергии (энергии солнечных лучей) в тепловую, химическую и другие виды энергии.

*Классическая*, или максвелловская, теория электромагнитного поля учитывает только *макроскопические* свойства вещества: предполагается, что размеры рассматриваемой области пространства и расстояние от источников поля до рассматриваемой точки велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время (например, период колебаний) велико по сравнению со временем, характерным для внутримолекулярных колебательных процессов.

Электромагнитное поле обычно разделяют на два взаимосвязанных поля: электрическое и магнитное. Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды. Неподвижные заряды создают только электрическое поле. Движущиеся заряды создают и электрическое, и магнитное поля. Токи проводимости и конвекционные токи представляют собой упорядоченно движущиеся электрические заряды и также создают электромагнитное поле. Заряды взаимодействуют друг с другом, сила их взаимодействия определяется законом Кулона. Разделение единого электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет относительный характер, оно зависит от выбранной системы отсчета. Оба поля проявляются в виде механических («пондеромоторных») сил. Если в электрическое поле внести пробный электрический заряд, то под действием этих сил он будет перемещаться. Аналогично магнитное поле изменяет направление движения пробного заряда. Электрическое поле действует и на неподвижные, и на движущиеся заряды, магнитное – только на движущиеся.

Действие электромагнитного поля обладает определенной направленностью, поэтому для его описания вводят векторные величины. Векторное поле изображают с помощью линий, которые в каждой точке касаются вектора поля. Это – векторные линии. Чтобы дать представление о величине поля, векторные линии проводят так, чтобы их число на единицу площади, расположенной перпендикулярно линиям, было пропорционально величине вектора. Там, где поле сильнее, линии проводят гуще. Линии векторов, являющихся силовыми характеристиками поля, обычно называют силовыми линиями поля.

## Некоторые операции векторного анализа.

Формально поля определяются заданием в каждой точке рассматриваемой области пространства некоторой скалярной и векторной величины. Эти величины являются функциями четырех переменных – пространственных координат и времени. В векторном анализе производятся специальные операции дифференцирования и интегрирования по отношению к соответствующим функциям пространственных координат.

***Градиент скалярного поля***.

Рассмотрим способ описания изменения в пространстве скалярного поля в фиксированное время. По трем пространственным координатам могут существовать частные изменения, причем скорость изменения может быть различной в разных направлениях. Пусть $v$ ($u_1$, $u_2$, $u_3$) – скалярная функция координат. Величина $v$ зависит от положения точки в пространстве. Вводят вектор, величина и направление которого совпадают с максимальной пространственной скоростью изменения скалярной величины. Это градиент этого скаляра.

$$grad\, v = \vec{a}_n \frac{dv}{dn} \quad \text{или} \quad \nabla v = \vec{a}_n \frac{dv}{dn}$$

$\nabla$ - набла, или оператор Гамильтона. $\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$

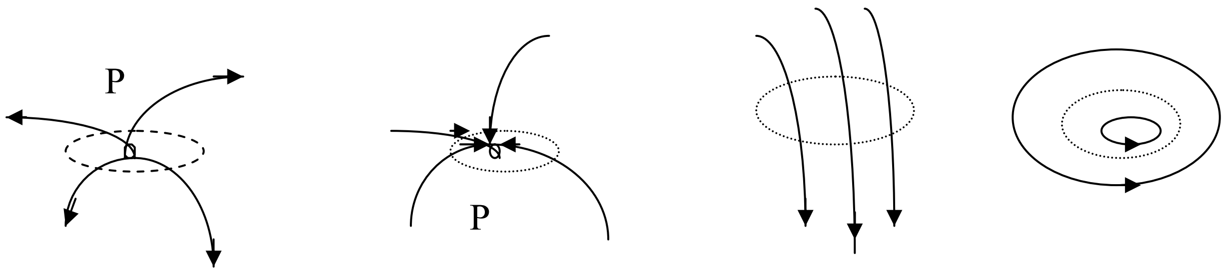
$grad\, v = \nabla v = \vec{a}_x \dfrac{\partial v}{\partial x} + \vec{a}_y \dfrac{\partial v}{\partial y} + \vec{a}_z \dfrac{\partial v}{\partial z}$ в декартовой системе координат.

Скалярное поле V порождает векторное поле $grad\, v = \vec{F}$. Такое векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным полем, функция $v$ – потенциал. Поверхности, на которых $v$ = const, являются эквипотенциальными.

***Дивергенция векторного поля.***

Рассмотрим пространственное изменение векторного поля. Дивергенция векторного поля $\vec{A}$ в точке (расходимость вектора) $div\,\vec{A} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\oint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$

$\oint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ - поток вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность. Поток может быть больше, меньше или равен 0. $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$ – векторный дифференциал поверхности, направление вектора совпадает с направлением внешней по отношению к поверхности S нормали.




исток
div **A** > 0,
поток больше 0

сток
div **A** < 0

div **A** = 0,
соленоидальное поле

Дивергенция – скалярная величина, значение которой определено в точке.

$div\vec{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z$.

Для декартовой системы координат div $\vec{A} \equiv \nabla \bullet \vec{A}$

Если дивергенция векторного поля равна 0 div $\vec{A}$ = 0, то $\vec{A}$ – соленоидальное поле. Дивергенция определена как поток вектора через поверхность, ограничивающую единичный объем. Объемный интеграл от дивергенции векторного поля равен полному потоку вектора через поверхность этого объема.

$\int\limits_V div\,\vec{A} dv = \oint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ Это *теорема Остроградского – Гаусса*.

***Ротор (вихрь) векторного поля.***

Можно говорить о вихревом источнике, который связан с циркуляцией векторного поля вокруг него. Циркуляция векторного поля по замкнутому конуру C определяется как скалярный линейный интеграл $\oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$. $d\vec{l}$ – векторный дифференциал длины, направление вектора $d\vec{l}$ совпадает в точках контура с направлением касательной к контуру интегрирования. Для определения в некоторой точке функции, которая является мерой силы вихревого источника, контур необходимо сделать малым и ориентировать его так, чтобы циркуляция была максимальной.

Определяют $rot\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{1}{\Delta S} \vec{a}_n \oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

$rot\vec{A}$ – векторная функция точки. Если ротор векторного поля равен 0, то такое поле называют безвихревым (консервативным).

Если выражение для ротора проинтегрировать по поверхности, опирающейся на замкнутый контур C, получим соотношение, которое называют *теоремой Стокса*:

$$\int\limits_S rot\,\vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Если поверхностный интеграл вычислять по замкнутой поверхности (контур отсутствует), то $\oint\limits_S rot\,\vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$

Отметим *два тождества*:

1. $rot\,grad\,\varphi \equiv 0$. Следовательно, если векторное поле – безвихревое, то его можно выразить как градиент скалярного поля. Если $rot\vec{E} = 0$, то можно определить скалярное поле φ, как $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

2. $div\,rot\,\vec{A} \equiv 0$. Следовательно, если дивергенция векторного поля равна 0, то поле можно представить как ротор другого векторного поля. Если $div\vec{B} = 0$, то можно определить векторное поле $\vec{A}$, такое, что $\vec{B} = rot\vec{A}$

**Электрический заряд, ток, закон сохранения заряда.**

Электрический заряд q (или Q) – фундаментальное свойство вещества. Существуют положительные и отрицательные заряды. Заряд дискретен. Наименьший по абсолютной величине отрицательный заряд | e | = 1,6 $10^{-19}$ Кл.

*Закон сохранения заряда*: заряды могут перемещаться из точки в точку, перераспределяться под действием электромагнитного поля, но алгебраическая сумма положительных и отрицательных зарядов в изолированной (закрытой) системе неизменна.

В макроскопической электродинамике структура материи игнорируется, среда представляется сплошной, а заряды и токи – непрерывно распределенными в объеме (иногда – на поверхности). Используют понятие плотности заряда ρ, как характеристики источника $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V}$ , Δq – заряд малого объема ΔV. Как мал объем? Достаточно мал, чтобы следовать изменению ρ, но большой, чтобы содержать большое число дискретных зарядов. Заметим, что куб с ребром в 1микрон ($10^{-6}$ м) при объеме V = $10^{-18}$ $м^3$ содержит $10^{11}$ атомов.

Если считать, что заряд Δq принадлежит элементу поверхности ΔS или элементу длины Δl, то следует определить поверхностную $\rho_s$ и линейную $\rho_l$ плотность заряда.

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Названные плотности заряда являются функциям координат и времени.

Изменение заряда во времени – это ток. I = - dq / dt [Кл / с = А]. Ток – функция времени. Он следует через ограниченное пространство. Точечная характеристика – плотность тока проводимости $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \vec{i}_0 \dfrac{\Delta I}{\Delta S}$. $\vec{j} = \vec{i}_0 \dfrac{dI}{dS}$ - это ток через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению тока. Для хороших проводников ток высокой частоты распределен в поверхностном слое, а не по объему. Поэтому определяют поверхностную плотность тока $\vec{j}_s$ как ток через единицу длины на поверхности, перпендикулярную направлению движения.

Плотность тока и плотность заряда не являются независимыми, они связаны законом сохранения заряда. Из определения следует

$q = \int\limits_V \rho\, dv$, $I = \oint\limits_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$

Если заряд q, содержащийся в объеме V с поверхностью S, не остается постоянным, значит, поверхность пересекают носители заряда, проходит ток.

$I = -\dfrac{dq}{dt} \rightarrow \oint\limits_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_V \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dv$. Используя теорему Остроградского-Гаусса, получаем $\int\limits_V div\, \vec{j} dv = -\int\limits_V \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad \rightarrow \quad div\, \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Это дифференциальная форма закона. Непрерывные ρ и $\vec{j}$ связаны по закону точечного соответствия.

## Векторы электромагнитного поля.

Электромагнитное поле описывают следующие векторные функции координат и времени: $\vec{E} = \vec{E}(r,t)$– напряженность электрического поля [В/м], $\vec{H} = \vec{H}(r,t)$– напряженность магнитного поля [А /м], $\vec{D} = \vec{D}(r,t)$– электрическая индукция [Кл/м$^2$], $\vec{B} = \vec{B}(r,t)$– магнитная индукция [Тл]. Если нет изменений во времени, векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ образуют две отдельные пары. Для величин, зависящих от времени, электрические и магнитные поля связаны.

***Векторы электрического поля.***

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ определяют как силу, с которой электрическое поле действует на точечный положительный единичный заряд

$\vec{E} = \vec{F}/q$ или точнее, $\vec{E} = \lim\limits_{q \to 0} \dfrac{\vec{F}}{q}$

Сила взаимодействия зарядов, следовательно, и напряженность электрического поля в различных средах различны. Обычно вещество не создает макроскопически наблюдаемого поля (уравновешенность внутренних процессов). Под действием электрического поля вещество поляризуется. В результате появляется дополнительное электрическое поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное электрическое поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме. Поляризация – сложный физический процесс, связанный с атомной структурой вещества. Каждый атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Суммарный заряд атома равен 0. Соединения атомов образуют молекулы. Различают *полярные* и *неполярные молекулы*.

В *полярных молекулах* центр тяжести электронов сдвинут относительно центра тяжести протонов. Такую молекулу можно уподобить крошечному *электрическому диполю* – системе двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов (+ q, - q), расположенных на малом расстоянии l. Диполь характеризуют дипольным моментом $\vec{p}$: $\vec{p} = \vec{l}_0 p = \vec{l}_0 ql$. Дипольный момент – вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному. Суммарный дипольный момент объема вещества ΔV равен сумме дипольных моментов $\vec{p}_0$ молекул в этом объеме. Внешнее электрическое поле оказывает силовое воздействие на диполь, стремясь повернуть его так, чтобы он был ориентирован по полю. В отсутствие внешнего поля дипольные моменты отдельных молекул ориентированы хаотически, и суммарный дипольный момент равен 0. Под действием внешнего электрического поля происходит ориентация дипольных моментов отдельных молекул, в результате появляется суммарный дипольный момент рассматриваемого объема. Этот процесс называется *ориентационной поляризацией*.

В *неполярной молекуле* центр тяжести всех электронов молекулы совпадает с центром тяжести всех ее протонов. Такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом. Однако под действием внешнего электрического поля в молекуле перераспределяется отрицательный заряд, молекула становится полярной. Дипольные моменты ориентируются по полю, суммарный дипольный момент оказывается отличным от 0. этот процесс называют *электронной поляризацией.*

Для характеристики поляризации вводят *вектор поляризованности* $\vec{P}$, определяемый как предел отношения суммарного дипольного момента вещества в объеме ΔV к величине этого объема при ΔV → 0: $\vec{P} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$.

(В классической электродинамике рассматриваемый объем всегда предполагается большим по сравнению с объемом отдельной молекулы).

При не очень сильном внешнем поле величину индуцированного дипольного момента можно считать пропорциональной напряженности электрического поля: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Безразмерный параметр $\chi$ характеризует среду. Это – *диэлектрическая восприимчивость* среды. Постоянный коэффициент $\varepsilon_0$ называется *электрической постоянной*. Его величина зависит от выбора системы единиц. В системе СИ

$\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$, [Ф / м].

Вводят вектор $\vec{D}$, связанный с вектором поляризованности $\vec{P}$ соотношением

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, или $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$, где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \chi)$.

$\vec{D}$ – вектор электрического смещения. $\varepsilon_a$ – *абсолютная диэлектрическая проницаемость среды*. Так как диэлектрическая восприимчивость вакуума $\chi = 0$, то электрическую постоянную $\varepsilon_0$ можно рассматривать как абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума. Вводят *относительную диэлектрическую проницаемость среды* $\varepsilon_r$: $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\varepsilon_r = 1 + \chi$.

Отметим, что в большинстве сред пропорциональность векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$, а следовательно, и векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ нарушается в сильных электрических полях.

Рассмотрим *электрическое поле, создаваемое точечным зарядом Q*, расположенным в безграничной среде, у которой $\varepsilon_a$ – скалярная постоянная ($\varepsilon_a$ =const). Такую среду называют однородной и изотропной по отношению к электрическому полю. Согласно закону Кулона сила, с которой точечный заряд $Q$ действует на точечный заряд $q$, $\vec{F} = \vec{r}_0 \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_a r^2}$, $r$ – расстояние между зарядами, $\vec{r}_0$ – единичный вектор, направленный вдоль $r$ от $Q$ к $q$. Имея в виду определение вектора $\vec{E}$ ($\vec{E} = \vec{F}/q$), получаем, что напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом $Q$, $\vec{E} = \vec{r}_0 \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}$, а вектор $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \vec{r}_0 \dfrac{Q}{4\pi r^2}$ в однородной изотропной среде не зависит от $\varepsilon_a$. Следовательно, при $\varepsilon_a$ = const и одинаковом распределении свободных зарядов вектор $\vec{D}$ имеет одинаковые значения в разных средах.

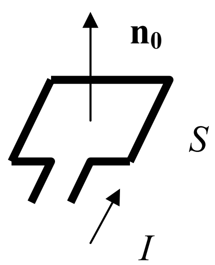
Заметим, что вектор объемной плотности тока проводимости связан с вектором $\vec{E}$:

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ - это закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент пропорциональности $\sigma$ - удельная проводимость среды [См /м].

***Векторы магнитного поля.***

Сила, с которой электромагнитное поле воздействует на точечный электрический заряд, зависит не только от величины и местоположения заряда, но и от скорости его движения. Эту силу обычно раскладывают на две: электрическую и магнитную. Электрическая сила не зависит от движения заряда $\vec{F}_э = q\vec{E}$. Магнитная сила зависит от величины и направления скорости $\vec{v}$ движения заряда и всегда перпендикулярна ей: $\vec{F}_м = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{B}$ – *вектор магнитной индукции*, характеризующий силовое воздействие поля, [Тл]. Магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на точечный единичный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям вектора $\vec{B}$. Магнитное поле действует, конечно, не только на отдельные движущиеся заряды, но и на проводники, по которым течет электрический ток.

Величина вектора $\vec{B}$ зависит от свойств среды**.** Под действием магнитного поля вещество намагничивается. В результате появляется дополнительное магнитное поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное магнитное поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме. Явление намагничивания – сложный физический процесс, связанный с атомной структурой вещества. Атомы и молекулы многих веществ обладают *магнитным моментом* и могут быть уподоблены маленьким рамкам с током. Магнитный момент рамки с током $\vec{m} = \vec{n}_0 IS$, [А/м$^2$]. Рамка с током создает собственное магнитное поле, которое пропорционально магнитному моменту.




В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул, как правило, направлены хаотически и суммарный магнитный момент объема ΔV, представляющий собой сумму магнитных молекул в объеме, $\vec{m} = \sum \vec{m}_i = 0$, т.е. магнитные моменты отдельных молекул взаимно компенсируются. Под действием внешнего магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов отдельных молекул. Суммарный магнитный момент оказывается отличным от нуля. Образующееся в результате намагничивания дополнительное магнитное поле может, как ослаблять, так и усиливать первичное поле. Среды, в которых магнитное поле ослабляется, называют *диамагнитными*, в которых поле незначительно усиливается – *парамагнитными*, а среды, в которых происходит существенное усиление магнитного поля, - *ферромагнитными*.

Намагниченность среды характеризуется вектором намагниченности $\vec{M}$, который определяют как предел отношения суммарного магнитного момента вещества в объеме ΔV к величине этого объема при ΔV → 0: $\vec{M} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}$ [А/м].

При рассмотрении многих процессов удобно вместо вектора $\vec{M}$ ввести вектор $\vec{H}$, связанный с $\vec{M}$ соотношением: $\vec{H} = (\vec{B}/\mu_0) - \vec{M}$. $\mu_0$ – постоянная величина, называемая *магнитной постоянной*, значение и размерность которой зависят от выбора системы единиц. В системе СИ $\mu_0$ = 4 10 $^{-7}$ Гн/м. $\vec{H}$ – *вектор напряженности магнитного поля*, [А/м].

При не очень сильном внешнем магнитном поле можно считать, что вектор $\vec{M}$ пропорционален вектору $\vec{B}$. В силу линейности уравнения, связывающего эти векторы с вектором $\vec{H}$, можно также считать, пропорциональными векторы $\vec{M}$ и $\vec{H}$: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Безразмерный коэффициент $\chi_m$ называют *магнитной восприимчивостью среды*. У диамагнитных сред $\chi_m$ отрицательный, у парамагнитных и ферромагнитных – положительный. У диамагнитных и парамагнитных сред $|\chi_m| \ll 1$, у ферромагнитных $\chi_m \gg 1$.

Из записанных соотношений между векторами следует, что $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, $\mu_a = \mu_0 (1 + \chi_m)$. Коэффициент пропорциональности $\mu_a$ между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$ называют *абсолютной магнитной проницаемостью* среды. Магнитная восприимчивость вакуума считается равной 0, поэтому магнитную постоянную $\mu_0$ можно рассматривать как абсолютную магнитную проницаемость вакуума. Вводят *относительную магнитную проницаемость* $\mu_r$: $\mu_a = \mu_0 \mu_r$, $(\mu_r = 1 + \chi_m)$. Для диамагнитных и парамагнитных веществ $\mu_r$ обычно можно считать скалярной величиной, а для намагниченных ферромагнитных веществ $\mu_r$ является тензором.

Отметим важное свойство вектора $\vec{H}$. В средах, в которых $\mu_a$ – скалярная постоянная (такие среды называют однородными и изотропными по отношению к магнитному полю), вектор $\vec{H}$ не зависит от $\mu_a$. Поэтому при одинаковых источниках магнитного поля значения вектора $\vec{H}$ в разных однородных изотропных средах будут одинаковы.

Итак, в макроскопической электродинамике векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношениями, зависящими от свойств среды.

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Свойства среды характеризуются параметрами $\varepsilon_r$, $\mu_r$ и $\sigma$ ($\sigma$ - удельная проводимость среды). Материальные среды обладают электрической проводимостью. Под действием электрического поля в них возникает ток, называемый током проводимости. Его плотность определяется законом Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Перечисленные уравнения называют *материальными*, или *уравнениями состояния*.

## Классификация сред.

Свойства сред по отношению к электромагнитному полю определяются параметрами $\varepsilon_r$, $\mu_r$ и $\sigma$. Различают следующие среды: *линейные*, в которых параметры $\varepsilon_r$, $\mu_r$ и $\sigma$ не зависят от величины электрического и магнитного поля, *нелинейные*, в которых параметры $\varepsilon_r$, $\mu_r$ и $\sigma$ ( или хотя бы один из них ) зависят от величины электрического или магнитного поля. Все реальные среды, по существу, являются нелинейными. Однако при не очень сильных полях во многих случаях можно пренебречь зависимостью параметров среды от величины полей.

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ - для линейной среды, $\vec{D} = \alpha_1 \vec{E} + \alpha_2 \vec{E}^2 + ...$ - для нелинейной среды.

Линейные среды делятся на однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные.

*Однородными* в области V называются среды, параметры $\varepsilon_r$, $\mu_r$ и $\sigma$ которых (скалярные или тензорные) постоянны в объеме, т.е. свойства среды одинаковы во всех точках области. Если хотя бы один из параметров среды является функцией координат, среду называют *неоднородной.* Кусочно-однородная среда – параметры принимают разные постоянные значения в разных областях.

Если свойства среды одинаковы по всем направлениям, среду называют *изотропной*. В изотропных средах параметры $\varepsilon_r$, $\mu_r$ и $\sigma$ - скалярные величины, векторы $\vec{P}$ и $\vec{E}$, $\vec{D}$ и $\vec{E}$, а также $\vec{M}$ и $\vec{H}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ параллельны.

Среды, свойства которых различны по различным направлениям, называют *анизотропными*. В анизотропных средах по крайней мере один из параметров среды является тензором. К анизотропным средам относятся кристаллические диэлектрики, намагниченная плазма, намагниченный феррит. В кристаллическом диэлектрике и в намагниченной плазме тензором является диэлектрическая проницаемость. При использовании декартовой системы координат тензор диэлектрической проницаемости может быть записан в виде матрицы

$$\|\varepsilon\| = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix}$$

Величины $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{xy}$,…называют компонентами тензора. В частных случаях некоторые из них могут равняться 0.

Чтобы записать уравнение $\vec{D} = \|\varepsilon\|\vec{E}$ в проекциях на оси декартовой системы координат, нужно раскрыть правую часть уравнения по обычным правилам умножения матриц.

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z,$$

$$D_y = \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z,$$

$$D_z = \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z.$$

В анизотропных средах векторы и $\vec{P}$ и $\vec{E}$, $\vec{D}$ и $\vec{E}$, а также $\vec{M}$ и $\vec{H}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ могут быть не параллельными. Непараллельность векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ (а также $\vec{P}$ и $\vec{E}$) объясняется тем, что в общем случае направление возникающего в результате поляризации анизотропной среды вторичного электрического поля, созданного связанными зарядами вещества, составляет некоторый угол (отличный от 0 и π) с направлением первичного электрического поля. В намагниченной ферромагнитной среде тензором является магнитная проницаемость. При этом $\vec{B} = \|\mu\|\vec{H}$.

## Основные уравнения электродинамики.

Определены шесть векторов $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{M}, \vec{H}$, характеризующих электромагнитное поле. Векторы $\vec{E}, \vec{P}$ и $\vec{D}$ электрического поля связаны соотношением $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, векторы $\vec{B}, \vec{M}$ и $\vec{H}$ магнитного поля – соотношением $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$. Следовательно, для определения электромагнитного поля можно ограничиться нахождением четырех векторов $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. В линейных изотропных средах, для которых справедливы соотношения $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, электромагнитное поле может быть полностью определено двумя векторами. Обычно это $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Все электромагнитные процессы, относящиеся к макроскопической электродинамике, подчиняются законам, впервые сформулированным в виде дифференциальных уравнений Дж. К. Максвеллом и опубликованным в 1873 году. Уравнения получены в результате обобщения накопленных к тому времени экспериментальных данных. Уравнения играют роль основных постулатов электромагнетизма. Они принимаются без доказательств. Первые два уравнения векторные, два другие – скалярные.

$$(1)\ rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\,, \quad (2)\ rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \quad (3)\ div\vec{D} = \rho\,, \quad (4)\ div\vec{B} = 0$$

Все величины, входящие в уравнения, являются функциям координат (радиус-вектора $\vec{r}_0$) и времени t. Плотность электрического тока $\vec{j}$ и плотность заряда ρ характеризуют распределение источников электромагнитного поля в пространстве и во времени.

На основе уравнений Максвелла можно сделать следующие выводы относительно свойств электромагнитного поля. Уравнения являются линейными. Поэтому можно утверждать, что электромагнитные поля удовлетворяют *принципу суперпозиции*: поле, созданное несколькими источниками, можно рассматривать как сумму полей, созданных каждым источником. Электрическое и магнитное поля тесно связаны между собой. Всякое изменение одного из них, вызывает изменение другого. Независимое существование одного поля без другого возможно только в статическом случае (когда поля неизменны во времени). Магнитное поле всегда вихревое. Электрическое поле может быть как вихревым, так и потенциальным и в общем случае представляет суперпозицию таких полей. Чисто потенциальным электрическое поле может быть только в статическом случае. Векторные линии электрического поля могут иметь истоки и стоки. Векторные линии магнитного поля ( и линии вихревого электрического поля) всегда непрерывны.

Уравнения в дифференциальной форме дают локальную характеристику электромагнитного процесса в некоторой точке пространства в какой-то момент времени.

Запишем *уравнения в интегральной форме*. Рассмотрим уравнение (2). Выберем некую поверхность S, опирающуюся на контур L. Проинтегрируем уравнение по поверхности S и заменим поверхностный интеграл контурным на основании теоремы Стокса: $\int\limits_S rot\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int\limits_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \quad \oint\limits_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$ (2’)

Чтобы получить интегральную форму третьего уравнения, проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V, ограниченному поверхностью S:

$\int\limits_V div\vec{D}dv = \int\limits_V \rho dv$. В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса

$\int\limits_V div\vec{D}dv = \oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$. $\int\limits_V \rho dv = q$ - по определению объемной плотности заряда.

Следовательно, $\oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q$ (3')

Аналогично получаются интегральные представления двух других уравнений.

$\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{d\,t}\int\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{s} + I$ (1'), $\oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$ (4').

Перейдем к анализу каждого уравнения Максвелла.

**Полный ток и магнитное поле.**

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока. До Максвелла это уравнение могло быть сформулировано следующим образом: циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля по замкнутому контуру L равна току I, пронизывающему данный контур $\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$, L – любой замкнутый контур, охватывающий ток I не более одного раза. Под током I при этом понимали только ток проводимости $I = \int\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{s}$. Распределение тока I внутри контура L может быть не равномерным, S – произвольная поверхность, опирающаяся на контур L $\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{s}$. Однако, это уравнение, справедливое при постоянном токе, оказывается неверным в случае переменных процессов. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть цепь переменного тока, в которую включен конденсатор. Правая часть уравнения представляет собой интеграл от плотности тока проводимости по произвольной поверхности S, опирающейся на контур. Поверхность можно провести так, чтобы она либо пересекала провод, либо прошла между обкладками конденсатора. При этом в первом случае в результате интегрирования мы получим ток I, а во втором – 0. В то же время циркуляция напряженности магнитного поля по контуру L (левая часть уравнения) не зависит от того, как проведена поверхность.

Максвелл привел обобщенную формулировку закона полного тока. Переменное электрическое поле, так же как ток проводимости, сопровождается появлением магнитного поля. Это дало основание ввести фундаментальное понятие о новом виде тока – *тока смещения*. В случае переменных полей ток смещения с точки зрения образования магнитного поля равноценен току проводимости. Плотность тока смещения определяется соотношением $\vec{j}^{\,см} = \partial\vec{D}/\partial t$. Ток проводимости и ток смещения в вакууме имеют различную физическую сущность. Ток проводимости – упорядоченное движение свободных электрических зарядов. Ток смещения в вакууме соответствует только изменению электрического поля и не сопровождается каким-либо движением электрических зарядов. В вакууме $\vec{j}^{\,см} = \varepsilon_0\, \partial\vec{E}/\partial t$. Так как вектор электрического смещения $\vec{D}$ связан с векторами $\vec{E}$ и $\vec{P}$, в среде ток смещения $\vec{j}^{\,см} = \varepsilon_0\, \partial\vec{E}/\partial t + \partial\vec{P}/\partial t$. Первое слагаемое совпадает с выражением для плотности тока смещения в вакууме, т.е. определяет ток смещения не связанный с движением зарядов. Второе слагаемое определяет ток смещения, обусловленный движением зарядов, связанных с атомами вещества, в результате действия переменного поля.

Итак, первое уравнение Максвелла $rot\vec{H} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$

Поскольку ротор составляется из пространственных производных компонент вектора, это уравнение связывает изменение в пространстве магнитного поля с изменением электрического поля во времени. Если изменения $\vec{D}$ во времени не происходит (стационарный процесс), то уравнение принимает вид $rot\vec{H} = \vec{j}$ и описывает связь магнитного поля с постоянным током. Если отсутствует ток проводимости, но происходит изменение $\vec{D}$ во времени, то циркуляция вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = I^{см}$$

Итак, правая часть первого уравнения Максвелла – это плотность обобщенного тока $(\partial\vec{D}/\partial t + \vec{j})$. В отсутствии магнитного поля ($\vec{H} = 0$) равен 0 и обобщенный ток, но если обобщенный ток существует, то обязательно присутствует магнитное поле. Роли тока проводимости и тока смещения при этом одинаковы.

Для дальнейшего анализа используем тождество $div\, rot\vec{H} \equiv 0$. $div(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}) = 0$ Тогда из третьего уравнения Максвелла получаем, что вектор плотности обобщенного тока не имеет истоков (стоков), его векторные линии либо замкнутые, либо уходят из бесконечности в бесконечность. Проинтегрируем последнее равенство по некоторому объему V и воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_V div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right)dv = \oint\limits_S \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right)d\vec{s} = I + I^{см} = 0$$

Полный обобщенный ток через любую замкнутую поверхность равен 0.

В заключение покажем, что первое уравнение Максвелла согласовано с законом сохранения заряда. Так как $div\, rot\overline{H} = 0$, запишем $div(\partial\vec{D}/\partial t) + div\vec{j} = 0 \Rightarrow$ $\frac{d(div\vec{D})}{dt} + div\vec{j} = 0$. Учитывая третье уравнение Максвелла, получаем $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$.

Это – дифференциальная форма закона сохранения заряда.

## Обобщенный закон электромагнитной индукции.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона индукции Фарадея: если замкнутый контур L пронизывается переменным магнитным потоком Ф, то в контуре возникает ЭДС e , равная скорости изменения этого потока. e = - dФ/ dt. Знак минус в правой части означает, что возникающая в контуре ЭДС стремится воспрепятствовать изменению потока, пронизывающего контур. До Максвелла считалось, что записанное уравнение справедливо только в случае проводящего контура. Максвелл предположил, что уравнение будет справедливо и в том случае, когда рассматриваемый контур представляет собой замкнутую линию, проведенную в непроводящей среде. Проанализируем уравнение $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Оно связывает пространственные изменения электрического поля с изменениями магнитного поля во времени. Если электрическое поле отсутствует, то магнитное поле, существующее без электрического, может быть только постоянным (стационарным, неизменным во времени). $\vec{E} = 0 \Rightarrow\ rot\vec{E} = 0 \Rightarrow\ \partial\vec{B}/\partial t = 0\ \Rightarrow\ \vec{B} = \text{const (t)}$.

Всякое изменение магнитного поля ($\partial\vec{B}/\partial t\ \neq 0$) обязательно вызовет появление электрического поля. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$, $\Phi = \int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$ - поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S (магнитный поток). Электродвижущая сила, наводимая в любом замкнутом контуре L, равна циркуляции вектора $\vec{E}$: $e = \oint\limits_L \vec{E}\cdot d\vec{l}\ \rightarrow\ e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

В такой форме второе уравнение Максвелла совпадает с законом электромагнитной индукции Фарадея. Закон Фарадея был установлен для проводящих контуров в магнитном поле. Закон, выражаемый вторым уравнением Максвелла в интегральной форме, значительно шире, поскольку контур L – это любой мысленно очерченный в пространстве контур. При изменении в данной области пространства магнитного поля в ней возникает индуцированное электрическое поле вне зависимости от наличия проводника, в котором это поле может вызвать ток.

## Электрическое поле и заряды.

Третье уравнение Максвелла является обобщением закона Гаусса на случай переменных процессов. Закон Гаусса связывает поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность S с зарядом q. $\oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q$

До Максвелла это уравнение рассматривалось только в применении к постоянным полям. Максвелл предположил, что оно справедливо и для переменных полей.

Из уравнения $div\vec{D} = \rho$ следует, что дивергенция вектора $\vec{D}$ отлична от 0 в точках пространства, где имеются свободные заряды. В этих точках линии вектора $\vec{D}$ имеют начало (исток) или конец (сток). Силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, так как знаки $div\vec{D}$ и ρ совпадают. В отличие от вектора $\vec{D}$, истоками (стоками) вектора $\vec{E}$ могут быть как свободные, так и связанные заряды. Перепишем уравнение для вектора $\vec{E}$:

$\varepsilon_0 div\vec{E} = \rho - div\vec{P}$. Второе слагаемое имеет смысл объемной плотности зарядов $\rho_P$, возникающих в результате неравномерной поляризации среды. Назовем такие заряды поляризационными. $div\vec{P} = - \rho_P$. Поляризационные заряды являются «связанными» и возникают только под действием электрического поля $\varepsilon_0 div\vec{E} = \rho + \rho_P$. Уравнение Максвелла в интегральной форме называют теоремой Гаусса $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$

Заметим, что поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность S обращается в 0 не только при отсутствии зарядов внутри S, но и при их нейтрализации, когда полный положительный заряд уравновешивается отрицательным зарядом.

## Непрерывность линий вектора B.

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме совпадает с законом Гаусса для магнитного поля: поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность S равен 0: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$. Это означает, что не существует линий вектора $\vec{B}$, которые только входят в замкнутую поверхность (или, наоборот, только выходят из поверхности S). Линии магнитного поля всегда пронизывают замкнутую поверхность. Непрерывность магнитных силовых линий свидетельствует о том, что в природе не существует магнитных зарядов. Нулевая правая часть в уравнении $div\vec{B}=0$ указывает на отсутствие фактора, который можно было бы назвать «магнитным зарядом». Магнитное поле порождается только электрическими токами.

## Заключительные замечания об уравнениях Максвелла.

Третье и четвертое уравнения Максвелла определенным образом зависят от первых двух. Определим дивергенцию от правой и левой частей второго уравнения Максвелла. Так как $div\, rot\vec{E} \equiv 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial(div\vec{B})}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; div\vec{B} = \text{const}\ (t)$, т.е. $div\vec{B}$ не зависит от времени. Эту константу остается выбрать равной 0, так как несомненно, в некоторый момент поле отсутствовало, т.е. было $\vec{B} = 0$ и $div\vec{B} = 0$. Следовательно, четвертое уравнение Максвелла следует из второго.

При помощи аналогичных рассуждений можно прийти к третьему уравнению Максвелла, если привлечь операцию дивергенции к первому уравнению и учесть закон сохранения заряда. $div\,rot\vec{H} = div(\partial\vec{D}/\partial t + \vec{j}) \;\Rightarrow\; div\vec{j} + \dfrac{\partial(div\vec{D})}{\partial t} = 0$.

Но $div\vec{j} = -\partial\rho/\partial t \;\Rightarrow\; div\vec{D} = \rho$.

Однако уравнения с дивергенциями нельзя рассматривать как простые следствия первых двух уравнений. Уравнение $div\vec{B} = 0$ можно формально рассматривать как универсальное (т.е. одинаковое для всех задач) начальное условие для уравнения $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Аналогично уравнение $div\vec{D} = \rho$ можно рассматривать как универсальное начальное условие к первому уравнению $rot\vec{H} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ и к *уравнению непрерывности* $div\vec{j} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ (дифференциальная форма закона сохранения заряда).

Уравнения Максвелла в интегральной или дифференциальной форме, дополненные уравнениями состояния (или, материальными уравнениями), образуют полную замкнутую систему, позволяющую рассчитывать электромагнитные процессы в материальной среде.

## Уточнение понятия о проводниках и диэлектриках.

В зависимости от электропроводности вещества делят на проводники и диэлектрики. Чем больше величина удельной проводимости $\sigma$, тем больше плотность тока проводимости в среде при той же напряженности электрического поля. Вводят понятия *идеального проводника* – среда с неограниченной проводимостью ($\sigma \to \infty$), и *идеального диэлектрика* ($\sigma = 0$).

В чем различие этих сред с точки зрения электродинамики? Преобразуем выражение для плотности обобщенного тока с учетом материальных уравнений $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. В случае идеального диэлектрика (σ = 0) в выражении исчезает первое слагаемое, для идеального проводника ($\sigma \to \infty$) второе слагаемое много меньше и им можно пренебречь. Это означает, что в идеальном диэлектрике может существовать лишь ток смещения, а в идеальном проводнике – только ток проводимости. В реальных средах имеется как ток проводимости, так и ток смещения. Соотношение этих токов зависит не только от характеристик среды σ и $\varepsilon_r$, но и от скорости изменения поля $\partial \vec{E}/\partial t$. В случае монохроматического поля $\vec{E} = \vec{E}_m(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi)$ плотность тока проводимости $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_m(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi)$ а плотность тока смещения $\vec{j}^{\,см} = \partial \vec{D}/\partial t = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_m(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi)$. Отношение амплитуд этих токов является критерием деления сред на проводники и диэлектрики. $\left| \vec{j}_m / \vec{j}_m^{\,см} \right|$ = $\sigma / \omega\varepsilon_0\varepsilon_r$. Если $\sigma / \omega\varepsilon_0\varepsilon_r >> 1$, среду считают проводником, если $\sigma / \omega\varepsilon_0\varepsilon_r << 1$, то такая среда относится к диэлектрикам. Такая оценка не имеет абсолютного характера, так как существенно зависит от скорости изменения электромагнитного процесса. Диэлектрические свойства сильнее проявляются при более высоких частотах. Может оказаться, что среда, проявляющая себя как диэлектрик при достаточно высоких частотах, на низких частотах выступает как проводник.

Отметим существенную особенность проводящих сред. В области, где $\sigma \neq 0$ не может быть постоянного объемного распределенного заряда. Рассмотрим безграничную однородную изотропную среду, обладающую отличной от 0 проводимостью. Так как в этом случае $div\vec{j} = div\,\sigma\vec{E} = (\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r)div\,\vec{D} = (\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r)\rho$, то соотношение $div\vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$, представляющее дифференциальную форму закона сохранения заряда принимает вид $\partial \rho / \partial t + (\sigma / \varepsilon_0\varepsilon_r)\, \rho = 0$. Решение этого уравнения $\rho = \rho_0 \exp(-\sigma t / \varepsilon_0\varepsilon_r)$, где $\rho_0 = \rho_0$ (x,y,z) – объемная плотность заряда в начальный момент времени t = 0. Таким образом, при $\sigma \neq 0$ объемная плотность зарядов в каждой точке, где $\rho_0 \neq 0$, экспоненциально убывает со временем. Промежуток времени $\tau$, в течении которого заряд в малом элементе объема уменьшается в *e* раз, называется временем релаксации. $\tau = \varepsilon_0\varepsilon_r / \sigma$. Для хорошо проводящих сред время релаксации очень мало. Для металлов $\tau \approx 10^{-18}$с. Даже для плохого проводника (дистиллированная вода) $\tau < 10^{-6}$с. То, что объемная плотность заряда в каждой точке внутри проводящей области экспоненциально убывает со временем, не означает, что заряды исчезают. Если рассматриваемая область окружена непроводящей средой, заряды задерживаются на границе области, образуя тонкий поверхностный слой.

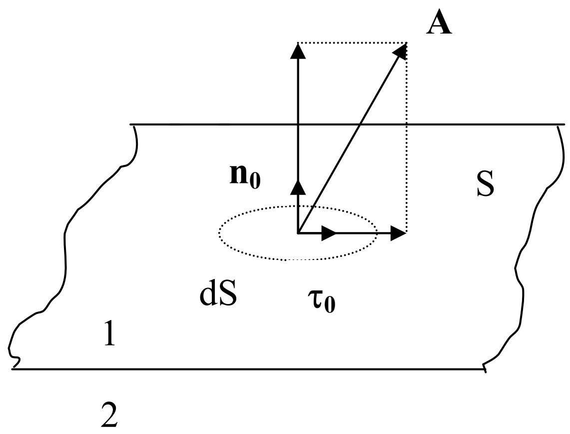
## Граничные условия для векторов электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме справедливы в случае линейных сред, параметры $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ которых либо не зависят от координат, либо являются непрерывными функциями координат. Однако, часто рассматриваемая область состоит из двух или более разнородных сред. При анализе макроскопических свойств поля в таких случаях приходится считать, что, по крайней мере, один из параметров $\varepsilon$, $\mu$, или $\sigma$ на границе раздела сред меняется скачком. Операция дифференцирования в точках, принадлежащих границе раздела, не законна, уравнения Максвелла в дифференциальной форме в этих точках теряют смысл. Поэтому для изучения поведения векторов электромагнитного поля при переходе из одной среды в другую нужно исходить из уравнений в интегральной форме.

Соотношения, показывающие связь между значениями векторов электромагнитного поля в разных средах у поверхности раздела, называются *граничными условиями*.

Пусть поверхность S разделяет среды 1 и 2. Выберем на поверхности S точку M и выделим столь малую ее окрестность ΔS, что этот элемент поверхности можно считать плоским. Тогда в точке M некоторый вектор $\vec{A}$ может быть разложен на *нормальную* (перпендикулярную плоскости) и *тангенциальную* (касательную к плоскости) составляющие $\vec{A} = \vec{n}_0 A_n + \vec{\tau}_0 A_\tau$, $\vec{n}_0$ – орт нормали из среды 2 в среду 1,

$\vec{\tau}_0$ – орт в плоскости ΔS. Такое разложение относится к любому из векторов поля $E, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ в точке M.




В ряде случаев на границе раздела могут располагаться микроскопические носители заряда, как неподвижные, так и образующие ток проводимости. В макроскопической электродинамике принимается, что такого рода заряд не занимает объема, а является поверхностным. Плотность поверхностного заряда $\rho_s$, плотность поверхностного тока $j_s$.

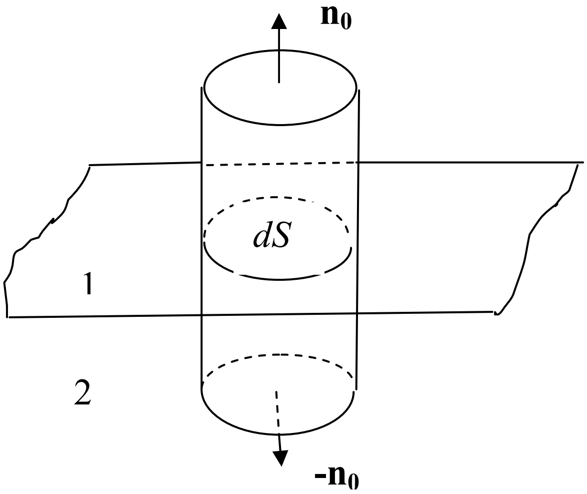
Выясним, как ведут себя нормальные и тангенциальные компоненты векторов поля на границе раздела разнородных сред. Поскольку ε, μ, σ разрывны, компоненты векторов поля при переходе границы раздела сред тоже испытывают разрыв – либо обе компоненты, либо одна из них изменяется скачкообразно. Векторные линии поля претерпевают излом.

## Граничные условия для векторов электрического поля.

Вектор электрической индукции подчиняется граничному условию $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$ – разность нормальных компонент вектора $\vec{D}$ на границе раздела сред равна плотности поверхностного заряда. Если граница не имеет заряда, то нормальная компонента $\vec{D}$ при переходе границы остается непрерывной.

Покажем справедливость этого утверждения. Используем третье уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_S \vec{D} d\vec{s} = q$

Пусть S – поверхность пересекающего границу раздела малого цилиндра высотой Δh, основания которого параллельны оказавшемуся внутри участку границы ΔS.

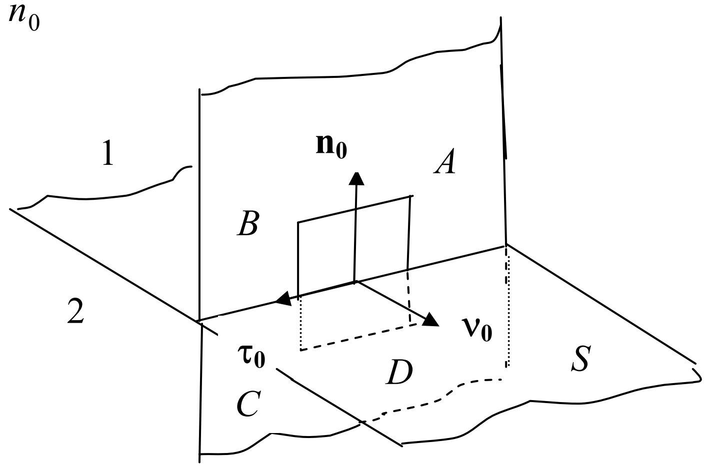



В виду малости цилиндра поле на его основаниях можно считать однородным $\vec{D}$= const, нормали к основаниям противоположны. Поэтому, раскрывая интеграл, получаем $\vec{D}_1\vec{n}_0\Delta S - \vec{D}_2\vec{n}_0\Delta S +$ $\Phi_{бок}$ = $\Delta q$. Первые два члена – поток вектора $\vec{D}$ через основания цилиндра, $\Phi_{бок}$ – поток через боковую поверхность, $\Delta q$ – полный заряд внутри цилиндра. Будем уменьшать высоту $\Delta$h цилиндра, но так, чтобы основания оставались в разных средах, в пределе при $\Delta h \to 0$ они совпадут с элементом граничной поверхности $\Delta$S. При этом исчезает боковая поверхность, следовательно, $\Phi_{бок} \to 0$. Если на границе раздела сосредоточен заряд $\Delta q = \rho_s \Delta S$, получается следующее соотношение $\vec{D}_1\vec{n}_0\Delta S - \vec{D}_2\vec{n}_0\Delta S = \rho_s \Delta S \quad \to \quad (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\vec{n}_0 = \rho_s$.

Если на границе раздела поверхностные заряды отсутствуют, то можно записать $\varepsilon_{a1}E_{1n} = \varepsilon_{a2}E_{2n} \quad \to \quad E_{1n} / E_{2n} = \varepsilon_{a2} / \varepsilon_{a1}$ – нормальная компонента вектора $\vec{E}$ при переходе через незаряженную поверхность раздела сред претерпевает разрыв, величина которого определяется отношением диэлектрических проницаемостей этих сред. Наличие поверхностной плотности заряда в рассматриваемой точке приводит к изменению величины разрыва, увеличивая или уменьшая его. При определенном значении $\rho_s$ нормальная компонента вектора $\vec{E}$ может оказаться непрерывной. Поверхностные заряды в природе отсутствуют. Их вводят для упрощения расчетов вместо реального тонкого слоя зарядов, когда не интересуются распределением поля внутри слоя. В каждой точке внутри реального заряженного слоя составляющая $D_n$ непрерывна, но ее значения по разные стороны слоя отличаются на конечную величину. Поэтому при замене реального слоя зарядов бесконечно тонким (т.е. поверхностным зарядом) приходится считать, что $D_n$ изменяется скачком.

Для тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$ справедливо следующее граничное условие $E_{1\tau}$ - $E_{2\tau}$ = 0 –тангенциальная компонента вектора $\vec{E}$ при переходе через границу раздела сред всегда остается непрерывной.

Пересечем границу раздела (плоскость S) плоскостью P, проходящей через нормаль к S, и построим на ней малый прямоугольный контур ABCD, лежащий в обеих средах. Стороны AB и CD параллельны линии пересечения границы раздела, AB = CD = Δ $l$, BC = AD = Δ h. $\vec{\nu}_0$ – орт нормали к P, касательный к S. $\vec{\tau}_0$ – орт касательной к S. $\vec{\tau}_0 = \vec{\nu}_0 \times \vec{n}_0$




Воспользуемся вторым уравнением Максвелла $\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}d\vec{s}$, L – контур ABCD. В виду малости контура поле $\vec{E}$ на сторонах AB и CD можно считать однородным $\vec{E}$ = const. Направление обхода контура выбираем на AB по $\vec{\tau}_0$, тогда на CD оно противоположно, т.е. $(-\vec{\tau}_0)$. $\vec{E}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{E}_2\vec{\tau}_0\Delta l +$ С$_{бок}$ = - $\frac{d}{dt}\int\limits_{S=\Delta P} \vec{B}\,d\vec{s}$

С$_{бок}$ – циркуляция вектора $\vec{E}$ на боковых участках BC и AD. Вычисление магнитного потока в правой части производится через площадку ΔP, ограниченную контуром L. Устремим Δh → 0. Стороны AB и CD совпадают на границе, ΔP → 0. В результате С$_{бок}$ → 0 , $\int\limits_{\Delta P} \vec{B}d\vec{s} \to 0$. Остается $E_{1\tau}\Delta l - E_{2\tau}\Delta l = 0 \to E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$.

Касательные составляющие вектора $\vec{D}$, наоборот, претерпевают разрыв, величина которого зависит от соотношения между диэлектрическими проницаемостями $D_{1\tau} / D_{2\tau} = \varepsilon_{a1} / \varepsilon_{a2}$.

Итак, граничные условия показывают, что на границе раздела векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ преломляются. Обозначим углы между нормалью $\vec{n}_0$ к поверхности раздела и векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ соответственно через $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

Так как $tg\ \alpha_1 = E_{1\tau} / E_{1n}$, $tg\ \alpha_2 = E_{2\tau} / E_{2n}$, используя граничные условия $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ и $E_{1n} / E_{2n} = \varepsilon_{a2} / \varepsilon_{a1}$ (при $\rho_s = 0$), получаем, что в отсутствии поверхностных зарядов на границе раздела справедливо соотношение $tg\ \alpha_1 = (\varepsilon_{a1} / \varepsilon_{a2})\ tg\ \alpha_2$ . В изотропных средах векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ направлены одинаково, поэтому последнее соотношение определяет также и преломление вектора $\vec{D}$.

**Граничные условия для векторов магнитного поля.**

Нормальная компонента вектора $\vec{B}$ при переходе через границу раздела сред всегда остается непрерывной. $B_{1n} - B_{2n} = 0$.

Для доказательства воспользуемся четвертым уравнением Максвелла. $\oint\limits_S \vec{B}d\vec{s} = 0$

В качестве площади S возьмем поверхность малого цилиндра. В виду малости цилиндра поле на его основаниях можно считать однородным $\vec{B}$ = const. Внешняя нормаль к верхнему основанию направлена по $\vec{n}_0$, а к нижнему – противоположно. Поэтому $\vec{B}_1\vec{n}_0\Delta S - \vec{B}_2\vec{n}_0\Delta S$ + $\Phi_{бок}$ = 0. $\Phi_{бок}$ – поток вектора $\vec{B}$ через боковую поверхность цилиндра. Устремим высоту цилиндра $\Delta h \to 0$. $\Rightarrow$ $\Phi_{бок} \to 0$. После деления на $\Delta S$ получаем $B_{1n} - B_{2n} = 0$, или $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\vec{n}_0 = 0$.

В свою очередь нормальная составляющая вектора $\vec{H}$ испытывает разрыв, величина которого определяется отношением магнитных проницаемостей $H_{1n} / H_{2n} = \mu_{a2} / \mu_{a1}$.

Тангенциальная компонента вектора $\vec{H}$ непрерывна только при отсутствии на границе поверхностного тока. В общем случае справедливо граничное условие

$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\vec{\tau}_0 = \vec{j}_s\vec{v}_0$, или $\vec{n}_0 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_s$. Разность тангенциальных компонент вектора $\vec{H}$, перпендикулярных поверхностному току, равна плотности поверхностного тока на границе раздела двух сред.

Для доказательства воспользуемся первым уравнением Максвелла

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}d\vec{s} + I$$

В качестве контура L выберем малый прямоугольный контур ABCD. Получаем $\vec{H}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{H}_2\vec{\tau}_0\Delta l + C_{бок} = \frac{d}{dt}\int_{\Delta P}\vec{D}d\vec{s} + \int_{\Delta P}\vec{j}d\vec{s}$, $C_{бок}$ –циркуляция $\vec{H}$ по боковым участкам BC и AD. Устремим $\Delta h \to 0$. При этом BC $\to 0$, AD $\to 0$. $\Rightarrow$ $C_{бок} \to 0$, а так же площадь $\Delta P \to 0$ $\Rightarrow$ $\int_{\Delta P}\vec{D}d\vec{s} \to 0$ . Второй интеграл, выражающий полный ток проводимости I, проходящий через $\Delta P$, при $j_s \neq 0$ не уничтожается. При $\Delta h \to 0$ площадь $\Delta P$ вырождается в отрезок $\Delta l$ , ток I = $\vec{j}_s\vec{v}_0\Delta l$ и мы получаем граничное условие.

При переходе через границу раздела, по которой текут поверхностные токи, касательная составляющая вектора $\vec{H}$ претерпевает разрыв, величина которого определяется значением плотности поверхностного тока в рассматриваемой точке.

Переходя к касательным составляющим вектора магнитной индукции, получаем

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}} = j_{s\nu}$$

Поверхностные токи, как и поверхностные заряды в природе отсутствуют. Их вводят для упрощения расчетов вместо реального тонкого слоя токов, когда не интересуются распределением поля внутри слоя. В каждой точке внутри реального токового слоя касательная составляющая $\vec{H}$ непрерывна, но ее значения по разные стороны слоя отличаются на конечную величину. При замене реального токового слоя бесконечно тонким приходится считать, что $H_\tau$ изменяется скачком.

Таким образом, на поверхности раздела двух сред должны выполняться следующие граничные условия:

$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$ или $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\vec{n}_0 = \rho_s$; $B_{1n} - B_{2n} = 0$ или $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\vec{n}_0 = 0$

$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$ или $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n}_0 = 0$; $H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{s\nu}$ или $\vec{n}_0 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_s$.

Эти соотношения справедливы для электромагнитных процессов, рассматриваемых в макроскопической электродинамике.

*Рассмотрим несколько примеров.* 1). При изучении переменных электромагнитных полей вблизи поверхности металлических тел часто предполагают, что рассматриваемое тело является идеально проводящим. При этом граничные условия упрощаются, так как в среде с $\sigma\to\infty$ поле отсутствует. Действительно, объемная плотность тока проводимости $j$ – конечная величина. Поэтому из закона Ома $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ следует, что внутри идеального проводника $\vec{E} = 0$. Полагая во втором уравнении Максвелла $\vec{E} \equiv 0$, получаем $\partial\vec{B}/\partial t = 0$. Так как поле считаем переменным во времени, то, следовательно, $\vec{B} = 0$. Пусть вторая среда – идеально проводящая. $\vec{D}_2 = \vec{E}_2 = \vec{H}_2 = \vec{B}_2 = 0$. Тогда из граничных условий $E_{1n} = \rho_s/\varepsilon_{a1}$, $E_{1\tau} = 0$, $H_{1n} = 0$, $H_{1\tau} = j_{s\nu}$, т.е. на поверхности идеального проводника касательная составляющая вектора $\vec{E}$ и нормальная составляющая вектора $\vec{H}$ обращаются в 0. Поле $\vec{E}_1 = \vec{n}_0 E_{1n}$, т.е. поле $\vec{E}_1$ подходит к поверхности металла по нормали к поверхности. Существование поля в среде 1 при его отсутствии в среде 2 обусловлено поверхностными зарядами и токами.

2).Предположим, что в объеме диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью создано равномерное электрическое поле. В этой среде имеется узкая воздушная щель. Если вектор $\vec{E}$ параллелен щели, то, имея в виду условия для касательных составляющих, получаем, что напряженность поля в щели такая же, что и в среде. Если вектор $\vec{E}$ перпендикулярен щели, то в предположении, что $\rho_s = 0$, из граничного условия для нормальных компонент следует $\varepsilon_{a1}E_{1n} = \varepsilon_{a2}E_{2n}$, т.е. напряженность поля в щели (при изотропной среде) в $\varepsilon_r$ раз больше.

## Теорема Пойнтинга.

Электромагнитное поле, являясь особой формой материи, обладает энергией. Можно придти к заключению о существовании электромагнитного поля по наблюдаемому при известных условиях возникновению или исчезновению доступных восприятию форм энергии (например, тепловой или механической). Уравнения Максвелла определяют изменение электромагнитного поля в пространстве и во времени. Составим уравнение, которое позволяет определить те преобразования энергии, в которых эти изменения поля проявляются. Сформулируем уравнение баланса применительно к некоторому объему *V*, ограниченному поверхностью *S*.

Пусть в объеме *V*, заполненном однородной изотропной средой, находятся сторонние источники. Очевидно, что мощность, выделяемая этими источниками, может расходоваться на потери и на изменение электромагнитной энергии внутри объема *V*, а также частично рассеиваться, уходя в окружающую среду через поверхность *S*. При этом должно выполняться равенство $P^S = P^r + \frac{dW}{dt} + P^{\Sigma}$, где $P^s$ – мощность сторонних (заданных) источников, $P^r$ – мощность потерь внутри объема *V*, $P^{\Sigma}$ - мощность, проходящая через поверхность *S*, *W* – энергия электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме *V*, $\frac{dW}{dt}$ - мощность, расходуемая на изменение энергии внутри объема *V*. Написанное уравнение дает только качественное представление об энергетических соотношениях.

Чтобы получить количественные соотношения, следует воспользоваться уравнениями Максвелла. Рассмотрим первое уравнение Максвелла с учетом сторонних токов $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}^{\,S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\vec{j}^{\,S}$- объемная плотность стороннего тока. Члены этого уравнения – векторные величины, имеющие размерность А/м$^2$. Чтобы получить уравнение для мощности, надо видоизменить первое уравнение так, чтобы его члены стали скалярными величинами, измеряющимися в ваттах. Для этого достаточно умножить указанное уравнение на вектор $\vec{E}$: $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,S} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Преобразуем левую часть уравнения, используя известную формулу векторного анализа $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$. Кроме того, заменим $\nabla \cdot \vec{E}$ его значением из второго уравнения Максвелла. При этом получим уравнение

$$-\vec{E} \cdot \vec{j}^{\,S} = \vec{E} \cdot \vec{j} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Последние два слагаемых представим в виде

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu_0\mu H^2}{2}\right)$$

Введя обозначение $\vec{E}\times\vec{H}=\vec{\Pi}$, проинтегрируем по объему $V$:

$$-\int\limits_V \vec{E}\cdot\vec{j}^{\,s}dv=\int\limits_V \vec{E}\cdot\vec{j}dv+\oint\limits_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{s}+\frac{d}{dt}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu_0\mu H^2}{2}\right)dv$$

Здесь использована теорема Остроградского–Гаусса для преобразования объемного интеграла от $\nabla\cdot\vec{\Pi}$ в поверхностный интеграл от вектора $\vec{\Pi}$ и, кроме того, в последнем члене правой части изменен порядок операций интегрирования и дифференцирования.

Полученное уравнение носит название *теоремы Пойнтинга*. Вектор $\vec{\Pi}$ - вектор Пойнтинга. Левая часть уравнения определяет мощность, отдаваемую сторонними токами в объеме *V*. Действительно, ток проводимости представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц. Ток отдает энергию электромагнитному полю при торможении этих частиц. Для этого необходимо, чтобы вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ имел составляющую, ориентированную противоположно направлению тока, т.е. чтобы скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{j}^{\,S}$ было отрицательным ($\vec{E}\cdot\vec{j}^{\,S}<0$). Тогда левая часть уравнения – положительная величина.

Первый член в правой части равен мощности джоулевых потерь. Действительно, представим объем V в виде суммы бесконечно малых цилиндров длиной dl, торцы которых (ds) перпендикулярны направлению тока (вектору $\vec{j}$). Тогда $\vec{E}\,\vec{j}$ dv = $E\,j$ dv = ($E$ dl)($j$ ds) = dU dI = $P^r$.

Здесь учтено, что вектор плотности тока и вектор напряженности поля сонаправлены $\vec{j}=\sigma\vec{E}$. dI = $j$ ds – ток, протекающий по рассматриваемому бесконечно малому цилиндру, dU = $E$ dl –изменение потенциала на длине dl, а $dP^r$ – мощность джоулевых потерь в объеме dV.

Для $P^r$ можно получить и другие представления $P^r=\int\limits_V \vec{E}\vec{j}dv=\int\limits_V \sigma\vec{E}^2dv=\int\limits_V \frac{\vec{j}^{\,2}}{\sigma}dv$.

Эту формулу можно рассматривать как обобщенный закон Джоуля – Ленца, справедливый для проводящего объема V произвольной формы.

Для выяснения физического смысла последнего члена в правой части уравнения рассмотрим частный случай. Предположим, что объем окружен идеально проводящей оболочкой, совпадающей с поверхностью *S*. Тогда касательная составляющая $\vec{E}$ на поверхности *S* будет равна нулю. Кроме того, $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$, где $\vec{n}_0$- орт внешней нормали. Следовательно, поверхностный интеграл в уравнении будет равен нулю, т.к. нормальная компонента векторного произведения $\vec{E} \times \vec{H}$ определяется касательными составляющими входящих в него векторов. Предположим также, что в пределах объема *V* среда не обладает проводимостью (σ = 0). При этом в рассматриваемой области не будет джоулевых потерь. В результате

получим $$-\int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,s} dv = \frac{d}{dt} \int\limits_V \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \right) dv$$

Очевидно, что в этом случае мощность сторонних источников может расходоваться только на изменение энергии электромагнитного поля, следовательно, правая часть последнего уравнения представляет собой скорость изменения энергии электромагнитного поля, запасенной в объеме *V*. Энергия электромагнитного поля в

объеме *V* $$W = \int\limits_V \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \right) dv$$

Осталось выяснить физическую сущность поверхностного интеграла. Предположим, что в объеме *V* отсутствуют потери, кроме того, величина электромагнитной энергии остается постоянной (*W*= const). В этом случае вся мощность сторонних источников должна уходить в окружающее пространство. Уравнение принимает вид

$$-\int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,s} dv = \oint\limits_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$$

Следовательно, поток вектора $\vec{\Pi}$ через поверхность *S* равен мощности $P^{\Sigma}$, уходящей в пространство из объема *V*. Вектор Пойнтинга можно трактовать как вектор плотности потока энергии в единицу времени. Направление этого вектора в изотропной среде совпадает с направлением распространения энергии. Поток, проходящий через поверхность *S*, определяемый интегралом $\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$, может быть направлен из окружающего пространства в объем *V*, при этом этот интеграл будет отрицательной величиной.

**Несколько замечаний о задачах электродинамики.**

Электромагнитные поля определяются как решение системы уравнений Максвелла, однако не всякое решение системы есть электромагнитное поле. При постановке задачи вводят дополнительные условия, сообщающие физическую определенность. Это начальные и граничные условия, задание сторонних сил.

Начальные условия – задание поля в некоторый момент времени. При рассмотрении периодических процессов вопрос о постановке начальных условий отпадает.

Граничные условия – соотношения между нормальными и касательными компонентами векторов поля на границах раздела сред и задание полей на внешних границах рассматриваемых областей.

Из системы уравнений Максвелла можно получить частные системы уравнений. Если процесс не изменен во времени (т.е. временные производные равны 0), получается система для описания стационарного электромагнитного поля, которая, в свою очередь, при отсутствии перемещения зарядов (при отсутствии токов, т.е. $\vec{j} = 0$) распадается на две независимые системы: уравнения электростатики и магнитостатики.

Заметим, что для гармонических во времени процессов, когда поля меняются по закону cos (ωt + φ), также удается исключить из уравнений системы временную зависимость.

В качестве самостоятельного класса выделяют квазистационарные процессы, т.е. процессы протекающие достаточно медленно. В этом случае в первом уравнении Максвелла при наличии тока проводимости можно пренебречь током смещения. Однако когда тока проводимости нет (емкость в цепи переменного тока), токи смещения необходимо учитывать. Квазистационарные поля сохраняют в своей структуре основные черты стационарных. Пусть для заданной системы постоянных токов найдено магнитное поле $\vec{H}(\vec{r})$. Можно представить себе столь медленное изменение этих токов во времени, что оно не вызовет заметного перераспределения поля в пространстве, т.е. при изменении токов во времени по закону $f\ (t)$ поле $\vec{H}(\vec{r},t)$ имеет вид $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})\ f(t)$ и, следовательно, в каждый момент времени $t$ сохраняет структуру стационарного поля, изменяясь только по величине. Аналогично описывается и электрическое квазистационарное поле.

### Система уравнений и общие понятия электростатики.

Электростатическое поле описывается системой уравнений, которая получается из системы уравнений Максвелла в предположении, что векторы поля не зависят от времени и отсутствует перемещение зарядов ( $\vec{j} = 0$ )

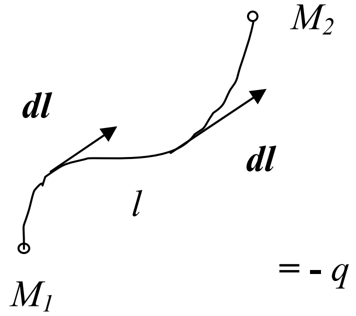
$$rot\vec{E} = 0 \qquad\qquad \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

$$div\vec{D} = \rho \qquad \text{или} \qquad \oint_S \vec{D}d\vec{s} = \int_V \rho dv$$

Является ли такое математическое электростатическое поле реальным? Все реальные среды обладают некоторой электропроводностью ( $\sigma \neq 0$ ).Следовательно, при существовании электрического поля $\vec{E} \neq 0$ возникает ток $\vec{j} = \sigma \vec{E} \neq 0$. Заряженные предметы в воздухе теряют заряд из-за «утечки» - при этом существует ток, а поле меняется во времени. Идеальное электростатическое поле лишено энергообмена ( $\vec{H} = 0$, следовательно $\vec{\Pi} = 0$ ), такое поле не может быть обнаружено. Итак, идеальное электростатическое поле в природе отсутствует. Однако решения системы уравнений электростатики дают хорошее приближение для круга явлений, рассматриваемых на практике как электростатические – при медленных перемещениях заряженных тел или когда при утечке заряда возникающие токи оказываются настолько малыми, что энергия сопутствующего магнитного поля мала по сравнению с энергией электрического поля. Электрическое поле при этом практически не отличается от электростатического.

Так как для электростатического поля $rot\vec{E} = 0$, это поле является потенциальным (безвихревым). Его силовые линии имеют истоки и стоки: они начинаются и заканчиваются на зарядах. Вектор $\vec{E}$ можно представить в виде градиента скалярной функции $\vec{E} = -grad\varphi$; φ - электростатический потенциал, знак (- ) соответствует принятому определению потенциала. Это соотношение определяет функцию φ неоднозначно. Величина вектора $\vec{E}$ не изменится, если вместо потенциала φ ввести функцию φ*, отличающуюся на произвольную постоянную. При решении конкретных задач обычно сначала находят потенциал φ, а затем вычисляют вектор $\vec{E}$. При этом обычно произвольную постоянную выбирают так, чтобы потенциал в бесконечно удаленных точках равнялся 0.

Каков физический смысл потенциала φ? Рассмотрим перемещение в электростатическом поле точечного заряда q. На заряд q при этом действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Вычислим работу, совершаемую при движении заряда на пути l от точки $M_1$ до точки $M_2$. Движение заряда может быть сколь угодно медленным, чтобы оставаться в рамках электростатики.




$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} q\vec{E}d\vec{l} = q\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}d\vec{l} = -q\int_{M_1}^{M_2} grad\varphi\, d\vec{l} =$$

$$= -q\int_{M_1}^{M_2} \left(\vec{x}_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{y}_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{z}_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)(\vec{x}_0 dx + \vec{y}_0 dy + \vec{z}_0 dz) =$$

$$= -q\int_{M_1}^{M_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -q\int_{M_1}^{M_2} d\varphi = -q(\varphi_2 - \varphi_1)$$

( Здесь dφ - полный дифференциал функции φ)

Таким образом, физический смысл имеет разность потенциалов в двух точках – она определяет работу при перемещении единичного заряда в электростатическом поле между этими точками. $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}\, d\vec{l}$.

Работа электрических сил не зависит от пути перемещения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек – это важнейшее свойство электростатического поля. (Это справедливо для любых потенциальных полей).

Если точки совпадают, то $\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0$, т.е. в электростатическом поле при перемещении заряда по замкнутому пути работа не производится.

Если потенциал бесконечно удаленной точки считать равным 0, то потенциал в точке М можно определить как работу, которую надо совершить для перемещения единичного заряда из точки М, для которой он определяется, на ∞.

Удобство использования потенциала φ состоит в том, что вместо трех компонент $E_x$, $E_y$, $E_z$ вектора $\vec{E}$ достаточно знать одну величину φ, при помощи которой поле находится по формуле $\vec{E} = -grad\,\varphi$. Поэтому задачи электростатики обычно формулируют относительно потенциала φ.

Получим уравнение для потенциала φ. Преобразуем уравнение $div\vec{D} = \rho$.

$$div\vec{D} = div(\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}) = div\,(\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,(-grad\,\varphi)) = -\varepsilon_0\;div\,(\varepsilon_r\,grad\,\varphi) =$$

для однородной среды, где $\varepsilon_r = const$

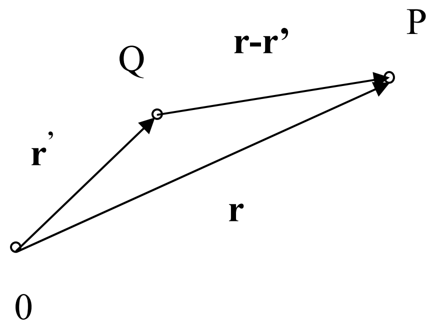
$$= -\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,div\,(grad\,\varphi) = -\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,(\nabla\bullet\nabla\varphi) = -\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\Delta\,\varphi = \rho \quad \text{или}$$

$\Delta\,\varphi = -\ \rho\,/\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r$ - уравнение Пуассона.

Решение этого уравнения имеет вид $\varphi\,(\vec{r}\,) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,dv'$

$\vec{r}$ – радиус– вектор точки наблюдения, $\vec{r}\,'$ – радиус-вектор точки интегрирования в среде, где присутствует заряд с плотностью ρ.

$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = (\,(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\,)^{1/2}$ – длина направленного отрезка – это функция положения точки наблюдения Р при фиксированной точке Q.




В частном случае, когда в рассматриваемой области пространства заряд отсутствует ($\rho = 0$), получаем уравнение Лапласа $\Delta\,\varphi = 0$.

Решения этого уравнения называются гармоническими функциями.

Рассмотрим граничные условия, которые необходимо знать, если имеются две или более разнородные среды. Электростатическое поле – частный случай электромагнитного, поэтому рассмотренные граничные условия для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ должны выполняться и для электростатического поля. Необходимо определить граничные условия для потенциала φ. Определили $\vec{E} = -grad\,\varphi$; учтем, что проекция вектора $grad\ \varphi$ на произвольное направление $\vec{l}_0$ равна производной функции φ по этому направлению. Тогда из соотношения $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ получаем

$(\partial\varphi\ /\ \partial\tau)_1 = (\partial\varphi\ /\ \partial\tau)_2$, где $\partial\ /\ \partial\tau$ - означает дифференцирование по любому направлению в плоскости, касательной к поверхности раздела в рассматриваемой точке. Интегрируя это равенство по τ, получаем $\varphi_1 = \varphi_2 + A$, где А – произвольная постоянная, $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – значения потенциала на поверхности раздела в первой и во второй среде соответственно. Постоянную А в большинстве случаев можно считать равной 0, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$.

Учитывая, что $\varepsilon_0\,\varepsilon_{r\,1}\,E_{1\,n} - \varepsilon_0\,\varepsilon_{r\,2}\,E_{2\,n} = \rho_s$, получаем

$\varepsilon_0\,\varepsilon_{r\,2}\,(\partial\varphi\,/\partial n\,)_2 - \varepsilon_0\,\varepsilon_{r\,1}\,(\partial\varphi\,/\partial n\,)_1 = \rho_s$, $\partial\,/\,\partial n$ – дифференцирование по нормали к поверхности раздела, направленной из среды 2 в 1.

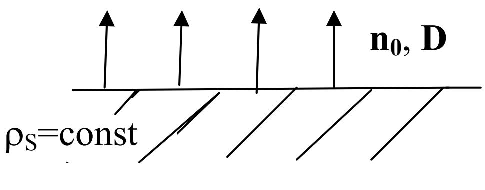
Если одна из сред – проводник, граничные условия принимают более простой вид. Проводник – замкнутая область, внутри которой возможно свободное перемещение зарядов. Плотность тока проводимости $\vec{j} = \sigma\,\vec{E}$, но в электростатике перемещение зарядов отсутствует ($j = 0$), а, так как $\sigma \neq 0$, то вектор $\vec{E}$ электростатического поля внутри проводника равен 0. Это особенность электростатического поля – оно равно

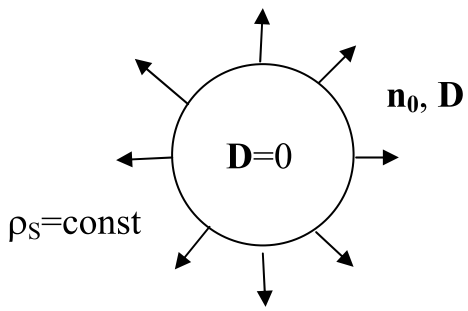
0 внутри любого проводника (мы уже показали, что *переменное* электромагнитное поле не проникает в идеальный металл).

Согласно условию $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{\tau}_0 = 0$ $E_\tau|_s = 0$ – в прилегающей диэлектрической среде. Условие $\vec{E}\,\vec{\tau}_0 = 0$ можно истолковать, как постоянство потенциала на поверхности проводника: $\vec{E}\,\vec{\tau}_0 = -\partial\varphi / \partial\tau = 0$ (дифференцирование по длине вдоль любого касательного направления). Следовательно, φ = const на S. Так как $\vec{E} = 0$ в проводнике, следовательно, φ = const и в проводнике, т.е. проводящие тела – эквипотенциальны.

$\partial\varphi / \partial n|_s = -\rho_s / \varepsilon_0 \varepsilon_{r\,1}$, $\vec{n}_0$ – внешняя нормаль по отношению к проводящей среде.

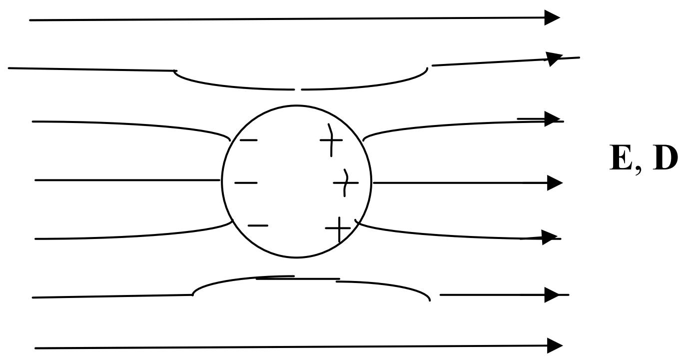
Поверхность проводника в электростатике заряжена ($\vec{D}\,\vec{n}_0 = \rho_s$); электростатическое поле существует вне проводящих тел; силовые линии перпендикулярны к их поверхности. Процесс установления электростатического поля: заряды внутри проводника под действием поля приходят в движение и занимают равновесное положение на его поверхности. Поля зарядов внутри проводника взаимно компенсируются. В простейших случаях плотность поверхностного заряда проводника – величина постоянная.




Из соотношения $\vec{D}\,\vec{n}_0 = \rho_s$ можно найти поле на поверхности проводящего шара в изотропной среде, если известен его полный заряд q: $\vec{D} = \vec{r}_0 q / (4\pi R^2)$.

Полный заряд проводящего тела в электростатическом поле может равняться 0, но отсюда не следует, что везде на поверхности проводника $\rho_s = 0$. Это означало бы отсутствие поля ($E_{1\,n} = \rho_s / \varepsilon_0 \varepsilon_{r\,1}$). Пусть незаряженный проводящий цилиндр вносят в однородное электростатическое поле. С учетом закона сохранения заряда можно утверждать, что полный заряд цилиндра остается равным 0, но поле должно деформироваться так, чтобы силовые линии оказались ортогональными проводящей поверхности, а это означает, что $\rho_s \neq 0$. Заряды имеют разные знаки на противоположных сторонах цилиндра. Появление заряда под действием поля называют электростатической индукцией.




В электростатике встречаются задачи, когда задано расположение и форма всех проводников, находящихся в однородном диэлектрике. Требуется найти поле в этом диэлектрике, если известен потенциал каждого проводника или общий заряд каждого проводника. Это – краевые задачи электростатики. Область V, в которой требуется найти поле, либо ограничена поверхностью проводников, либо простирается до бесконечности. Во втором случае проводящие тела целиком лежат внутри V. Потенциал в бесконечно удаленной точке считается равным 0.

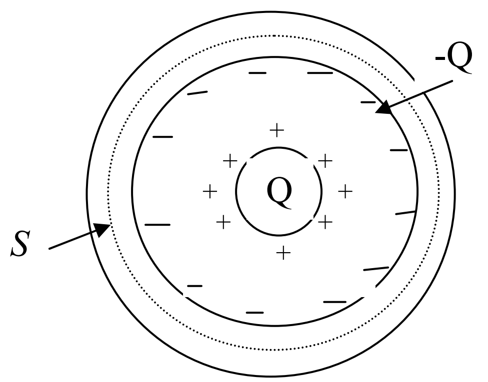
Краевая задача для уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$, $\varphi = f_i$ на поверхности $S_i$ – задача Дирихле. (Если задано $\partial\varphi / \partial n = f_i$ на $S_i$ – задача Неймана). Указанные задачи имеют единственное решение. После того, как потенциал $\varphi$, затем и поле найдены, становится известным распределение зарядов на каждом проводнике как результат взаимного влияния – электростатической индукции – всех проводников.

## Емкость.

Так как электростатическое поле во всех точках проводника имеет один и тот же потенциал, можно говорить о потенциале проводника. Потенциал уединенного проводника зависит от его размеров и формы, а также от величины имеющегося на нем заряда. При равных потенциалах уединенные тела разной формы (или размеров) обладают зарядами разной величины. Отношение величины заряда к потенциалу при условии, что потенциал бесконечно удаленной точки равен 0, называется *емкостью* уединенного проводника $C = q/\varphi$ [ Ф ]. Это характеристика проводника как «накопителя» заряда.

Если проводник не уединен, то потенциал, приобретаемый им при сообщении ему заряда, существенно зависит от формы и расположения других проводников. Заряженные тела создают электрическое поле, под действием которого заряды на всех соседних проводящих телах перераспределяются. Перераспределение продолжается до тех пор, пока суммарное электростатическое поле внутри каждого проводника не станет равным 0.

Идеальный конденсатор – проводник находится в полости другого проводника. Пусть внутренний проводник имеет поверхностный заряд Q. При этом внутренняя поверхность полого проводника имеет заряд - Q. Действительно, в уравнении




$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = q$ выберем замкнутую поверхность S внутри полого проводника. Так как в проводнике $\vec{D} = 0$, то и интеграл равен 0. Следовательно, полный заряд q, находящийся внутри S, равен 0.

Заряд внутреннего проводника Q уравновешен зарядом – Q, который может находиться только на внутренней поверхности полого проводника. Емкость конденсатора $C = Q / \Delta\varphi$, $\Delta\varphi$ - разность потенциалов обоих проводников. На идеальный конденсатор внешнее электростатическое поле не оказывает действия. Объекты, находящиеся в полости, электростатически экранированы.

Представление о емкости можно распространить на случай N проводников. Между полным зарядом каждого проводника и потенциалам всех существует линейная зависимость. Можно написать: $q_i = C_{i1}(\varphi_i - \varphi_1) + C_{i2}(\varphi_i - \varphi_2) + \ldots + C_{ii}\,\varphi_i + \ldots + C_{iN}(\varphi_i - \varphi_N)$; $i = 1,2,\ldots N$. $C_{i\,k}$ - частичные емкости, $k = i$ – собственная емкости i –

проводника, $k \neq i$ - взаимные емкости, $C_{ik} = C_{ki}$ – матрица емкостей симметрична. Собственная емкость $C_{ii}$ некоторого проводника отличается от емкости этого же уединенного проводника, так как вследствие электростатической индукции в системе меняется распределение его заряда.

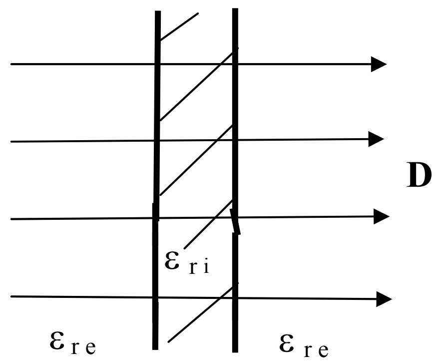
## **Диэлектрики в электростатике**.

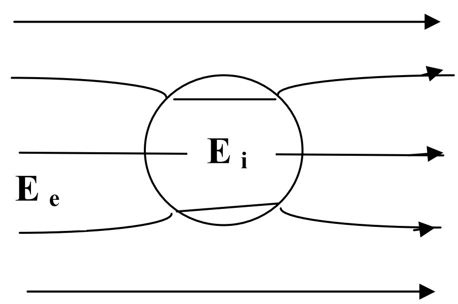
Истинные электростатические поля могут существовать только в средах, лишенных электропроводности ($\sigma = 0$), т.е. в идеальных диэлектриках. В таких средах происходит лишь процесс поляризации.

При решении задач определяют электростатические поля $\vec{E}_e$ и $\vec{E}_i$ (внешние и внутренние), которые удовлетворяют на поверхности диэлектрика граничным условиям $E_{e\,\tau} = E_{i\,\tau}$, $D_{e\,n} = D_{i\,n}$.

Переходя к потенциалам, ищут решения уравнения Лапласа $\varphi_e$ и $\varphi_i$, удовлетворяющие граничным условиям $\varphi_e = \varphi_i$, $\varepsilon_{r\,e}\,\partial\varphi_e/\partial n = \varepsilon_{r\,i}\,\partial\varphi_i/\partial n$.

При помещении диэлектрического тела ($\varepsilon_{ri}$) в электростатическое поле (проницаемость среды $\varepsilon_{r\,e}$) это поле деформируется. Иначе не будут выполнены граничные условия. Изменение конфигурации поля не происходит в простейшем случае при внесении диэлектрической пластины ортогонально линиям поля. Внутри слоя возникает поле $\vec{E}_i, \vec{D}_i$, связанное с внешним полем $\vec{E}_e, \vec{D}_e$ условием $\vec{D}_i\vec{n}_0 = \vec{D}_e\vec{n}_0$ ($\rho_S = 0$). Тангенциальные компоненты поля отсутствуют.

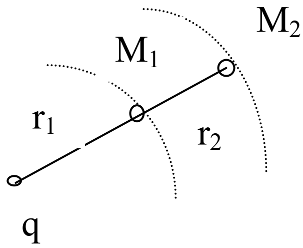


Цилиндр помещен в однородное поле $\vec{E}_0$. Внутреннее поле $\vec{E}_i$ – однородно, а вне цилиндра появится дополнительное поле $\vec{E}'$, такое, что полное внешнее поле $\vec{E}_e = \overline{E}_0 + \vec{E}'$

## Примеры расчета электростатических полей.

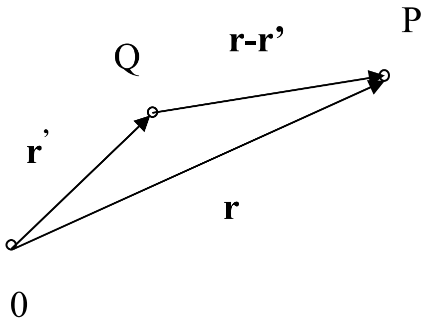
1.Вычислим *потенциал φ для точечного заряда*, зная его поле $\vec{E} = \vec{r}_0 q/(4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r)$



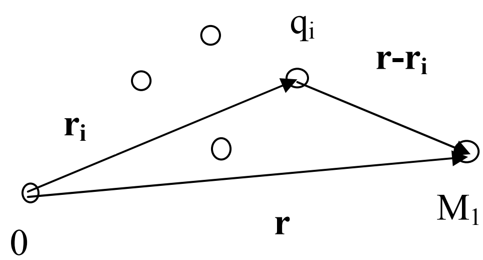

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

При $r_2 \to \infty$ $\varphi = q/(4\pi\, r\, \varepsilon_0\varepsilon_r)$.

Если перенести заряд из точки r =0 в точку Q ($\vec{r}_0$), то расстоянием станет величина $\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|$, $\varphi(\vec{r}) = q/(4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|\varepsilon_0\varepsilon_r)$.

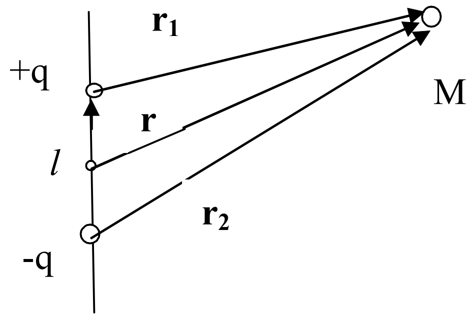


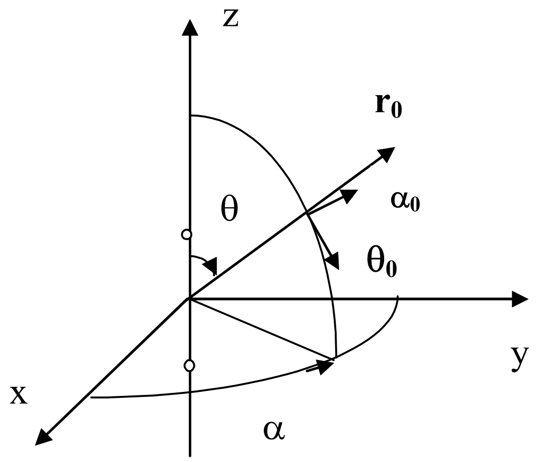

В случае системы точечных зарядов, расположенных в однородной изотропной среде, по принципу суперпозиции $\varphi(\vec{r}) = 1/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)\sum q_i/\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|$




2. *Поле электрического диполя*. Электрический диполь – система двух близко лежащих равных по величине разноименных точечных зарядов +q и - q. Диполь характеризуется дипольным моментом $\vec{p} = q\vec{l}$, $\vec{l}$ – вектор, направленный от отрицательного к положительному заряду, $l$ – расстояние между зарядами. Если

сближать заряды, одновременно увеличивая их значения так, чтобы дипольный момент $\vec{p}$ оставался неизменным, то в пределе получим точечный или идеальный диполь с тем же моментом.




Потенциал диполя найдем по принципу суперпозиции как сумму потенциалов зарядов (+q) и (-q). $\varphi_M = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$; $r_1$, $r_2$ – расстояние от зарядов до точки, в которой вычисляем потенциал.

$r_1 = \sqrt{r^2+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 - rl\cos\theta}$, $r_2 = \sqrt{r^2+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + rl\cos\theta}$, считаем r >> $l$, тогда

$r_1 \approx r - {}^{l}\!/_{2}\cos\theta$, $r_2 \approx r + {}^{l}\!/_{2}\cos\theta$. При этом разность можно представить в виде

$\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2} = \dfrac{r_2-r_1}{r_1 r_2} \approx \dfrac{l\cos\theta}{r^2}$, тогда $\varphi_M = \dfrac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = \dfrac{\vec{p}\vec{r}_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$. ($\vec{p}=q\vec{l}$, $\vec{r}_0\vec{l} = l\cos\theta$)

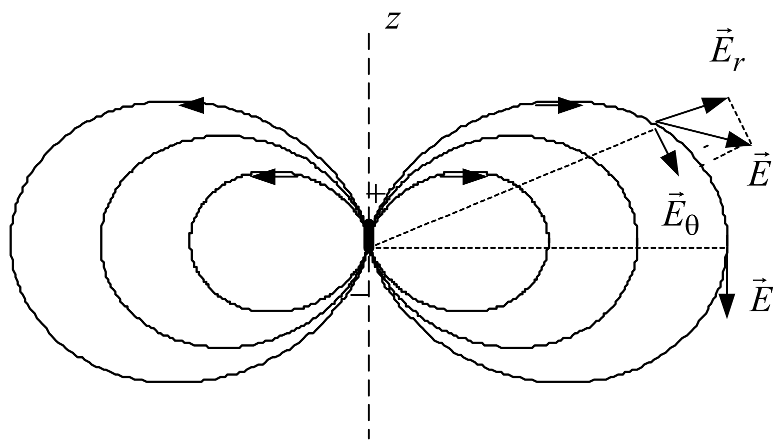
$\vec{r}_0$– орт направления $r$.

Определим напряженность электрического поля $\vec{E}$ = - $grad\,\varphi$

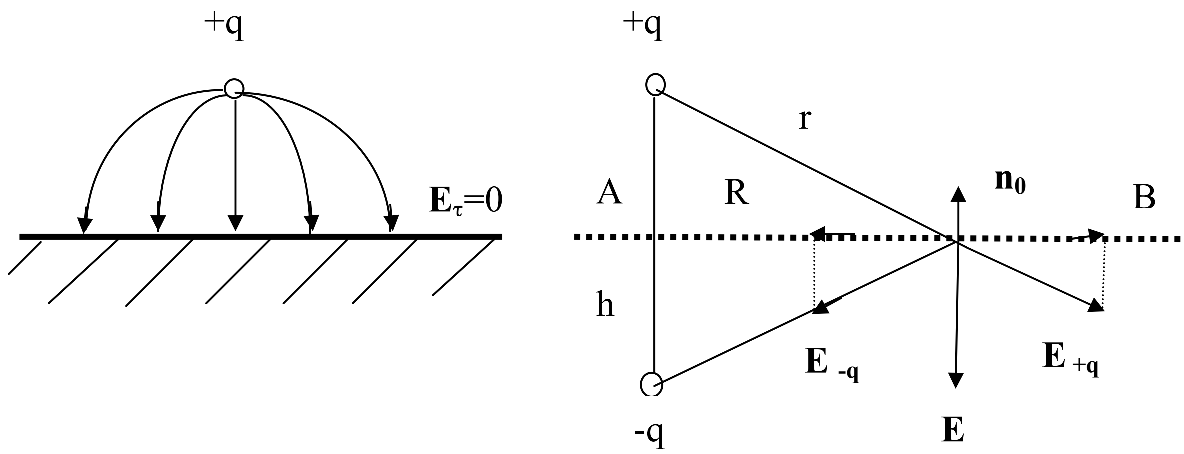
В сферической системе координат

$grad\varphi = \vec{r}_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{\theta}_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{\alpha}_0\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$. Благодаря осевой симметрии $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$.

$\vec{E} = \dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}\left(\vec{r}_0\, 2\cos\theta + \vec{\theta}_0\sin\theta\right)$ - вектор $\vec{E}$ не зависит от угла α (поле обладает осевой симметрией) и имеет две составляющие. Картина силовых линий поля диполя




3. *Поле точечного заряда*, расположенного *над идеально проводящей плоскостью*. Рассмотрим влияние точечного заряда на проводящую плоскость. В результате электростатической индукции на границе должен появиться некий заряд, создающий дополнительное поле, которое, налагаясь на первоначальное поле источника, приведет к удовлетворению граничных условий. Задача определения поля точечного заряда, расположенного над проводящей плоскостью, эквивалентна задаче определения поля двух зарядов: заданного q и некоторого фиктивного заряда (-q), являющегося зеркальным изображением первого, находящихся в неограниченном диэлектрике.

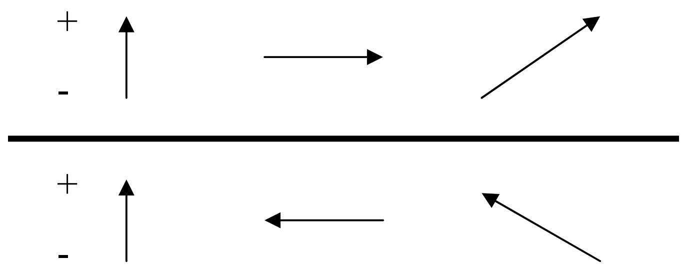



Поле в верхнем полупространстве удовлетворяет граничному условию $E_\tau = 0$, граница раздела – эквипотенциальная поверхность. Плоскость AB, расположенная симметрично относительно зарядов, - эквипотенциальная поверхность с нулевым потенциалом, в точках этой плоскости вектор $\vec{E}$ ориентирован в направлении $(-\vec{n}_0)$. Полный заряд, наведенный на плоскости AB,

$q' = \int_S \rho_S ds = -\frac{qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{r^3}RdRd\alpha = -\frac{qh}{2\pi}2\pi\int_h^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -q$, $R = \sqrt{r^2 - h^2}$, плотность поверхностного заряда $\rho_s = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\vec{n}_0$, где вектор напряженности электрического поля определяется как результат сложения полей двух точечных зарядов, т.е. совпадает со значением вектора $\vec{E}$ поля электрического диполя при $\theta = \pi/2$.

$\vec{E} = -\vec{n}_0 q\, h/(2\pi\, \varepsilon_0\varepsilon_r\, r^3)$.

Введение фиктивного сосредоточенного заряда эквивалентно учету всех зарядов, наведенных на границе раздела. Метод замены проводящей поверхности фиктивным сосредоточенным зарядом получил название *метода зеркального изображения*. В силу принципа суперпозиции метод зеркального изображения можно обобщить на случай произвольной системы зарядов, расположенных над проводящей плоскостью.




**Энергия взаимодействия электрических зарядов**.

При перемещении электрических зарядов силы кулонова взаимодействия между ними совершают работу. Эта работа совершается за счет убыли энергии взаимодействия, которой обладает система зарядов.

Определим энергию двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии $R_{12}$ друг от друга. Изменение этого расстояния сопровождается работой электрических сил. Пусть заряд $q_2$ – неподвижен, а $q_1$ перемещается из точки P в точку P’ в поле заряда $q_2$. Потенциал поля заряда $q_2$ в точке P равен $\varphi_1$, а в точке P’ $\varphi_1 + d\varphi_1$. Работа электрических сил при этом перемещении

$A = -q_1\, d\varphi_1 = -dW$. Следовательно, энергия взаимодействия зарядов $W = q_1\varphi_1$. Но потенциал $\varphi_1 = q_2/(4\pi\, \varepsilon_0\varepsilon_r R_{12})$, значит $W = q_1 q_2/(4\pi\, \varepsilon_0\varepsilon_r R_{12})$.

Такое же выражение мы получили бы, рассматривая движение заряда $q_2$ в поле заряда $q_1$. Поэтому энергию взаимодействия записывают в симметричной форме $W = 1/2\,(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$. При определении энергии системы N точечных зарядов надо записать аналогичные выражения для каждой пары зарядов и сложить их. При этом взаимная энергия системы N зарядов $W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=N} q_k\varphi_k$

$\varphi_k$ – потенциал поля всей системы зарядов в точке, занимаемой зарядом $q_k$

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{i=N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_{ki}},\ (i \neq k),\quad W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_{ki}},\ (i \neq k),$$

не учитывает собственную энергию заряда.

Полученные формулы справедливы, когда расстояния между зарядами в системе много больше размеров зарядов. Чтобы освободиться от этого ограничения, перейдем к рассмотрению объемных и поверхностных зарядов. Разложим систему зарядов на совокупность элементарных зарядов $\rho\,dv$ и $\rho_s\,ds$ и перейдем от суммирования к интегрированию. Полная энергия системы

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dv + \frac{1}{2}\int_S \rho_S\varphi\,ds$$

Пример. Энергия точечного заряда и диполя во внешнем поле.

При перемещении заряда q во «внешнем» поле других зарядов взаимная энергия этих внешних зарядов, а также их собственная энергия и энергия заряда q остается неизменной. Переменная часть энергии поля, за счет которой совершается работа электрических сил, называется энергией заряда q во внешнем поле. Она равна $W = q\varphi$, где $\varphi$ - потенциал внешнего поля в точке расположения заряда q. Если во внешнем поле находятся два заряда q и – q , то энергия этих зарядов во внешнем поле $W_д = q\,\varphi_+ + (-q)\,\varphi_-$, где $\varphi_+$ и $\varphi_-$ - потенциалы внешнего поля в полюсах диполя.

$$\varphi_+ = \varphi_- + \frac{\partial\varphi}{\partial l}l = \varphi_- + \vec{l}\,grad\,\varphi = \varphi_- - \vec{l}\vec{E}.$$

Стало быть, $W_д = -q\,\vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}$ т.е. энергия взаимодействия идеального диполя с полем $\vec{E}$ определяется моментом диполя.

## Энергия электрического поля.

При вычислении электрической энергии $W^{э}=\frac{1}{2}\int\limits_V \vec{E}\vec{D}dv$ следует интегрировать по всей области существования поля, нередко бесконечной. Так как электростатическое поле потенциально ($rot\ \vec{E}$=0, $\vec{E}$= - $grad$ φ) можно записать

$$W^{э}=-\frac{1}{2}\int\limits_V \vec{D}grad\varphi dv=\frac{1}{2}\int\limits_V \varphi div\vec{D}dv-\frac{1}{2}\int\limits_V div\varphi\vec{D}dv=\frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\rho dv-\frac{1}{2}\oint\limits_S \varphi\vec{D}\overline{\vec{ds}}.$$

Здесь учтено тождество $div\varphi\vec{D}$ = $\varphi div\vec{D}+\vec{D}grad$ φ, уравнение $div\vec{D}$= ρ и использована теорема Остроградского – Гаусса.

Рассмотрим поверхностный интеграл. Для локального распределения зарядов в неограниченном пространстве поверхностный интеграл стремиться к 0, так как

$$\varphi \sim 1/r,\quad D \sim 1/r^2,\quad d\vec{s} \sim r^2.\qquad W^{э}=\frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi dv$$

Хотя в процессе преобразований область интегрирования формально не изменилась, фактически вместо расчета энергии в бесконечном пространстве переходим к интегрированию по области существования заряда.

Если распределение заряда распадается на N областей, несущих полные заряды $q_i$, то $W^{э}=\frac{1}{2}\sum\limits_i^N\int\limits_{V_i}\rho\varphi dv$

В электростатике, если $V_i$ соответствует проводящим телам ($\varphi_i$ = const)

$$W^{э}=\frac{1}{2}\sum_i^N\varphi_i\int\limits_{V_i}\rho dv=\frac{1}{2}\sum_i^N q_i\varphi_i\ ,$$

т.е. полная энергия системы проводников выражается через их полные заряды и их потенциалы. Учитывая, что $\varphi_i = \varphi_i^0 + \varphi_i^*$, где $\varphi_i^0$ – потенциалы уединенных проводников с зарядами $q_i$, $\varphi_i^*$ - потенциал, создаваемый под действием остальных проводников, выражение энергии можно переписать в виде

$W^{э} = 1/2\ \Sigma\ q_i\ \varphi_i = 1/2\ \Sigma\ q_i\ \varphi_i^0 + 1/2\ \Sigma\ q_i\ \varphi_I^* = W^{э\,0} + W^{э\,*}$. $W^{э\,0}$ – собственная энергия системы (не зависит от расположения и взаимного влияния проводников). $W^{э\,*}$ - взаимная энергия системы проводников. Заряды, находящиеся на системе проводников, расположенных в диэлектрике, распределяются по поверхности этих проводников так, что энергия получающегося электростатического поля минимальна.

Представление о собственной энергии точечного заряда теряет смысл, так как его потенциал при $r \to 0$, расходится, т.е. можно говорить лишь о взаимной энергии системы точечных зарядов.

## Магнитостатика.

При рассмотрении электромагнитного поля, неизменного во времени, в отсутствии токов мы получаем вторую группу уравнений - систему уравнений магнитостатики.

$$rot\vec{H} = 0, \quad div\vec{B} = 0 \text{ или } \quad \oint_L \vec{H}\overrightarrow{dl} = 0, \ \oint_S \vec{B}\overrightarrow{ds} = 0 \ \text{ и } \ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Класс решений этой системы беднее. Магнитные заряды отсутствуют. Линии вектора $\vec{B}$ не могут обрываться. Магнитостатическое поле лишено энергообмена. Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = 0$.

Здесь также можно ввести вспомогательную функцию $\vec{H} = -\, grad\, \psi$ (с точностью до аддитивной постоянной). $\psi$ - магнитостатический потенциал, удовлетворяющий однородному уравнению $\mathrm{div}\ \mu_r\ \mathrm{grad}\ \psi = 0$. Для однородной среды ($\mu_r = \mathrm{const}$) оно переходит в уравнение Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$.

К классу магнитостатических задач относятся поля постоянных магнитов, но в этом случае мы имеем самопроизвольную намагниченность и материальное уравнение следует писать $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{M}_0$, $\vec{M}_0$ – намагниченность, не зависит от $\vec{H}$. При этом мы получаем уравнение $\mu_0\, div\, \mu_r\, grad\, \psi = div\vec{M}_0$.

Если $\mu_r = \mathrm{const}$, $\nabla^2 \psi = 1/(\mu_0\, \mu_r)\, div\vec{M}_0$ – уравнение Пуассона. Его решение

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r}\int_V \frac{div\vec{M}_0(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}dv'$$

Металлы и керамические материалы, обладающие самопроизвольной намагниченностью, относятся к нелинейным средам, описание которых усложняется необходимостью учитывать предысторию процесса.

## **Стационарное магнитное поле**.

Система уравнений стационарного электромагнитного поля

$$rot\vec{E} = 0 \qquad rot\vec{H} = \vec{j}$$

$$div\vec{D} = \rho \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

При наличии тока (j ≠ 0) все уравнения взаимно связаны. Если плотность тока – заданная величина, магнитное поле может быть определено независимо от электрического при решении системы уравнений:

$$rot\vec{H} = \vec{j}, \quad div\vec{B} = 0 \qquad \text{или} \qquad \oint_L \vec{H}\,\overline{dl} = I\ , \quad \oint_S \vec{B}\,\overrightarrow{ds} = 0 \qquad \text{и} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

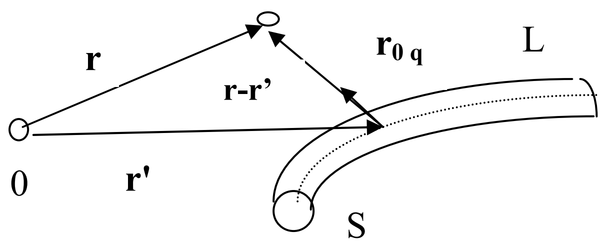
Это система уравнений стационарного магнитного поля. Для однородной среды ($\mu_r$ = const) решение этой системы имеет вид

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{r}_{0_q}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2} dv'$$

$\vec{r}$ – радиус – вектор точки наблюдения, $\vec{r}\,'$ – радиус – вектор точки интегрирования в среде, где течет ток $j$**.** Это – обобщенный закон Био-Савара.

Для линейного тока I, проходящего по контуру L, магнитное поле описывается обычным законом Био-Савара

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{\overrightarrow{dl'} \times \vec{r}_{0_q}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2}$$




(Линейным считается ток нитевидного проводника, если расстояния $\left|\vec{r} - r''\right|$ остаются в процессе интегрирования значительно больше поперечного размера проводника).

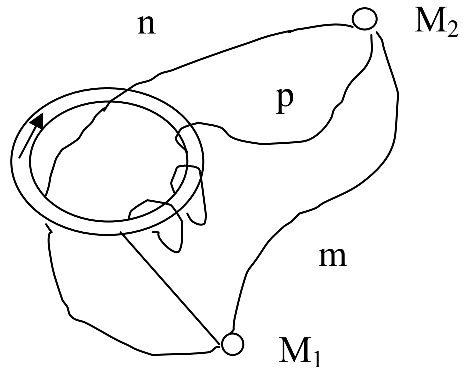
Закон Био-Савара записывают и в форме дифференциала

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl'} \times \vec{r}_{0_q}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^2}$$

При этом $d\vec{H}(\vec{r})$ – вклад в полное магнитное поле $\vec{H}(\vec{r})$, создаваемый элементом контура $d\vec{l}$ с током I.

**Потенциалы в теории стационарного магнитного поля**.

Закон Био-Савара дает полное решение системы уравнений для заданного распределения тока в однородной среде. Но также используют и вспомогательные функции – потенциалы. Магнитостатический потенциал $\psi$ ($\vec{H}$ = - *grad* $\psi$) можно использовать и при рассмотрении магнитного поля постоянного тока в тех областях, где $j$ = 0. Однако разность потенциалов двух точек $M_1$ и $M_2$ в этом случае зависит не только от их положения, но и от вида пути интегрирования.




$\psi_1 - \psi_2 = \int\limits_{M_1}^{M_2} \vec{H}\overrightarrow{dl}$. Пусть имеется контур тока I.

Тогда, согласно уравнению Максвелла $\oint\limits_L \vec{H}\overrightarrow{dl} = I$,

$$\oint\limits_L \vec{H}\overrightarrow{dl} = \int\limits_{M_1 m M_2} \vec{H}\overrightarrow{dl} + \int\limits_{M_2 n M_1} \vec{H}\overrightarrow{dl} = I \Rightarrow \int\limits_{M_1 m M_2} \vec{H}\overrightarrow{dl} = \int\limits_{M_1 n M_2} \vec{H}\overrightarrow{dl} + I$$

Если при интегрировании производится k –кратный обход тока (путь $M_1pM_2$), то

$\int\limits_{M_1 m M_2} \vec{H}\overrightarrow{dl} = \int\limits_{M_1 p M_2} \vec{H}\overrightarrow{dl} + kI$, причем k – положительное, если направление обхода замкнутого контура $M_1mM_2pM_1$ и ток I образуют правовинтовую систему. Таким образом, разность магнитостатических потенциалов, вполне определенная в магнитостатике ($j$ = 0), оказывается величиной неоднозначной при наличии токов.

Поэтому вводят другую вспомогательную величину – векторный потенциал $\vec{A}$. По определению $\vec{B} = rot\vec{A}$. Векторный потенциал определен с точностью до аддитивного градиента ($\vec{A} + \nabla\psi$), так как *rot grad* $\psi$ = 0.

Подставим в уравнение стационарного магнитного поля $rot\vec{H} = \vec{j}$ вектор $\vec{H}$ в виде

$\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 \mu_r = rot\ \vec{A} / \mu_0 \mu_r$. Мы получим $rot\ \vec{H} = 1/\mu_0\, rot\,(1/\mu_r\ rot\ \vec{A}) = \vec{j}$ .

Для однородной среды ($\mu_r$ =const) $rot\, rot\vec{A} = \mu_0 \mu_r \vec{j}$ .

Но $rot\, rot\vec{A} = grad\, div\vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$. В виду неопределенности $\vec{A}$ с точностью до градиента произвольной скалярной функции, можно наложить дополнительное условие $div\vec{A} = 0$ – кулоновская калибровка**.** Тогда $rot\, rot\vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$ и мы получаем векторное уравнение Пуассона $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \mu_r \vec{j}$ .

Его решение $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv$. Для линейных токов $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \oint\limits_L \frac{\overrightarrow{dl}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

После нахождения $\vec{A}(\vec{r})$ магнитное поле определяется как $\vec{H} = rot\vec{A} \ / \ \mu_0 \ \mu_r$. В ряде случаев такой путь оказывается менее трудоемким.

## Энергия магнитного поля.

Энергия магнитного поля, сосредоточенная в объеме V

$W^м = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{H}\vec{B} dv$, но $\vec{B} = rot\vec{A}$. Следовательно,

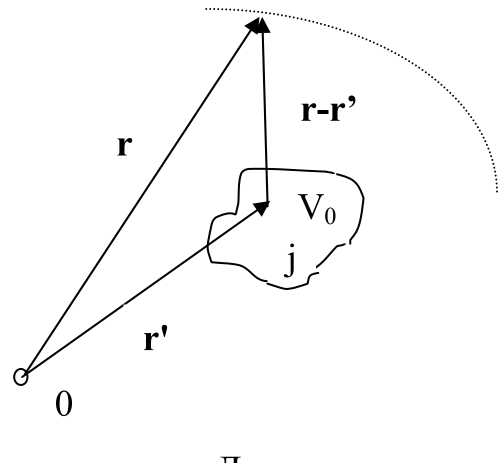
$$W^м = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{H} rot\vec{A} dv = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{A} rot\vec{H} dv - \frac{1}{2} \int\limits_V div\left[\vec{H} \times \vec{A}\right] dv = = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{A}\vec{j} dv + \frac{1}{2} \oint\limits_S \vec{A} \times \vec{H} \overrightarrow{ds}.$$

(Здесь использовано тождество $div\vec{A} \times \vec{H} = \vec{H} rot\vec{A} - \vec{A} rot\vec{H}$ и применена теорема Остроградского –Гаусса.)

S - поверхность, ограничивающая объем V. Для определения полной энергии поля, связанного с локальными токами в однородной среде, следует интегрировать по всему пространству. При этом поверхностный интеграл исчезает, как только S начинает охватывать все токи: $H \sim 1/r^3$, $A \sim 1/r^2$, $ds \sim r^2$.

Так что $W^м = \frac{1}{2} \int\limits_V \vec{j}\vec{A} dv$,

интегрирование распространяется лишь на ту область пространства $V_0$, в которой имеются токи.




В случае линейных токов выражение для $W^м$ упрощается. Для уединенного контура Г с током I

$W^м = \frac{I}{2} \oint\limits_Г \vec{A}\overrightarrow{dl} = \frac{I}{2} \int\limits_S rot\vec{A}\overrightarrow{ds} = \frac{I}{2} \int\limits_S \vec{B}\overrightarrow{ds} = \frac{I\Phi}{2}$. (Применена теорема Стокса)

Ф – магнитный поток через поверхность S, опирающуюся на контур Г.

Для N контуров $W^м = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N} I_n \Phi_n$. $I_n$ - ток контура $Г_n$, $Ф_n$ – магнитный поток, сцепленный с контуром $Г_n$, обусловленный не только током $I_n$, но и токами в остальных контурах.

Поток Ф, пронизывающий уединенный контур Г, пропорционален току в этом контуре Ф = L I. Коэффициент L зависит от конфигурации и размеров контура Г. L – индуктивность [ Гн ].

Магнитную энергию стационарного поля можно выразить в форме $W^м = (½)\, LI^2$

**Общие свойства стационарного электромагнитного поля**.

Вернемся к системе уравнений стационарного электромагнитного поля.

$rot\vec{E}=0$ – стационарное электрическое поле (подобно электростатическому) потенциально. Если, в отличие от электростатики , существуют токи, то имеется и электрическое поле $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$. Касательные составляющие токов на поверхности проводников обуславливают $E_\tau \neq 0$, а, так как $E_\tau = -\partial\varphi/\partial\tau$, то поверхность проводников уже не эквипотенциальна (обычно $E_\tau << E_n$, силовые линии поля практически перпендикулярны поверхности проводника).

Баланс энергии стационарного электромагнитного поля

$$\oint_S \vec{E}\times\vec{H}\,\overrightarrow{ds} + \int_V \vec{j}\vec{E}dv = 0,\ (\frac{dW}{dt} = 0).$$

Если токи сосредоточены в объеме $V_0$, то, при неограниченном увеличении объема, поверхностный интеграл будет стремиться к 0 ($E \sim 1/r^2$, как поле точечного заряда, $H \sim 1/r^3$, как поле диполя, $ds \sim 1/r^2$). Т.е. равен 0 поток энергии через поверхность S, охватывающую все токи $\oint_S \vec{E}\times\vec{H}\,\overrightarrow{ds} = 0$, и равна нулю полная мощность потерь P системы стационарных токов в объеме V

$\int_V \vec{j}\vec{E}dv = 0$. Следовательно, стационарное электромагнитное поле не создает излучения, энергия поля, связанного с системой токов, остается постоянной.

Существование стационарного электромагнитного поля связано с действием *сторонних сил*.

В уравнениях Максвелла под вектором $\vec{j}$ обычно подразумевается плотность тока проводимости, возникающего в проводящей среде под воздействием электромагнитного поля. Этот вектор удовлетворяет закону Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Для упрощения реальной электродинамической задачи обычно вместо имеющейся на самом деле системы рассматривают некоторую модель. При этом часть системы вообще исключается из рассмотрения. Для учета влияния этой системы во многих случаях ее заменяют введением некоторых токов, которые рассматриваются как первопричина возникновения электромагнитного поля и считаются заданными. Эти токи называют сторонними. Если этого не делать и каждую проблему рассматривать во всей ее полноте, то любая конкретная задача становится трудноразрешимой. При анализе многих вопросов вместо сторонних токов задаются сторонней напряженностью электрического поля $\vec{E}^{cm}$. В большинстве случаев при исследовании электродинамических явлений под $\vec{E}^{cm}$ подразумевается напряженность электрического поля, создаваемого зарядами и токами, расположенными за пределами рассматриваемой области, т.е. исключается детальный анализ процессов, происходящих в какой-либо части пространства.

Запишем $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{cm})$. Выразим плотность мощности в подынтегральном выражении $p = \vec{j}\vec{E} = \vec{j}^2 / \sigma - \vec{j}\vec{E}^{cm}$ и учтем, что мощность потерь равна 0. Тогда из выражения для мощности потерь $\int\limits_V \frac{\vec{j}^2}{\sigma} dv = \int\limits_V \vec{j}\vec{E}^{cm} dv$

Если сторонние силы отсутствуют ($\vec{E}^{cm} = 0$), то $j = 0$. Следовательно, постоянные токи и сопровождающее их стационарное поле не могут существовать без превращения энергии какого – либо вида в электромагнитную, т.е. без притока энергии.