САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

Л.А.Бабенко

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие

2006

Содержание

Гармонические колебания в линейных электрических цепях

Предварительные замечания. Основные законы электрических цепей. Идеализированные элементы.

Рассматриваются линейные электрические цепи, процессы в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями. Коэффициенты уравнений – постоянные величины, не зависящие от протекающего тока или приложенного напряжения. К таким цепям применим принцип суперпозиции (принцип наложения): при наличии в цепи нескольких источников действие каждого из них можно рассматривать по отдельности, после чего полученные результаты суммировать.

В расчетной электрической схеме реальные элементы замещены совокупностью идеальных элементов. *Ветвь* – участок электрической цепи, вдоль которого ток имеет одно и то же значение. *Узел* – точка соединения трех и более ветвей. *Контур* электрической цепи – замкнутый путь, образованный одной или несколькими ветвями.

Типичная задача расчета электрической цепи – определение токов в ее ветвях при заданных параметрах всех элементов. Для переменных во времени процессов $i = i\ (t)$ – мгновенное значение тока (значение тока в данный момент времени), $u = u\ (t)$ – мгновенное значение напряжения. Ток рассматривается как алгебраическая величина, имеющая знак. До расчета цепи направления постоянных токов или мгновенные значения переменных токов в ветвях и напряжений между узлами не известны. Поэтому для расчета цепей вместо неизвестных направлений токов и напряжений вводят произвольные положительные направления этих токов и напряжений. Выбранное положительное направление тока в ветви обычно указывают стрелкой. Если при решении задачи получилось, что $i > 0$, это означает, что действительное направление данного тока совпадает с условно выбранным направлением отсчета, если $i < 0$, то истинное направление тока противоположно.

При выборе положительного направления напряжения от точки *a* к точке *b*, условно считают, что потенциал точки *a* выше потенциала точки *b*. Очевидно, $u_{ab} = -u_{ba}$. В дальнейшем будем пользоваться *согласованным* выбором положительных направлений для напряжения на элементе и тока, протекающего через него, когда положительные направления совпадают.

Основные законы электрических цепей, позволяющие описать любые режимы их работы, это закон Ома и законы Кирхгофа. *Закон Ома* (1827 г.) – для цепи постоянного тока: при неизменном сопротивлении проводника напряжение на нем пропорционально току в проводнике. $i = u/r$, $u = i \cdot r$.

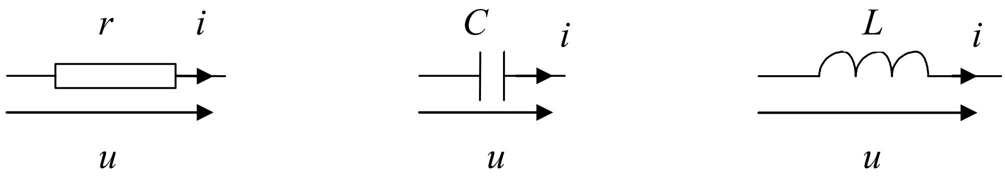
Законы Кирхгофа (1845 г.):

первый закон – алгебраическая сумма токов в ветвях, связанных общим узлом цепи, равна 0. $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$.

Второй закон – во всяком контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения равна алгебраической сумме ЭДС источников, действующих в этом контуре. $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m} e_k$.

Идеализированные пассивные элементы цепи.

Резистивный элемент (сопротивление) – двухполюсник, в котором происходит только процесс поглощения электрической энергии. Емкостной элемент (емкость) – двухполюсник, в котором происходит накопление энергии электрического поля. Индуктивный элемент (индуктивность) – двухполюсник, в котором накапливается энергия магнитного поля.



$$u = r\,i, i = gu\,; \quad i = C\frac{du}{dt},\; u(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i\,dt + u_C(0)\,; \; u = L\frac{di}{dt},\; i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u\,dt + i_L(0)$$

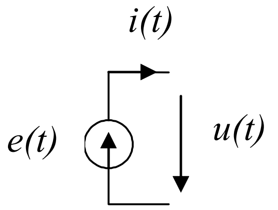
$r = {}^{1}\!/_{g}$, r – сопротивление, g - проводимость.

C – емкость, $u_C(0)$ - напряжение на элементе к моменту $t = 0$.

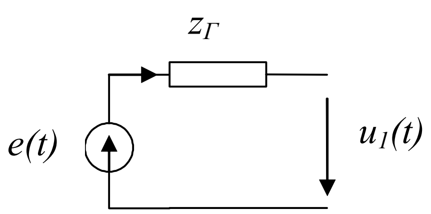
L – индуктивность, $i_L(0)$ – ток, протекающий через элемент к моменту $t = 0$.

Источники электрической энергии.

Идеальный источник напряжения (ЭДС), или генератор ЭДС – активный двухполюсный элемент, напряжение на котором не зависит от тока, протекающего через него. При указанном направлении отсчета направления

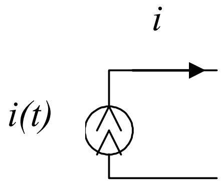


напряжения и ЭДС $u(t) = e(t)$.
Внутреннее сопротивление такого источника считается равным 0.

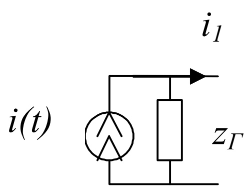


В реальном генераторе напряжения учитывается его внутренне сопротивление $z_Г$ – сопротивление всех элементов пути тока внутри генератора. Сопротивление генератора $z_Г$ может содержать как резистивный элемент, так индуктивный или емкостной элемент. При подключении нагрузки к такому генератору, напряжение на ней будет зависеть от протекающего тока i.

Идеальный источник тока (генератор тока) – активный двухполюсный

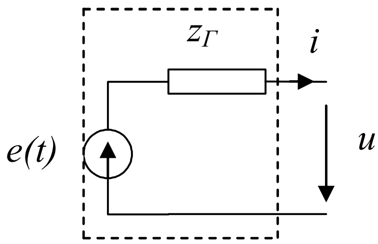


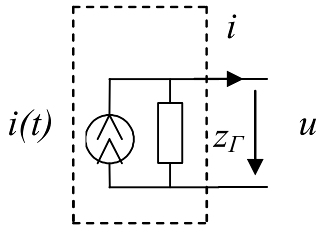
элемент, ток через который не зависит от напряжения на его зажимах. Внутреннее сопротивление такого источника считается бесконечно большим.



Ток реального источника, где учитывается внутреннее сопротивление генератора, зависит от подключенной нагрузки.

Если при расчете электрической цепи необходимо заменить генератор напряжения эквивалентным ему генератором тока или наоборот, такую замену можно осуществить, считая, что оба источника обладают одинаковым внутренним сопротивлением, а ток идеального источника тока связан с ЭДС идеального генератора напряжения соотношением, подобным соотношению закона Ома. (Здесь под эквивалентностью источников понимается эквивалентность замены одного двухполюсника (например, источника тока) другим (источником ЭДС) по отношению к внешней цепи). $i = e/R_Г$





Гармонические токи и напряжения в электрической цепи.

Если значение изменяющейся во времени величины повторяется через равные промежутки времени *T,* то говорят о периодическом процессе, частным видом которого является гармоническое колебание:

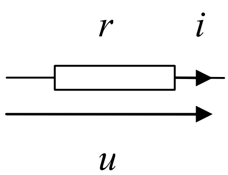
$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \sin(\omega t + \psi_1)$$

A_m – амплитуда, аргумент тригонометрической функции $(\omega t+\psi)$ – фаза колебания в момент времени t, ψ - начальная фаза (при $t = 0$), ω – угловая (круговая) частота. $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. $A_д = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{(T)} a^2(t)dt}$ - действующее (среднеквадратичное) значение для гармонического колебания, $A_д = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$.

$a_{ср} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{T+t_1} a(t)dt = \frac{1}{T}\int\limits_{(T)} a(t)dt$ - среднее значение, или постоянная составляющая.

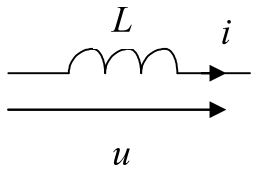
Предположим, что через идеальные пассивные элементы протекает гармонический ток.

1). Резистивный элемент



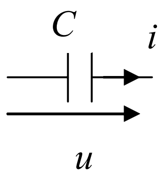
$i(t) = I_m \cos\omega t, \quad u(t) = ri = rI_m \cos\omega t$, амплитуда тока и напряжения связаны между собой $U_m = rI_m$, фазы тока и напряжения одинаковые. Мгновенная мощность $p = ui = U_m I_m \cos^2 \omega t, \quad p \geq 0$, средняя за период мощность $P = p_{ср} = \dfrac{U_m I_m}{2} = U_д I_д = I_д^2 r = U_д^2 g$

2). Индуктивный элемент



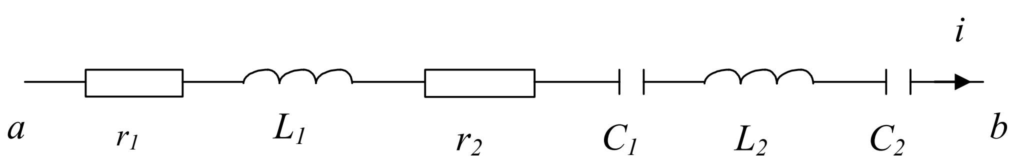
$i(t) = I_m \cos\omega t, \quad u(t) = L\dfrac{di}{dt} = (\omega L) I_m \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$ - напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на ($\pi/2$). Амплитуды тока и напряжения подчинены соотношению $U_m = (\omega L) I_m, \quad x_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление. Мгновенная мощность $p = ui = -\dfrac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t$, средняя мощность $p_{ср} = 0$.

3). Емкостной элемент

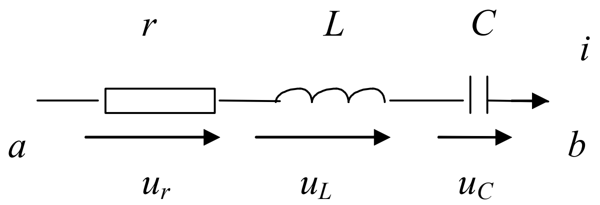


Пусть $u(t) = U_m \sin\omega t, \quad i(t) = C\dfrac{du}{dt} = (\omega C) U_m \sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$ - напряжение на емкости отстает по фазе от тока на ($\pi/2$). Амплитуды связаны соотношением $U_m = \dfrac{1}{\omega C} I_m, \quad x_c = \dfrac{1}{\omega C}$ - модуль емкостного сопротивления. Мгновенная мощность $p = ui = \dfrac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t, \quad p_{ср} = 0$ - средняя за период мощность.

Если пассивные элементы соединены так, что образуют ветвь, говорят о *последовательном соединении* элементов. При таком соединении через каждый элемент протекает один и тот же ток.



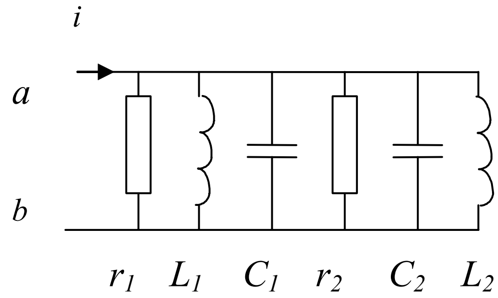
Напряжение u_{ab}, создаваемое при протекании тока i через такой двухполюсник, равно сумме напряжений, создаваемых на каждом элементе: $u_{ab} = u_{r1} + u_{L1} + u_{r2} + u_{C1} + u_{L2} + u_{C2}$. Эквивалентной представленной схеме является электрическая цепь



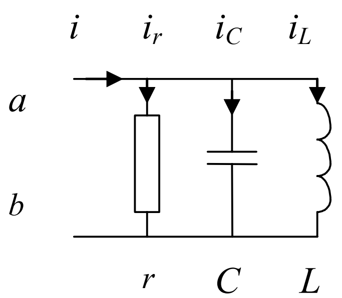
где $r = r_1 + r_2$, $L = L_1 + L_2$, $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Если через такой двухполюсник протекает ток $i = I_m \cos \omega t$, то для определения напряжения на всем двухполюснике необходимо сложить три косинусоидальные функции, имеющие разные амплитуды и разные начальные фазы. $u_{ab} = rI_m \cos \omega t + (\omega L) I_m \cos(\omega t + \pi/2) + \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t - \pi/2)$.

Если пассивные элементы подключены к одной паре узлов, т.е напряжение на каждом элементе одинаковое $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$, где φ_a, φ_b - потенциалы узлов, то такое соединение элементов называется *параллельным*.



Такое соединение эквивалентно следующей электрической цепи



Здесь $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$, $r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, $C = C_1 + C_2$, $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$, $L = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.

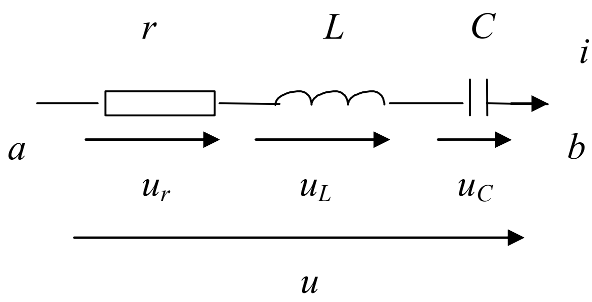
Ток i для такого соединения в соответствии с первым законом Кирхгофа, равен сумме токов, протекающих через каждый из элементов: $i = i_r + i_L + i_C$.

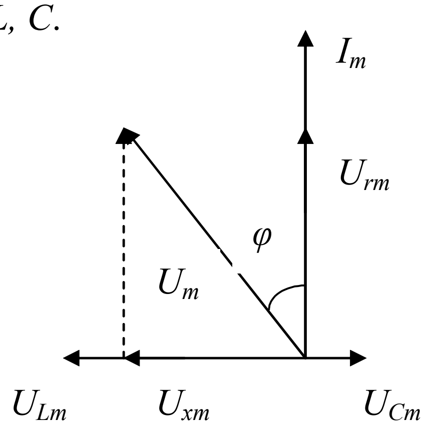
Если считать, что $u_{ab} = U_m \cos\omega t$, то $i_r = \dfrac{1}{r} U_m \cos\omega t$, $\dfrac{1}{r} = g$ - проводимость резистивного элемента, $i_C = (\omega C) U_m \cos(\omega t + \pi/2)$, $\omega C = b_C$ - проводимость емкостного элемента, $i_L = \dfrac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t - \pi/2)$, $\dfrac{1}{\omega L} = b_L$ - проводимость индуктивного элемента. Расчет тока, протекающего через такой двухполюсник, требует вычисления суммы трех гармонических функций, имеющих разные амплитуды и разные начальные фазы.

Применение векторных диаграмм для расчета электрических цепей.

Расчет упрощается и операция сложения имеет большую наглядность, если воспользоваться изображением гармонических функций с помощью векторов, т.е. так называемой векторной диаграммой. Из произвольной точки, принятой за начало полярной системы координат, строят вектор, длина которого в некотором масштабе равна амплитуде гармонического колебания. Угол φ для опорного вектора можно выбрать произвольно. Вектора, соответствующие остальным гармоническим функциям, изображают с учетом выбранного масштаба длины и с учетом соотношения начальных фаз этих функций и функции, выбранной за опорную. Если начальная фаза рассматриваемого колебания превышает значение начальной фазы опорного колебания на угол α, полярный угол этого колебания будет на α больше угла опорного колебания. При изменении времени вектора вращаются с угловой скоростью ω против движения часовой стрелки вокруг начала координат. Взаимное расположение векторов, соответствующих разным гармоническим колебаниям, в течение времени не изменяется. Векторная диаграмма позволяет определить амплитуду и начальную фазу суммарного гармонического колебания при использовании правил сложения векторов.

Построим векторную диаграмму для электрической цепи, содержащей *последовательное соединение* элементов *r, L, C*.





Через эти элементы протекает один и тот же ток $i = I_m \cos \omega t$, поэтому за опорный вектор примем вектор, соответствующий току. Строим произвольно ориентированный вектор, длина которого в выбранном масштабе тока равна I_m. Вектора, соответствующие напряжению на отдельных элементах цепи, изображаем с учетом выбранного масштаба длины и с учетом соотношения начальных фаз. Напряжение на резистивном элементе имеет начальную фазу, совпадающую с начальной фазой тока, следовательно, вектор $\boldsymbol{U_{r\ m}}$ направлен так же, как вектор $\boldsymbol{I_m}$. Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток, протекающий через этот элемент, на π / 2, напряжение на емкости отстает по фазе от тока, протекающего через этот элемент, на π / 2. Следовательно, вектора $\boldsymbol{U_{L\ m}}$ и $\boldsymbol{U_{C\ m}}$ сдвинуты между собой на угол π, напряжения на индуктивном и емкостном элементах при последовательном соединении находятся в противофазе.

Вектор суммарного напряжение $\boldsymbol{U_{x\ m}}$ на этих двух элементах (вектор напряжения на реактивности) – результат сложения этих двух векторов (вычитания – с учетом их направлений). Рисунок сделан в предположении, что индуктивное сопротивление больше емкостного $U_{L\ m} > U_{C\ m}$. , поэтому вектор $\boldsymbol{U_{x\ m} = U_{L\ m} - U_{C\ m}}$ опережает вектор тока на π / 2. Напряжение $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ на участке с последовательным соединением всех элементов при протекании тока $i = I_m \cos\omega t$ можно определить, сложив вектора $\boldsymbol{U_{r\,m}}$ и $\boldsymbol{U_{x\,m}}$. Амплитуда суммарного напряжения $U_m = \sqrt{U_{r\,m}^2 + U_{x\,m}^2}$, начальная фаза напряжения превосходит начальную фазу тока на угол $\varphi = arctg\,\dfrac{U_{x\,m}}{U_{r\,m}}$.

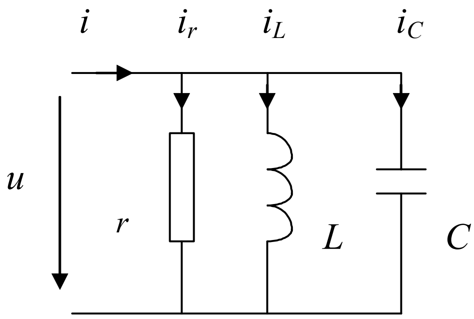
На рисунке изображена диаграмма напряжений. Так как значения амплитуды напряжения на отдельных участках исследуемой цепи пропорциональны амплитуде тока (это общий множитель для всех векторов) и сопротивлениям r резистивного элемента, ωL индуктивного элемента и $1/(\omega C)$ емкостного элемента, построенную диаграмму также называют диаграммой сопротивлений. Реактивное сопротивление цепи $x = x_L - x_C = \omega L - 1/(\omega C)$, полное сопротивление цепи z, определяемое как отношение $z = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_\partial}{I_\partial} = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$.

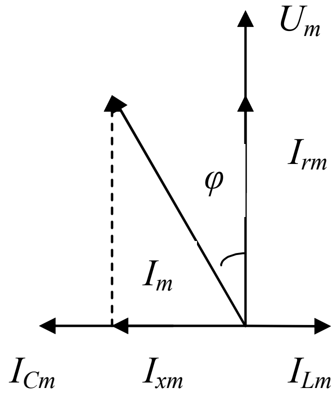
Угол φ определяют как угол, на который начальная фаза тока отстает от начальной фазы напряжения на двухполюснике, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Для угла φ справедливы соотношения $\cos\varphi = \dfrac{U_{r\,m}}{U_m} = \dfrac{r}{z}$, $\sin\varphi = \dfrac{U_{x\,m}}{U_m} = \dfrac{x}{z}$, $tg\varphi = \dfrac{x}{r}$.

В рассмотренном примере предположили, что индуктивное сопротивление больше, чем емкостное, угол $\varphi > 0$, ток отстает по фазе от напряжения на этот угол.

Для параллельного соединения элементов построение векторной диаграммы начинают с изображения вектора $\boldsymbol{U_m}$, соответствующего приложенному к цепи напряжению. Вектор тока $I_{r\,m}$, протекающего через резистивный элемент, совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{U_m}$, вектор тока $I_{C\,m}$, протекающего через емкостной элемент, опережает вектор напряжения на этом элементе на $\pi/2$, а вектор тока $I_{L\,m}$, протекающего через индуктивный элемент отстает на угол $\pi/2$ от вектора напряжения на этом элементе.

Вектор тока $I_{x\ m}$, протекающего через два параллельно соединенных реактивных элемента, равен разности векторов $\boldsymbol{I_{C\ m}}$ и $\boldsymbol{I_{L\ m}}$ (эти вектора направлены в противоположные стороны).





В примере предположено, что емкостное сопротивление меньше индуктивного, следовательно, $I_{C\,m} > I_{L\,m}$. Вектор $\boldsymbol{I_{x\,m}}$ совпадает в этом случае с направлением вектора $\boldsymbol{I_{C\ m}}$. Ток, протекающий через двухполюсник, образованный параллельным соединением элементов, определяется вектором, полученным в результате сложения векторов $\boldsymbol{I_{r\,m}}$ и $\boldsymbol{I_{x\,m}}$. Амплитуда этого тока (длина вектора $\boldsymbol{I_m}$) $I_m = \sqrt{I_{r\,m}^2 + I_{x\,m}^2}$. Ток опережает напряжение на зажимах двухполюсника на угол φ, в данном примере $\varphi < 0$. Построенная векторная диаграмма – диаграмма токов. Значения амплитуд токов, протекающих через отдельные ветви параллельного соединения, пропорциональны амплитуде напряжения, приложенного к двухполюснику (множитель, общий для всех токов) и проводимости различных элементов: $g = \dfrac{1}{r}$ - реактивного элемента, $b_C = \omega C$ - емкостного элемента, $b_L = \dfrac{1}{\omega L}$ - индуктивного элемента. Поэтому построенную векторную диаграмму можно рассматривать как диаграмму проводимостей. Полная проводимость цепи

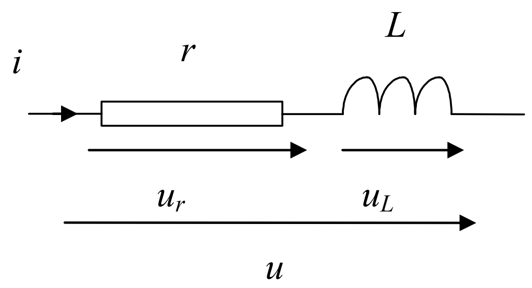
$$y = \frac{I_m}{U_m} = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{g^2 + \left({1}/{(\omega L)} - \omega C\right)^2}\ ,\quad b = b_L - b_C$$

- реактивная проводимость, может быть величиной и положительной, и отрицательной. Величина угла φ может быть определена из соотношений:

$\cos\varphi = \dfrac{g}{y}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{y}$, $tg\varphi = \dfrac{b}{g}$. В рассмотренном примере угол $\varphi < 0$, ток в двухполюснике опережает по фазе напряжение на его зажимах.

Рассмотрим несколько примеров.

1).



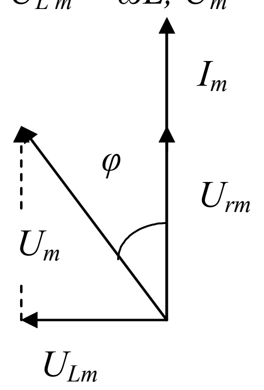
Дано: $u(t) = 5\cos(\omega t + \pi/3)$ В,

r = 100 Ом, $U_{L\,m}$= 3 В,

$\omega = 10^{5}$ с$^{-1}$

Определить: L, z, $i\,(\,t\,)$, $u_r\,(\,t\,)$/

Решение задачи можно начать с построения векторной диаграммы. Значения модулей некоторых векторов неизвестны, но интерес представляет их взаимное расположение. Разность начальных фазовых углов для некоторых из них нам известна. Через оба элемента протекает один и тот же ток $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$. Выберем вектор тока за опорный. Вектор напряжения на резистивном элементе r совпадает по направлению с вектором тока. Вектор напряжения на индуктивном элементе опережает вектор тока на π / 2. Вектор напряжения на всем двухполюснике (именно это напряжение задано по условию задачи) – результат сложения векторов $\boldsymbol{U_{r\,m}}$ и $\boldsymbol{U_{L\,m}}$. Напряжения на элементах пропорциональны сопротивлениям соответствующих участков: $U_{r\,m} \sim r$, $U_{L\,m} \sim \omega L$, $U_m \sim z$.



$$U_{r\,m} = \sqrt{U_m^2 - U_{L\,m}^2} = 4\,\text{В}.$$

$$I_m = \frac{U_{r\,m}}{r} = 0.04\,\text{А}. \quad z = \frac{U_m}{I_m} = 125\ \text{Ом}.$$

$$\omega L = \sqrt{z^2 - r^2} = 75\,\text{Ом}, \quad L = 0.75\ \text{мГн}$$

$\varphi = \arcsin\dfrac{U_{L\,m}}{U_m} = \dfrac{\pi}{5}$. $\varphi > 0$ – ток в рассматриваемом двухполюснике отстает по фазе от напряжения на этот угол. Запишем мгновенные значения тока и напряжений на участках цепи:

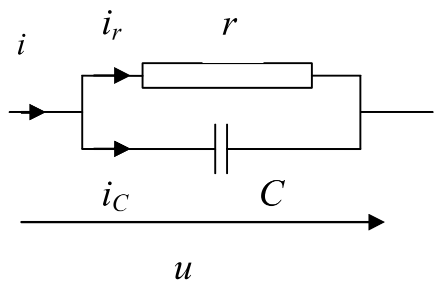
$(\omega t + \pi/3)$ - фазовый угол напряжения на двухполюснике, следовательно, мгновенное значение тока

$i(t) = I_m \cos[(\omega t + \pi/3) - \varphi] = 0.04\cos[\omega t + (\pi/3 - \pi/5)] = 0.04\cos(\omega t + 2\pi/15)$ А.

$u_r(t) = U_{r\,m} \cos[(\omega t + \pi/3) - \varphi] = 4\cos(\omega t + 2\pi/15)$ В.

$u_L(t) = U_{L\,m} \cos[(\omega t + \pi/3) - \varphi + \pi/2] = 3\cos(\omega t + 19\pi/30)$ В – напряжение на индуктивности опережает ток, протекающий через этот элемент, на $\pi/2$.

2).



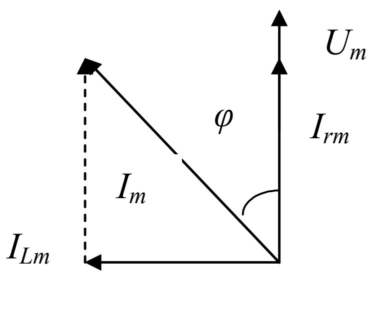
Дано: $i(t) = 1.5\cos(\omega t + \pi/4)$ А

$I_{C\,m}$ = 1А, C = 0.2 мкФ, ω = 10^5 с$^{-1}$

Определить: r, z, $u(t)$, $i_r(t)$, $i_C(t)$

Решение начнем с построения векторной диаграммы.

Напряжение на резистивном и емкостном элементах одинаковое $u(t)$. Ток $i_r(t)$, протекающий через резистивный элемент, совпадает по фазе с напряжением $u(t)$. Ток в емкостной ветви опережает по фазе напряжение $u(t)$ на $\pi/2$. Вектор тока $i(t)$, протекающего через двухполюсник – результат сложения векторов $\boldsymbol{I_{r\,m}}$ и $\boldsymbol{I_{Cm}}$.



$$U_m = I_{C\,m} x_C = I_{C\,m} \frac{1}{\omega C} = 50 \text{ В.}$$

$$z = \frac{U_m}{I_m} = 33.3\,\text{Ом}, \quad I_{r\,m} = \sqrt{I_m^2 - I_{C\,m}^2} = 1.11\,\text{А}$$

$$r = \frac{U_m}{I_{r\,m}} = 45 \text{ Ом}, \qquad \varphi = \arcsin\frac{I_{C\,m}}{I_m} = 0.23\pi$$

Ток на двухполюснике опережает по фазе напряжение.

Мгновенные значения

$u(t) = U_m \cos[(\omega t + \pi/4) - \varphi] = 50\cos[\omega t + (0.25\pi - 0.23\pi)] = 50\cos(\omega t + 0.02\pi)$

$i_r(t) = I_m \cos[(\omega t + \pi/4) - \varphi] = 1.11\cos(\omega t + 0.02\pi)$ А,

$i_C(t) = I_{C\,m} \cos[(\omega t + \pi/4) - \varphi + \pi/2] = 1\cos(\omega t + 0.52\pi)$ А.

Несколько замечаний.

При протекании тока i (t) через двухполюсник, содержащий электрическое соединение резистивного и реактивного элемента, на его зажимах возникает напряжение u (t). $u(t) = U_m \cos \omega t$, $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. φ - фазовый угол, определяющий на сколько фаза тока в двухполюснике отстает от фазы напряжения на его зажимах. При этом выделяется мощность, среднее значение за период которой $p_{cp} = P = \dfrac{U_m I_m}{2} \cos\varphi = U_\partial I_\partial \cos\varphi$ [Вт] - это активная мощность. Можно также записать $P = r I_{r\partial}^2$, либо $P = g U_{g\partial}^2$.

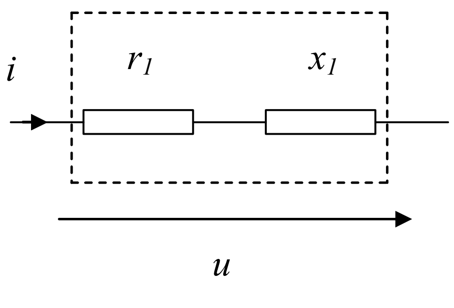
r – активное сопротивление двухполюсника, $I_{r\partial}$ - действующее значение тока, протекающего через этот элемент, g – активная проводимость двухполюсника, $U_{g\partial}$ - действующее значение напряжения на этом элементе.

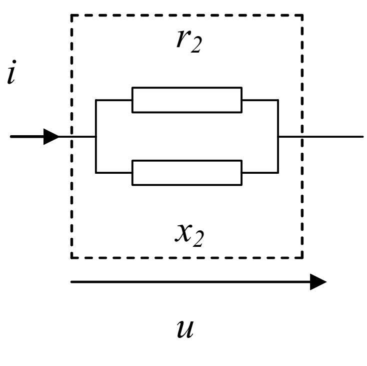
Кроме того, вводят в рассмотрение $Q = \dfrac{U_m I_m}{2} \sin\varphi = U_\partial I_\partial \sin\varphi$ [ВАР] - реактивная мощность. $Q = x I_{x\partial}^2$, либо $Q = b U_{b\partial}^2$. Здесь $I_{x\partial}$ - действующее значение тока, протекающего через реактивное сопротивление x, $U_{b\partial}$ - действующее значение напряжения на реактивном элементе с проводимостью b.

$S = \dfrac{U_m I_m}{2} = U_\partial I_\partial = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [ВА]- полная (кажущаяся) мощность.

Угол φ отвечает следующим соотношениям: $\sin\varphi = \dfrac{Q}{S}$, $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$, $tg\varphi = \dfrac{Q}{P}$

2. Двухполюсник, через который протекает ток i (t) при напряжении на его зажимах u (t), можно представить разными эквивалентными схемами: либо активный и реактивный элемент соединены последовательно, либо параллельно.





Очевидно, что величины этих элементов в двух таких схемах различные.

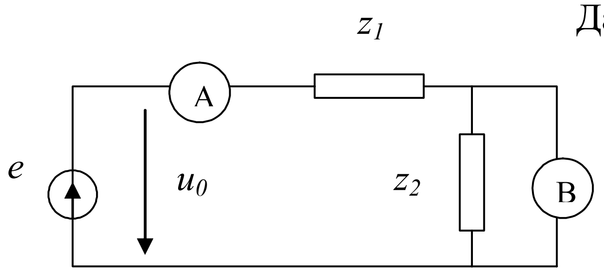
Полное сопротивление двухполюсника обратно пропорционально его полной проводимости. $z = \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = \dfrac{1}{\sqrt{g_2^2 + b_2^2}} = \dfrac{1}{y}$, $\quad g_2 = \dfrac{1}{r_2}$, $\quad b_2 = \dfrac{1}{x_2}$.

Перейти от одной схемы соединения элементов к другой, можно воспользовавшись соотношениями:

$r_1 = \dfrac{g_2}{g_2^2 + b_2^2}$, $\quad x_1 = \dfrac{b_2}{g_2^2 + b_2^2}$, либо наоборот $g_2 = \dfrac{r_1}{r_1^2 + x_1^2}$, $\quad b_2 = \dfrac{x_1}{r_1^2 + x_1^2}$.

Из переходных формул ясно, что реактивное сопротивление двухполюсника и реактивная проводимость двухполюсника – величины одного и того же знака. В общем случае активное сопротивление двухполюсника и его активная проводимость не являются обратными величинами. То же следует сказать о реактивном сопротивлении и реактивной проводимости. Такие последовательное и параллельное соединения эквивалентны только на одной частоте.

Рассмотрим пример.



Дано: $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$

r_1 =1 Ом, $x_{L\,1}$ =2.5 Ом,

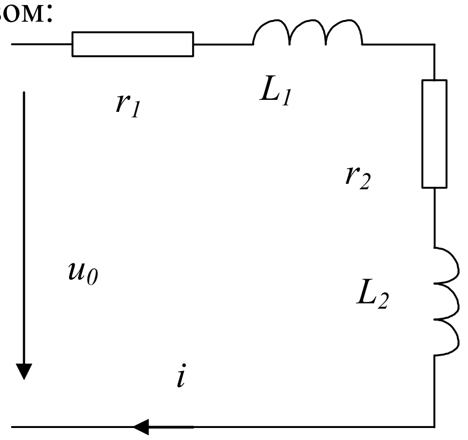
$\cos\varphi_2 = 0.8$, $\varphi_2 > 0$,

$U_{2\partial} = 220$ В, $I_\partial = 25$ А.

Определить амплитуду ЭДС источника, кпд $\eta = \dfrac{P_2}{P}$, где P_2 – активная мощность, выделившаяся в нагрузке, P – активная мощность, выделившаяся во все цепи.

Ток I_∂- это показание амперметра, напряжение $U_{2\partial}$- показание вольтметра, (шкала измерительного прибора обычно проградуирована в действующих значениях измеряемой величины).

Сопротивления z_1 и z_2 включены последовательно. Замечание $\varphi_2 > 0$ говорит о том, что в двухполюснике z_2 реактивное сопротивление – индуктивное сопротивление (ток в двухполюснике z_2 отстает по фазе от напряжения u_2 на нем на угол φ_2). Значит, заданная электрическая цепь выглядит следующим образом:



Найдем r_2, x_2.

$$z_2 = \frac{U_{2\partial}}{I_\partial} = 8.8 \text{ Ом}, \quad r_2 = z_2 \cos\varphi_2 = 7\,\text{Ом}$$

$$x_2 = \sqrt{z_2^2 - r_2^2} = 5.3 \text{ Ом}$$

Действующее значение напряжения на всей цепи $U_{0\partial} = I_\partial z$, где $z = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_{L1} + x_{L2})^2}$, $U_{0\partial}$= 279 В. Амплитуда ЭДС источника $E_m = \sqrt{2}\,U_{0\partial}$= 393 В. Кпд $\eta = \dfrac{I_\partial^2 r_2}{I_\partial^2 (r_1 + r_2)} = 0.875$.

Замечание. Часто по условию задачи требуется определить значение максимально возможной активной мощности, выделенной в нагрузке, которая подключена к источнику напряжения. Если допустим выбор нагрузки, то следует полагать $r_н = r_г$, $x_н = - x_г$, $z_г$ – внутреннее сопротивление генератора. При таком выборе нагрузки в ней выделяется активная мощность $P_{\max} = \dfrac{E_\partial^2}{4r_н}$.

Метод комплексных амплитуд (символический метод)

Расчет электрических цепей, находящихся под воздействием тока или напряжения, изменяющегося во времени по гармоническому закону, значительно упрощается, если воспользоваться методом комплексных амплитуд. *Комплексная амплитуда* гармонического колебания – это комплексное число, модуль которого равен амплитуде колебания, а аргумент – начальной фазе.

Если в цепи действует источник гармонических колебаний $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$, то $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$ - комплексная амплитуда ЭДС. Можно пользоваться комплексным действующим значением $\dot{E}_\partial = E_\partial e^{j\psi}$, $E_\partial = \dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$.

При использовании метода комплексных амплитуд реальным функциям времени (мгновенным значениям) ставят в соответствие комплексные амплитуды этих величин (их символы). Если определена комплексная амплитуда искомой величины, ее мгновенное значение вычисляется следующим образом: $i(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{I}_m e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left[I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}\right] =$

$= \mathrm{Re}\left[I_m \left[\cos(\omega t + \varphi_i) + j\sin(\omega t + \varphi_i)\right]\right] = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, либо сразу записывают $i\ (\ t\ )$, помня, что комплексная амплитуда содержит информацию об амплитуде колебания и его начальной фазе. Далее индекс «*m*» у обозначения комплексной амплитуды будем опускать.

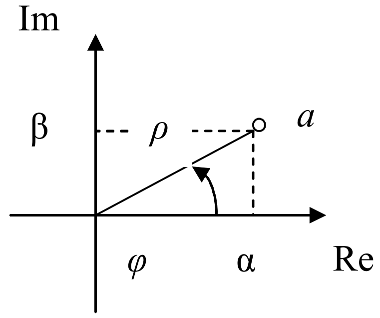
Несколько замечаний о комплексных числах.

Комплексное число $a = \alpha + j\beta$ изображается на комплексной плоскости точкой с абсциссой α и ординатой β. По оси абсцисс на комплексной плоскости откладываются действительные (вещественные) части комплексных чисел, по оси ординат – коэффициент при мнимой части.

Итак, α – действительная (вещественная) часть комплексного числа, $j\beta$ – мнимая часть комплексного числа, j – мнимая единица, $j^2 = -1$. (Такое обозначение этой величины принято в теории цепей, в теории чисел комплексного переменного мнимая единица – это *i*). Это алгебраическая форма записи комплексного числа.

Положение точки на плоскости можно определить, задав расстояние ρ от точки (0,0) до точки a и угол φ.

Величина $\rho = |a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ называется модулем, или абсолютной величиной комплексного числа. Положительный угол φ, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс против движения часовой стрелки, называется аргументом комплексного числа. $\varphi = \arg(a)$.

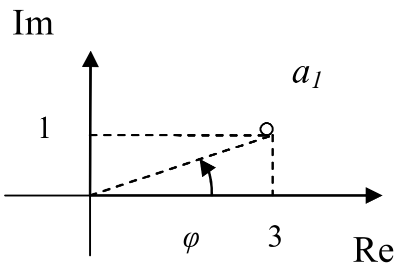


$\alpha = \rho\cos\varphi, \quad \beta = \rho\sin\varphi, \quad a = \rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа.

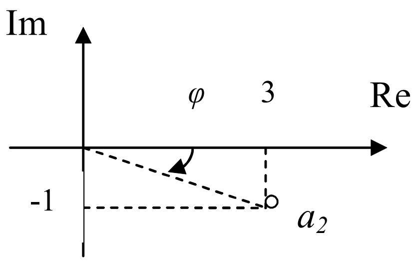
Формула Эйлера $\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$ позволяет перейти к показательной форме записи комплексного числа $a = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \rho\, e^{j\varphi}$. Из формулы Эйлера следует ($\pm j = e^{\pm j\pi/2}$).

Два комплексных числа называются комплексно сопряженными, если их действительные части равны, а мнимые отличаются знаком. Комплексно сопряженное число $a^* = \alpha - j\beta, \quad a \cdot a^* = |a|^2$.

При определении аргумента комплексного числа необходимо обращать внимание, в какой четверти комплексной плоскости находится рассматриваемое число. Если $\mathrm{Re}(a) = \alpha$ - положительное число, значит, комплексное число лежит в первой четверти, если $\beta > 0$, либо в четвертой четверти, если $\beta < 0$. И в том, и в другом случае $\varphi = arctg\,\dfrac{\beta}{\alpha}$.



$a_1 = 3 + j1,$

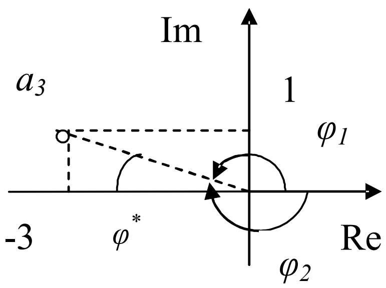


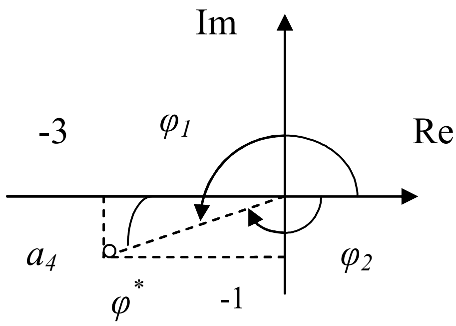
$a_2 = 3 - j1$

$$\rho = \sqrt{3^2 + 1^2}, \quad \varphi = arctg\frac{1}{3}$$

$$\rho = \sqrt{3^2 + 1^2}, \quad \varphi = -arctg\frac{1}{3}$$

Если $\mathrm{Re}(a) = \alpha$ - отрицательное число, то в зависимости от знака β точка лежит во второй или третьей четверти. В этом случае соотношение $\varphi^* = arctg\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$ определяет значение дополнительного угла. Аргумент комплексного числа, расположенного во второй четверти ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) $\varphi_1 = \pi - \varphi^*$, либо $\varphi_2 = -\pi - \varphi^*$. Аргумент числа, расположенного в третьей четверти ($\alpha < 0, \beta < 0$), $\varphi_1 = \pi + \varphi^*$, либо $\varphi_2 = -\pi + \varphi^*$.





$a_3 = -3 + j1$

$a_4 = -3 - j1$

$$\rho = \sqrt{3^2 + 1^2}, \quad \varphi_1 = \pi - arctg\left|\frac{1}{3}\right|.$$

$$\varphi_2 = -\pi - arctg\left|\frac{1}{3}\right|$$

$$\rho = \sqrt{3^2 + 1^2}, \quad \varphi_1 = \pi + arctg\left|\frac{1}{3}\right|,$$

$$\varphi_2 = -\pi + arctg\left|\frac{1}{3}\right|$$

Основные законы электрических цепей в комплексной форме

Предположим, что через двухполюсник протекает ток $i = I_m \cos(\omega t + \psi)$ и создает на зажимах двухполюсника напряжение $u = U_m \cos[\omega t + (\psi + \varphi)]$. Переходя к символам, определяют комплексное сопротивление двухполюсника $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_m e^{j(\psi+\varphi)}}{I_m e^{j\psi}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = ze^{j\varphi}$. z – уже известное полное сопротивление цепи, φ – фазовый угол между напряжением и током. $Z = ze^{j\varphi} = r + jx = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, $r = \operatorname{Re} Z$ - активное сопротивление цепи, $x = \operatorname{Im} Z$ - реактивное сопротивление цепи. Комплексное сопротивление индуктивного элемента $Z_L = jx_L = j\omega L$, комплексное сопротивление емкостного элемента $Z_C = -jx_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$.

Комплексная проводимость двухполюсника $Y = \frac{1}{Z} = g + jb$. $g = \operatorname{Re} Y$ - активная проводимость двухполюсника, $b = \operatorname{Im} Y$ - реактивная проводимость. Комплексная проводимость индуктивного элемента $Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$, комплексная проводимость емкостного элемента $Y_c = j\omega C$.

Комплексная форма записи закона Ома $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$.

Законы Кирхгофа в комплексной форме:

1. $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов в ветвях, подключенных к узлу, равна 0. При сложении токи, направленные в узел, записываем с одним знаком, вытекающие из узла – с противоположным знаком.

2. $\sum_{k=1}^{m} \dot{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k$ - в замкнутом контуре алгебраическая сумма комплексных амплитуд напряжений на участках контура равна алгебраической сумме

комплексных амплитуд источников ЭДС, включенных в контур. Если направление напряжений на участках контура совпадает с направлением обхода контура, такие слагаемые записывают с одним знаком. С тем же знаком записывают комплексные амплитуды ЭДС источников, которые совпадают с направлением обхода контура. У остальных слагаемых знаки противоположные.

Энергетические характеристики электрической цепи в комплексной форме: $\widetilde{S} = \dot{U}_\partial I_\partial^* = U_\partial I_\partial \cos\varphi + jU_\partial I_\partial \sin\varphi = P + jQ = Se^{j\varphi}$ - полная комплексная мощность (знак * обозначает комплексное сопряжение).

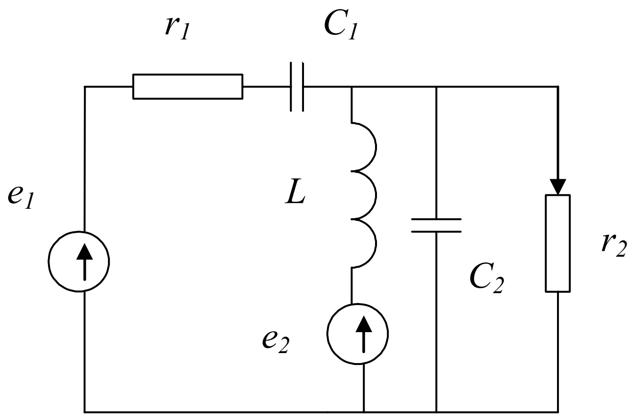
Уравнение баланса комплексной мощности $\sum\limits_{(n)} \dot{U}_n I_n^* = 0$, n – номер ветви, $\dot{U}_n$ - комплексная амплитуда напряжения на ветви, $\dot{I}_n$ - комплексная амплитуда тока, протекающего через ветвь. Сумма комплексных мощностей, определенных для всех ветвей цепи, равна 0.

Уравнение баланса мощности можно записать иначе. Активные элементы цепи – идеальные источники – отдают энергию в цепь, пассивные элементы ее поглощают. $\sum\limits_{k=1}^{m} (\dot{E}_k I_k^* + \dot{U}_k \mathfrak{I}_k^*) = \sum\limits_{k=1}^{n} [I_k^2 r_k + jI_k^2 (x_{Lk} - x_{Ck})]$

В левой части равенства $\dot{I}_k$ - комплексная амплитуда тока, протекающего через источник ЭДС, знак первого слагаемого положительный, если направление тока I_k и ЭДС E_k совпадают, $\dot{\mathfrak{I}}_k$ - комплексная амплитуда тока источника тока, $\dot{U}_k$ - комплексная амплитуда напряжения на зажимах этого источника. Знак второго слагаемого положительный, если направления тока источника $\mathfrak{I}_k$ и напряжения U_k на этом источнике, не совпадают.

В правой части равенства I_k – амплитуды токов, протекающих через пассивные элементы цепи.

Рассмотрим пример.



Дано: $e_1 = 100\cos\omega t$ В,
$e_2 = 100\cos(\omega t - \pi/2)$ В,
$r_1 = r_2 = 1$ кОм,
$x_L = x_{C1} = x_{C2} = 1$ кОм.

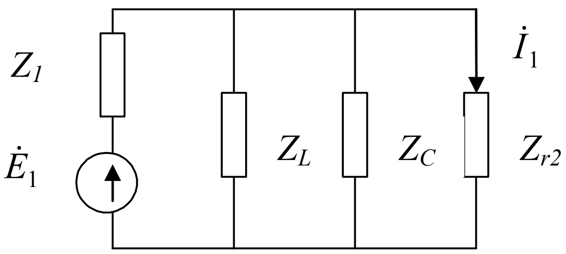
Требуется определить ток i_{r2}, протекающий в ветви с сопротивлением r_2.

Комплексные амплитуды ЭДС источников $\dot{E}_1 = 100$ В, $\dot{E}_2 = -j100$ В. Комплексные сопротивления ветвей $Z_1 = r_1 - jx_{C1} = 1 - j1$ кОм, $Z_L = jx_L = j1$, $Z_{C2} = -jx_{C2} = -j1$ кОм, $Z_{r2} = r_2 = 1$кОм.

Решим задачу двумя способами.

а). Используем принцип суперпозиции (метод наложения). Комплексную амплитуду тока $\dot{I}_{r2}$ определим как сумму комплексных амплитуд токов, создаваемых источником $\dot{E}_1$ в отсутствие источника $\dot{E}_2$ и источником $\dot{E}_2$ в отсутствие источника $\dot{E}_1$. $\dot{I}_{r2} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$.

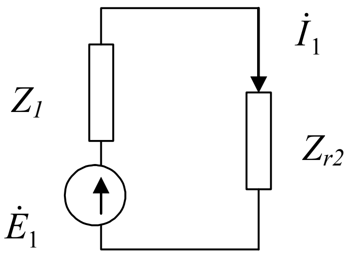
Определим ток $\dot{I}_1$.



Комплексное сопротивление параллельного соединения элементов Z_L и Z_{C2}

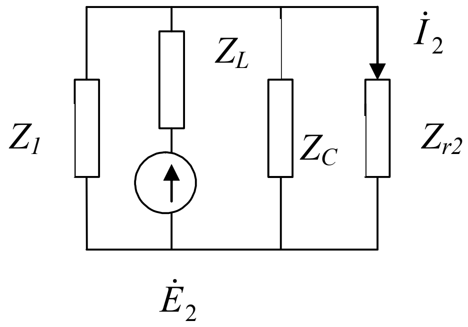
$$Z_{LC} = \frac{Z_L Z_{C2}}{Z_L + Z_{C2}} = \frac{j1 \cdot (-j1)}{j1 - j1} = \infty,$$

значит достаточно рассмотреть схему

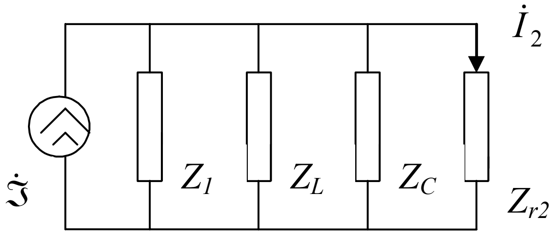


$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_{r2}} = \frac{100}{2 - j} = 20(2 + j) \text{ мА}.$$

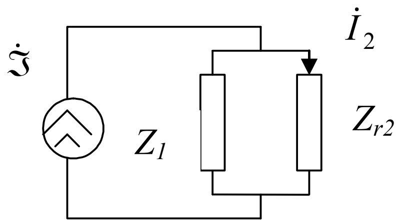
Комплексную амплитуду $\dot{I}_2$ тока определим из схемы



Заменим источник ЭДС эквивалентным ему источником тока. $\dot{\Im} = \dfrac{\dot{E}_2}{Z_L}$



Учитывая, что параллельное соединение ветвей с комплексными сопротивлениями Z_L и Z_{C2} обладает бесконечно большим сопротивлением, находим ток $\dot{I}_2$ для схемы



Ток, втекающий в два параллельно соединенных элемента, делится между плечами следующим образом

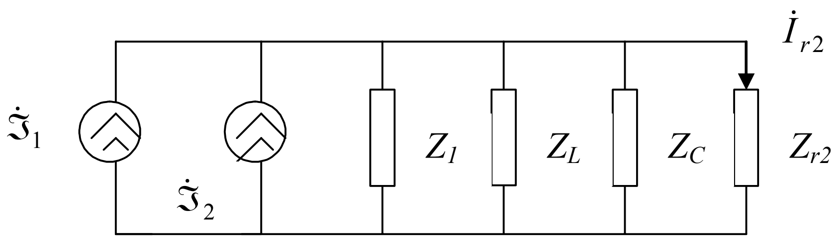
$$\dot{I}_2 = \dot{\Im}\frac{Z_1 Z_{r2}}{Z_1 + Z_{r2}} \cdot \frac{1}{Z_{r2}} = \dot{\Im}\frac{Z_1}{Z_1 + Z_{r2}}.$$

$\dot{I}_2 = -20(3 - j1)$ мА.

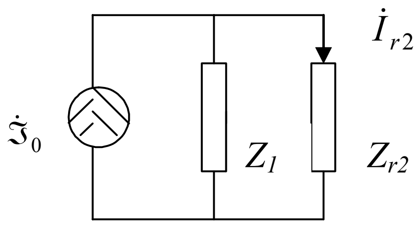
$$\dot{I}_{r2} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 20(-1 + j2) = 20\sqrt{5}\exp\left[j\left(\pi - arctg\frac{2}{1}\right)\right],$$

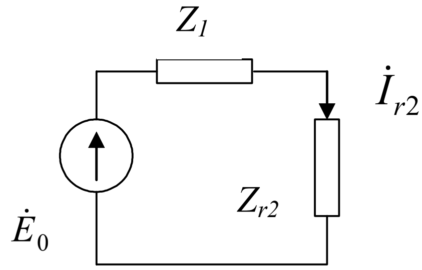
$i_{r2}(t) = 20\sqrt{5}\cos[\omega t - (\pi - arctg2)]$ мА.

б). Заменим источники ЭДС эквивалентными им источниками тока:



$\dot{\Im}_1 = \dfrac{\dot{E}_1}{Z_1}$, $\dot{\Im}_2 = \dfrac{\dot{E}_2}{Z_L}$. В рассматриваемой задаче параллельное соединение ветвей с индуктивностью L и с емкостью C_2. обладает бесконечно большим сопротивлением, поэтому для расчета тока, протекающего через резистивный элемент r_2, можно перейти к схеме с источником тока $\dot{\Im}_0 = \dot{\Im}_1 + \dot{\Im}_2$, либо к схеме с эквивалентным ему источником напряжения $\dot{E}_0 = \dot{\Im}_0 Z_1$





Очевидно, что результат вычислений получится тем же.

Метод контурных токов

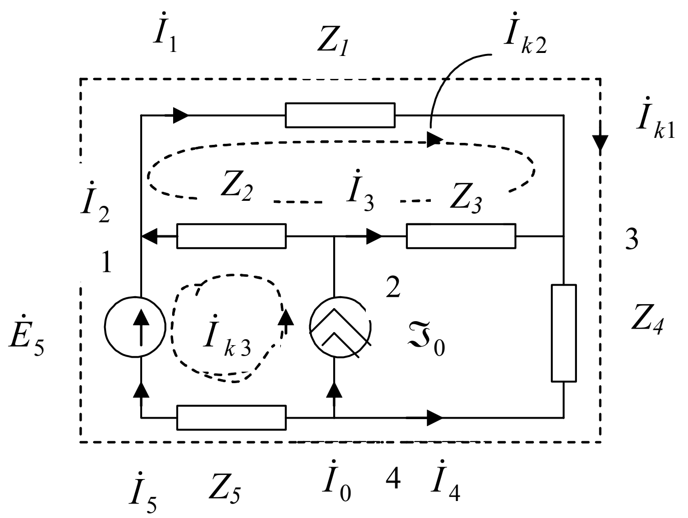
Как уже было замечено, расчет электрической цепи предполагает определение токов в ветвях при заданных источниках гармонических колебаний и известных пассивных элементах цепи. Такой расчет позволяют провести уравнения, записанные для исследуемой цепи на основе законов Кирхгофа. Если электрическая цепь содержит $N_в$ - ветвей, $N_у$ – узлов, то первый закон Кирхгофа позволяет написать ($N_у$ -1) независимых уравнений, а второй закон – ($N_в$ - $N_у$ + 1) независимых уравнений, т.е. их общее число равно $N_в$ – числу ветвей в цепи.

Метод контурных токов, как и метод узловых потенциалов, позволяет сократить число уравнений, которые необходимо первоначально решить. Но и тот, и другой метод дает ответ не на поставленную задачу, но позволяет получить некоторые промежуточные результаты.

Метод контурных токов заключается в том, что первоначально определяются вспомогательные – контурные токи. Искомые токи в каждой ветви являются алгебраической суммой контурных токов. Решение задачи методом контурных токов основано на решении уравнений, составленных для выбранных контуров с использованием второго закона Кирхгофа. Так как число независимых уравнений при этом равно ($N_в$ - $N_у$ + 1), предварительно в исследуемой цепи необходимо выбрать именно такое число контуров. Положительные направления искомых токов в ветвях выбираются произвольно, так же как произвольно выбирается направление контурных токов (направление обхода контуров).

Рассмотрим пример.

Предполагая, что в цепи действуют источники гармонических колебаний, уравнения будем писать для комплексных амплитуд.



В задаче ($N_в$ - $N_у$ + 1)=6-4+1=3. Следовательно, необходимо выбрать три контура. Если в цепи есть *идеальные источники тока*, то следует контура выбирать так, чтобы через ветви, содержащие такие источники, проходил только один контур. При таком выборе контуров можно утверждать, что контурные токи контуров, содержащих источники тока, равны токам этих источников (с учетом выбранного направления). В рассматриваемой задаче $\dot{I}_{k3} = \dot{\Im}_0$.

Итак, воспользуемся вторым законом Кирхгофа и запишем уравнения для контуров 1 и 2 (которые выбраны и пронумерованы произвольно).

Для контура 1: $Z_1(\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2}) + Z_4\dot{I}_{k1} + Z_5(\dot{I}_{k1} - \dot{I}_{k3}) = \dot{E}_5$.

Для контура 2: $Z_1(\dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2}) + Z_3\dot{I}_{k2} + Z_2(\dot{I}_{k2} + \dot{I}_{k3}) = 0$

В первом уравнении перед током $\dot{I}_{k3}$ поставлен минус потому, что через элемент Z_5 контурные токи $\dot{I}_{k1}$ и $\dot{I}_{k3}$ протекают встречно, ток $\dot{I}_{k3}$ направлен против выбранного направления обхода контура. Преобразуем каждое из уравнений, суммируя сомножители, относящиеся к каждому контурному току.

$$(Z_1 + Z_4 + Z_5)\dot{I}_{k1} \quad + \; Z_1\dot{I}_{k2} \; - \; Z_5\dot{I}_{k3} = \dot{E}_5$$

$$Z_1\dot{I}_{k1} \; + (Z_1 + Z_2 + Z_3)\dot{I}_{k2} \; + \; Z_2\dot{I}_{k3} = 0.$$

В первом уравнении, написанном для контура 1, сомножитель $(Z_1 + Z_4 + Z_5)$ - это сумма комплексных сопротивлений всех ветвей контура 1. (Напомним, сопротивление идеального источника ЭДС равно 0). Множитель Z_1 у $\dot{I}_{k2}$ - комплексное сопротивление ветви, общей для контуров 1 и 2, множитель Z_5 у $\dot{I}_{k3}$ - это комплексное сопротивление ветви, общей контуров 1 и 3. В правой части уравнения стоит комплексная амплитуда ЭДС источника, входящего в контур 1.

Во втором уравнении, составленном для контура 2, множителем контурного тока $\dot{I}_{k2}$ этого контура является $(Z_1 + Z_2 + Z_3)$ - комплексное сопротивление всех ветвей, образующих контур 2, а множители у контурных токов других контуров – комплексные сопротивления ветвей, общих для контура 2 и контура 1 или контура 3. Правая часть уравнения равна 0, во втором контуре источники ЭДС отсутствуют.

Говоря о том, что задача решается методом контурных токов, подразумевают, что будет использована система уравнений, записанных в формализованном виде: для электрической цепи, где необходимо выбрать n контуров

$$Z_{11}\dot{I}_{k1} + Z_{12}\dot{I}_{k2} + Z_{13}\dot{I}_{k3} + ... + Z_{1n}\dot{I}_{kn} = \sum_{(1)} \dot{E}_k$$

$$Z_{21}\dot{I}_{k1} + Z_{22}\dot{I}_{k2} + Z_{23}\dot{I}_{k3} + ... + Z_{2n}\dot{I}_{kn} = \sum_{(2)} \dot{E}_k$$

……………………………………………….

$$Z_{n1}\dot{I}_{k1} + Z_{n2}\dot{I}_{k2} + Z_{n3}\dot{I}_{k3} + ... + Z_{nn}\dot{I}_{kn} = \sum_{(n)} \dot{E}_k$$

Здесь $\dot{I}_{ki}$ - комплексная амплитуда контурного тока контура i. Z_{ii} – сумма комплексных сопротивлений всех ветвей, образующих контур i. Z_{im} – алгебраическая сумма комплексных сопротивлений ветвей, общих для контура i и контура m. Знак перед такими слагаемыми положительный, если направление контурных токов в контурах i и m в рассматриваемой ветви совпадает. Если между контурами i и m нет общей ветви, это сопротивление равно 0. $\sum\limits_{(i)} \dot{E}_k$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд ЭДС источников напряжения, включенных в контур i. Слагаемые положительные, если направление контурного тока $\dot{I}_{ki}$ и направление источника ЭДС совпадают.

Решение этой системы уравнений можно получить, например, вычисляя определители, либо с помощью компьютерных математических программ. Результатом решения системы являются комплексные амплитуды контурных токов $\dot{I}_{k1}, \dot{I}_{k2}, ... \dot{I}_{kn}$. Истинные токи в ветвях электрической цепи можно определить алгебраическим сложением контурных токов, протекающих через рассматриваемые ветви.

Полученная в рассмотренном примере система уравнений соответствует формализованной системе уравнений метода контурных токов. Зная ее решение, можно определить токи в ветвях электрической цепи: $\dot{I}_0 = \dot{\Im}_0$,

$\dot{I}_1 = \dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{k2} + \dot{I}_{k3}$, $\dot{I}_3 = -\dot{I}_{k2}$, $\dot{I}_4 = -\dot{I}_{k1}$, $\dot{I}_5 = \dot{I}_{k1} - \dot{I}_{k3}$.

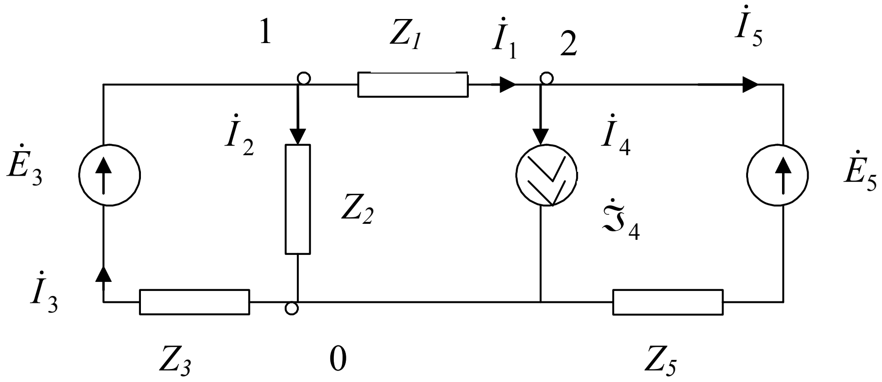
Проверить правильность записанных соотношений можно, применив первый закон Кирхгофа к токам в узлах. Например, для узла 1:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_5 \rightarrow \dot{I}_{k1} + \dot{I}_{k2} = \dot{I}_{k2} + \dot{I}_{k3} + \dot{I}_{k1} - \dot{I}_{k3}.$$

Метод узловых потенциалов.

При решении задачи с использованием этого метода первоначально определяются потенциалы узлов, а затем вычисляются токи в ветвях электрической цепи. Формализованная система уравнений для потенциалов узлов получается в результате применения первого закона Кирхгофа. Число уравнений, которые следует записать в этом случае, определяется разностью (N_y -1). Один из узлов электрической цепи принимается за опорный (базовый), его потенциал полагается равным 0, потенциалы остальных узлов будут определены относительно опорного узла.

Рассмотрим пример.



Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях. Первый закон Кирхгофа позволяет в рассматриваемом случае составить два независимых уравнения: Запишем для первого узла $\dot I_3 - \dot I_1 - \dot I_2 = 0$, для второго узла $\dot I_1 - \dot I_5 - \dot I_4 = 0, \quad \dot I_4 = \dot{\Im}_4$. Комплексные амплитуды напряжения на ветвях и комплексные амплитуды токов в ветвях:

$$\dot U_{12} = \dot\varphi_1 - \dot\varphi_2 = \dot I_1 Z_1 \qquad \Rightarrow \quad \dot I_1 = \frac{\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2}{Z_1}$$

$$\dot U_{10} = \dot\varphi_1 - \dot\varphi_0 = \dot I_2 Z_2 \qquad \Rightarrow \quad \dot I_2 = \frac{\dot\varphi_1 - \dot\varphi_0}{Z_2}$$

$$\dot U_{10} = \dot\varphi_1 - \dot\varphi_0 = -\dot I_3 Z_3 + \dot E_3 \quad \Rightarrow \quad \dot I_3 = \frac{\dot\varphi_0 - \dot\varphi_1 + \dot E_3}{Z_3}$$

$$\dot U_{20} = \dot\varphi_2 - \dot\varphi_0 = \dot I_5 Z_5 + \dot E_5 \quad \Rightarrow \quad \dot I_5 = \frac{\dot\varphi_2 - \dot\varphi_0 - \dot E_5}{Z_5}$$

Положим $\dot\varphi_0 = 0$. Тогда уравнения, записанные для узлов, можно представить в виде: $\dfrac{-\dot\varphi_1 + \dot E_3}{Z_3} - \dfrac{\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2}{Z_1} - \dfrac{\dot\varphi_1}{Z_2} = 0$ (узел 1),

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2}{Z_1} - \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{E}_5}{Z_5} - \dot{\mathfrak{I}}_4 = 0 \text{ (узел 2)},$$

или в виде системы уравнений относительно потенциалов узлов:

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{Z_1}\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{E}_3}{Z_3},$$

$$-\frac{1}{Z_1}\dot{\varphi}_1 + \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_5}\right)\dot{\varphi}_2 = -\dot{\mathfrak{I}}_4 + \frac{\dot{E}_5}{Z_5}.$$

Первое уравнение написано для узла 1. Сомножителем при $\dot{\varphi}_1$ (потенциале этого узла) является сумма комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1. Сомножитель при $\dot{\varphi}_2$- комплексная проводимость ветви между рассматриваемым узлом и узлом 2. В правой части уравнения – ток источника, находящегося в одной из ветвей, сходящихся в узле 1 (источник ЭДС заменен эквивалентным ему источником тока $\dot{\mathfrak{I}}_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_3}$).

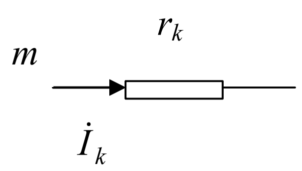
Второе уравнение написано для узла 2. Сомножитель комплексной амплитуды потенциала этого узла – сумма комплексных проводимостей всех ветвей, сходящихся в узле 2. Сомножитель у $\dot{\varphi}_1$ - комплексная проводимость ветви, расположенной между узлами 2 и 1. В правой части уравнения – сумма токов источников, расположенных в ветвях, сходящихся в узле 2. Знак минус перед комплексной амплитудой тока $\dot{\mathfrak{I}}_4$ говорит о том, что ток этого источника вытекает из рассматриваемого узла.

Полученная в примере система уравнений соответствует формализованной системе уравнений, которую используют для расчета электрической цепи методом узловых потенциалов. Предположим, что в электрической цепи (n+1) узел. Тогда необходимо, определив постоянные коэффициенты, решить систему n уравнений для нахождения потенциалов n узлов. Один из узлов принимают за опорный и считают потенциал этого узла равным 0.

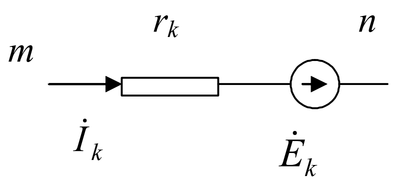
$$
\begin{aligned}
Y_{11}\dot{\varphi}_1 - Y_{12}\dot{\varphi}_2 - Y_{13}\dot{\varphi}_3 - \ldots - Y_{1n}\dot{\varphi}_n &= \sum_{(1)} \dot{E}_k Y_k + \sum_{(1)} \dot{\Im}_k \\
- Y_{21}\dot{\varphi}_1 + Y_{22}\dot{\varphi}_2 - Y_{23}\dot{\varphi}_3 - \ldots - Y_{2n}\dot{\varphi}_n &= \sum_{(2)} \dot{E}_k Y_k + \sum_{(2)} \dot{\Im}_k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
- Y_{n1}\dot{\varphi}_1 - Y_{n2}\dot{\varphi}_2 - Y_{n3}\dot{\varphi}_3 - \ldots + Y_{nn}\dot{\varphi}_n &= \sum_{(n)} \dot{E}_k Y_k + \sum_{(n)} \dot{\Im}_k
\end{aligned}
$$

Здесь $\dot{\varphi}_i$ - комплексная амплитуда потенциала узла i, Y_{ii} –сумма комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле i, Y_{im} – комплексная проводимость ветви между узлом i и m. $\sum\limits_{(i)} \dot{E}_k Y_k + \sum\limits_{(i)} \dot{\Im}_k$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов источников, расположенных в ветвях, сходящихся в узле i. Положительными считаются токи источников, втекающие в рассматриваемый узел.

В результате решения системы будут определены комплексные амплитуды потенциалов узлов. Токи в ветвях, расположенных между узлами m и n, можно рассчитать следующим образом:



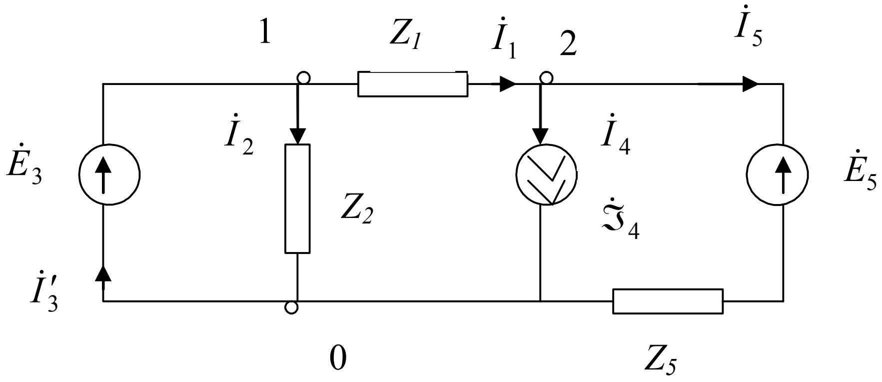
$$\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n = \dot{U}_{mn} = \dot{I}_k Z_k, \quad \dot{I}_k = Y_k(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n)$$



$$\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n = \dot{U}_{mn} = \dot{I}_k Z_k - \dot{E}_k, \; \dot{I}_k = Y_k(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n + \dot{E}_k)$$

Следует заметить, что, если в одной из ветвей электрической цепи находится идеальный источник напряжения, опорным следует считать узел, из которого направлен этот источник. Тогда потенциал второго узла источника будет равен его ЭДС. Число неизвестных задачи сокращается.

Вернемся к рассмотренному примеру и предположим, что Z_3 равно 0.



Для этой электрической цепи необходимо написать уравнение для узла 2

$$\dot{\varphi}_2\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_5}\right)-\dot{\varphi}_1\frac{1}{Z_1}=-\dot{\Im}_4+\frac{\dot{E}_5}{Z_5}. \qquad \dot{\varphi}_1=\dot{E}_3.$$

При записи коэффициентов уравнения учтено, что сопротивление идеального источника ЭДС равно 0, а идеальный источник тока обладает бесконечно большим внутренним сопротивлением. Определив комплексную амплитуду потенциала узла 2, найдем комплексные амплитуды токов, протекающих в ветвях. Напомним, что условно положительные направления токов в ветвях были определены произвольно. В соответствии с этими принятыми направлениями

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2}{Z_1},\quad \dot{I}_2=\frac{\dot{\varphi}_1}{Z_2},\quad \dot{I}_4=\dot{\Im}_4,\quad \dot{I}_5=\frac{\dot{\varphi}_2-\dot{E}_5}{Z_5},\quad \dot{I}'_3=\dot{I}_1+\dot{I}_2.$$

Когда определены токи во всех ветвях, можно записать *уравнение баланса мощности*. Это позволит убедиться в правильности найденного решения. Если задача была решена с помощью метода узловых потенциалов, то можно воспользоваться следующей записью уравнения баланса мощности $\sum\limits_{(m)}\dot{U}_k I_k^*=0$. Напряжение на ветви определяется разностью потенциалов ее концов. $\dot{U}_{ab}=\dot{\varphi}_a-\dot{\varphi}_b$ Было условлено считать, что положительные направления отсчета напряжения на ветви (на элементе цепи) совпадают с положительным направлением тока. Итак, для электрической цепи, изображенной на стр.29, должно выполняться следующее равенство:

$$-\dot{\varphi}_1 I_3^*+\dot{\varphi}_1 I_2^*+(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\dot{I}_1^*+\dot{\varphi}_2 I_5^*+\dot{\varphi}_2 I_4^*=0$$

Запишем уравнение баланса мощности для электрической цепи, изображенной на стр. 26. Токи в ветвях этой цепи были рассчитаны с помощью метод контурных токов. Напряжения на ветвях

$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 Z_1$, $\dot{U}_{21} = \dot{I}_2 Z_2$, $\dot{U}_{23} = \dot{I}_3 Z_3$, $\dot{U}_{43} = \dot{I}_4 Z_4$, $\dot{U}_{41} = \dot{I}_5 Z_5 - \dot{E}_5$.

Напряжение на ветви с источником тока $\dot{\Im}_0$ можно определить, как $\dot{U}_{42} = \dot{I}_4 Z_4 - \dot{I}_3 Z_3$. Следовательно, для этой электрической цепи должно выполняться равенство: $\dot{U}_{13} I_1^* + \dot{U}_{21} I_2^* + \dot{U}_{23} I_3^* + \dot{U}_{43} I_4^* + \dot{U}_{41} I_5^* + \dot{U}_{42} I_0^* = 0$,

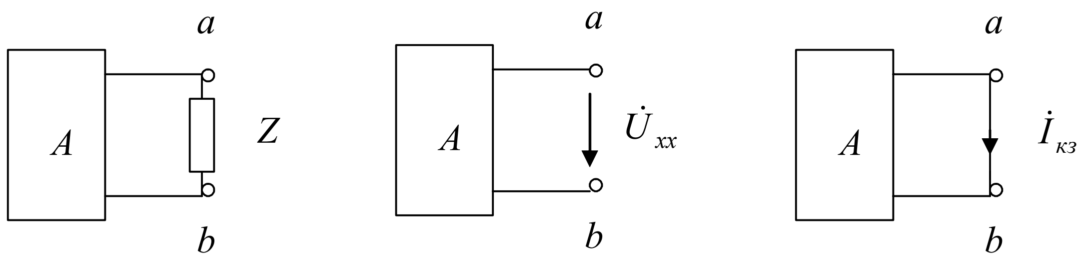
или $\left|\dot{I}_1\right|^2 Z_1 + \left|\dot{I}_2\right|^2 Z_2 + \left|\dot{I}_3\right|^2 Z_3 + \left|\dot{I}_4\right|^2 Z_4 + \left|\dot{I}_5\right|^2 Z_5 - \dot{E}_5 I_5^* + \Im_0^* (\dot{I}_4 Z_4 - \dot{I}_3 Z_3)$=0,

или $\left|\dot{I}_1\right|^2 Z_1 + \left|\dot{I}_2\right|^2 Z_2 + \left|\dot{I}_3\right|^2 Z_3 + \left|\dot{I}_4\right|^2 Z_4 + \left|\dot{I}_5\right|^2 Z_5 =$ $\dot{E}_5 I_5^* - \Im_0^* (\dot{I}_4 Z_4 - \dot{I}_3 Z_3)$-

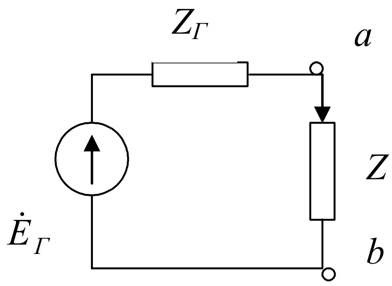
если это равенство выполняется, значит, найденные значения токов в ветвях верны. Последняя запись уравнения баланса мощности говорит о том, что мощность, накопленная и расходуемая в пассивных элементах цепи, должна совпадать с мощностью, развиваемой всеми идеальными источниками энергии.

Применение теоремы об эквивалентном источнике к расчету электрических цепей.

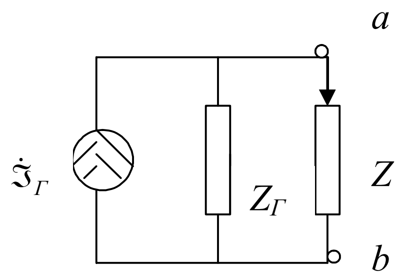
В том случае, когда необходимо рассчитать ток в одной ветви электрической цепи, может оказаться полезной теорема об эквивалентном источнике. Суть этого метода решения заключается в следующем. Вся электрическая цепь *A* с существующими в ней соединениями пассивных элементов и источников энергии заменяется относительно узлов *a* и *b*, к которым подключена исследуемая ветвь, эквивалентным источником с его внутренним сопротивлением. Это может быть источник ЭДС (теорема Тевенена), либо источник тока (теорема Нортона). Первоначальная задача состоит в определении параметров этого эквивалентного источника. ЭДС эквивалентного источника напряжения равна напряжению холостого хода – напряжению в цепи на разомкнутых зажимах *a* и *b*. Ток эквивалентного источника тока равен току короткого замыкания – току на короткозамкнутом участке между узлами *a* и *b*.



Когда найдены значения $\dot{E}_Г$ или $\dot{\mathfrak{I}}_Г$, ток в ветви между узлами *a* и *b* определяется для той или иной электрической цепи:



$$\dot{I}_Z = \frac{\dot{E}_Г}{Z + Z_Г}$$



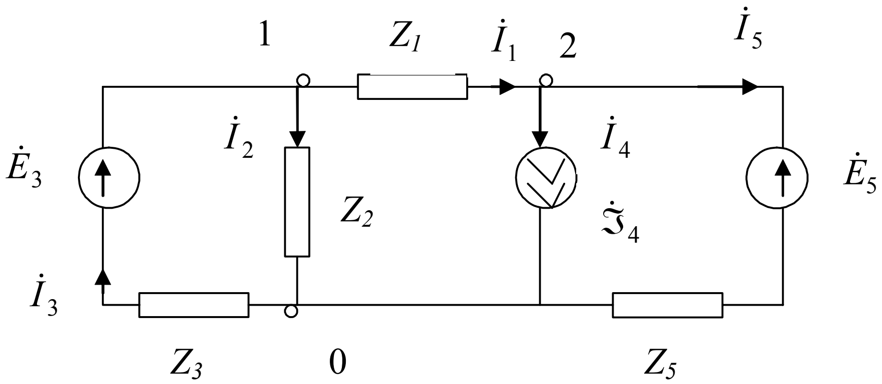
$$\dot{I}_Z = \dot{\mathfrak{I}}_Г \frac{Z_Г}{Z + Z_Г}$$

Внутреннее сопротивление источника $Z_Г$ - это входное сопротивление пассивной электрической цепи *A*, определенное со стороны разомкнутых зажимов *a* и *b*. В пассивной цепи источники ЭДС замкнуты накоротко, ветви с источниками тока разомкнуты.

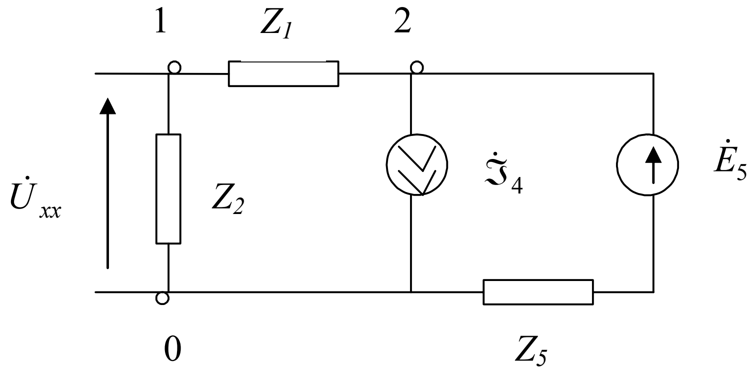
Расчет $\dot{E}_Г$ или $\dot{\mathfrak{I}}_Г$ можно провести, используя уже рассмотренные методы контурных токов или узловых потенциалов.

Рассмотрим пример.

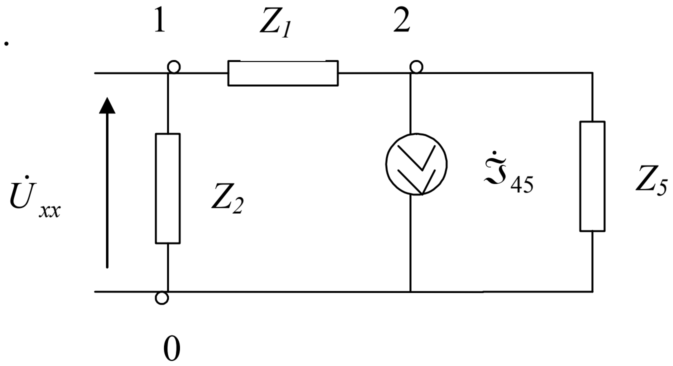
Рассчитаем ток $\dot{I}_3$ в электрической цепи, изображенной на стр. 29.



а). Используем теорему Тевенена. Определим $\dot{E}_Г$, рассчитав напряжение $\dot{U}_{xx}$ между узлами 0 и 1 в отсутствии элементов ветви 3, т.е. в отсутствии источника $\dot{E}_3$ и комплексного сопротивления ветви Z_3.

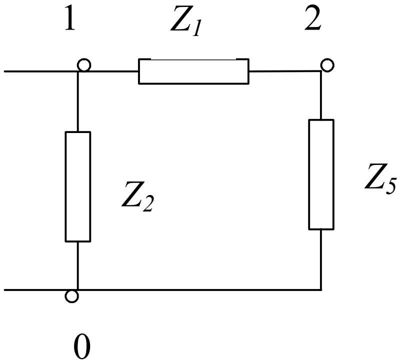


Заменив ветвь 5 с источником $\dot{E}_5$ и комплексным сопротивление Z_5 источником тока $\dot{\mathfrak{I}}_5 = \dfrac{\dot{E}_5}{Z_5}$, переходим к электрической схеме, где источник тока $\dot{\mathfrak{I}}_{45} = \dot{\mathfrak{I}}_4 - \dot{\mathfrak{I}}_5$.



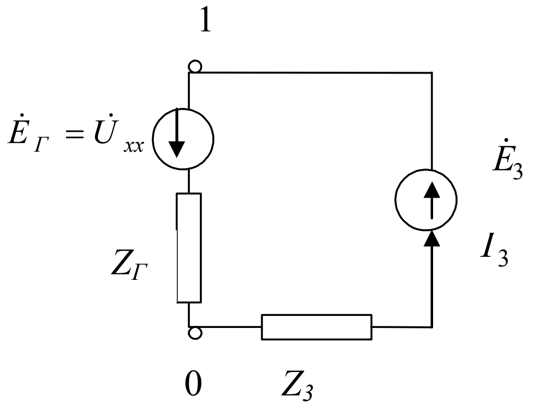
Теперь можно вычислить ток, протекающий через сопротивление Z_2: $\dot{I}_{Z2} = \dot{\mathfrak{I}}_{45} \dfrac{Z_5}{Z_1 + Z_2 + Z_5}$. Искомое напряжение $\dot{U}_{xx} = \dot{I}_{Z2} Z_2$.

Для определения $Z_Г$ разомкнем ветвь с источником тока $\dot{\mathfrak{I}}_4$ и замкнем накоротко участок цепи, где расположен источник $\dot{E}_5$.



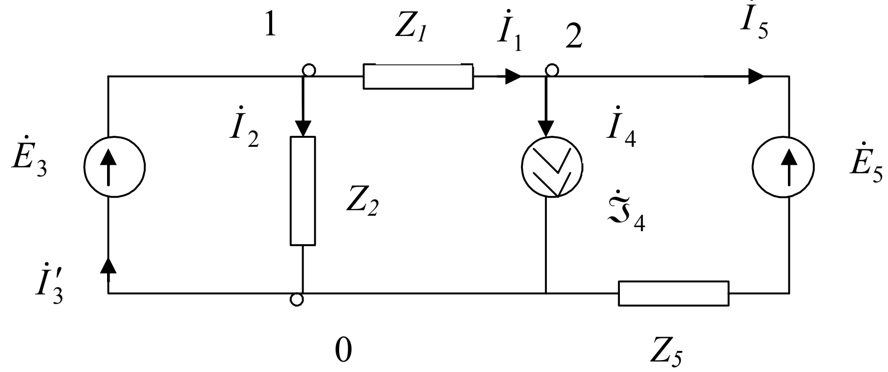
Сопротивление генератора $Z_Г$ – это сопротивление параллельно соединенных ветвей с комплексными сопротивлениями Z_2 и $(Z_1 + Z_5)$: $Z_Г = \dfrac{Z_2(Z_1 + Z_5)}{Z_1 + Z_2 + Z_5}$.

Осталось определить ток $\dot{I}_3$

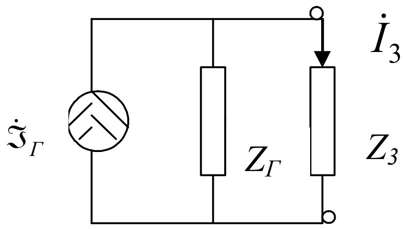


$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_Г + \dot{E}_3}{Z_Г + Z_3}$$

б). Решим задачу, используя теорему об эквивалентном источнике тока. Для определения тока источника можно закоротить и источник $\dot{E}_3$, и сопротивление Z_3. Можно поступить иначе – закоротить только участок с сопротивлением Z_3 и определить ток в ветви, где остался источник $\dot{E}_3$. Если поступить так, то искомый ток $\dot{I}_{кз}$ будет равен току $\dot{I}_3'$, определенному на стр. 32 для электрической цепи



Итак, считаем, что $\dot{\mathfrak{I}}_Г = \dot{I}_{кз}$ теперь нам известен. Внутреннее сопротивление генератора $Z_Г$ определено в пункте а). (Напомним, что сопротивление идеального источника ЭДС $\dot{E}_3$ равно 0, следовательно, эквивалентная схема для определения $Z_Г$ останется прежней). Расчет тока $\dot{I}_3$ с использованием теоремы Нортона следует провести для электрической цепи:



$$\dot{\Im}_Г = \dot{I}'_3, \quad \dot{I}_3 = \dot{\Im}_Г \frac{Z_Г}{Z_Г + Z_3}$$

Переходные процессы в электрических цепях

Расчет переходных процессов классическим методом

При подключении к цепи или отключении от нее источников энергии, при всевозможных переключениях внутри схемы происходит изменение режима ее работы. Цепь описывается новыми уравнениями, им соответствует новый стационарный режим. Уравнения, составленные любым из методов расчета электрических цепей, обязательно приведут к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Если электрическая цепь после коммутации будет содержать источники энергии, полученное дифференциальное уравнение окажется неоднородным. Общее решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами складывается из общего решения этого уравнения без правой части (свободная составляющая) и решения того же дифференциального уравнения с правой частью (вынужденная составляющая). Таким образом, анализ переходного процесса сводится к решению уравнений цепи, которым она удовлетворяет после переключения ($t > 0$) при определенных начальных условиях. В момент переключения (коммутации) в цепи остаются неизменными ток, протекающий через индуктивный элемент, и напряжение на емкостном элементе.

$i_L(0_-) = i_L(0_+)$, $u_C(0_-) = u_C(0_+)$ - это *законы коммутации*, или независимые начальные условия. $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$ - это значения тока, протекающего через индуктивность и напряжение на емкости при $t = 0$, которые существовали в установившемся режиме в цепи до момента коммутации.

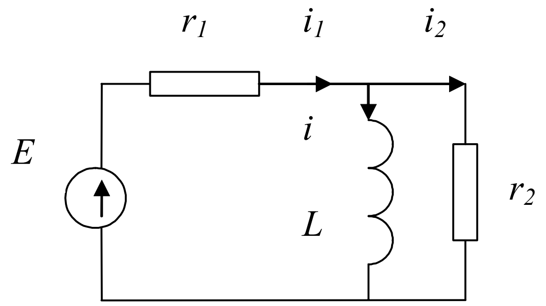
Переходный процесс – совокупность свободной и вынужденной составляющих токов и напряжений.

$$i_{L\,перех}(t) = i_{L\,вын}(t) + i_{L\,св}(t)\,,\ \ u_{C\,перех}(t) = u_{C\,вын}(t) + u_{C\,св}(t)\,.$$

$i_{Lввы}(t),\ \ u_{Cввы}(t)$ - мгновенные значения тока и напряжения в новой (после коммутации) цепи в установившемся режиме. Эти значения могут быть определены для электрической цепи уже известными способами.

Рассмотрим примеры.

1. Электрическую цепь в момент t = 0 подключают к источнику постоянного напряжения. Элементы цепи заданы. Определить токи во всех ветвях



$$E = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 30\,B, & t \ge 0 \end{cases}$$

r_1 = 10 Ом, r_2 = 30 Ом

L = 2 Гн

Токи в ветвях в переходном режиме будем определять в виде суммы двух слагаемых – свободной и вынужденной составляющей.

$$i_{перех}(t) = i_{вын}(t) + i_{св}(t)\,.$$

Запишем уравнения для цепи после коммутации (после включения источника напряжения). Составим уравнения, используя законы Кирхгофа.

$$i_1 = i + i_2\,,\quad i_2 r_2 = L\frac{di}{dt}\,,\quad i_1 r_1 + L\frac{di}{dt} = E\,.$$

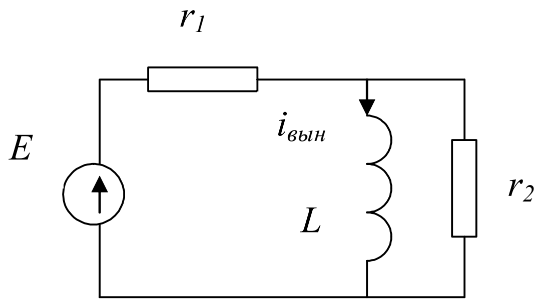
Независимое начальное условие известно для тока i, протекающего через ветвь с индуктивностью. К моменту t = 0 ток во всех ветвях цепи отсутствовал, так как в цепи не было источников энергии. $i(0_-) = 0$. Поэтому, используя написанные уравнения, составим дифференциальное уравнение относительно тока i:

$$i_2 = \frac{L}{r_2}\frac{di}{dt}, \qquad i_1 = i + \frac{L}{r_2}\frac{di}{dt}, \qquad L\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{di}{dt} + r_1 i = E.$$

Для нахождения свободной составляющей тока $i_{св}(t)$ найдем корень характеристического уравнения $pL\left[1+\frac{r_1}{r_2}\right] + r_1 = 0$: $\quad p_1 = -\frac{r_1 r_2}{L(r_1+r_2)}$.

Свободная составляющая тока $i_{св}(t) = A\exp(p_1 t)$. A – неизвестная постоянная, которую следует определить, корень характеристического уравнения должен быть отрицательным, так как с течением времени свободная составляющая процесса должна стремиться к 0.

Вынужденную составляющую тока $i_{вын}(t)$ определяем для цепи, в которой действует источник постоянного напряжения. Это ток, который будет протекать через ветвь с индуктивностью, в установившемся режиме.



Сопротивление индуктивного элемента постоянному току равно 0, ветвь с индуктивностью шунтирует ветвь с сопротивлением r_2. $i_{вын}(t) = \frac{E}{r_1}$.

Ток переходного режима $i_{перех}(t) = A\exp(p_1 t) + E/r_1$. Это соотношение справедливо для $t \geq 0$. Рассмотрим его в момент $t = 0_+$ и учтем, что ток в индуктивном элементе – непрерывная функция времени. $i(0_+) = i(0_-)$: $0 = A + E/r_1$. Постоянный множитель A становится известным.

Возвращаясь к написанным соотношениям между током i и токами i_1 и i_2, можно записать для переходного режима:

$$i_{перех}(t) = \frac{E}{r_1}(1 - e^{p_1 t}),$$

$$i_{1перех} = i_{перех} + \frac{L}{r_2}\frac{di_{перех}}{dt} = \frac{E}{r_1}\left[1 - e^{p_1 t}\,\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right], \quad i_{2перех} = \frac{L}{r_2}\frac{di_{перех}}{dt} = \frac{E}{r_1 + r_2}e^{p_1 t}.$$

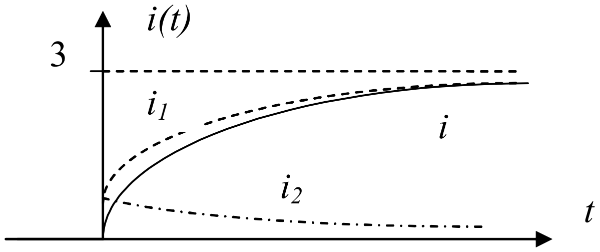
Обычно множитель свободной составляющей $e^{p_1 t}$ записывают в виде $e^{-\frac{t}{\tau}}$, τ – постоянная времени электрической цепи – это время, в течение которого свободная составляющая убывает в *e* раз. В примере $\tau = \frac{L(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} = 0.27$ с.

$i_{перех}(t)$ =3 $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ А, $i_{перех}(0)$=0, при $t \to \infty$ $i_{перех}(t) = i_{вын}(t)$= 3 А.

$i_{1перех}(t) = 3(1 - 0.75e^{-\frac{t}{\tau}})$, $i_{1перех}(0) = 0.75$ А,при $t \to \infty$ $i_{1перех}(t) = i_{1вын}(t) = 3$ А.

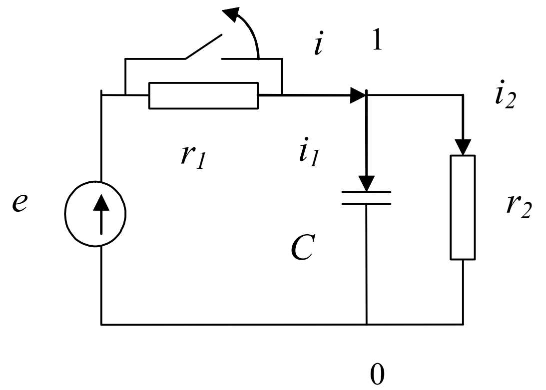
$i_{2перех}(t) = 0.75e^{-\frac{t}{\tau}}$ А, $i_{2перех}(0) = 0.75$ А, при $t \to \infty$ $i_{2перех}(t) = i_{2вын}(t) = 0$

Построим графики зависимости токов в ветвях от времени, t = 0 – момент коммутации



Ток, протекающий через ветвь с индуктивным элементом в момент коммутации сохраняет свое прежнее значение, при $t \to \infty$ стремится к значению тока в этой ветви в установившемся режиме в новой (после коммутации) электрической цепи. Токи i_1 (t), i_2 (t) в момент коммутации изменяются скачком, с увеличением времени стремятся к значениям стационарного режима в новой электрической цепи.

2. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний. В момент t = 0 размыкают ключ. Требуется определить напряжение на конденсаторе и ток в ветви генератора.



$e(t) = 25\cos(\omega t - \pi/6)$ В,

ω =5 10 ^{3}с$^{-1}$, С=10 мкФ

r_1 =20 Ом, r_2 =10 Ом.

а). Определим напряжение на конденсаторе к моменту коммутации (при замкнутом ключе), т.е. найдем независимое начальное условие. Рассматриваемая электрическая цепь - это схема с двумя узлами, напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника

$u_C(t) = e(t), \quad u_C(0_-) = 25\cos(\pi/6) = 21.65$ В.

б). Найдем вынужденную составляющую $u_{C вын}(t)$ для цепи с разомкнутым ключом. Воспользуемся методом комплексных амплитуд и методом узловых потенциалов. Примем за опорный узел 0. Для узла 1 справедливо уравнение:

$\dot{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + j\omega C\right) = \dfrac{\dot{E}}{r_1}$. Напряжение на конденсаторе $\dot{U}_C = \dot{\varphi}_1 = 7.9e^{-j48.4^o}$ В.

$u_C(t) = 7.9\cos(\omega t - 0.27\pi)$ В.

в). Составим дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе в переходном режиме. Из законов Кирхгофа следует:

$$i = i_1 + i_2, \quad i_1 = C\frac{du_C}{dt}, \quad i_2 = \frac{u_C}{r_2}, \quad i r_1 + u_C = e(t). \Rightarrow$$

$$C r_1 \frac{du_C}{dt} + \frac{r_1 + r_2}{r_2} u_C = e(t).$$

Корень характеристического уравнения $\quad Cr_1 p + \dfrac{r_1 + r_2}{r_2} = 0 \quad p_1 = -\dfrac{r_1 + r_2}{Cr_1 r_2}$.

Постоянная времени цепи $\tau = \dfrac{Cr_1 r_2}{r_1 + r_2} = 3.33 \cdot 10^{-5}\, c$.

Свободная составляющая напряжения на конденсаторе в переходном режиме

$$u_{C св}(t) = B\exp(p_1 t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}.$$

г). Итак, в переходном режиме напряжение на конденсаторе

$$u_{C\,перех}(t) = u_{C\,св}(t) + u_{C\,вын}(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}} + 7.9\cos(\omega t - 0.27\pi)\ \text{В}.$$

В момент $t = 0_+$ $\quad u_{C\,перех}(0_+) = B + 7.9\cos(0.27\pi)$ В.

Так как $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ =21.65 В, $\ B = 16.4$ В.

$$u_{C\,перех}(t) = 16.4e^{-\frac{t}{\tau}} + 7.9\cos(\omega t - 0.27\pi)\,\text{В}.$$

Ток i (t) в ветви генератора напряжения $i_{перех}(t) = C\dfrac{du_{C\,перех}}{dt} + \dfrac{u_{C\,перех}}{r_2} =$

$$= -3.3e^{-\frac{t}{\tau}} + 0.79\cos(\omega t - 0.27\pi) - 0.4\sin(\omega t - 0.27\pi)\ \text{А}.$$

В момент коммутации $i_{перех}(0_+) = -2.48$ А.

Ток i (t) в установившемся режиме в цепи до коммутации $i(t) = C\dfrac{de(t)}{dt} + \dfrac{e(t)}{r_2} = -\omega CE_m\sin(\omega t - \pi/6) + \dfrac{1}{r_2}E_m\cos(\omega t - \pi/6)$ А.

$i(0_-) = 2.78$ А – ток i (t) в момент размыкания ключа изменяется скачком.

Расчет переходных процессов с помощью преобразования Лапласа.

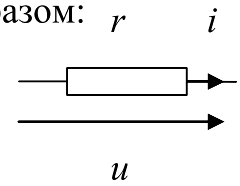
Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях также целесообразен и эффективен, как эффективен и целесообразен символический метод расчета установившегося режима при гармонических напряжениях и токах. В основе операторного исчисления лежит прямое интегральное преобразование Лапласа, с помощью которого функции времени f (t) преобразуются в функции комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$: $\quad \hat{F}(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$, f (t) – оригинал, $\hat{F}(p)$ - изображение функции, p –комплексная частота, или оператор.

Если задача решена для изображения, то для нахождения f (t) необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа $\quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma_0 - j\omega}^{\sigma_0 + j\omega}\hat{F}(p)e^{pt}dp$.

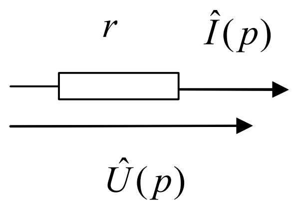
Соответствие между оригиналом и изображением взаимно однозначно. Во многих учебниках и справочниках приведены таблицы соответствия некоторых функций (оригиналов) и их изображений, поэтому процедура вычисления интегралов в большинстве случаев не требуется.

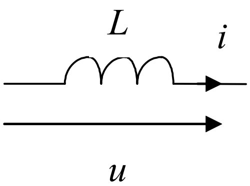
Преобразование Лапласа можно применять для расчета колебаний в цепи, начиная с любого (фиксированного) момента, если известно состояние цепи в этот момент (известны напряжения на емкостных элементах и токи в индуктивных элементах).

Для расчета цепи операторным методом необходимо записать изображения функций, описывающих источники, и перейти к *операторной схеме замещения* с учетом начальных условий. Для этого необходимо участки электрической цепи с пассивными элементами заменить следующим образом:



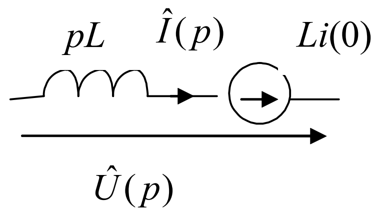
$$u(t) = ri(t) \;\div\; \hat{U}(p) = r\hat{I}(p)$$

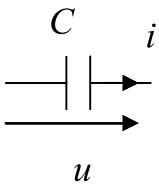




$$u(t) = L\frac{di}{dt} \;\div\; \hat{U}(p) = pL\hat{I}(p) - Li(0)$$

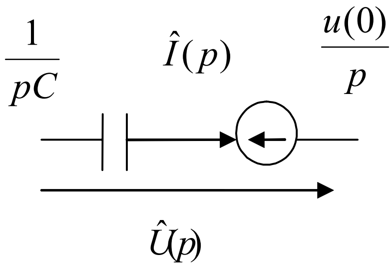
$$i\big|_{t=0} = i(0)$$





$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u(0) \;\div$$

$$\hat{U}(p) = \frac{1}{pC}\hat{I}(p) + \frac{u(0)}{p}$$



$Z_L(p) = pL$ – операторное сопротивление индуктивности,

$Z_C(p) = \dfrac{1}{pC}$ -операторное сопротивление емкости. Источники $Li\,(0)$ и $\dfrac{u(0)}{p}$ присутствуют в схеме замещения, если в момент t = 0 через индуктивный элемент протекал ток i (0), а на емкостном элементе было напряжение $u(0)$.

Расчет операторной схемы замещения производится любым известным методом. Для того, чтобы затем найти оригинал полученных решений, можно воспользоваться *теоремой разложения*.

Предположим, что найденное решение $\hat{F}(p)$ является рациональной дробью $\hat{F}(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, $A(p)$ – полином степени m, $B(p)$ – полином степени n.

$$A(p)=a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + ... + a_1 p + a_0,\ B(p)=b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + ... + b_1 p + b_0.$$

Считаем, что степень полинома в числителе меньше степени полинома в знаменателе $m < n$, корни p_i уравнения $B(p) = 0$ – простые.

$$B(p)=b_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)$$

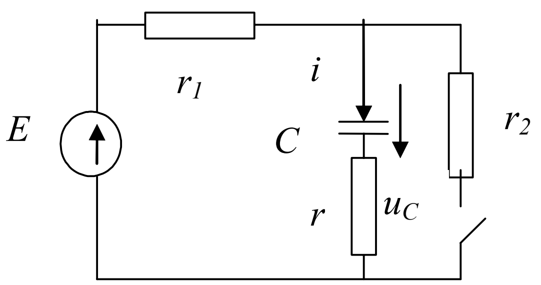
Тогда изображению $\hat{F}(p)$ соответствует оригинал $\dfrac{A(p)}{B(p)} \div \sum_{k=1}^{n}\dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$.

$B'(p_k)$ - производная полинома $B(p)$ по переменной p, вычисленная при $p = p_k$. Если одним из корней полинома $B(p)$ является 0, т.е. $B(p)=p\ B_1(p)$, тогда теорема разложения принимает вид

$$\frac{A(p)}{pB_1(p)} \div \frac{A(0)}{B_1(0)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A(p_k)}{p_k B_1'(p_k)}e^{p_k t}$$

Рассмотрим пример.

В электрической цепи действует источник постоянного напряжения. Определить ток, протекающий через конденсатор после замыкания ключа.

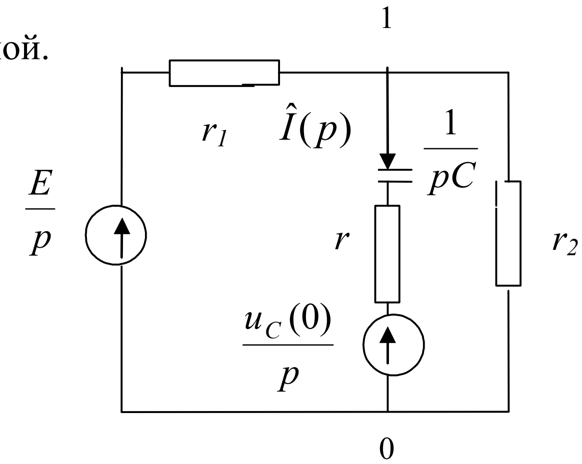


E= 24 В,

r=20 Ом, r_1=50 Ом,

r_2=100 Ом, C= 3 мкФ.

Перейдем к операторной схеме замещения. До замыкания ключа ток в цепи, содержащей конденсатор и находящейся под действием постоянного напряжения, отсутствовал. В момент $t = 0$ напряжение на конденсаторе $u_C(0)=E$, следовательно, емкостной элемент в операторной схеме замещения будет представлен операторным сопротивлением $\frac{1}{pC}$ и источником ЭДС $\frac{u_C(0)}{p}$. Изображение ЭДС источника $\hat{E}(p)=\frac{E}{p}$ - это изображение постоянной.

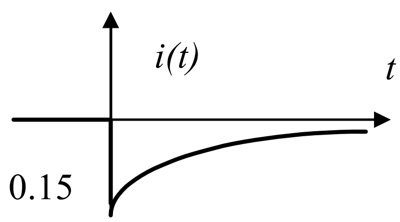


Проведем расчет, используя метод узловых потенциалов. В схеме замещения два узла.

$$\hat{\varphi}_1(p)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r+\frac{1}{pC}}\right)=\frac{E}{p}\frac{1}{r_1}+\frac{u_C(0)}{p}\frac{1}{r+\frac{1}{pC}}.$$

Ток $\hat{I}(p)$ найдем из соотношения $\hat{I}(p)\left(r+\frac{1}{pC}\right)+\frac{u_C(0)}{p}=\hat{\varphi}_1(p)$

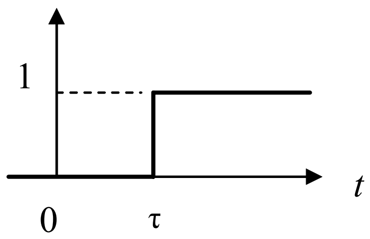
В результате подстановки числовых данных $\hat{I}(p)=-0.15\frac{1}{p+6250}$. Полином знаменателя имеет единственный корень p_1 = - 6250. Воспользовавшись теоремой разложения, получаем $i(t)=-0.15\exp(-6250t)$ А.



Расчет переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля.

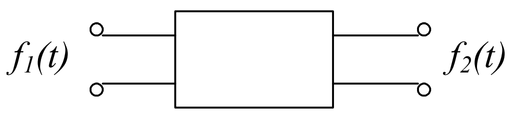
Метод наложения (принцип суперпозиции) позволяет разложить заданное входное воздействие сложной формы на подобные друг другу слагаемые более простой формы, для которых легко найти реакцию цепи. Определив отклик цепи на каждую такую элементарную составляющую воздействия и просуммировав эти отклики, находим реакцию цепи на сложное воздействие. Элементарные составляющие воздействия выражают с помощью двух функций: единичной функции (единичного скачка) и импульсной функции (дельта - функции).

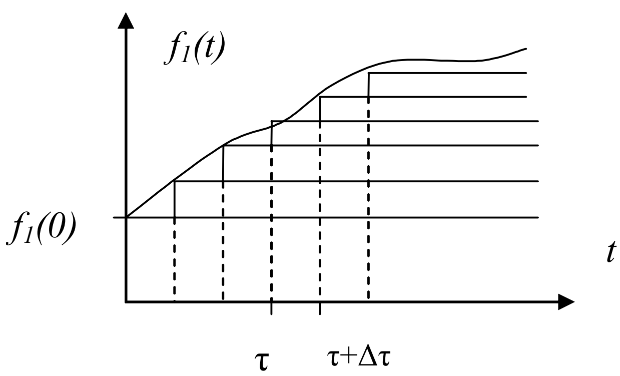
Единичная функция $1(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau\\ 1, & t\geq\tau\end{cases}$



Реакция цепи на единичную функцию называется *переходной характеристикой* цепи. Обозначим ее $h(t)$. Для определения переходной характеристики необходимо рассчитать переходный режим в цепи при нулевых начальных условиях при включении единичной функции на входе цепи. Переходная характеристика – функция времени, зависящая от параметров и схемы электрической цепи.

Входное воздействие $f_1(t)$ можно представить совокупностью ступенчатых скачков, имеющих разные значения и возникающих с определенным временным сдвигом. Для получения совокупного отклика цепи $f_2(t)$ на заданное входное воздействие $f_1(t)$ следует просуммировать отдельные отклики на скачки, устремив интервалы разбиения входной функции к 0.



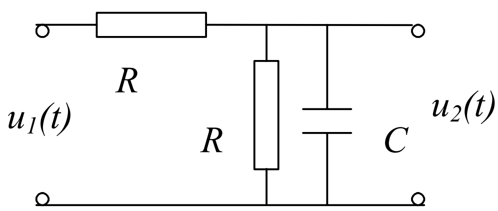


$f_2(t)=f_1(0)h(t)+\int\limits_0^t h(t-\tau)f_1'(\tau)d\tau$ - это одна из четырех возможных форм записи *интеграла Дюамеля* (формула Дюамеля).

Интеграл Дюамеля применим и в случаях, когда входная функция представляет собой кусочно-непрерывную функцию, содержащую одномоментные скачки конечной величины.

Рассмотрим примеры.

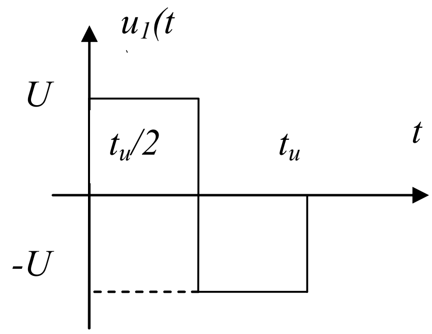
1.



R= 40 Ом, C =150 нФ, $t_и$ =6 мкс

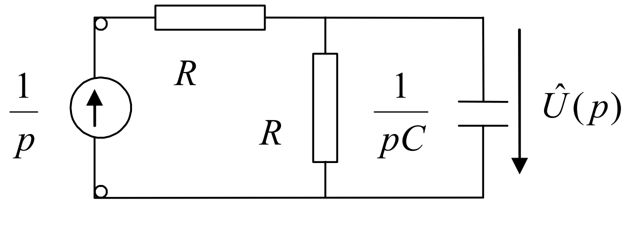
На входе электрической цепи действует напряжение

$$u_1(t) = \begin{cases} U, & 0 \le t \le \dfrac{t_и}{2} \\ -U, & \dfrac{t_и}{2} \le t \le t_и \\ 0, & t \ge t_и \end{cases}$$



Определить напряжение $u_2(t)$ на выходе цепи.

Определим переходную характеристику цепи. Для рассматриваемой задачи это напряжение на выходе цепи при подаче на вход напряжения, описываемого единичной функцией времени. Решение проведем операторным методом. Изображение входного напряжения $\hat{U}_{вх}(p) = \dfrac{1}{p}$. В операторной схеме замещения емкостной элемент заменен элементом с сопротивлением $\dfrac{1}{pC}$, дополнительный источник напряжения отсутствует, так как в этом случае задача имеет нулевые начальные условия. Напряжение на выходе в этой схеме - это изображение переходной характеристики $\hat{U}_{вых}(p) = \hat{H}(p)$.



Операторное сопротивление цепи $Z(p) = R + Z_{\|}(p)$, $Z_{\|}(p) = \dfrac{R \cdot 1/pC}{R + 1/pC}$ - операторное сопротивление параллельно соединенных элементов.

$\hat{U}_{вых}(p) = \dfrac{1}{p}\dfrac{Z_{\|}(p)}{Z(p)} = \dfrac{1}{RC}\dfrac{1}{p(p + \dfrac{2}{RC})}$. Для нахождения оригинала *h(t)* воспользуемся теоремой разложения. Корни полинома знаменателя $p_1 = 0$, $p_2 = -\dfrac{2}{RC}$.

$$h(t) = \frac{1}{RC}\left[\frac{1}{2/RC} + \frac{1}{(-2/RC)}e^{-\frac{2t}{RC}}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right).$$

Теперь можно определить напряжения на выходе цепи при подаче на вход указанного импульса напряжения. Входная функция кусочно-непрерывная, задана в трех интервалах изменения времени.

1). $0 \le t \le \dfrac{t_u}{2}$. В этом интервале времени сигнал на входе $u_1^{(1)}(t) = U = const$, скачок напряжения произошел в момент $t = 0$, следовательно, напряжение на выходе будет пропорционально переходной характеристике, записанной для $\tau = 0$ (см. стр.46), коэффициент пропорциональности – это *U*.

$$u_2(t) = U \cdot h(t) = \frac{U}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right).$$

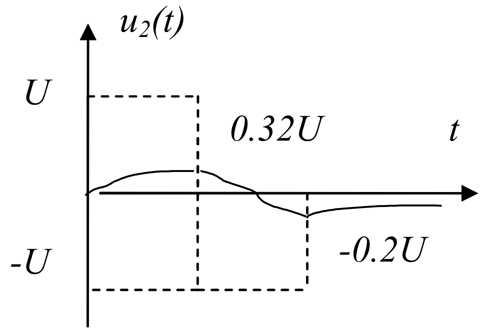
2). $\dfrac{t_u}{2} \le t \le t_u$. Скачкообразное изменение напряжения на входе в момент $t = \dfrac{t_u}{2}$ учтем, положив, что в этот момент к цепи подключается дополнительное напряжения в виде скачка $u_1^{(2)} - u_1^{(1)} = -2U$. Это порождает скачок напряжения на выходе $\Delta u_2 = -2U\, h(t - \dfrac{t_u}{2})$.

$$u_2(t) = U\, h(t) - 2U\, h(t - t_u/2) = \frac{U}{2}(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}) - U(1 - e^{-\frac{2(t - t_u/2)}{RC}}) =$$

$$= -\frac{U}{2}\left[1 + e^{-\frac{2t}{RC}}\left(1 - 2e^{\frac{t_u}{RC}}\right)\right].$$

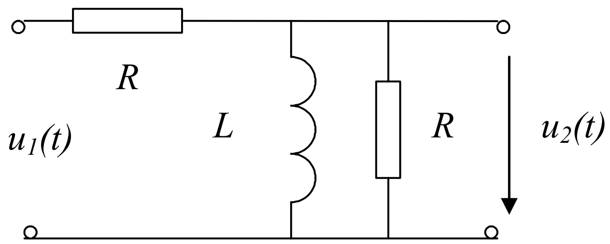
3). $t \geq t_u$. Скачок напряжения на входе при $t = t_u$ равен $u_1^{(3)} - u_1^{(2)} = U$. При этом изменение напряжения на выходе $\Delta u_2 = U\, h(t - t_u)$.

$$u_2(t) = U\, h(t) - 2U\, h(t - t_u/2) + U\, h(t - t_u) = -\frac{U}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \left(1 - e^{\frac{t_u}{RC}}\right)^2 .$$



Напряжение $u_2(t)$ - это напряжение на емкостном элементе, поэтому при скачках напряжения $u_1(t)$ на входе на выходе в эти моменты времени (t = 0, $t = \frac{t_u}{2}$, $t = t_u$) напряжение не изменяется. При подаче импульса на вход цепи, в ней возникает переходный процесс. Постоянная времени рассматриваемой цепи $\tau = \frac{RC}{2} = 3$ мкс, что сопоставимо с длительностью импульса t_u = 6 мкс. Если считать, что та или иная переменная не должна отличаться от своего установившегося значения более, чем на 5%, то можно полагать, что переходный процесс практически заканчивается за время, равное 3τ. Если бы к моменту $t = \frac{t_u}{2}$ переходный процесс закончился, напряжение на выходе цепи равнялось бы $u_2\left(\frac{t_u}{2}\right) = \frac{U}{2}$. При заданной форме входного импульса (напряжение u_1 (t) = const в двух интервалах изменения времени) отклик на выходе цепи – суперпозиция откликов на единичные скачки напряжения, поступающие на вход в некоторые определенные моменты времени (в моменты скачков), взятые с известными постоянными множителями. При $t > t_u$ сигнал на входе цепи отсутствует, с увеличением времени ($t \to \infty$) переходный процесс в цепи завершается.

2.На вход электрической цепи в момент $t = 0$ подается напряжения U, которое линейно убывает и становится равны 0 при $t = t_и$. Определить напряжение на выходе цепи.



$R = 12$ Ом, $L = 50$ мкГн, $t_и = 8$ мкс

$$u_1(t) = \begin{cases} -\dfrac{U}{t_и}(t - t_и), & 0 \le t \le t_и \\ 0, & t \ge t_и \end{cases}$$

Переходный процесс в такой электрической цепи, при подключении к цепи в момент $t = 0$ источника постоянного напряжения, был рассмотрен в примере на стр. 38. Задача была решена классическим методом. Был определен, в частности, ток $i_2\ (t)$. Поэтому выражение для переходной характеристики цепи можно записать, воспользовавшись результатом, полученным на стр.40.

При $r_1 = r_2 = R, \quad E(t) = 1(t)$ $\quad i_2(t) = \dfrac{1}{2R} e^{-\frac{Rt}{2L}}$, следовательно,

$h(t) = i_2(t)R = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{Rt}{2L}}$. Заметим, что переходная характеристика в рассматриваемой задаче определена именно так потому, что требуется определить напряжение на выходе цепи при заданном изменении входного напряжения. В этом случае переходная характеристика не имеет размерности. В общем случае переходная характеристика может связывать разные по физической сущности величины, например, определять отклик тока на выходе цепи на единичный скачок напряжения на входе.

Запишем выражение для напряжения на выходе цепи при подаче на вход треугольного импульса. Воспользуемся интегралом Дюамеля.

а). Для моментов времени $0 \le t \le t_и$:

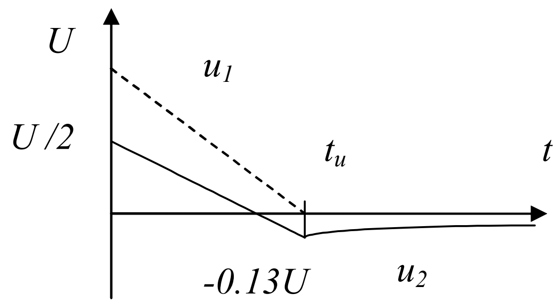
$u_2(t) = U h(t) + \int\limits_0^t u_1'(t) h(t - \tau) d\tau = \dfrac{U}{2} e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[1 - \dfrac{2L}{R t_и} \left(e^{\frac{Rt}{2L}} - 1 \right) \right]$. Первое слагаемое описывает отклик цепи на скачок напряжения на входе в момент $t = 0$, второе слагаемое отслеживает дальнейшее изменение во времени напряжения на входе.

б). Для моментов времени $t > t_u$:

в этом интервале изменения времени напряжение на входе равно 0, но в цепи еще продолжается переходный процесс. По форме математической записи выражение для u_2 (t) отличается от предыдущего тем, что изменяется верхний предел интегрирования $t \Rightarrow t_u$, после t = t_u входное напряжение равно 0.

$$u_2(t) = Uh(t) + \int_0^{t_u} u_1'(t)h(t-\tau)d\tau = \frac{U}{2}e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[1 - \frac{2L}{Rt_u}\left(e^{\frac{rt_u}{2L}} - 1\right)\right].$$

Построим в одном масштабе зависимости напряжения на входе u_1 (t) и на выходе u_2 (t).



В начальный момент времени (t =0) напряжение на входе изменяется скачком $u_1(0) = U$. Так как ток в индуктивном элементе отсутствовал, возникший в этот момент в цепи ток протекает через два последовательно соединенных резистивных элемента R, поэтому в момент t = 0 напряжение на выходе (на сопротивлении R) $u_2(0) = \dfrac{U}{2}$. Скачок напряжения на входных зажимах цепи вызывает переходный процесс. Постоянная времени исследуемой цепи $\tau = \dfrac{2L}{R} = 8.33$ мкс сопоставима со временем воздействия импульса t_u =8 мкс. К моменту t = t_u, когда на входе цепи $u_1(t_u) = 0$, в индуктивном элементе еще протекает ток. Это эквивалентно наличию в этой ветви источника энергии. Поэтому при t = t_u напряжение $u_2(t_u) \neq 0$. С увеличением времени переходный процесс в цепи завершается и в отсутствие внешнего воздействия напряжение на выходе экспоненциально убывая, стремится к 0.

Использованная литература.

1.Зайцев Э.Ф., Черепанов А.С., Ферсман Г.А. Электротехника и электроника. Теория электрических цепей. Ч.I. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. - 204 с.

2. Новиков Ю.Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа. Учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2005. - 384 с.

3. Афанасьев Б.П., Гольдин О.Е., Кляцкин И.Г. Теория линейных электрических цепей. Учеб. пособие для радиотехнических специальностей вузов. М.: Высшая школа, 1973 . – 592 с.