

На правах рукописи

Фам Чонг Данг Шон

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

Специальность : 01. 02. 06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург
2007

Работа выполнена на кафедре «Механика и процессы управления» Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Пальмов Владимир Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Ветюков Михаил Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор Кривцов Антон Мирославович

Ведущая организация: Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург.

Защита состоится “__” _____ 2007 года в _____ на заседании диссертационного совета Д212.229.13 ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, 1_корпус, аудитория №41

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан “__” _____ 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д212.229.13
доктор биологических наук, профессор.

Зинковский А.В.

1. Общая характеристика работы.

Актуальность темы диссертации. На современном этапе развития машиностроения существует чрезвычайно обширное множество механизмов, в которых нельзя пренебрегать кулоновым трением. Для анализа прикладных задач с трением часто принимают различные ограничения и допущения. В частности, предполагают, что нормальные реакции связей с трением равны реакциям при отсутствии трения. Но такое допущение может привести к грубой ошибке в определении закона движения и динамических свойств механизмов и машин. Констатируемая ситуация диктует необходимость детального вывода уравнений нормальной реакции и уравнений движения для механических систем с кулоновым трением. Кроме того непосредственное использование закона трения Кулона ведет в задачах этого типа к затруднениям, которые давно и хорошо известны в классической динамике под названием парадоксов Пэнлеве. Последние проявляются в том, что при определенных условиях решение задачи динамики либо не существует, либо не единственно. Поэтому некоторые исследователи считают, что определение областей парадоксов Пэнлеве и законов движения в этих областях является главной задачей инженера. Но по нашему мнению, механические системы с типичными для машиностроительных конструкций параметрами находятся вдали области параметров, в которой могут появиться парадоксальные ситуации, обнаруженные Пэнлеве. Поэтому мы видим главную задачу исследователя в разыскании и изучении действительных движений фрикционных систем. Рассмотрение двух выше указанных проблем составляет основное содержание диссертации. Поэтому ее тематика представляется актуальной.

Цель исследования. Целями данной диссертации являются:

- подробный анализ системы Пэнлеве-Клейна.
- исследование динамики вращательной пары и маятника Жуковского-Фроуда
- учет сухого трения в кулисном механизме строгального станка.
- истолкование принципа Гаусса для систем с трением.

Метод исследования. Все задачи рассматриваются на основе общих методов теоретической механики, аналитической механики и теории колебания.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Составлено точное уравнение движения и уравнение реакции для общего случая вращательной пары. Выяснено, что условие парадоксов Пэнлеве никогда не реализуется, ибо требует слишком большого значения коэффициента трения, значит решение задачи динамики существует и при том единственно.

- Показано, как с помощью предельного перехода к случаю сосредоточенной массы получилось уравнение динамики и уравнение нормальной реакции маятника Жуковского-Фроуда.

- Рассмотрены релаксационные автоколебания маятника Жуковского-Фроуда на основе гипотезы зависимости силы трения при срыве от скорости тангенциального нагружения.

- Составлено дифференциальное уравнение движения и выражение реакции кулисного механизма строгального станка.

- Анализ равномерного движения станка на основе уравнения движения. Определен наиболее оптимальный вариант параметров строгального станка.

- Представлена формулировка принципа Гаусса с явно входящими силами трения. Кроме, того на основании этой формулировки выведено уравнение Аппеля для систем с трением.

Научная новизна и достоверность основных результатов диссертации. Все перечисленные выше результаты являются новыми и получены на основе применения строгих математических методов и использования хорошо апробированных механических моделей. Это обеспечивает их достоверность.

Практическая значимость диссертации: Непосредственное практическое применение имеет исследование динамики вращательной пары и кулисного механизма строгального станка.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, включающего 38 наименований. Диссертация изложена на 158 страницах, набранных в формате *LaTeX*, и содержит 37 рисунков и графиков и 12 таблиц.

2. Краткое содержание диссертации.

В первой главе приведен обзор литературы по особенностям применения закона трения Кулона и способам разрешения парадоксов Пэнлеве. Кроме, того в главе дается краткий анализ существующих методов в динамике систем с трением и формулировка задач исследования.

Во второй главе приводится подробный анализ системы Пэнлеве-Клейна, который позволяет выработать умеренное и спокойное отношение к так называемым парадоксам Пэнлеве.

Полагаем, что усовершенствование закона Кулона должно состоять в принятии ограничений ($\mu < 1$): условие ($\mu < 1$) должно быть включено в законе Кулона.

Расчетная схема этой системы изображена на рис. 1. В многих работах установлено условие парадоксов Пэнлеве, которое можно представить в виде $\mu \operatorname{tg} \varphi > 2$. Рассмотрение этого условия с практической инженерной точки зрения показывает, что система Пэнлеве-Клейна находится вдали от области параметров, в которой могут появиться парадоксальные ситуации, обнаруженные Пэнлеве.

Общий вывод из приведенных вычислений таков. Реальные или, точнее, реалистические ситуации таковы, что при выполнении условия ($\mu < 1$)

система Пэнлеве-Клейна ведет себя регулярно. Именно игнорирование условий ($\mu < 1$) часто приводит к появлению парадоксальных ситуаций, обнаруженных Пэнлеве.

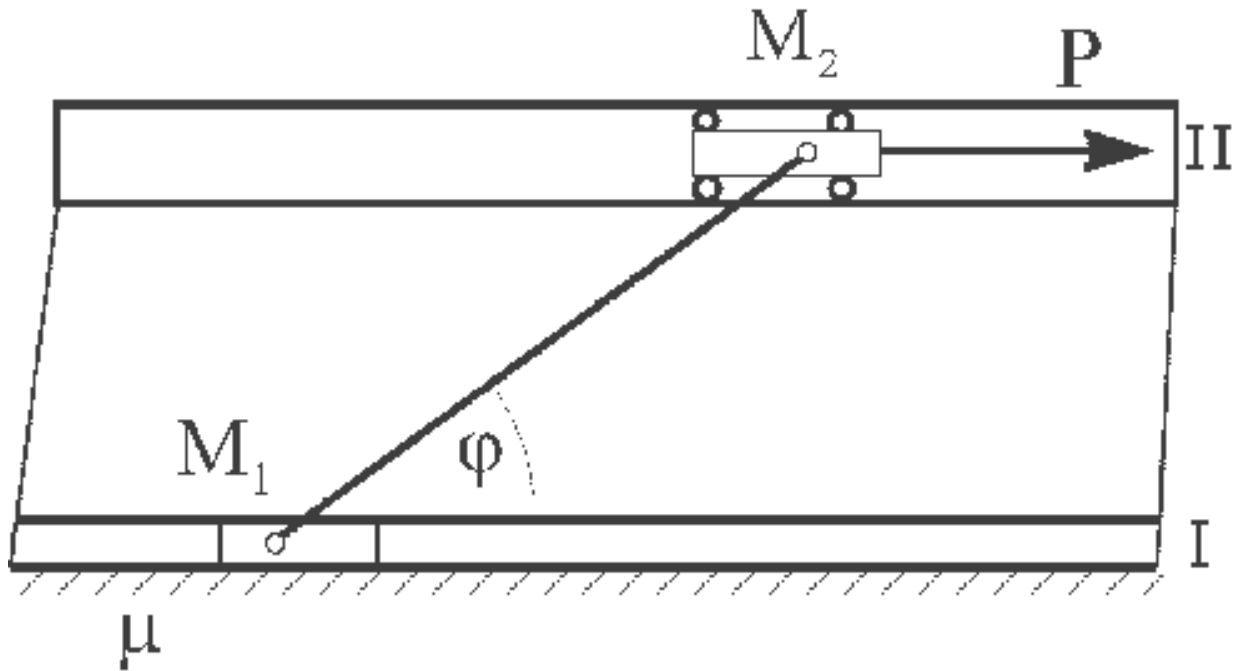


Рис. 1

В третьей главе приведена дополнительная трактовка кинематики системы с трением после освобождения ее от контактной связи.

Четвертая глава посвящена исследованию динамики вращательной пары и маятника Жуковского-Фроуда. В машиностроении и приборостроении широко используются подшипники скольжения в виде вращательной пары, расчетная схема которой представлена на рис.2.

Вал I радиусом r_0 вращается от внешнего привода с угловой скоростью ω_0 вокруг оси вращения O . Цапфа II с радиусом r и центром S жестко связана с твердым телом массы m , центр инерции S которого расположен на расстоянии l от центра C цапфы. Твердое тело имеет момент инерции $J = mr_1^2$ относительно S (r_1 - радиус инерции). К цапфе приложен крутящий момент M . Коэффициент трения скольжения вала о цапфу равен μ . На основе метода отбрасывания связей уравнения Лагранжа II рода могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 m(r - r_0) \ddot{q} + ml \cos(q - \varphi) \ddot{\varphi} + ml \sin(q - \varphi) \dot{\varphi}^2 &= -mg \sin q + \varepsilon_1 \varepsilon_2' \mu R \\
 ml(r - r_0) \cos(q - \varphi) \ddot{q} + m(l^2 + r_1^2) \ddot{\varphi} - ml \sin(q - \varphi) (r - r_0) \dot{q}^2 &= \\
 = -ml \sin \varphi - \varepsilon_1 \varepsilon_2' \mu r R + M & \\
 -ml \sin(q - \varphi) \ddot{\varphi} + ml \cos(q - \varphi) \dot{\varphi}^2 + m(r - r_0) \dot{q}^2 &= -mg \cos q + R.
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon_1 = \text{sign} R$, $\varepsilon_2' = \text{sign}[r\dot{\varphi} - (r - r_0)\dot{q} - r_0\omega_0]$

R - нормальная реакция, с которой цапфа и вал прижимаются друг к другу в точке соприкосновения.

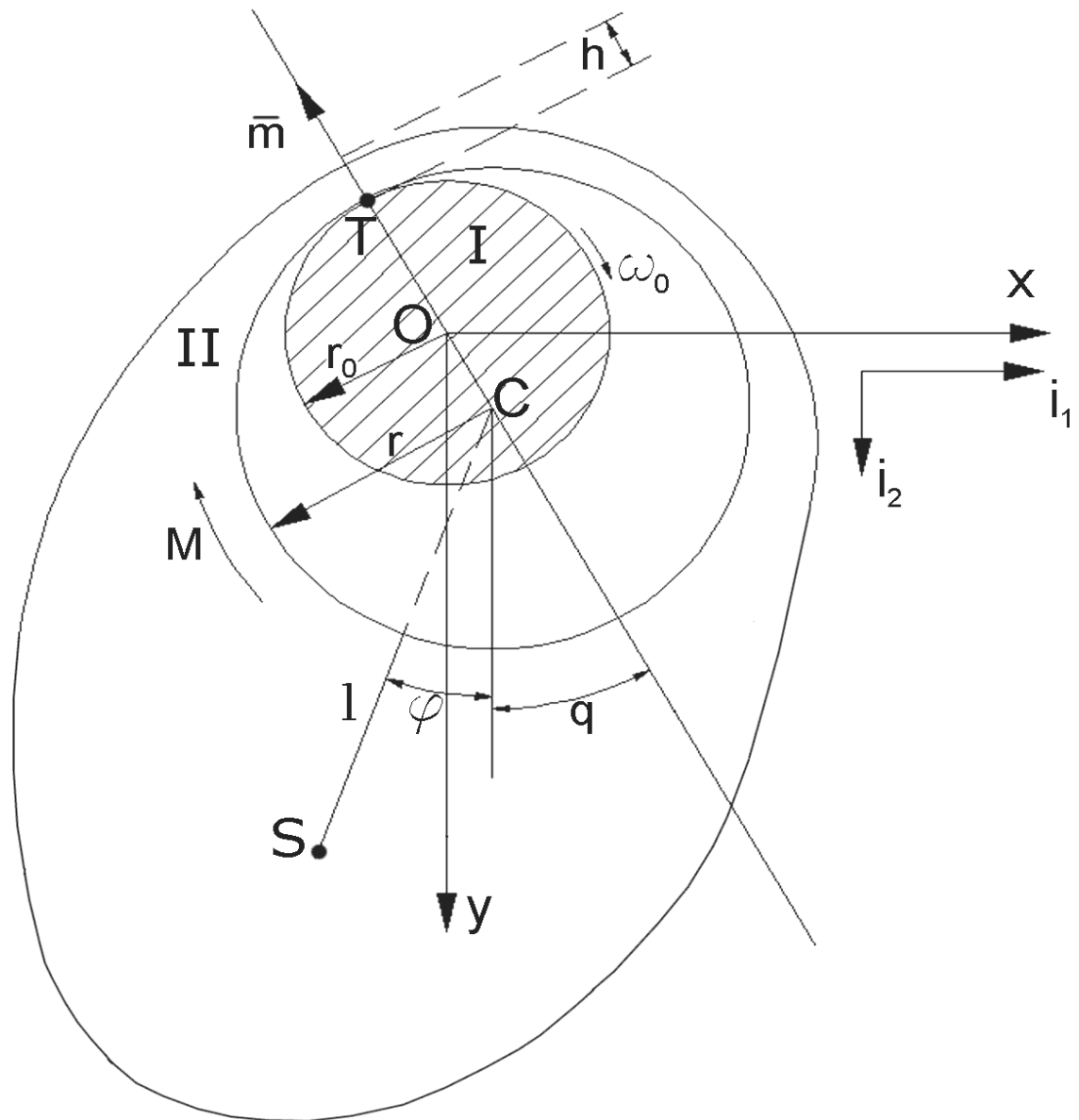


Рис.2

Уравнение реакции представим в форме

$$(1 + \varepsilon_1 \mu L) R = R_0 \quad (2)$$

Здесь

$$L = -\varepsilon_2 \frac{[r + l \cos(q - \varphi)] \sin(q - \varphi)}{l^2 \sin^2(q - \varphi) + r_1^2}$$

$$R_0 = \frac{mr_1^2[(r-r_0)\dot{q}^2 + l \cos(q-\varphi)\dot{\varphi}^2 + g \cos q] - Ml \sin(q-\varphi)}{l^2 \sin^2(q-\varphi) + r_1^2}$$

R_0 - нормальная реакция при отсутствии трения.

Рассмотрим вопрос о возможности существования парадоксальных ситуаций с практической инженерной точки зрения. Условие парадоксов Пэнлеве выражается таким образом: $\mu|L| > 1$. Показалось, что условие парадоксов Пэнлеве не может быть выполнено ни при каком значении q , ибо для этого требуется недопустимо большое значение коэффициента трения.

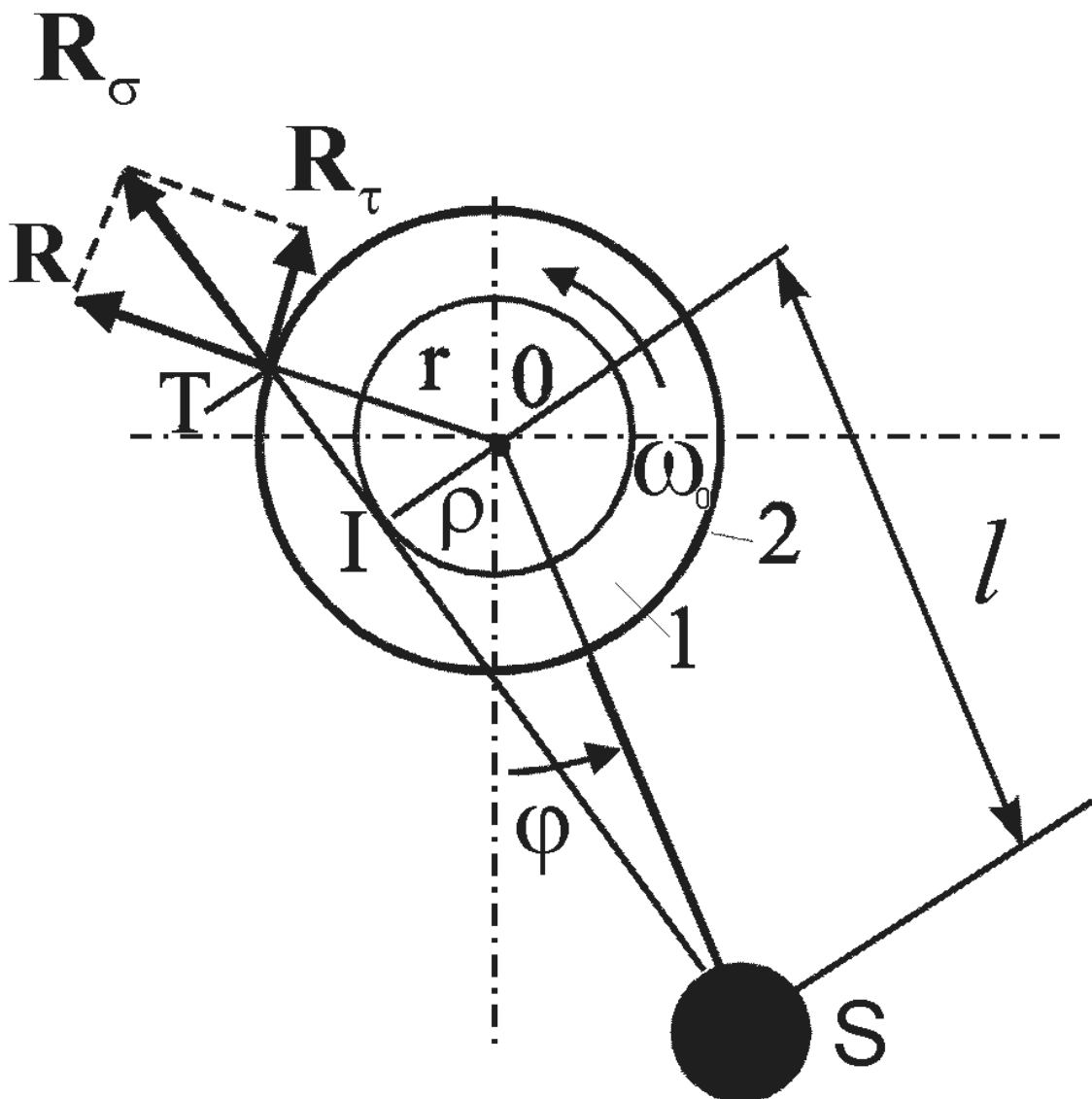


Рис. 3

При предельном переходе к случаю сосредоточной массы ($r \rightarrow r_0, r_1 = 0, M \rightarrow 0$) и на основе (1) получилось уравнение динамики и уравнение нормальной реакции маятника Жуковского-Фруда (рис. 3)

$$\ddot{\phi} + \frac{\varepsilon\rho}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \dot{\phi}^2 + \frac{g}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \sin(\phi + \varepsilon\beta) = 0,$$

$$R = \frac{ml(g \cos \phi + l\dot{\phi}^2)}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)(1 + \mu^2)}}. \quad (3)$$

где приняты обозначения

$$\varepsilon = \text{sign}[(l\dot{\phi}^2 + g \cos \phi)(\dot{\phi} - \omega_0)]$$

$$\sin \beta = \frac{\rho}{l} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{l^2 - \rho^2}}{l}$$

$$\rho = \frac{\mu r}{\sqrt{1 + \mu^2}} \text{ - плечо трения}$$

маятник имеет два положения равновесия $\phi_1 = \beta$ и $\phi_2 = \pi - \beta$

Свободное колебание около положения ϕ_1 при условии $\phi < \frac{\pi}{2}$ описываются уравнением вида

$$\psi^2 = C \exp \frac{2\rho}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \phi + \frac{2(l^2 - \rho^2)}{3\rho^2 + l^2} \cos \phi + \frac{4\rho\sqrt{l^2 - \rho^2}}{3\rho^2 + l^2} \sin \phi$$

где C - постоянная интегрирования, $\tau = \left(\frac{g}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \right)^{0.5} t$, $\phi = \phi - \beta$, $\psi = \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$

Фазовые траектории этих колебаний замкнуты, вложены одна в другую, симметричны относительно оси ϕ , но несимметричны относительно оси ψ . В связи с этим форма свободных колебаний существенно отличается от синусоидальных.

На рис.4 представлен случай: $\mu = 0,5$; $r = 1$; $l = 2$. В соответствии с этим $\beta = 12,12$; $c_{min} = -1,65$; $c_{max} = -0,60$; $\rho = 0,45$.

Далее рассмотрены релаксационные автоколебания маятника Жуковского-Фроуда на основе гипотезы зависимости силы трения при срыве от скорости тангенциального нагружения f . Согласно гипотезе, сила трения срыва F_+ определяется скоростью тангенциального нагружения f , уменьшаясь с ростом этой скорости. Эта зависимость была аппроксимирована формулой

$$F_+ = F_0 + Ae^{-\beta f}, \quad (4)$$

где A, β, F_0 - постоянные, определяемые экспериментально.

$f = \frac{\partial F}{\partial t}$ - тангенциальная нагрузка на поверхности соприкосновения.

Из (4) следует выражение для момента трения при срыве в виде

$$M_+ = M_0 + Be^{-\beta f} \quad (5)$$

где $M_+ = F_+ r_0$, $M_0 = F_0 r_0$, $B = A r_0$

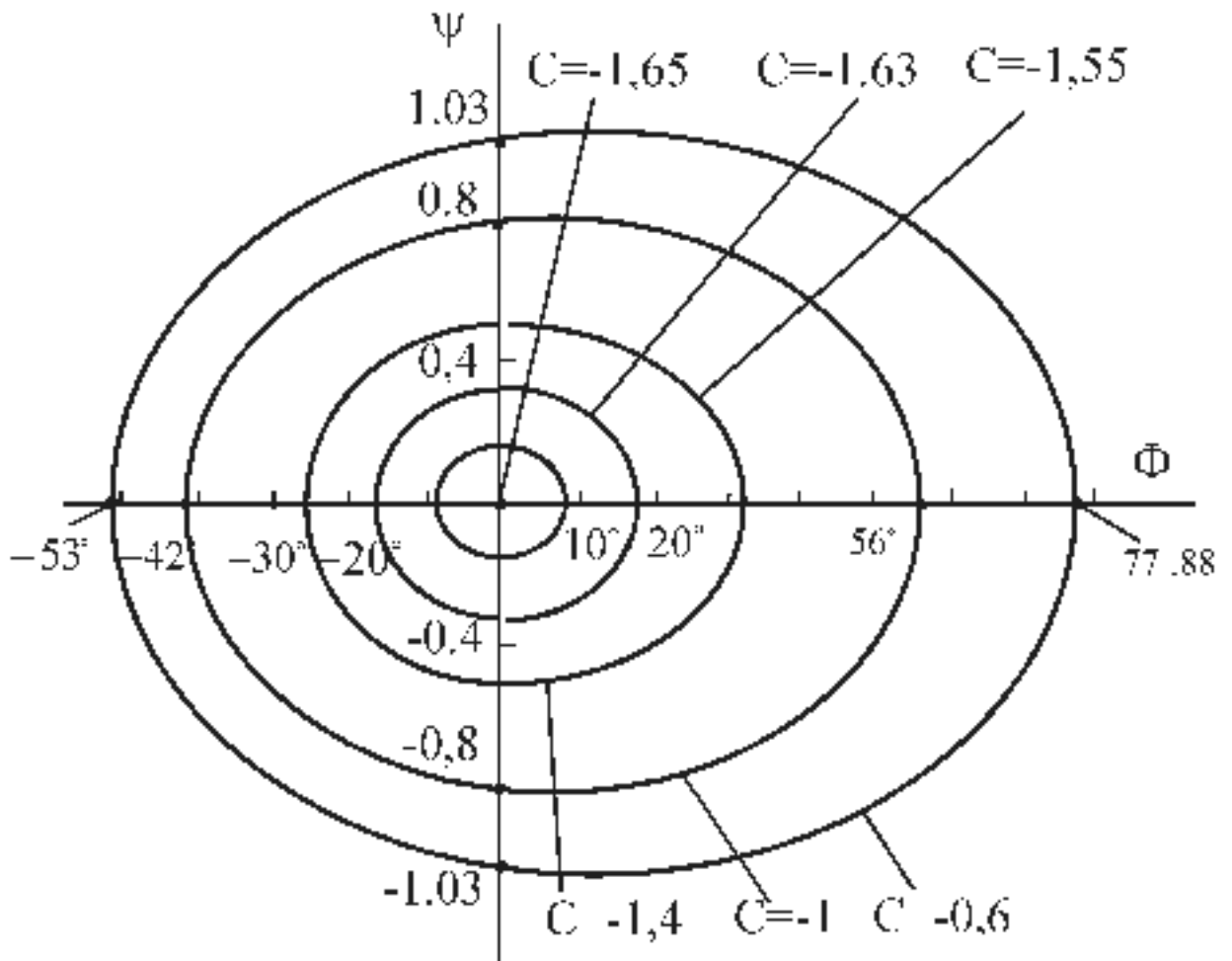


Рис. 4

Величина скорости тангенциального нагружения определяется по формуле

$$f = \frac{mgl}{r_0} \dot{\varphi} = \frac{mgl}{r_0} \omega_0$$

Пренебрегая вязким сопротивлением $\alpha_{cp} = 0$ запишем уравнение динамики режима релаксационных автоколебаний в виде

$$J_0 \dot{\varphi} = M_g + M_c, \quad \text{при скольжении}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \omega_0(t - t_n) + const \quad \text{при сцеплении.}$$

где J_0 - момент инерции маятника относительно оси вращения

$$M_g = -mgl \sin \varphi \approx -mgl \varphi - \text{ момент силы тяжести}$$

$$M_c = F_0 r_0 \quad - \text{ момент силы трения скольжения}$$

Общий интеграл дифференциального уравнения движения примет вид

$$\varphi = a \sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{M_0}{J_0 \omega^2} \quad (6)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_0}}$. Величины a и ε определяются по формулам

$$a^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{B \exp(-2\beta f)}{J_0^2 \omega^4} = a_1^2 + a_2^2$$

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{\omega_0}{a\omega}\right)$$

Для малой угловой скорости вала ω_0 автоколебания имеют ярко выраженный релаксационный характер, с ростом ω_0 участок сцепления уменьшается, а участок скольжения возрастает. При достаточно большой ω_0 форма колебания близка к синусоидальной. Значит, что при больших ω_0 будет только режим скольжения а режим подхвата будет отсутствовать.

Период T релакционных колебаний можно записать в виде

$$T = \frac{2}{\pi} \left[\pi - \arccos\left(\frac{\omega_0}{a\omega}\right) \right] + \frac{2B \exp(-\beta f)}{mgl\omega_0}$$

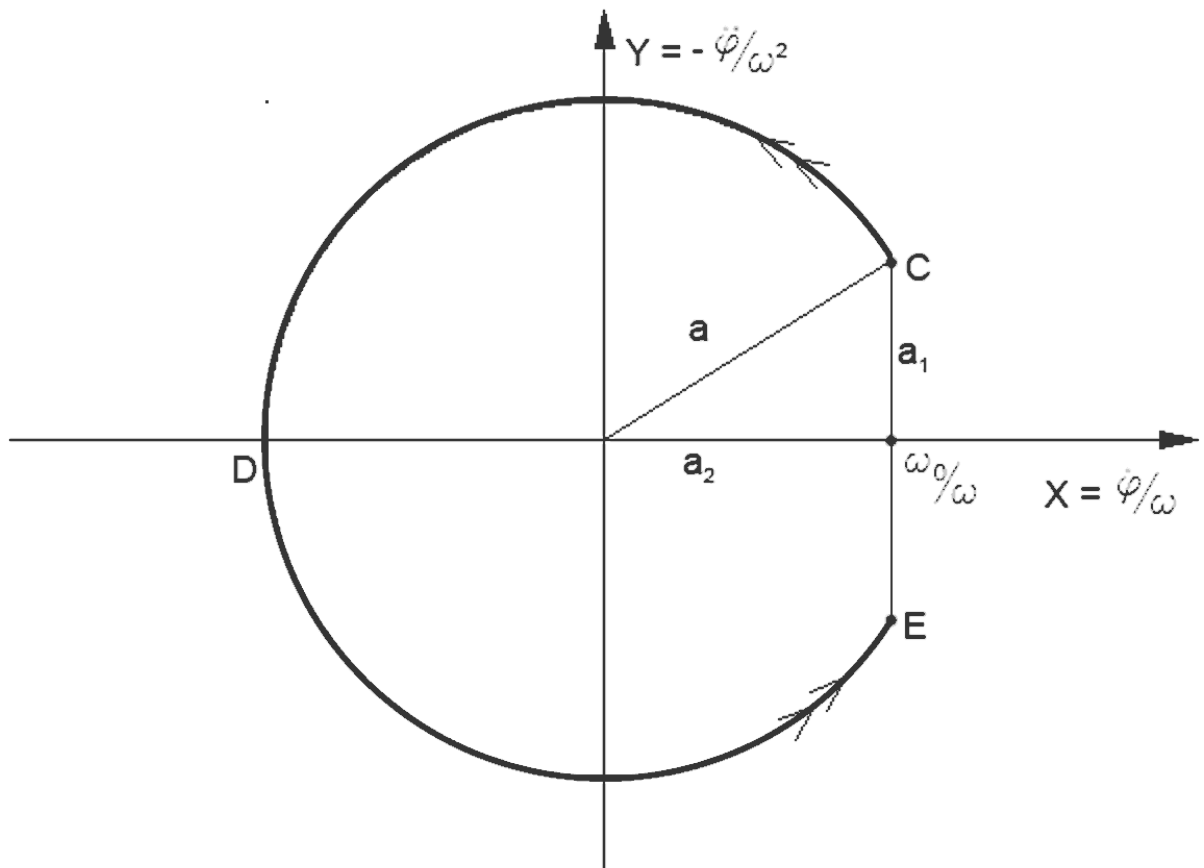


Рис. 5

На рис. 5 построена фазовая траектория (для $\dot{\varphi} < \omega_0$). Точке С соответствует момент срыва. Точке Е - момент подхвата. Участок скольжения изображается дугой CDE окружности радиуса a с центром в точке $(0, 0)$, а участок сцепления – прямым отрезком ЕС.

Задача об учете сопротивления среды сводится к необходимости определения критической скорости ω_* вращения шипа. Решая следующее уравнение, можно определить критическую скорость ω_* .

$$\left[\frac{\omega_*^2}{\omega^2} + \frac{B^2 \exp(-2\beta f_*)}{J_0^2 \omega^4} \right]^{0.5} e^{-\frac{2\pi n}{\omega}} = \frac{\omega_*}{\omega}$$

$$f_* = \frac{mgl}{r_0} \omega_*,$$

где $n = \frac{\alpha}{2J_0}$, α : коэффициент вязкого сопротивления.

Пятая глава посвящена исследованию учета сухого трения в кулисном механизме строгального станка. Расчетная схема строгального станка представлена на рис 6.

На основе метода отбрасывания связей уравнения Лагранжа II рода могут быть представлены в виде:

$$\left[J + mr^2 b^2 \alpha_0^{-6} (\alpha_0^2 \cos q + ar \sin^2 q)^2 \right] \ddot{q} + \left\{ \frac{mb^2 r^2 (\alpha_0^2 \cos q + ar \sin^2 q)}{\alpha_0^8} [3ar(\alpha_0^2 \cos q + ar \sin^2 q) - \alpha_0^4] \sin q \right\} \dot{q}^2 = \quad (7)$$

$$= M - \frac{br}{\alpha_0^3} (\alpha_0^2 \cos q + ar \sin^2 q) F - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu r R$$

$$- \frac{\alpha_0 J}{r(a \cos q + r)} \ddot{q} = - \frac{\alpha_0 M}{r(a \cos q + r)} + \left(1 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \alpha_0}{a \cos q + r} \right) R.$$

Из (7) вытекают выражения для величины реакции R и момента M в режиме равномерного движения:

$$R = \frac{mb^2 r \chi (3ar \chi - \alpha_0^4)}{\alpha_0^7 (a \cos q + r)} \sin q \cdot \omega^2 + \frac{b \chi}{\alpha_0^7 (a \cos q + r)} F,$$

$$M = \frac{(a \cos q + r) + \mu \alpha_0}{\alpha_0} r R.$$

где : $\varepsilon_1 = \text{sign} R$, $\varepsilon_2 = \text{sign} \dot{q}$

$$\alpha_0 = \sqrt{a^2 + r^2} + 2ar \cos q$$

$$\chi = \alpha_0^2 \cos q + ar \sin^2 q$$

В результате проведенного анализа равномерного движения станка определено, что наиболее оптимального варианта - вариант строгального станка с длиной кулисы $a = 0,6 \text{ м}$

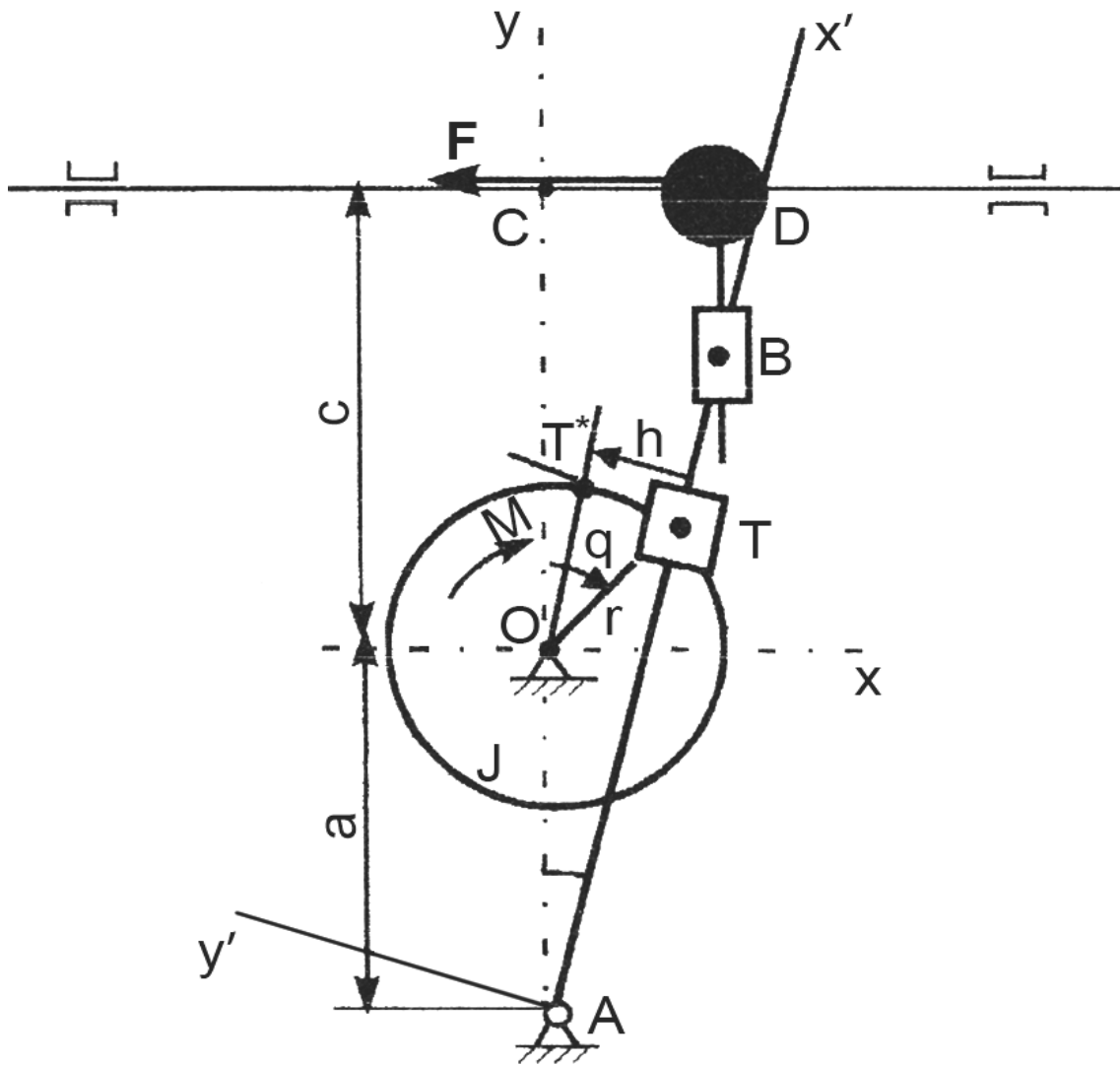


Рис. 6

В шестой главе построена формулировка принципа Гаусса с явновходящими силами кулонового трения. Силами трения Пэнлеве называются приведенные к материальным точкам силы, пропорциональные изменению ускорений точек в связи с трением. На основании принципа наименьшего принуждения Гаусса, В. В. Румянцев доказал для систем с трением следующий принцип: “ среди всех мыслимых ускорений, действительные движения точек систем с трением обращают в минимум величину

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \left(\frac{X_i}{M_i} + \frac{\rho_{ix}}{M_i} - \ddot{x}_i \right)^2 + M_i \left(\frac{Y_i}{M_i} + \frac{\rho_{iy}}{M_i} - \ddot{y}_i \right)^2 + M_i \left(\frac{Z_i}{M_i} + \frac{\rho_{iz}}{M_i} - \ddot{z}_i \right)^2$$

и наоборот, условия минимума этой величины по ускорениям, удовлетворяющим условиям связей, приводит к уравнениям движения “

Здесь X_i, Y_i, Z_i - проекции задаваемой силы, действующей на i -ую материальную точку системы. Величина A назовем функцией принуждения. В результате многоэтапных вычислений получена часть функции Гауссова принуждения, зависящая от обобщенных ускорений:

$$A = U - \sum (Q_k + S_k) \ddot{q}_k \quad (8)$$

где: $U = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n A_{sk} \ddot{q}_s \ddot{q}_k + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n [s, k, r] \dot{q}_s \dot{q}_k \dot{q}_r$ - энергия ускорения

$$S_k = - \sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_{\alpha} \mu_{\alpha} \frac{\partial v_{T\alpha}}{\partial \dot{q}_k} R_{\alpha} \text{ - обобщенная реакция связей}$$

Q_k - обобщенная активная сила, приводящая к обобщенной координате q_k

Она представляет разность между энергией обобщенных ускорений и работой всех активных сил и сил трения на этих ускорениях. На основании (8) приведем к уравнениям Аппеля для систем с Кулоновым трением:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k + S_k$$

или получаем следующую систему n уравнений движения механических систем с Кулоновым трением :

$$\sum_{k=1}^n A_{ks} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n [k, t, s] \dot{q}_k \dot{q}_t = Q_s - \sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_{\alpha} \mu_{\alpha} \frac{\partial v_{T\alpha}}{\partial \dot{q}_s} R_{\alpha} = Q_s + S_s$$

Формулировка принципа: Разность A между энергией обобщенных ускорений и работой всех задаваемых сил и сил Кулонова трения на этих ускорениях для действительного движения меньше, чем такая разность для любого мыслимого движения, и, наоборот, условия минимума этой разности по ускорениям приводят к уравнениям движения.

В заключении подведены краткие итоги диссертации

1. Полагаем, что усовершенствование закона Кулона должно состоять в принятии ограничений ($\mu < 1$): условие ($\mu < 1$) должно быть включено в законе Кулона.
2. Условие парадоксов Пэнлеве никогда ни реализуется ибо требуется слишком большое значение коэффициента трения. Реальные или, точнее, реалистические ситуации таковы, что механические системы находятся вдали от области параметров, в которой могут появиться парадоксальные ситуации, обнаруженные Пэнлеве. Поэтому разыскание условий появления парадоксов Пэнлеве не является главной задачей исследователя. Мы видим главную задачу исследователя в разыскании и изучении действительных движений фрикционных систем.
3. Составлено точное уравнение движения и уравнение реакции для общего случая вращательной пары. При предельном переходе к случаю

сосредоточенной массы получилось уравнение динамики и уравнение нормальной реакции маятника Жуковского-Фроуда.

- выясняется, что маятник Жуковского-Фроуда имеет два положения равновесия,

- свободные колебания маятника по форме существенно отличаются от синусоидальных,

- рассмотрены релаксационные автоколебания маятника Жуковского-Фроуда на основе гипотезы зависимости силы трения при срыве от скорости тангенциального нагружения. В данном случае система имеет свойство жесткого возбуждения автоколебания. Траектория этих автоколебаний для достаточно большой угловой скорости вращения вала имеет форму весьма близкую к синусоидальной. Значит, что при больших ω_0 будет только режим скольжения, а режим подхвата будет отсутствовать. При изменении скорости вращения вала от 0 до ∞ период релаксионных автоколебаний уменьшается от бесконечного значения до $\frac{2\pi}{\omega}$ а амплитуда сначала уменьшается, проходит минимум а затем возрастает. В силу конструктивного демпфирования, автоколебания исчезают при условии $\omega_0 > \omega_*$.

4. Составлено уравнение движения и уравнение реакции для кулисного механизма строгального станка. Выясняется, что условие парадоксов Пэнлеве никогда не реализуется ибо требуется слишком большое значение коэффициента трения. В результате приведенного анализа равномерного движения определено, что оптимальным вариантом строгального станка является вариант станка с длиной кулисы $a=0,6m$.

Основные результаты опубликованы в работах

1. Пальмов, В.А. О проблемах, возникающих при анализе динамики механических систем с кулоновым трением [Текст]/В.А. Пальмов, Фам Чонг Данг Шон// Научно-технические ведомости СПбГТУ.- 2006.- №5 (47).- С.22-26.

2. Ле Суан Ань. Истолкование принципа Гаусса для систем с кулоновым трением[Текст]/Ле Суан Ань,Фам Чонг Данг Шон // Период. научно-методический журнал. ТММ. Изд. СПбГПУ.- 2006.- №1(7).-Том 4.- С.66-71.

3. Фам Чонг Данг Шон. К динамике систем с трением}Текст] /Фам Чонг Данг Шон//Журнал Технической науки.Изд политехнического института Вьетнама.-2003.- №2.- С.25-30.