

Федеральное агентство по образованию
—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.А.МАРТЫНОВ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ЗАДАЧИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2006

УДК 534 (075.8)

Мартынов Б.А. Теория колебаний. Задачи к практическим занятиям: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 40 с.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория колебаний» учебного плана специальности 071500 (код ОКСО 210301) «Радиофизика и электроника» (направление подготовки дипломированных специалистов 654200 «Радиотехника»).

В учебном пособии приведены некоторые задачи анализа сравнительно простых нелинейных динамических систем, подобранные таким образом, чтобы в процессе их решения студенты могли освоить основные приемы и приближенные методы (метод линеаризации, метод гармонического баланса и др.), широко применяемые при теоретическом исследовании более сложных объектов. Пособие может быть также полезно студентам радиофизического факультета в качестве дополнительного вспомогательного материала при выполнении курсовых работ.

Ил. 6. Библиогр.: 18 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2006

ВВЕДЕНИЕ

В данное учебное пособие включены примеры задач, решаемых в ходе практических занятий по дисциплине «Теория колебаний», а также предлагаемых студентам для домашних упражнений.

Круг объектов, подлежащих рассмотрению: маятник, осцилляторы Рэлея, Ван дер Поля и Дуффинга, автоколебательные схемы Хартли и Колпитца, – ограничен сравнительно небольшим числом нелинейных динамических систем, относящихся в теории колебаний к разряду классических.

Отобраны варианты задач, достаточно просто поддающиеся решению при помощи аналитических приемов и приближенных методов, освоение которых является главной целью практических занятий.

Большинство примеров помимо заданий содержит подробные решения, полученные с минимальным использованием вычислительной техники и представленные таким образом, чтобы они могли служить студентам образцами оформления результатов более сложных и, как правило, более объемных курсовых работ.

Приложения к основной части учебного пособия посвящены некоторым общим вопросам анализа устойчивости движений (и состояний) динамических систем, включающим определение понятия «устойчивость движения» (по Ляпунову), описание процедуры линеаризации и формулировку теоремы Гурвица.

1. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА РЭЛЕЯ

З а д а н и е

Для описания процессов в некоторой динамической системе допустимо использование дифференциального уравнения Рэля [12, 16, 17], причем безразмерный множитель, стоящий в этом уравнении перед нелинейным слагаемым, может считаться много большим единицы. Постройте для такой системы на фазовой плоскости наиболее характерные траектории, не прибегая к поиску общего решения дифференциального уравнения. Выведите приближенные аналитические выражения, используя которые можно установить зависимости от времени для переменных состояния, являющихся координатами фазовой плоскости. Получите формулу, пригодную для оценки периода колебаний, наблюдаемых в системе в установившемся режиме, т.е. после завершения нестационарных (переходных) процессов.

Р е ш е н и е

1.1. Вводные замечания

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \varepsilon \left[\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^3 - \frac{dz}{d\tau} \right] + z = 0, \quad (1.1)$$

где ε – вещественный положительный параметр, а τ – безразмерное время, было предложено Рэлеем [17] для динамических систем различной природы в качестве математической модели, которая позволяет объяснить, почему нарастание во времени амплитуды колебаний, наблюдаемое при малых $|z|$, переходит в колебательный режим с неизменной амплитудой. Как оказалось, к этой модели сводятся, в частности, дифференциальные уравнения некоторых вариантов схем одноконтурных LC -генераторов с нелинейным активным элементом, характеристика которого может быть аппроксимирована кубическим полиномом [12].

1.2. Переход к системе уравнений первого порядка.

Вывод уравнения фазовых траекторий

Для того чтобы получение общих представлений о возможном характере процессов в рассматриваемой динамической системе при $\varepsilon \gg 1$ было достаточно наглядным, целесообразно предварительно преобразовать дифференциальное уравнение (1.1).

Воспользуемся сначала реализованным в [16] приемом, который позволяет превратить (1.1) в дифференциальное уравнение с малым по сравнению с единицей коэффициентом при старшей производной. Введем для этого вместо безразмерной переменной z переменную $y = z\sqrt{3}/\varepsilon$ и новое безразмерное время $\theta = \tau/\varepsilon$. Тогда (1.1) может быть заменено на уравнение

$$\varepsilon^{-2} \ddot{y} + (1/3)\dot{y}^3 - \dot{y} + y = 0, \quad (1.2)$$

где точкой над символом обозначается производная по θ .

Множитель $\sqrt{3}$ введен в формулу перехода от z к y из соображений удобства выбора масштаба при последующем графическом построении приближенных зависимостей y и \dot{y} от времени (см., например, рис 2).

Обозначим коэффициент ε^{-2} , называемый далее *малым параметром*, через μ и заменим уравнение (1.2) равносильной системой двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} dy/d\theta = x, & (1.3) \\ \mu dx/d\theta = x - (x^3/3) - y, & (1.4) \end{cases}$$

где динамические переменные x и y могут быть выбраны в качестве координат фазовой плоскости.

Поделив (1.3) на (1.4), приходим к дифференциальному уравнению фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu x}{x - (x^3/3) - y}. \quad (1.5)$$

1.3. Построение фазовых траекторий

Соотношение (1.5) определяет для рассматриваемой динамической системы наклон касательной к фазовой траектории в любой точке плоскости x, y за исключением начала координат. Используя (1.5), удобно, в частности, находить *изоклины* – линии равного наклона касательных. Примерами изоклин могут служить ветви кубической параболы $x - (x^3/3)$, относящиеся к положительным и отрицательным x . Из (1.5) легко видеть, что во всех точках этих ветвей касательные к фазовым траекториям идут вертикально ($|dy/dx|$ принимает бесконечно большое значение). Как можно установить при помощи уравнения (1.3), изображающие точки, движущиеся с ростом θ по траекториям, пересекают упомянутую кубическую параболу при $x > 0$ в направ-

лении снизу вверх ($dy/d\theta > 0$), а при $x < 0$ – в противоположном направлении ($dy/d\theta < 0$).

Из (1.5) видно также, что на всей плоскости x, y , исключая некоторую область Q , содержащую кубическую параболу и ее малую (порядка μ) окрестность, направление фазовых траекторий может из-за малости параметра μ считаться в первом приближении горизонтальным. Допустимо предположение о том, что область Q состоит из весьма узких полос (лент), примыкающих с разных сторон к параболе $x - (x^3/3)$. При этом, как следует из (1.4), ниже кубической параболы производная $dx/d\theta$ положительна, а выше – отрицательна, что учтено при построении на рис.1 поля направлений касательных к фазовым траекториям за пределами области Q .

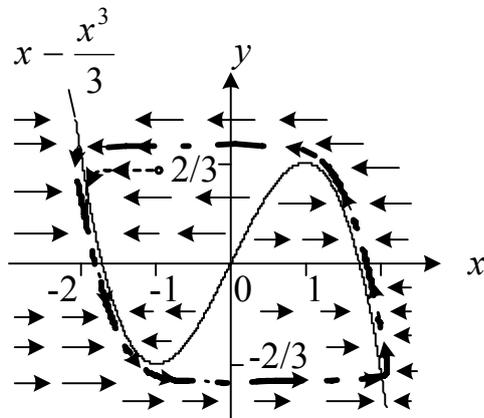


Рис.1

Основываясь на сведениях о поле направлений касательных, можно судить о том, как выглядят фазовые траектории осциллятора Рэлея для $\epsilon \gg 1$ при произвольных начальных условиях. Пусть, например, начальным значениям x и y отвечает центр показанного на рис.1 кружка малого радиуса. При таком исходном положении изображающая точка с течением времени, как видно из рисунка, сначала приближается к левой ветви кубической параболы, перемещаясь по горизонтали до тех пор, пока не окажется в области Q .

Опуская многие подробности, относящиеся к форме участков фазовых траекторий в упомянутой области, отметим, что в некоторый момент времени изображающая точка пересечет параболу $x - (x^3/3)$ в направлении сверху вниз по вертикали. Несложные рассуждения приводят к выводу, что после этого изображающая точка должна, оставаясь на малом расстоянии от кубической параболы, двигаться в сторону ее локального минимума, в окрестности которого такое движение сменится на перемещение по горизонтали в направлении правой ветви параболы.

В конечном счете в рассматриваемой динамической системе установится режим периодических колебаний, которому на фазовой плоскости соответствует замкнутая фазовая траектория (*устойчивый предельный цикл*), изображенная на рисунке штрих-пунктирной линией. Как видно из уравнения (1.4), скорость движения изображающей точки за пределами области Q при $\mu \ll 1$ очень велика. Это так называемые «быстрые» движения, которым отвечают горизонтальные участки фазовых траекторий. Движения изображающей точки, проходящие на малом удалении от кубической параболы, трактуются как «медленные».

1.4. Зависимости динамических переменных x и y от времени.

Оценка периода колебаний

Для последующих приближенных оценок пренебрежем временем, затрачиваемым на быстрые движения, а также примем, что на участках медленного изменения динамических переменных

$$y = x - (x^3/3). \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.3), приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, которое приводится к виду:

$$[(1/x) - x]dx = d\theta,$$

откуда следует, что

$$\theta - \theta_0 = \ln(x/x_0) + (x_0^2 - x^2)/2, \quad (1.7)$$

где x_0 – значение x в момент $\theta = \theta_0$.

При помощи (1.6, 1.7) можно построить соответствующие установившемуся режиму зависимости x и y от θ (рис.2). Полагая $x_0 = 2$

и $x = 1$, получим в правой части (1.7) оценку для нормированного полупериода колебаний, примерно равную 0,8, так что период колебаний, отсчитываемый по безразмерному времени θ , можно оценить как 1,6.

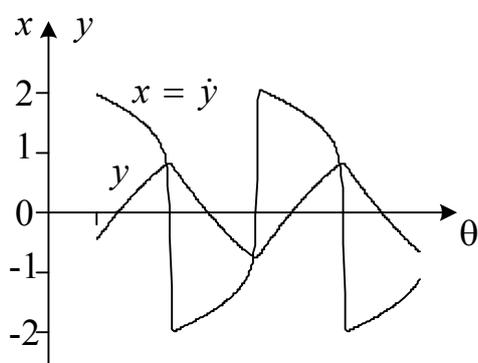


Рис.2

2. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

З а д а н и е

Математической моделью динамической системы является уравнение Ван дер Поля с много большим единицы безразмерным множителем, содержащимся в нелинейном слагаемом. Выясните основные особенности фазового портрета этой системы и укажите приближенный способ его построения, не требующий поиска решений исходного уравнения. Получите аналитические выражения, при помощи которых можно (в первом приближении) найти зависимости от времени для динамических переменных, используемых при построении фазового портрета. Выведите оценку для нормированного периода установившихся колебаний.

Р е ш е н и е см. в [12].

3. КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ АВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ

З а д а н и е

Полагая автономный осциллятор Ван дер Поля близким к линейной и консервативной системе, воспользуйтесь для приближенного анализа его колебательных процессов методом гармонического баланса и методом медленно меняющихся амплитуд. Постройте фазовый портрет осциллятора, содержащий фазовые траектории различных типов: траекторию, которая отвечает установившемуся режиму, и траектории, которые соответствуют переходным (нестационарным) процессам.

Р е ш е н и е

3.1. Отыскание амплитуды установившихся колебаний при помощи метода гармонического баланса [14]

Уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (3.1)$$

при $\varepsilon = 0$ превращается в уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0. \quad (3.2)$$

Начало отсчета безразмерного времени τ можно выбрать таким образом, чтобы решение уравнения (3.2) записывалось как

$$x_0(\tau) = a \cos \tau, \quad (3.3)$$

где a – не зависящая от времени амплитуда, которая определяется в данном случае начальным значением x_0 : $a = x_0(0)$.

Допустим теперь, что безразмерный параметр ε отличен от нуля и равен положительному числу, много меньшему единицы. Предположим, что приближенное решение уравнения (3.1) совпадает по форме с (3.3):

$$x(\tau) = a \cos \tau. \quad (3.4)$$

Здесь при нахождении амплитуды a , которая по-прежнему считается величиной, не зависящей от времени, следует использовать соображения, отличные от тех, что были приняты в расчет выше. Согласно процедуре *метода гармонического баланса* [14] необходимо после подстановки выражения (3.4) в (3.1) и использования тригонометрических разложений выделить в левой части получившегося соотношения слагаемые, пропорциональные $\cos \tau$ и $\sin \tau$. Легко видеть, что слагаемые, содержащие $\cos \tau$, в данном случае взаимно уничтожаются.

Поскольку нелинейная комбинация

$$x^2 dx/d\tau = (1/3) d(x^3)/d\tau = -(a^3/4)(\sin \tau + \sin 3\tau),$$

сумма коэффициентов перед $\sin \tau$ в левой части сводится к выражению $(4 - a^2)\varepsilon a/4$, которое нужно приравнять нулю, в результате чего окажется, что соответствующая режиму установившихся колебаний (стационарная) амплитуда $a_0 = 2$.

3.2. Переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Введение вспомогательной комплексной переменной

Последующий приближенный анализ квазилинейного осциллятора Ван дер Поля проводится при помощи *метода медленно меняющихся амплитуд*, причем используется вариант реализации упомянутого метода, основанный на предварительном переходе к системе уравнений первого порядка.

Запишем вместо уравнения Ван дер Поля следующую равносильную этому уравнению систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx/d\tau = y, & (3.5) \\ dy/d\tau = \varepsilon(1 - x^2)y - x. & (3.6) \end{cases}$$

Если ввести вспомогательную комплексную переменную $z = x - jy$, то, используя (3.5, 3.6), легко вывести для нее при помощи линейных алгебраических преобразований [12] дифференциальное уравнение. С этой целью вычтем из (3.5) уравнение (3.6), умноженное на j . Принимая во внимание, что

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = -\operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z^* - z),$$

получим после некоторых упрощений уравнение

$$dz/d\tau - jz = (\varepsilon/8)[(4 - |z|^2)(z - z^*) - z^3 + (z^*)^3], \quad (3.7)$$

которое рассматривается далее как исходное при использовании метода медленно меняющихся амплитуд.

3.3 Вывод укороченных уравнений

Умножая (3.7) на $e^{-j\tau}$, полагая $z(\tau) = A(\tau)e^{j\tau}$ и выполняя тождественные преобразования, приходим к равенству

$$dA/d\tau = (\varepsilon/8)[(4 - |A|^2)A - (4 - |A|^2)A^*e^{-j2\tau} - A^3e^{j2\tau} + (A^*)^3e^{-j4\tau}]. \quad (3.8)$$

Из (3.8) видно, в частности, что для комплексной амплитуды A в силу малости ε возможны только медленные изменения во времени и что выражение в квадратных скобках складывается из медленно изменяющегося члена $(4 - |A|^2)A$ и содержащих экспоненциальные множители $e^{\pm j2\tau}$ и $e^{-j4\tau}$ *быстро осциллирующих слагаемых*. Отбрасывая в соответствии с процедурой метода медленно меняющихся амплитуд [5, 12] быстро осциллирующие члены в правой части (3.8), запишем *комплексное укороченное уравнение*:

$$dA/d\tau = (\varepsilon A/8)(4 - |A|^2). \quad (3.9)$$

Из него может быть получена система двух *вещественных укороченных уравнений* для модуля (амплитуды) a и аргумента (фазы) θ комплексной амплитуды A . Умножая (3.9) на $e^{-j\theta}$, полагая $A = ae^{j\theta}$ и разделяя вещественные и мнимые слагаемые, приходим при $a \neq 0$ к уравнениям

$$da/d\tau = (\varepsilon a/8)(4 - a^2), \quad d\theta/d\tau = 0. \quad (3.10)$$

3.4. Решения укороченных уравнений. Фазовый портрет квазилинейного осциллятора Ван дер Поля

Прибегнем для интегрирования первого из уравнений (3.10) к разделению переменных. Путем умножения на $8a^{-3}d\tau$ нетрудно преобразовать его сначала к виду:

$$d(4a^{-2} - 1) + (4a^{-2} - 1)d(\varepsilon\tau) = 0. \quad (3.11)$$

Использование $(4a^{-2} - 1)^{-1}$ в качестве интегрирующего множителя переводит (3.11) в уравнение в полных дифференциалах, что дает возможность выразить зависимость амплитуды a от времени следующей формулой:

$$a(\tau) = \frac{2}{\sqrt{1 + [4a^{-2}(0) - 1]e^{-\varepsilon\tau}}}, \quad (3.12)$$

где $a(0)$ – начальное (при $\tau = 0$) значение амплитуды a .

Согласно второму из уравнений (3.10) аргумент θ остается неизменным во времени и равным своему начальному значению.

На рис.3 приведены примеры зависимостей амплитуды a от времени τ при начальных значениях $a(0) > 2$ и $a(0) < 2$. Как видно из этого рисунка, в соответствии с формулой (3.12) $a(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к стационарному значению $a_0 = 2$.

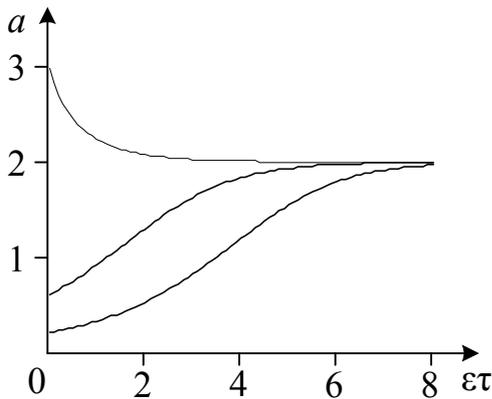


Рис.3

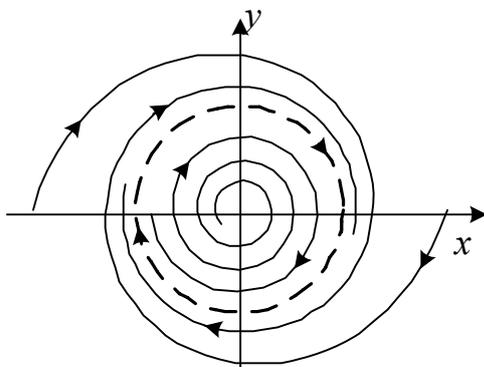


Рис.4

Учитывая, что

$$x = \operatorname{Re} z = a(\tau) \cos(\tau + \theta),$$

$$y = -\operatorname{Im} z = -a(\tau) \sin(\tau + \theta),$$

можно, используя формулу (3.12), построить на плоскости x, y фазовые траектории для произвольных начальных условий. На рис.4 приведен фрагмент фазового портрета квазилинейного осциллятора Ван дер Поля, полученный при помощи такого построения. Состояние равновесия, которо-

му соответствует начало координат, представляется в данном случае на плоскости особой точкой типа «неустойчивый фокус» [12]. Получающаяся при малых положительных ε и отмеченная штриховой линией окружность – *устойчивый предельный цикл (аттрактор)*. Ему отвечает установившийся режим периодических колебаний, которые в принятом приближении могут считаться не отличающимися от гармонических колебаний с периодом по τ , равным 2π , и амплитудой $a_0 = 2$.

4. КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ АВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР РЭЛЕЯ

З а д а н и е

Предполагая безразмерный параметр в уравнении Рэля намного меньшим единицы, т.е. считая осциллятор Рэля близким к линейной консервативной системе, проведите для него при помощи метода гармонического баланса и метода медленно меняющихся амплитуд приближенный анализ установившегося режима и режима установления колебаний.

Р е ш е н и е (для уравнения с дополнительным членом, содержащим квадрат первой производной по времени) *см. в [14]*.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СХЕМЫ ХАРТЛИ

З а д а н и е

Выведите дифференциальные уравнения LC -генератора, собранного на полевом транзисторе по схеме индуктивной трехточки (рис 5), и используя их, найдите условие устойчивости состояния равновесия этого генератора. Запишите условие самовозбуждения и получите оценочную формулу для частоты колебаний малой амплитуды, возникающих при незначительном превышении порога самовозбуждения. Примите, что ток затвора полевого транзистора равен нулю, а ток стока – однозначная нелинейная функция двух аргументов: напряжения затвор-исток и напряжения сток-исток.

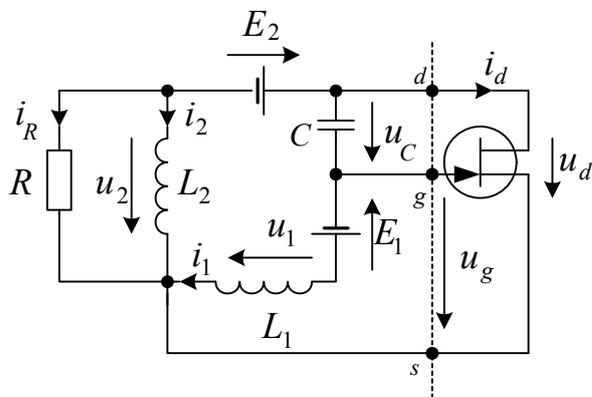


Рис.5

Р е ш е н и е

5.1 Исходные предположения, обозначения и соотношения

На рис.5 приведен вариант схемы одноконтурного транзисторного генератора с автотрансформаторной обратной связью, называемый индуктивной трехточкой, или схемой Хартли. Фрагмент схемы, который расположен слева от полевого транзистора (левее пунктирной линии, проведенной через точки s, g, d), трактуется как четырехполюсник обратной связи [13] с входными зажимами $d-s$ и выходными – $g-s$. Элементы L_1 и L_2 могут представлять собой индуктивности частей обмотки одной и той же катушки. В последующем взаимная индуктивность между этими частями считается пренебрежимо малой, что практически допустимо при однослойной намотке. Согласно заданию к числу упрощающих предположений относятся утверждения, что ток затвора транзистора равен нулю, а ток стока i_d – *однозначная нелинейная функция* напряжений u_g и u_d : $i_d = f(u_g, u_d)$.

В соответствии с первым законом Кирхгофа запишем соотношение, которое содержит токи в ветвях, сходящихся к левому нижнему узлу:

$$i_R + i_2 + i_1 + i_d = 0, \quad (5.1)$$

где принято во внимание, что в отсутствие тока затвора ток истока транзистора совпадает с током стока.

Далее применим второй закон Кирхгофа к контуру, охватывающему индуктивности L_1, L_2 , емкость C , и источники постоянных ЭДС E_1, E_2 :

$$u_1 - u_2 + u_C = E_2 - E_1. \quad (5.2)$$

Напряжения u_1, u_2 следующим образом выражаются через производные по времени от токов i_1, i_2 :

$$u_1 = L_1 di_1/dt, \quad u_2 = L_2 di_2/dt.$$

Легко также видеть, что

$$i_R = u_2/R, \quad u_g = E_1 + u_1, \quad u_d = E_2 + u_2.$$

5.2 Дифференциальные уравнения

При помощи последних пяти равенств соотношения (5.1, 5.2) преобразуются в уравнения, связывающие токи i_1, i_2 и напряжение u_C :

$$\frac{L_2}{R} \frac{di_2}{dt} + i_2 + i_1 + f(E_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}, E_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}) = 0, \quad (5.3)$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + u_C = E_2 - E_1. \quad (5.4)$$

Уравнения (5.3, 5.4) следует дополнить соотношением, выражающим ток i_1 через производную от запасенного в емкости C заряда, равного Cu_C :

$$C \frac{du_C}{dt} = i_1. \quad (5.5)$$

Здесь учтено, что при нулевом токе затвора ток через емкость C равен току i_1 . Характерно, что в дифференциальных уравнениях (5.3–5.5) неизвестными являются величины i_1 , i_2 и u_C , которыми задается состояние рассматриваемой динамической системы, (*переменные состояния*).

5.3. Равновесные значения токов и напряжений

Будем исходить из определения, согласно которому в состоянии равновесия все токи, протекающие в электрической цепи, и напряжения на всех элементах остаются неизменными во времени [5]. Обозначая равновесные значения неизвестных величин, содержащихся в (5.3–5.5), верхним индексом, имеем:

$$i_1^0 = 0, \quad i_2^0 = -f(E_1, E_2), \quad u_C^0 = E_2 - E_1.$$

Кроме того, если использовать аналогичные обозначения для других напряжений и токов, соответствующих состоянию равновесия, очевидно, что

$$u_1^0 = u_2^0 = i_R^0 = 0, \quad u_g^0 = E_1, \quad u_d^0 = E_2.$$

В силу однозначности функции $f(u_g, u_d)$ найденное *равновесное решение оказывается единственным*.

Следует отметить, что наличие того или иного равновесного решения системы дифференциальных уравнений (5.3 – 5.5) – необходимое условие того, чтобы рассматриваемая динамическая система могла оказаться в состоянии равновесия. Но это условие не является достаточным, ибо для физической реализации состояния, соответствующего равновесному решению, требуется, чтобы оно было устойчивым по отношению к внешним воздействиям, по крайней мере, малым (см. приложение I).

Об устойчивости или неустойчивости равновесного решения судят по тому, как ведут себя отклонения от этого решения с течением времени. Ограничиваясь исследованием устойчивости «*в малом*», предположим, что любой ток и любое напряжение в анализируемой схеме выражаются суммой равновесного значения и малого отклонения от этого значения. В частности, для неизвестных, содержащихся в уравнениях (5.3 – 5.5), положим, что

$$i_1 = i_1^0 + \xi_1, \quad i_2 = i_2^0 + \xi_2, \quad u_C = u_C^0 + \xi_C, \quad (5.6)$$

где отклонения ξ_1, ξ_2, ξ_C могут называться также *возмущениями*.

5.4. Применение процедуры линеаризации для вывода уравнений первого приближения

Для отклонений напряжений u_g, u_d от их равновесных значений E_1, E_2 сохраним обозначения u_1, u_2 . При малых u_1 и u_2 ток стока может в первом приближении считаться *линейной функцией* этих величин. В самом деле, если не учитывать величины более высокого порядка малости, чем u_1 и u_2 , то

$$i_d = f(E_1 + u_1, E_2 + u_2) = f(E_1, E_2) + g_{21}u_1 + g_{22}u_2,$$

где коэффициенты перед u_1 и u_2 представляют собой вычисляемые при $u_g = E_1$, $u_d = E_2$ дифференциальные (малосигнальные) Y -параметры полевого транзистора:

$$g_{21} = \partial i_d / \partial u_g, \quad g_{22} = \partial i_d / \partial u_d, \quad g_{21}, g_{22} > 0.$$

Легко видеть также, что $u_1 = L_1 d\xi_1/dt$, $u_2 = L_2 d\xi_2/dt$.

Тогда, принимая во внимание (5.6) и соотношения для равновесных значений, можно перейти от уравнений (5.3 – 5.5), к следующей системе *линейных дифференциальных уравнений* с постоянными коэффициентами (*уравнений первого приближения*):

$$\frac{L_2}{R} \frac{d\xi_2}{dt} + \xi_2 + \xi_1 + g_{21}L_1 \frac{d\xi_1}{dt} + g_{22}L_2 \frac{d\xi_2}{dt} = 0, \quad (5.7)$$

$$L_1 \frac{d\xi_1}{dt} - L_2 \frac{d\xi_2}{dt} + \xi_C = 0,$$

$$C \frac{d\xi_C}{dt} = \xi_1.$$

Тем самым реализуется *процедура линеаризации* (см. приложение II). Исключая из двух последних равенств возмущение ξ_C , получим уравнение

$$L_1 C \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \xi_1 = L_2 C \frac{d^2 \xi_2}{dt^2}. \quad (5.8)$$

5.5. Анализ характера решений уравнений первого приближения.

Условие устойчивости состояния равновесия

Выражая неизвестные ξ_1 и ξ_2 в (5.7, 5.8) как

$$\xi_1 = B_1 e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = B_2 e^{\lambda t},$$

где B_1, B_2 – произвольные константы, придем после сокращения экспоненциальных множителей к соотношениям

$$(\lambda^2 L_1 C + 1)B_1 - \lambda^2 L_2 C B_2 = 0,$$

$$(\lambda L_1 g_{21} + 1)B_1 + \left[\lambda L_2 \left(g_{22} + \frac{1}{R} \right) + 1 \right] B_2 = 0.$$

Нетривиальные решения для коэффициентов B_1 и B_2 у приведенной системы двух однородных алгебраических уравнений имеются только тогда, когда λ является корнем получаемого как ее определитель *характеристического полинома* системы (5.7, 5.8):

$$a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (5.9)$$

где $a_3 = L_1 L_2 C \left(g_{21} + g_{22} + \frac{1}{R} \right)$, $a_2 = (L_1 + L_2)C$, $a_1 = L_2 \left(g_{22} + \frac{1}{R} \right)$, $a_0 = 1$.

Если исходить из уравнений первого приближения, то, как следует из общего рассмотрения, проведенного для автономной системы (см. приложе-

ние III), *устойчивость* (и притом *асимптотическая*) ее состояния равновесия обеспечивается в случае отрицательности вещественных частей всех корней характеристического полинома. В случае кубического полинома (5.9), у которого $a_3 > 0$, последнее утверждение может быть по теореме Гурвица заменено требованием, чтобы выполнялись одновременно три следующих неравенства:

$$a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_2 a_1 > a_0 a_3.$$

Для рассматриваемого конкретного примера первые два неравенства справедливы заведомо, а из третьего – после подстановки выражений для коэффициентов и тождественных преобразований получается неравенство

$$g_{21} L_1 / L_2 < g_{22} + (1/R), \quad (5.10)$$

являющееся в данном случае *условием устойчивости состояния равновесия*.

Сочетания параметров $L_1, L_2, R, g_{21}, g_{22}$, при которых неравенство (5.10) изменяется на обратное, соответствуют появлению у полинома (5.9) корней с положительной вещественной частью¹⁾, что означает неустойчивость равновесного решения исходной системы дифференциальных уравнений. Поскольку при этом рассматриваемая динамическая система вообще не имеет устойчивых состояний равновесия, то для упомянутых сочетаний параметров справедливо утверждение о самовозбуждении схемы, т. е. переходе в колебательный режим. Таким образом, неравенство, обратное (5.10), выражает *условие самовозбуждения*.

5.6. Оценочная формула для частоты колебаний вблизи порога самовозбуждения

Замена в (5.10) знака неравенства на знак равенства приводит к соотношению для порога самовозбуждения. При этом два из корней характеристического полинома (5.10) оказываются чисто мнимыми, что проверяется непосредственной подстановкой в (5.9) $\lambda = \lambda_{1,2} = \pm j\Omega$. После разделения вещественных и мнимых слагаемых нетрудно получить, что

$$\Omega = \sqrt{a_0/a_2} = \sqrt{a_1/a_3} = 1/\sqrt{LC}, \quad (5.11)$$

где $L = L_1 + L_2$ – полная индуктивность колебательного контура. Из (5.11), в частности, видно, что в случае мнимых корней $a_2 a_1 = a_0 a_3$. Легко также убедиться в том, что третий корень характеристического полинома при этом вещественный и отрицательный:

$$\lambda_3 = -\frac{a_0}{a_3 \Omega^2} = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{1}{g_{21} L_1}, \quad \text{т.е. при}$$

$a_2 a_1 = a_0 a_3$ не может быть корней с положительной вещественной частью. С помощью равенства (5.11) можно оценить значение частоты колебаний малой амплитуды вблизи порога самовозбуждения.

¹⁾Как ясно из дальнейшего (см. п.5.6), чисто мнимые корни имеются у полинома (5.9) только в случае обращения неравенства в равенство.

6. УСТАНОВИВШИЙСЯ ОДНОЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ В СХЕМЕ ХАРТЛИ

З а д а н и е

Для схемы Хартли на полевом транзисторе (рис.5) получите основное уравнение, позволяющее анализировать режим генерирования колебаний, близких по форме к гармоническим, и при помощи этого уравнения выведите выражение для частоты автоколебаний. Получите соотношение, которое может быть использовано для нахождения амплитуды установившихся колебаний при различных коэффициентах обратной связи.

Р е ш е н и е

6.1. Предварительные замечания и вывод основного уравнения установившегося режима

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 5, при упрощающих предположениях, сформулированных в п.5.1. Пусть также автоколебательный режим, устанавливающийся в такой системе, может считаться *одночастотным по напряжению* [5, 13]. Последнее утверждение означает, что напряжения u_g , u_d между выводами полевого транзистора помимо постоянных составляющих E_1 , E_2 содержат переменные составляющие u_1 , u_2 , каждая из которых сводится к одной гармонической компоненте некоторой частоты ω :

$$u_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}_g e^{j\omega t}), \quad u_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_d e^{j\omega t}).$$

Здесь $\dot{U}_g = U_g e^{j\theta_g}$, $\dot{U}_d = U_d e^{j\theta_d}$ – комплексные амплитуды упомянутых компонент, U_g , U_d , θ_g , θ_d – соответствующие амплитуды и начальные фазы. В силу нелинейного характера зависимости тока стока i_d от напряжений u_g , u_d его переменная составляющая $i_{d\sim}$ включает в себя в общем случае кроме основной гармонической компоненты различные высшие гармоники:

$$i_{d\sim} = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dot{I}_{dn} e^{jn\omega t}\right).$$

Определяя *среднюю крутизну* \bar{S} полевого транзистора как отношение комплексной амплитуды первой гармоники тока стока к комплексной амплитуде \dot{U}_g [5, 13], имеем

$$\bar{S} = \dot{I}_{d1} / \dot{U}_g. \quad (6.1)$$

Если характеризовать подключенный к транзистору четырехполюсник обратной связи на частоте ω входным адмиттансом (входной комплексной проводимостью) Y_{ds} и обозначаемым через K комплексным коэффициентом передачи по напряжению от зажимов $d - s$ к зажимам $g - s$, то

$$\dot{I}_{d1} = -Y_{ds}\dot{U}_d, \quad \dot{U}_g = K\dot{U}_d.$$

Коэффициент K может быть назван *коэффициентом обратной связи*.

Если учесть последние два равенства, то из (6.1) вытекает соотношение

$$\bar{S} = -Y_{ds}/K, \quad (6.2)$$

которое представляет собой *основное уравнение установившегося режима*, используемое при отыскании частоты и амплитуды стационарных колебаний.

6.2. Выражения для коэффициента K и входного адмиттанса четырехполюсника обратной связи

Принимая во внимание отсутствие тока затвора, можно выразить адмиттанс четырехполюсника обратной связи на зажимах $d - s$ суммой адмиттансов ветвей, образующих параллельное соединение:

$$Y_{ds} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{jX(\omega)},$$

где $X(\omega) = \omega L_1 - 1/(\omega C)$.

Нетрудно видеть, что адмиттанс Y_{ds} можно трактовать как величину, обратную комплексному сопротивлению холостого хода Z_{11} на входных зажимах четырехполюсника обратной связи, а комбинацию Y_{ds}/K – как Z_{21}^{-1} , где Z_{21} – элемент Z -матрицы четырехполюсника, называемый передаточным сопротивлением [13].

Обозначая через \dot{I}_1 комплексную амплитуду гармонической компоненты тока i_1 , изменяющейся с частотой ω , можем записать соотношения

$$\dot{U}_g = j\omega L_1 \dot{I}_1, \quad \dot{U}_d = jX(\omega) \dot{I}_1,$$

с учетом которых получается выражение для коэффициента обратной связи в виде вещественной функции ω : $K = \omega L_1 / X(\omega)$.

Из вещественности K вытекает, как можно убедиться, что $u_1 = Ku_2$. Тогда

$$i_d = f(u_g, u_d) = f(E_1 + u_1, E_2 + \frac{u_1}{K}) = f_1(u_1),$$

т.е. при фиксированных E_1, E_2 и K ток стока оказывается однозначной функцией переменной составляющей u_1 . Последнее обстоятельство в рассматриваемом случае приводит к утверждениям о том, что средняя крутизна \bar{S} выражается вещественной функцией амплитуды U_g и не зависит от начальных фаз θ_g и θ_d [4, 13]. При близких к нулю амплитудах колебаний

$$i_{d1} \approx \left(g_{21} + \frac{g_{22}}{K} \right) \dot{U}_g,$$

откуда следует формула для так называемого *начального значения средней крутизны*: $\bar{S}(0) = g_{21} + (g_{22}/K)$.

6.3. Нахождение частоты установившихся колебаний

Будем далее обозначать частоту установившихся колебаний через Ω . Из основного уравнения (6.2) с учетом вещественности коэффициента K и средней крутизны \bar{S} вытекает, что в установившемся режиме мнимая часть адмиттанса Y_{ds} равняется нулю, а значит:

$$X(\Omega) = -\Omega L_2.$$

Принимая во внимание выражение для $X(\omega)$, приходим в результате к формуле Томсона:

$$\Omega = 1/\sqrt{LC},$$

где $L = L_1 + L_2$ – полная индуктивность колебательного контура (см. также оценку для Ω , полученную в п.5.6). Отметим, кроме того, что при $\omega = \Omega$ коэффициент K представляется отрицательной величиной: $K = -L_1/L_2$.

6.4. Соотношение, при помощи которого может разыскиваться стационарная амплитуда

Для стационарной амплитуды напряжения между затвором и истоком применяется далее обозначение U_g^0 . Из предшествующего рассмотрения ясно, что на соответствующей установившемуся режиму частоте $\omega = \Omega$ адмиттанс Y_{ds} равняется вещественной величине $1/R$, в то время как $K = -L_1/L_2$. Тогда из основного уравнения (6.2) вытекает соотношение

$$\bar{S}(U_g^0) = 1/|KR|, \quad (6.3)$$

которое, если известна зависимость средней крутизны от амплитуды U_g , может использоваться для отыскания U_g^0 . В случае мягкой (монотонно убывающей) характеристики средней крутизны отличное от нуля значение U_g^0 получится только тогда, когда

$$\bar{S}(0) > 1/|KR|.$$

Последнее неравенство является для рассматриваемой схемы *условием самовозбуждения*, приводимым с учетом формулы для начального значения средней крутизны $\bar{S}(0)$ к виду:

$$|K|g_{21} > g_{22} + (1/R),$$

который согласуется с выводом, полученным в результате анализа устойчивости состояния равновесия схемы Хартли (см. п.5.5).

7. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СХЕМЫ КОЛПИТЦА

З а д а н и е

Подлежащая рассмотрению схема LC генератора с емкостной обратной связью (рис.6) не содержит иных резистивных элементов кроме сопротивления автоматического смещения. Составьте для этой схемы дифференциальные уравнения и найдите из них соотношения для значений напряжений и токов, соответствующих состоянию равновесия. Выведите условие устойчивости этого состояния, условие самовозбуждения схемы и формулу, позволяющую найти приближенную оценку частоты автоколебаний.

Р е ш е н и е

7.1. Предварительные замечания. Дифференциальные уравнения схемы

В приведенной на рис.6 эквивалентной схеме не учитываются потери в индуктивной катушке и некоторых других элементах емкостной трехточки (схемы Колпитца), применяемой в действительности. Имеются и другие упрощения. Однако даже при помощи такой неполной схемы удастся составить представление о многих свойствах практически используемой автоколебательной системы. Далее предполагается, что ток коллектора i_c биполярного транзистора – однозначная нелинейная функция напряжения u_b , для которой подходит следующая аппроксимация:

$$i_c(u_b) = i_s e^{\gamma u_b}. \quad (7.1)$$

При этом ток базы считается пренебрежимо малым.

Воспользовавшись первым законом Кирхгофа для узла, к которому присоединена база, можем записать

$$C_1 \frac{du_b}{dt} + \frac{u_b - E_1}{R} + i_L = 0. \quad (7.2)$$

В случае узла, соединенного с коллектором, применение первого закона Кирхгофа дает равенство

$$C_2 \frac{du_c}{dt} - i_L + i_c(u_b) = 0. \quad (7.3)$$

При помощи второго закона Кирхгофа выводится соотношение

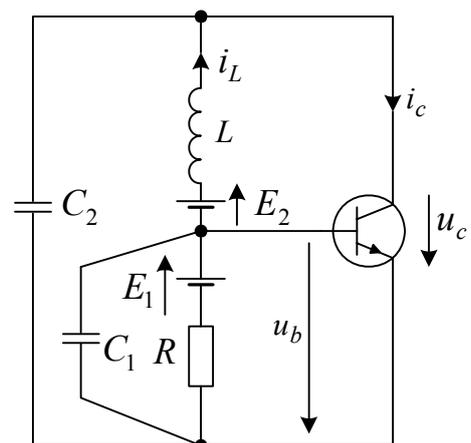


Рис.6

$$L \frac{di_L}{dt} + u_c - u_b = E_2, \quad (7.4)$$

где разность $u_c - u_b$ представляет собой напряжение на коллекторном переходе биполярного транзистора.

Таким образом, составлена система трех дифференциальных уравнений первого порядка, в которых неизвестными являются напряжения u_b , u_c между выводами транзистора и ток i_L .

Исключая из (7.2 – 7.4) переменные u_c и i_L , можно перейти от системы уравнений к одному *нелинейному дифференциальному уравнению* третьего порядка для u_b :

$$a_3 \frac{d^3 u_b}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 u_b}{dt^2} + a_1 \frac{du_b}{dt} + u_b + Ri_c(u_b) = E_1, \quad (7.5)$$

где $a_3 = LC_2RC_1$, $a_2 = LC_2$, $a_1 = R(C_1 + C_2)$.

7.2. Соотношения для равновесных решений. Начальная стадия исследования устойчивости состояния равновесия (процедура линеаризации)

Предполагая согласно определению состояния равновесия [5], что *динамические переменные* u_b , u_c и i_L не изменяются во времени, приходем на основании уравнений (7.2 – 7.4) к следующим равенствам, содержащим равновесные значения u_b^0 , u_c^0 , i_L^0 :

$$u_b^0 + Ri_L^0 = E_1, \quad i_L^0 = i_c(u_b^0), \quad u_c^0 = E_2 + u_b^0.$$

Последние три уравнения, как и вытекающее из них соотношение

$$u_b^0 = E_1 - R i_c(u_b^0), \quad (7.6)$$

имеют одно и только одно решение, что может быть непосредственно проверено для аппроксимации вида (7.1).

С целью последующего исследования устойчивости этого решения введем малые отклонения (возмущения) динамических переменных от их равновесных значений. Положим, например, что

$$u_b = u_b^0 + \xi. \quad (7.7)$$

Тогда, если ограничиться первым (линейным) приближением,

$$i_c(u_b) \approx i_c(u_b^0) + S\xi, \quad (7.8)$$

где $S = i'_c(u_b^0)$ – *дифференциальная крутизна* характеристики транзистора при напряжении на эмиттерном переходе, равном u_b^0 .

Подставляя (7.7, 7.8) в (7.5) и учитывая (7.6), получим *линейное дифференциальное уравнение* для возмущения ξ

$$a_3 \frac{d^3 \xi}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + a_1 \frac{d\xi}{dt} + a_0 \xi = 0, \quad (7.9)$$

где $a_0 = 1 + RS$.

7.3. Условие устойчивости состояния равновесия

Для ответа на вопрос об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия нужно выяснить, каковы знаки вещественных частей корней характеристического полинома уравнения (7.9)

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0. \quad (7.10)$$

Поскольку $a_3, a_2, a_0 > 0$, то в соответствии с теоремой Гурвица (см. приложение III) требование отрицательности вещественных частей всех корней этого кубического полинома сводится к одному условию

$$a_2a_1 > a_0a_3.$$

Это условие, учитывая выражения для коэффициентов полинома, преобразуется в неравенство

$$S < S_{nop},$$

где $S_{nop} = C_2/(RC_1)$ – пороговое значение дифференциальной крутизны, соответствующее границе между областью, где состояние равновесия устойчиво, и областью, в которой выполняется условие самовозбуждения схемы.

Если для характеристики транзистора используется аппроксимация вида (7.1), то $S = \gamma i_s e^{\gamma u_b^0}$, откуда следует, что порогу самовозбуждения соответствуют равновесные значения коллекторного тока $i_{c\ nop}^0 = S_{nop}/\gamma = C_2/(\gamma RC_1)$ и напряжения на эмиттерном переходе $u_{b\ nop}^0 = (1/\gamma) \ln(i_{c\ nop}^0/i_s)$. При помощи этих формул и (7.6) отыскивается пороговое значение ЭДС источника, включенного последовательно с сопротивлением автоматического смещения

$$E_{1\ nop} = u_{b\ nop}^0 + Ri_{c\ nop}^0. \quad (7.11)$$

7.4. Оценочная формула для частоты колебаний малой амплитуды вблизи порога самовозбуждения

Если комбинация параметров элементов схемы отвечает порогу самовозбуждения, среди корней характеристического полинома (7.10) имеется пара комплексно сопряженных мнимых корней (см. пояснения в п.п. 5.5, 5.6). Полагая в (7.10) $\lambda = \lambda_{1,2} = \pm j\Omega$, получим после деления вещественных и мнимых слагаемых отвечающую условию $a_2a_1 = a_0a_3$ формулу:

$$\Omega = \sqrt{a_0/a_2} = \sqrt{a_1/a_3} = 1/\sqrt{LC},$$

которая может использоваться для оценки частоты колебаний. Здесь

$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ – полная емкость колебательного контура. Поскольку третий

корень $\lambda_3 = -\frac{a_0}{a_3\Omega^2} = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{1}{RC_1}$, корни с положительной вещественной

частью при условии $a_2a_1 = a_0a_3$, как и в случае схемы Хартли, отсутствуют.

8. УСТАНОВИВШИЙСЯ ОДНОЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ В СХЕМЕ КОЛПИТЦА

З а д а н и е

В упрощенной схеме Колпитца (рис.6) применен транзистор, зависимость коллекторного тока i_c которого от напряжения u_b на эмиттерном переходе аппроксимирована экспоненциальной функцией (7.1). Опираясь на дифференциальное уравнение (7.5), получите при помощи метода гармонического баланса выражение для частоты автоколебаний и соотношение, которое позволяет установить зависимость стационарной амплитуды напряжения на эмиттерном переходе от постоянной ЭДС источника, включенного последовательно с сопротивлением автоматического смещения. Воспользуйтесь разновидностью метода гармонического баланса, для которой исходными являются дифференциальные уравнения, связывающие между собой мгновенные значения динамических переменных [14].

Р е ш е н и е

8.1. Предварительные замечания. Соотношение для постоянных составляющих

Параметры элементов схемы, приведенной на рис.6, предполагаются выбранными так, чтобы в ней реализовался одночастотный автоколебательный режим, при котором в напряжениях между выводами транзистора содержатся помимо постоянных составляющих гармонические компоненты частоты Ω . В частности, напряжение на эмиттерном переходе транзистора

$$u_b = U_{=} + U \cos \Omega t, \quad (8.1)$$

где $U_{=}$ и амплитуда U не зависят от времени t .

Выделим в тригонометрическом разложении для тока i_c его постоянную составляющую и первую гармонику

$$i_c = I_{=} (U_{=}, U) + I_{c1} (U_{=}, U) \cos \Omega t + \dots \quad (8.2)$$

При аппроксимации вида (7.1), как можно показать [5, 13],

$$I_{=} (U_{=}, U) = i_s e^{\gamma U_{=}} = I_0(\gamma U), \quad (8.3)$$

$$I_{c1} (U_{=}, U) = 2i_s e^{\gamma U_{=}} = I_1(\gamma U), \quad (8.4)$$

где $I_n(\gamma U)$ – модифицированная цилиндрическая функция целого индекса n .

Заметим, что отношением I_{c1} к U определяется *средняя крутизна* транзистора \bar{S} .

Последующее рассмотрение будет базироваться на нелинейном дифференциальном уравнении (7.5). Подставим в него выражения (8.1, 8.2) и, выде-

лив сначала члены, которые не изменяются с течением времени, получим соотношение, связывающее постоянные составляющие $U_{\text{ср}}$ и $I_{\text{ср}}$.

$$U_{\text{ср}} + RI_{\text{ср}}(U_{\text{ср}}, U) = E_1. \quad (8.5)$$

Далее выделим слагаемые, содержащие в качестве множителей $\cos \Omega t$ и $\sin \Omega t$. Если собрать их отдельно и приравнять нулю результирующие (суммарные) коэффициенты перед косинусом и синусом, то можно вывести выражение для частоты автоколебаний и, учитывая также (8.5), указать способы нахождения стационарной амплитуды и постоянной составляющей $U_{\text{ср}}$.

8.2. Основные соотношения, получаемые при помощи метода гармонического баланса

После подстановки (8.1, 8.2) в (8.5) общий коэффициент перед $\sin \Omega t$ записывается как $(\Omega^3 a_3 - \Omega a_1)U$. Приравняв его нулю, получим, что

$$\Omega = \sqrt{a_1/a_3} = 1/\sqrt{LC},$$

т.е. частота автоколебаний в первом приближении совпадает с резонансной частотой колебательного контура, полная емкость которого $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Приравнивание нулю общего коэффициента перед $\cos \Omega t$ дает уравнение

$$(1 - \Omega^2 a_2)U + RI_{c1}(U_{\text{ср}}, U) = 0,$$

приводящееся с учетом (8.4) и выражений для коэффициентов a_1, a_2, a_3 к следующему виду:

$$2i_s e^{\gamma U_{\text{ср}}} I_1(\gamma U) = S_{\text{пор}} U \quad (8.6)$$

где $S_{\text{пор}} = C_2/RC_1$ – пороговое значение дифференциальной крутизны.

Из (8.6) может быть получена полезная для расчетов зависимость постоянной составляющей напряжения на эмиттерном переходе от стационарной амплитуды U , реализующаяся в установившемся автоколебательном режиме:

$$U_{\text{ср}}(U) = (1/\gamma) \ln P(U),$$

где $P(U) = \frac{S_{\text{пор}} U}{2i_s I_1(\gamma U)}$.

Тогда в соответствии с формулой (8.3)

$$I_{\text{ср}} = i_s P(U) I_0(\gamma U) = \frac{S_{\text{пор}} U I_0(\gamma U)}{2I_1(\gamma U)}$$

и, принимая во внимание (8.5), можно получить сравнительно простую зависимость ЭДС E_1 от U :

$$E_1(U) = (1/\gamma) \ln P(U) + Ri_s P(U) I_0(\gamma U), \quad (8.7)$$

обращение которой дает зависимость U от E_1 .

Легко также видеть, что при $U \rightarrow 0$ правая часть (8.7) сводится к полученному в п.7.3 выражению (7.11) для значения $E_{1 \text{ пор}}$.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К АНАЛИЗУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА

З а д а н и е

Для малых по амплитуде собственных колебаний консервативного осциллятора Дуффинга найдите при помощи разработанного А.Пуанкаре метода малого параметра период колебаний, отвечающий порождающему решению, и на основании соотношений, соответствующих первому приближению, получите поправку первого порядка, позволяющую оценить зависимость периода от амплитуды.

Р е ш е н и е

9.1. Вводные замечания

Решения уравнения Дуффинга [14]

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z + z^3 = 0 \quad (9.1)$$

представляются периодическими функциями безразмерного времени τ , причем выражение для периода может быть записано с использованием полного эллиптического интеграла первого рода [14]. Из этого выражения, в частности, вытекает зависимость периода от амплитуды, т. е. свойство *неизохронности* колебаний. При $|z|^3 \ll |z|$ система, процессы в которой описываются уравнением (9.1), мало отличается по своему поведению от гармонического осциллятора, т.е. ее собственные колебания близки по форме к синусоидальным, а их период (по τ) незначительно отличается от 2π . В случае, когда эти малые отличия представляют интерес, для выяснения их характера целесообразно воспользоваться предложенным А.Пуанкаре *методом малого параметра* [11, 14].

9.2. Предварительные преобразования: введение малого параметра и переход к «собственному» времени

Выразим в уравнении (9.1) величину z через новую переменную x и *малый положительный параметр* μ ($\mu \ll 1$) согласно формуле $z = x\sqrt{\mu}$.

После сокращения на $\sqrt{\mu}$ уравнение для x приводится к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = -\mu x^3. \quad (9.2)$$

В основе метода малого параметра лежит последовательный учет членов все более и более высокого порядка малости (по μ) в ходе реализации итерационной процедуры. Предварительно проведем замену дифференцирования по τ в (9.2) вычислением производной по другому безразмерному времени θ , условно называемому «*собственным*» и выбираемому таким образом, чтобы переменная x оказывалась периодической функцией θ с периодом 2π при любых значениях $\mu \ll 1$. Учитывая соображения удобства последующих алгебраических преобразований, установим между τ и θ следующую связь:

$$\tau = \theta\sqrt{1 + \mu h(\mu)},$$

где функция $h(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mu^k$, т.е. выражается степенным рядом по μ , коэффициенты которого $h_0, h_1, h_2 \dots$ разыскиваются на различных стадиях итерационной процедуры.

Обозначая производную по θ точкой сверху, имеем

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{1 + \mu h} \frac{dx}{d\tau}, \quad \ddot{x} = (1 + \mu h) \frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Тогда после умножения (9.2) на $1 + \mu h$ нетрудно привести дифференциальное уравнение для x к следующему виду:

$$\ddot{x} + x = \mu F(x, \mu), \quad (9.3)$$

где $F(x, \mu) = -[1 + \mu h(\mu)]x^3 - h(\mu)x$.

9.3. Учет периодичности по θ . Выбор начальных условий

Дальнейшее рассмотрение базируется на представлении переменной x степенным рядом:

$$x(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\theta) \mu^k, \quad (9.4)$$

причем не только $x(\theta)$, но и коэффициенты $x_k(\theta)$ предполагаются периодическими функциями периода 2π . При этом, не теряя общности, можно выбрать нулевые начальные условия для \dot{x} и всех \dot{x}_k :

$$\dot{x}_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Предположим, что $x(0) = a$, где постоянная величина a считается для определенности положительной. Допустим также, что конечные суммы слагаемых, удерживаемых из (9.4) на всех стадиях итерационной процедуры, приводят при $\theta = 0$ к тому же значению a . Тогда естественно принять, что

$$x_0(0) = a \text{ и } x_k(0) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots$$

9.4. Разложение по степеням μ для правой части уравнения (9.3) и начальный шаг итерационной процедуры (нулевое приближение)

Принимая во внимание разложения по степеням μ для h и x , выпишем те члены степенного ряда для $F(x, \mu)$, порядок малости которых не превышает μ :

$$F(x, \mu) = -x_0^3 - h_0 x_0 - \mu(h_0 x_0^3 + 3x_0^2 x_1 + h_0 x_1 + h_1 x_0) + \dots \quad (9.5)$$

Подставляя (9.4, 9.5) в (9.3) и удерживая сначала слагаемые, не содержащие μ , получим *порождающее уравнение*

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0,$$

из которого при выбранных начальных условиях следует *порождающее решение*

$$x_0 = a \cos \theta.$$

9.5. Первое приближение. Учет членов порядка μ , включая поправку к периоду

Если после упомянутой выше подстановки сравнить слагаемые порядка μ , содержащиеся в левой и правой частях уравнения, то нетрудно прийти к соотношению

$$\ddot{x}_1 + x_1 = F(x_0, 0),$$

которое, принимая во внимание (9.5) и порождающее решение, приводится к виду:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\left(\frac{3}{4}a^3 + h_0a\right)\cos\theta - \frac{a^3}{4}\cos 3\theta. \quad (9.6)$$

Коэффициент перед $\cos\theta$ в правой части уравнения (9.6) необходимо приравнять нулю. В противном случае в решение этого уравнения будут входить *вековые члены*, т.е. решение окажется непериодическим. Учитывая сказанное, нужно положить $h_0 = -\frac{3}{4}a^2$. Рассматривая уравнение

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{a^3}{4}\cos 3\theta$$

при начальных условиях $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0$, получим решение

$$x_1(\theta) = \frac{a^3}{32}(\cos 3\theta - \cos\theta),$$

содержащее третью гармонику. Используя формулу связи между τ и θ , а также обозначение $b = a\sqrt{\mu}$, запишем найденную в первом приближении оценку периода (по τ) собственных колебаний консервативного осциллятора Дуффинга в виде

$$2\pi\left(1 - \frac{3}{8}b^2\right),$$

согласующемся с результатом, приведенным в [14]. Процедура метода малого параметра позволяет в случае надобности осуществлять учет членов более высокого порядка малости (второе, третье, ... приближения).

10. АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ (СВОБОДНЫХ) КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА БЕЗ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ

З а д а н и е

Найдите приближенное выражение для периода собственных колебаний маятника без потерь с поправкой, которой учитывается зависимость периода от амплитуды, предполагаемой малой величиной. Воспользуйтесь для этой цели предложенным А.Пуанкаре методом малого параметра.

Р е ш е н и е

10.1 Вводные замечания

Дифференциальное уравнение маятника без потерь может быть записано в следующей форме [12]:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin\varphi = 0, \quad (10.1)$$

где φ – угол отклонения от полупрямой, направленной вертикально вниз, $\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t$ – безразмерное (нормированное) время, g – ускорение свободного падения, l – расстояние между центром масс и точкой подвеса.

Собственным колебаниям маятника без потерь отвечает периодическая функция $\varphi(\tau)$, соответствующая общему решению нелинейного дифференциального уравнения (10.1). Период собственных колебаний выражается через полный эллиптический интеграл первого рода и принимает тем большее значение, чем ближе максимальный угол отклонения φ_m к 180° [2]. (При φ_m , стремящемся к 180° , значение периода оказывается бесконечно большим.)

Для малых φ_m в зависимости периода собственных колебаний от их амплитуды (т.е. в *неизохронности*) можно убедиться с помощью *метода малого параметра* (А.Пуанкаре). При этом удастся получить соответствующую оценку, не прибегая к использованию эллиптических интегралов или других специальных функций.

10.2. Предварительные преобразования исходного уравнения: введение малого параметра и переход к «собственному» времени

Предполагая $|\varphi|$ много меньшим единицы, выразим φ в (10.1) через новую переменную x и *малый параметр* μ согласно формуле: $\varphi = x\sqrt{\mu}$. После деления на $\sqrt{\mu}$ получим вместо (10.1) соотношение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\sin(x\sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}} = 0,$$

преобразуемое посредством разложения $\sin(x\sqrt{\mu})$ в ряд по степеням аргумента в уравнение с малыми членами, отнесенными к правой части:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f(x, \mu), \quad (10.2)$$

где $f(x, \mu) = \frac{x^3}{3!} - \mu \frac{x^5}{5!} + \dots$

Непосредственная реализация процедуры последовательных приближений, предусматриваемой методом малого параметра наталкивается на затруднение, связанное с тем, что для разыскиваемых решений период (по τ) зависит от μ [14]. Для того чтобы избежать этого затруднения, перейдем к «собственному» времени θ , выбираемому таким образом, чтобы искомая переменная x была периодической функцией θ с не зависящим от μ периодом 2π . Как и в п.9.2, выразим τ через θ посредством следующего соотношения

$$\tau = \theta\sqrt{1 + \mu h(\mu)}.$$

Здесь функция $h(\mu)$ представляется степенным рядом по μ :

$$h(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mu^k, \quad (10.3)$$

коэффициенты которого определяются на различных стадиях процедуры метода малого параметра.

Как и в п.п. 9.3–9.5, производная по θ обозначается далее точкой.

Путем умножения на $1 + \mu h$ нетрудно получить вместо (10.2) дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu F(x, \mu), \quad (10.4)$$

где $F(x, \mu) = [1 + \mu h(\mu)]f(x, \mu) - h(\mu)x$.

10.3. Степенное разложение для переменной x и выбор начальных условий

В последующем используется следующий степенной ряд для $x(\theta)$:

$$x(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\theta) \mu^k, \quad (10.5)$$

При этом $x_k(\theta)$, как и $x(\theta)$, предполагаются функциями периода 2π . Начало отсчета в данном случае можно устанавливать произвольно, поскольку это не сказывается на уравнении (10.4). Выбрав в качестве начала значение $\theta = 0$, будем считать, при $\theta = 0$ производные по θ от x, x_0, x_1, \dots обращаются в нуль. Положим также, что $x(0) = a > 0$, что соответствует максимальному отклонению маятника от положения равновесия. Для того чтобы значение $x(0)$, записанное согласно (10.5) с точностью до любого конечного числа слагаемых ряда, оставалось равным a , примем следующие начальные условия для функций x_k : $x_0(0) = a, \quad x_1(0) = x_2(0) = \dots = 0$.

10.4. Ряд по степеням μ для правой части уравнения (10.4). Порождающее решение

Учитывая (10.3, 10.5) и удерживая в выражении для функции $F(x, \mu)$ члены степенного разложения, порядок малости которых не выше μ , можем записать:

$$F(x, \mu) = \frac{x_0^3}{6} - h_0 x_0 + \mu \left[\frac{x_0^2}{2} \left(x_1 - \frac{x_0^3}{60} \right) + h_0 \left(\frac{x_0^2}{6} - x_1 \right) - h_1 x_0 \right] + \dots (10.6)$$

Подставляя (10.5, 10.6) в (10.4), получим в результате учета слагаемых, не содержащих μ , *порождающее уравнение*:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0,$$

из которого при начальных условиях $\dot{x}(0) = 0, x(0) = a$ следует *порождающее решение*

$$x_0 = a \cos \theta. \quad (10.7)$$

10.5. Первое приближение. Нахождение поправки к периоду колебаний

Если после упомянутой выше подстановки удержат слагаемые порядка μ , то получится уравнение

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{x_0^3}{6} - h_0 x_0, \quad (10.8)$$

правую часть которого, принимая во внимание (10.7), можно представить в следующем виде:

$$\frac{a^3}{24} \cos 3\theta + \left(\frac{a^2}{8} - h_0 \right) a \cos \theta.$$

Наличие в правой части дифференциального уравнения (10.8) слагаемых содержащих $\cos \theta$ (или $\sin \theta$) с отличными от нуля постоянными коэффициентами недопустимо, поскольку приводит к тому, что решение оказывается непериодическим из-за появляющихся в нем *вековых членов*. Для того чтобы это предотвратить, приравняем нулю коэффициент, стоящий перед $\cos \theta$, положив $h_0 = \frac{a^2}{8}$. Интегрирование уравнения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{a^3}{24} \cos 3\theta$$

при начальных условиях $\dot{x}_1(0) = x_1(0) = 0$ приводит к решению

$$x_1(\theta) = \frac{a^3}{192} (\cos \theta - \cos 3\theta),$$

в которое входит помимо первой также и третья гармоника.

Найденное значение коэффициента h_0 дает возможность с точностью до величин порядка μ записать выражения для периода колебаний (по τ):

$$2\pi \sqrt{1 + \mu \frac{a^2}{8}} \approx 2\pi \left(1 + \frac{\varphi_m^2}{16} \right),$$

где $\varphi_m = a\sqrt{\mu}$ – предполагаемый малым максимальный угол отклонения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Определение устойчивости движения

Предположим, что для описания поведения некоторой динамической системы используется конечное число дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных,

$$\frac{dq_s}{dt} = Q_s(q_1, q_2, \dots, t), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (I.1)$$

где n – порядок динамической системы.

Будем также считать, что тем или способом могут быть выбраны начальные значения динамических переменных $q_1(t_0), q_2(t_0), \dots, q_n(t_0)$, определяющие состояние системы в момент $t = t_0$. Рассмотрим движение динамической системы, которому при заданных начальных условиях соответствует обозначаемое как $q_1^0(t), q_2^0(t), \dots, q_n^0(t)$ решение уравнений (I.1). Назовем это движение *невозмущенным* в отличие от других движений той же системы, которые будут называться *возмущенными*.

Поскольку под динамической системой обычно подразумевается объект, с которым приходится иметь дело в действительности, нельзя ни в коем случае ограничиться только нахождением решения дифференциальных уравнений. Необходимо получить ответ на вопрос, реализуется ли соответствующее невозмущенное движение на практике. Дело в том, что при составлении дифференциальных уравнений и выборе начальных условий всегда пренебрегают учетом многих внешних воздействий, которым подвергается реальная система. Будем далее предполагать упомянутые воздействия малыми. Практическая реализация возможна лишь для тех процессов, которые будут устойчивы по отношению к этим малым воздействиям.

Прежде чем дать определение понятию «*устойчивость движения*», преобразуем уравнения динамической системы к новым переменным

$$\xi_s = q_s - q_s^0, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

именуемым в последующем *возмущениями*.

Тогда вместо (I.1) получатся соотношения

$$\frac{d\xi_s}{dt} = Q_s(q_1^0 + \xi_s, \dots, q_n^0 + \xi_n; t) - Q_s(q_1^0, \dots, q_n^0; t), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (I.2)$$

носящие название *дифференциальных уравнений возмущенного движения*. Заметим кстати, что невозмущенному движению соответствует тривиальное решение $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ этих уравнений.

Обращаясь к уравнениям (I.2), дадим теперь определение устойчивости движения, или, как часто говорят, устойчивости решения [5, 11].

Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к величине q_k , если для всякого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, найдется другое положительное число $\eta(\varepsilon)$, такое, что для всех возмущенных движений $q_k(t)$, для которых в начальный момент $t = t_0$ выполняются неравенства

$$|\xi_k(t_0)| < \eta,$$

будут при всех $t > t_0$ выполняться неравенства

$$|\xi_k(t)| < \varepsilon.$$

Определенную таким образом устойчивость часто называют *устойчивостью в смысле Ляпунова (по Ляпунову)*.

Невозмущенное движение называется неустойчивым, если оно не является устойчивым.

Приведенное общее определение устойчивости означает, что при начальном возмущении $\xi_k(t_0)$, малом по модулю, $\xi_k(t)$ при $t > t_0$ принимает для устойчивого движения только те значения, при которых $|\xi_k(t)|$ – малая величина.

Если при t , стремящемся к бесконечности, возмущение $\xi_k(t)$ стремится к нулю, то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

Пусть в правых частях дифференциальных уравнений (I.1, I.2) отсутствует явная зависимость от времени t и пусть рассматривается решение $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$, не изменяющееся с течением времени. Тогда под невозмущенным движением понимается состояние равновесия автономной динамической системы и приведенные выше формулировки можно трактовать как определения устойчивости и асимптотической устойчивости состояния равновесия.

Данные выше определения касаются *устойчивости* невозмущенного движения *по отношению к малым возмущениям начальных условий*. Устойчивость движения по отношению к другим видам возмущений требует специальных определений [5, 11].

II. О методах анализа устойчивости движения нелинейных систем

Исследование устойчивости не представляет серьезных трудностей в тех случаях, когда дифференциальные движения невозмущенного движения удается проинтегрировать в замкнутой форме. Но для нелинейных систем подобные случаи являются исключительными и почти не встречаются на практике. Поэтому обычно прибегают к использованию приемов, не требующих интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Один из таких приемов основан на *методе линеаризации*, который заключается в следующем.

Разлагая правые части уравнений возмущенного движения (I.2) в ряды по степеням возмущений и отбрасывая члены выше первого порядка, получим так называемую *систему уравнений первого приближения*

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{l=1}^n A_{sl}\xi_l, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{II.1})$$

где коэффициенты A_{sl} не зависят от возмущений ξ_l , но могут оказаться функциями времени t . Далее исследуется устойчивость тривиального решения этих уравнений. Заметим, что такой путь анализа устойчивости является нестрогим и, вообще говоря, неправильным. Замена нелинейных уравнений (I.2) линейными уравнениями (II.1) представляет собой, по существу, замену одной задачи другой, с которой первая может не иметь ничего общего. Может случиться, что невозмущенное движение при исследовании лишь первого приближения окажется устойчивым, хотя оно на самом деле неустойчиво, и наоборот.

Русским математиком А.М.Ляпуновым найдены условия, при выполнении которых первое приближение дает правильный ответ на вопрос об устойчивости (или неустойчивости) анализируемого движения. Основываясь на полученных им результатах, приведем утверждения, относящиеся к случаю, когда дифференциальные уравнения невозмущенного движения и уравнения первого приближения не содержат явно независимой переменной t . Эта ситуация характерна, в частности, для задачи исследования устойчивости состояния равновесия автономной системы.

В упомянутом случае

1) асимптотическая устойчивость, установленная посредством уравнений (II.1), обеспечивает также асимптотическую устойчивость соответствующих решений точных (нелинейных) уравнений;

2) неустойчивость решения уравнений первого приближения свидетельствует о неустойчивости точного решения уравнений (I.2).

Помимо процедуры, основанной на использовании линейных дифференциальных уравнений первого приближения, имеются также и другие методы исследования устойчивости движения, сведения о которых можно найти в литературе [5, 11].

III. Устойчивость состояния равновесия автономной системы. Теорема Гурвица.

Как следует из предыдущего, исследование устойчивости состояния равновесия автономной нелинейной системы с конечным числом степеней свободы может опираться на дифференциальные уравнения вида (II.1), где коэффициенты A_{sl} не зависят от времени. Вместо системы (II.1) можно рассматривать получаемые из нее посредством исключения переменных линейные дифференциальные уравнения вида:

$$a_m \frac{d^m \xi_k}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} \xi_k}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d \xi_k}{dt} + a_0 \xi_k = 0, \quad (\text{III.1})$$

где $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ – постоянные вещественные коэффициенты.

Порядок m уравнения (III.1), как правило, совпадает с порядком n динамической системы, либо может оказаться меньше, чем n . Последняя ситуация возможна, если уравнения (II.1) сводятся к совокупностям соотношений, в каждой из которых отсутствуют искомые переменные, содержащиеся в других.

Запишем для уравнения (III.1) *характеристический полином*

$$a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (\text{III.2})$$

и обозначим его корни как $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Если для простоты ограничиться случаем, когда среди этих корней нет кратных, общее решение дифференциального уравнения (III.1) выразится как

$$\xi_k = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_m e^{\lambda_m t}, \quad (\text{III.3})$$

где C_1, C_2, \dots, C_m – произвольные постоянные, определяемые при помощи начальных условий.

В случае, когда все корни полинома (III.2) имеют отрицательные вещественные части, каждый член выражения (III.3) представляет собой затухающую и стремящуюся к нулю функцию времени. Тогда ξ_k будет также стремиться к нулю при t , стремящемся к бесконечности, что согласно приведенным выше определениям и утверждениям свидетельствует об асимптотической устойчивости состояния равновесия динамической системы.

Установленное Гурвицем необходимое и достаточное условие отрицательности вещественных частей всех корней полинома (III.2) позволяет обойтись без отыскания самих корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Т е о р е м а Г у р в и ц а . Полином (III.2), где a_m, a_{m-1}, \dots, a_0 – вещественные числа и $a_m > 0$, имеет отрицательные вещественные части у всех корней тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства:

$$a_{m-1} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m \\ a_{m-3} & a_{m-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m & 0 \\ a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-5} & a_{m-4} & a_{m-3} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad a_0 > 0$$

(a_k при $k > m$ и $k < 0$ полагаются равными нулю).

Таким образом, требуется, чтобы были справедливы m неравенств, причем в предпоследнем неравенстве согласно приведенной формулировке теоремы содержится определитель $(m - 1)$ -го порядка, а в предыдущих – угловые миноры этого определителя, порядок которых изменяется от первого до $(m - 2)$ -го.

Если изменение соотношения между коэффициентами полинома приводит к нарушению какого-либо неравенства (превращению в равенство или изменению знака неравенства на противоположный), то это означает появление у полинома чисто мнимых корней или корней с положительной вещественной частью, а при $a_0 = 0$ нулевого корня.

Для определения условия, при выполнении которого у полинома (III.2) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, необходимо дополнительное рассмотрение (оно не требуется в случаях, когда удастся получить аналитические выражения для корней). Пусть это условие выполнено. Тогда хотя бы один член в сумме (III.3), а вместе с ним и возмущение ξ_k , с течением времени будет неограниченно расти и динамическая система уйдет из состояния равновесия. В этом случае состояние равновесия является неустойчивым.

Если у характеристического полинома отсутствуют корни с положительной вещественной частью, и в то же время не все корни имеют отрицательные вещественные части, рассмотрения первого приближения недостаточно для решения задачи устойчивости нелинейной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.; Наука, 1981. 568 с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.
3. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов.радио, 1975. 320 с.
5. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. М.: Сов.радио, 1973. 320 с.
6. Курокава К. Колебательные системы твердотельных СВЧ-генераторов. // Полупроводниковые приборы в схемах СВЧ // Под ред. М.Хауэса, Д.Моргана. – Мир, 1979. С 241–299.
7. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1988. 192 с.
8. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 416 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 356 с.
10. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 492 с.
11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
12. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Математические модели динамических систем. СПб.: СПбГПУ, 2002. 63 с.
13. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Автоколебательные системы резонансного типа. СПб.: СПбГПУ, 2003. 66 с.
14. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Приближенные методы анализа нелинейных систем. СПб.: СПбГПУ, 2002. 63 с.
15. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 392 с.
16. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
17. Стретт Д.В. (Рэлей) Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 456 с.
18. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Изд-во Мир, 1968. 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА РЭЛЕЯ	4
1.1. Вводные замечания	4
1.2. Переход к системе уравнений первого порядка. Вывод уравнения фазовых траекторий	5
1.3. Построение фазовых траекторий	5
1.4. Зависимости динамических переменных x и y от времени. Оценка периода колебаний	7
2. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ	7
3. КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ АВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ	8
3.1. Отыскание амплитуды установившихся колебаний при помощи метода гармонического баланса [14]	8
3.2. Переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Введение вспомогательной комплексной переменной	9
3.3. Вывод укороченных уравнений	9
3.4. Решения укороченных уравнений. Фазовый портрет квазилинейного осциллятора Ван дер Поля	10
4. КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ АВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР РЭЛЕЯ	11
5. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СХЕМЫ ХАРТЛИ	11
5.1. Исходные предположения, обозначения и соотношения	12
5.2. Дифференциальные уравнения	12
5.3. Равновесные значения токов и напряжений	13
5.4. Применение процедуры линеаризации для вывода уравнений первого приближения	13
5.5. Анализ характера решений уравнений первого приближения. Условие устойчивости состояния равновесия	14
5.6. Оценочная формула для частоты колебаний вблизи порога самовозбуждения	15
6. УСТАНОВИВШИЙСЯ ОДНОЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ В СХЕМЕ ХАРТЛИ	16
6.1. Предварительные замечания и вывод основного уравнения установившегося режима	16
6.2. Выражения для коэффициента K и входного адмиттанса четырехполюсника обратной связи	17
6.3. Нахождение частоты установившихся колебаний	18
6.4. Соотношение, при помощи которого может разыскиваться стационарная амплитуда	18
7. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СХЕМЫ КОЛПИТЦА	19
7.1. Предварительные замечания. Дифференциальные уравнения схемы	19
7.2. Соотношения для равновесных решений. Начальная стадия исследования устойчивости состояния равновесия (процедура линеаризации)	20
7.3. Условие устойчивости состояния равновесия	21
7.4. Оценочная формула для частоты колебаний малой амплитуды вблизи порога самовозбуждения	21

8. УСТАНОВИВШИЙСЯ ОДНОЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ В СХЕМЕ КОЛПИТЦА	22
8.1. Предварительные замечания. Соотношение для постоянных составляющих	22
8.2. Основные соотношения, получаемые при помощи метода гармонического баланса	23
9. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К АНАЛИЗУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА	24
9.1. Вводные замечания	24
9.2. Предварительные преобразования: введение малого параметра и переход к «собственному» времени	25
9.3. Учет периодичности по θ . Выбор начальных условий	26
9.4. Разложение по степеням μ для правой части уравнения (9.3) и начальный шаг итерационной процедуры (нулевое приближение)	26
9.5. Первое приближение. Учет членов порядка μ , включая поправку к периоду	27
10. АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ (СВОБОДНЫХ) КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА БЕЗ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ	28
10.1 Вводные замечания	28
10.2. Предварительные преобразования исходного уравнения: введение малого параметра и переход к «собственному» времени	29
10.3. Степенное разложение для переменной x и выбор начальных условий	30
10.4. Ряд по степеням μ для правой части уравнения (10.4). Порождающее решение	30
10.5. Первое приближение. Нахождение поправки к периоду колебаний	31
ПРИЛОЖЕНИЯ	32
I. Определение устойчивости движения	32
II. О методах анализа устойчивости движения нелинейных систем	34
III. Устойчивость состояния равновесия автономной системы. Теорема Гурвица	35
ЛИТЕРАТУРА	37