Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Сурыгин Е.Ф. Изотова О.А. Новикова Т.А. Чайкина

МАТЕМАТИКА

Элементарные функции и их графики

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Сурыгин   Е.Ф. Изотова   О.А. Новикова   Т.А. Чайкина

МАТЕМАТИКА

Элементарные функции и их графики

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
С

Сурыгин А.И., Изотова Е.Ф., Новикова О.А., Чайкина Т.А. **МАТЕМАТИКА. Элементарные функции и их графики: Учебное пособие** / Под ред. А.И. Сурыгина. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 115 с.

Учебное пособие соответствует содержанию федеральной дисциплины ЕН.Ф.1 Математика государственного образовательного стандарта по основным образовательным программам 032401.65 Реклама, 080500.62 Менеджмент, 080507.65 Менеджмент организации, 080801.65 Прикладная информатика (в дизайне).

Пособие содержит углублённое изложение разделов ГОС «Функциональная зависимость», «Графики основных элементарных функций» и дополняет действующие учебники математики для вузов, позволяя студентам повторить и углублённо изучить материал важной для формирования математической компетентности темы.

Предназначено для студентов первого курса, абитуриентов, обучающихся на подготовительных курсах, школьников старших классов, иностранных студентов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

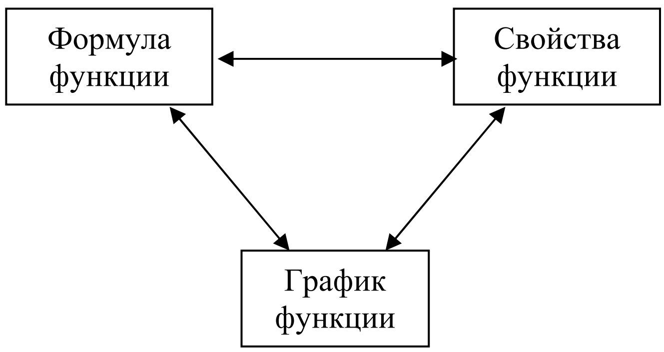
ISBN

Предисловие

Данное учебное пособие является дополнением к основным учебникам и учебным пособиям и адресовано преимущественно студентам, изучающим математику первый год; студентам, проходящим подготовку к обучению в вузе, школьникам старших классов, иностранным студентам.

В 10-11 классах школы и на первом курсе вуза наиболее остра необходимость систематизации полученных ранее математических знаний. Изучение элементарных функций, их свойств и графиков растянуто по времени, кроме того, у студентов и школьников слабо выражено понимание связи свойств этих функций и их графиков, результатов исследования функции и графика и т.д.

В связи с функцией рассматривают три взаимосвязанных понятия:



Связи между этими понятиями позволяют ставить и более или менее успешно решать шесть типов задач:

1) дано: формула найти: свойства;
2) дано: свойства найти: график;
3) дано: формула найти: график;
4) дано: график найти: свойства;
5) дано: график найти: формулу;
6) дано: свойства найти: формулу.

Первый раздел посвящён исследованию функции и построению её графика. В данном разделе встречаются задачи первого и второго типов. В заключение этого раздела приведён пример нахождения свойств функции по её графику (задача четвёртого типа). Такие задания не являются стандартными, однако их необходимо уметь выполнять для развития не только аналитических, но и синтетических свойств мышления.

Построить график функции по её формуле (задача 3) возможно только в редких случаях. Как правило, речь идёт об элементарных функциях или функциях, полученных из них с помощью элементарных преобразований. Задачи такого вида можно найти в разделах 2 и 3.

Наиболее трудными и вообще крайне редко решаемыми являются задачи пятого и шестого типов. В нашем пособии рассмотрены задачи на подбор уравнения функции по её графику и нескольким контрольным точкам. Именно с подобными задачами часто приходится сталкиваться в жизни и именно к этому студенты готовы менее всего.

При работе с пособием читатель может повторить свойства функций, систематизировать и углубить свои знания по этой важной теме, увидеть чёткие взаимосвязи между графическим изображением функции и её свойствами. У читателя есть возможность отработать свои навыки на заданиях для самоконтроля. Кроме того, пособие можно использовать как справочник по графикам и свойствам элементарных функций.

1. Функция и её свойства

1.1. Понятие функции

Определение функции

Функция – одно из основных понятий математики. Например, объём шара есть функция его радиуса ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$).

Другой пример: путь s, который проходит тело. В зависимости от решаемой задачи можно сказать, что путь s тела, движущегося со скоростью v, есть функция времени движения t ($s = vt$), а можно сказать, что путь s тела, движущегося с постоянной скоростью в течение времени t, есть функция скорости v.

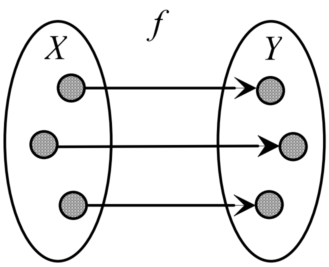
Определение. ***Функция*** *(вещественного аргумента) – это соответствие между элементами числовых множеств* $X \subset \mathbf{R}$[1] *и* $Y \subset \mathbf{R}$, *при котором каждому элементу* $x \in X$ *соответствует один и только один элемент* $y \in Y$.

Например, соответствие f (рис. 1а) – функция: каждому элементу $x \in X$ соответствует о д и н и т о л ь к о о д и н элемент $y \in Y$.

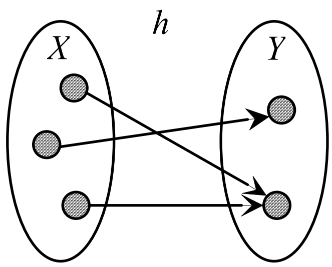
Соответствие h (рис. 1б) – функция: каждому элементу x множества X соответствует один и только один элемент y множества Y.

Соответствие g (рис. 2а) – н е функция: существует по крайней мере один элемент x, которому соответствуют д в а элемента y.

Соответствие G (рис. 2б) – н е функция: существует по крайней мере один элемент x, которому не соответствует н и о д н о г о элемента y.



а)

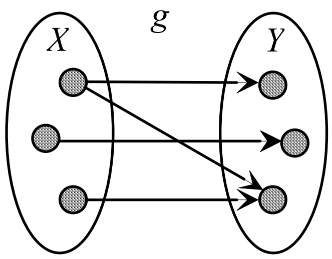


б)

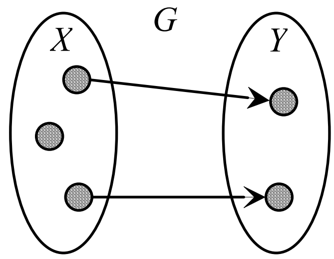
Рис. 1. Примеры соответствий, являющихся функциями

---

[1] $\mathbf{R}$ – общепринятое обозначение множества вещественных чисел.



а)



б)

Рис. 2. Примеры соответствий, не являющихся функциями

Правило соответствия между X и Y обозначают буквами f, g, h, … или F, G, H, … .
Функции записывают, например, $y = f(x)$, $y = h(x)$,

где x – это *независимая переменная* или *аргумент* функции;
y – это *зависимая переменная* или *функция*.
Множество $X \subset \mathbf{R}$ – это *область определения* функции.
Множество $Y \subset \mathbf{R}$ – это *множество значений* функции.

Запись $y = f(x)$ понимают:

- как обозначение функции f (закона соответствия f);
- как *значение y функции* $y = f(x)$ в точке x.

График функции

Функцию можно рассматривать как множество упорядоченных пар чисел (x, y). Любой паре чисел (x, y) соответствует точка с координатами (x, y) на координатной плоскости $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Следовательно, функцию можно представить как множество точек на координатной плоскости.

Определение. ***График функции*** $y = f(x)$ *– это множество всех точек на плоскости, координаты* (x, y) *которых удовлетворяют уравнению* $y = f(x)$.

Множества точек на координатной плоскости, соответствующие функциям, иногда (не обязательно всегда!) могут иметь вид *линии*. Например, линиями являются графики всех элементарных функций.

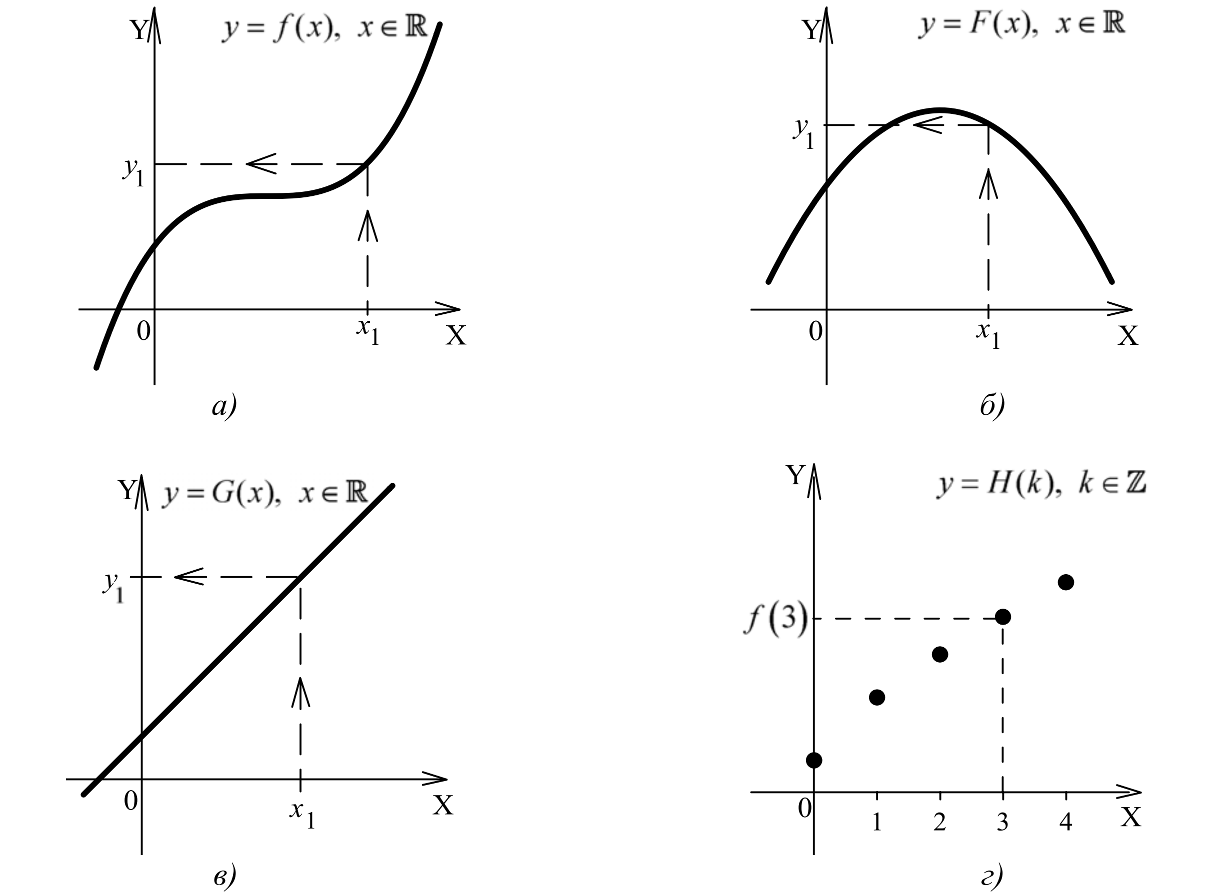


Рис. 3. Графики функций $y = f(x)$ (а), $y = F(x)$ (б), $y = G(x)$ (в), у которых аргументы x – вещественные числа ($x \in \mathbf{R}$) и график функции $y = H(k)$ (г), у которой аргумент k принимает целочисленные значения ($k \in \mathbf{Z}$).

Множества точек на рис. 3 – графики функций. Любая вертикальная прямая $x = x_1$ пересекает график функции не более одного раза. Следовательно, каждому $x \in X$ соответствует один и только один $y \in Y$.

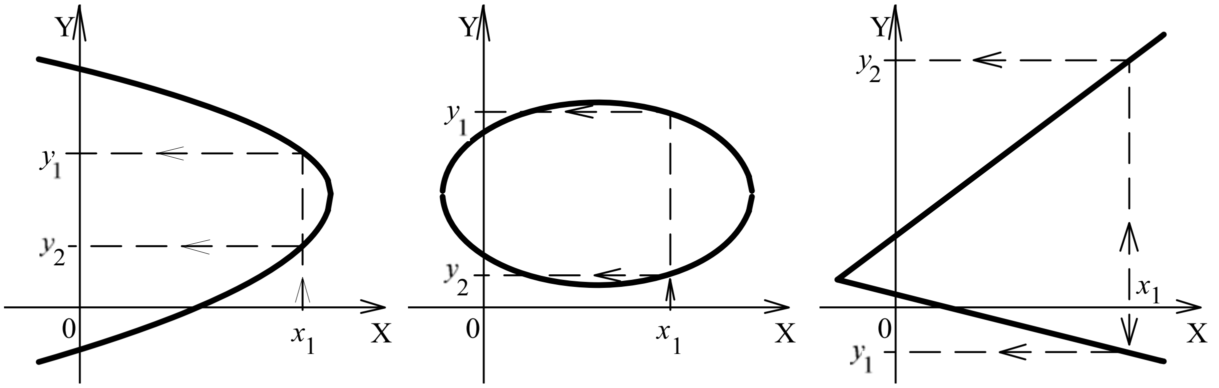


Рис. 4. Множества точек на координатной плоскости, которые не являются графиками функций

Не любому множеству точек на плоскости соответствует функция. Множества точек на рис. 4 – не функции. В каждом случае существует вертикальная прямая $x = x_1$, которая пересекает множество точек более одного раза. Это значит, что существуют такие $x \in X$, которым соответствует больше, чем один $y \in Y$. Такое соответствие между множествами X и Y – не функция, потому что не выполнено определение функции (для каждого x один и только один y!).

Способы задания функции

Функцию можно задать:

- таблицей;
- графиком;
- аналитически (уравнением).

Табличный способ.

Функцию можно задать таблицей.

Например:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	4	9	16	25

Из таблицы следует, что $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$, $f(5) = 25$.

Недостаток: нет данных о других значениях функции, например, $f(2{,}5)$.

Графический способ.

Функцию можно задать её графиком.

Например, функция $y = f(x)$ на рис. 5 определена на отрезке $[a,b]$ и принимает значения из отрезка $[c,d]$.

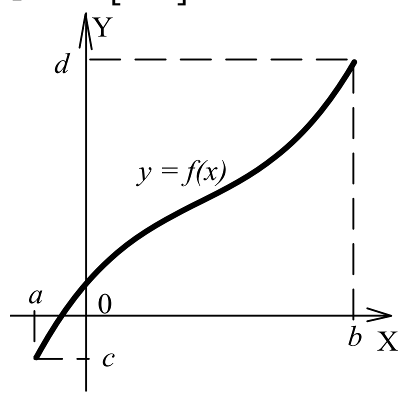


Рис. 5. Графический способ задания функции

Недостаток графического способа: нет точных данных о значениях функции (по графику координаты точек и, следовательно, значения функции можно определить только приближённо).

Аналитический способ

Функцию можно задать уравнением (аналитической формулой), которая связывает $x \in X$ и $y \in Y$.

Например:

а) $y = 2x + 3$, б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, в) $y = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$.

По формуле можно найти значение y по известному значению x. В этом случае формула – правило соответствия между элементами множеств X и Y.

Недостаток: далеко не всегда функциональную связь можно выразить формулой. Но даже если это возможно, не всегда уравнение, которым задана функциональная связь, может быть разрешено относительно y, как в приведённых выше примерах.

В последнем случае говорят о *функции, заданной неявно*.

Например: $x^2 - xy + \ln y = 2$ или $x + y + \sin xy = 0$.

Аналитический способ задания функции широко используют.

Можно доказать теорему.

Теорема. *Точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда её координаты при подстановке в уравнение $y = f(x)$, задающее функцию, обращают последнее в верное числовое равенство $y_0 = f(x_0)$.*

Обозначим $L[f(x)]$ – множество точек графика функции $y = f(x)$. Тогда

$$\left(M(x_0; y_0) \in L\left[y = f\left(x\right)\right]\right) \Leftrightarrow \left(y_0 = f(x_0)\right).$$

Сформулированная теорема эквивалентна двум теоремам:

1) *Если точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то её координаты при подстановке в уравнение $y = f(x)$, задающее функцию, обращают последнее в верное числовое равенство $y_0 = f(x_0)$:*

$$\left(M(x_0;y_0)\in L\left[y=f\left(x\right)\right]\right)\Rightarrow\left(y_0=f(x_0)\right);$$

2) *Если координаты точки* $M(x_0;y_0)$ *при подстановке в уравнение* $y=f(x)$, *задающее функцию, обращают последнее в верное числовое равенство* $y_0=f(x_0)$, *то точка* $M(x_0;y_0)$ *принадлежит графику функции* $y=f(x)$:

$$\left(M\left(x_0,y_0\right):y_0=f(x_0)\right)\Rightarrow\left(M(x_0;y_0)\in L\left[y=f\left(x\right)\right]\right).$$

Сложная функция

Пусть $y=f\left(u\right)$ – функция от переменной *u*, определенной на множестве *U* с множеством значений *Y*.

Пусть в свою очередь переменная $u=\varphi\left(x\right)$ – функция переменной *x*, определённой на множестве *X* с множеством значений *U*.

Тогда заданную на множестве *X* функцию $y=f\left[u\left(x\right)\right]$ называют *сложной* функцией (или *композицией* функций, *суперпозицией* функций, *функцией от функции).*

Например, $y=\cos\left(\ln x\right)$ – сложная функция, так как её можно представить в виде $y=\cos u$, где $u=\ln x$.

‘*Сложная функция*’ – одно из важнейших понятий математического анализа.

1.2. Свойства функции

Рассмотрим основные свойства функции:

- область определения;
- множество значений;
- корни;
- точка пересечения графика с осью *OY*;
- свойство чётности / нечётности;
- промежутки монотонности;
- экстремумы;
- асимптоты;
- периодичность.

Область определения функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Область определения*** $D(f)$ *функции* $y = f(x)$ *– это множество значений аргумента x, при которых существует конечное значение функции* $y = f(x)$ *.*

☹ **Пример 1.** Найти область определения функции $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

😐 *Решение*. Выражение $\dfrac{2x-1}{x-1}$ имеет конечные значения при любом $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = 1$. При $x = 1$ выражение $\dfrac{2x-1}{x-1}$ не определено (не имеет конечного значения), потому что не определено деление на 0. Следовательно, область определения функции $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ – $D(\frac{2x-1}{x-1}) = \mathbf{R} \setminus \{1\} = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ (рис. 6).

☺ Ответ. $D(\frac{2x-1}{x-1}) = \mathbf{R} \setminus \{1\} = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

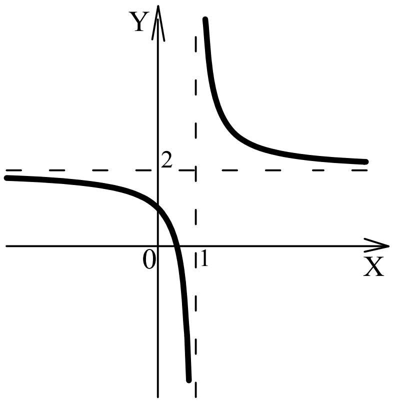


Рис. 6. График функции $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

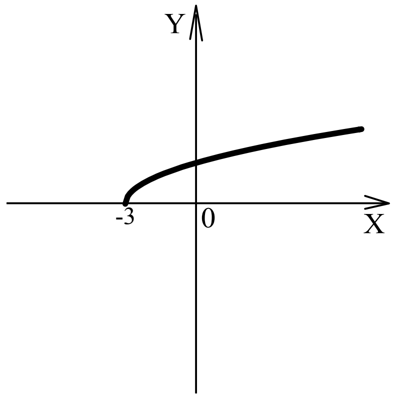


Рис. 7. График функции $y = \sqrt{x+3}$.

☹ **Пример 2.** Найти область определения функции $y = \sqrt{x+3}$.

😐 *Решение*. Выражение $\sqrt{x+3}$ имеет конечные значения при $x + 3 \geq 0$, т.е. при $x \geq -3$. При $x + 3 < 0$ $(x < -3)$ выражение $\sqrt{x+3}$ не определено (не имеет конечных значений), потому что не определён квадратный корень из отрицательных чисел. Следовательно, область определения функции $y=\sqrt{x+3}$ – $D(\sqrt{x+3})=\left[-3;+\infty\right)$ (рис. 7).

☺ <u>Ответ</u>. $D(\sqrt{x+3})=\left[-3;+\infty\right)$.

Множество значений функции

Определение. ***Множество значений*** $E(f)$ *функции* $y=f\left(x\right)$ *– это множество всех значений y, которые принимает функция* $y=f\left(x\right)$.

Найти множество значений функции методами элементарной математики удаётся далеко не всегда. В элементарной математике множество значений функции обычно определяют по её графику на завершающем этапе исследования функции.

Но иногда множество значений функции можно найти, если выразить *x* через *y* (т.е. найти обратную функцию или обратные функции[1)]) и учесть ограничения на величину *y*.

☹ **Пример 3.** Найти множество значений функции $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

😐 *<u>Решение</u>*. Используя заданное в условии выражение $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, выразим *x* через *y*:

$$y=\frac{2x-1}{x-1}\Rightarrow\ y\left(x-1\right)=2x-1\Leftrightarrow yx-y-2x=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yx-2x=y-1\Leftrightarrow\left(y-2\right)x=y-1\Rightarrow x=\frac{y-1}{y-2}\left(y\neq2\right).$$

Выражение $\dfrac{y-1}{y-2}$ определено, если $y\neq2$. При $y=2$ выражение $\dfrac{y-1}{y-2}$ не определено, так как не определено деление на 0. Следовательно, множество значений $E\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)=\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. Это хорошо видно на графике (рис. 6).

☺ <u>Ответ.</u> $E\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)=\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

---

1) Понятие обратной функции и операция отыскания обратной функции описаны в разделе «Обратная функция».

☹ **Пример 4.** Найти множество значений функции $y=\sqrt{x+3}$.

😐 *Решение*. Выразим *x* через *y*:

$$y=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=y^2, \\ y\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2-3, \\ y\geq 0. \end{cases}$$

В полученной системе величина *y* ограничена только неравенством $y\geq 0$. Это и есть множество значений функции $y=\sqrt{x+3}$. Множество значений видно на графике (рис. 7).

☺ Ответ. $E(\sqrt{x+3})=[0;+\infty)$.

☹ **Пример 5.** Найти множество значений функции $y=x^2$.

😐 *Решение*. Выразим *x* через *y*: $y=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y}$. Выражение $\sqrt{y}$ определено, если $y\geq 0$. При $y<0$ выражение $\sqrt{y}$ не определено, так как не определён квадратный корень из отрицательного числа. Следовательно, множество значений функции $y=x^2$ – $E\left(x^2\right)=[\,0;+\infty\,)$. Это можно увидеть на графике (рис. 8).

☺ Ответ. $E\left(x^2\right)=[\,0;+\infty\,)$.

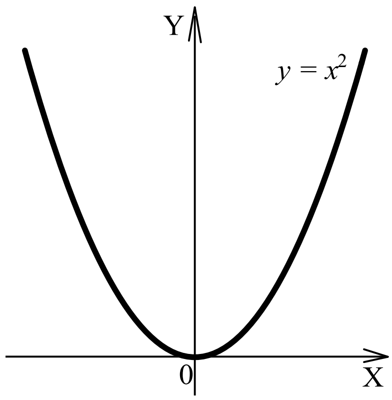


Рис. 8. График функции $y=x^2$

Корни функции

Определение. ***Корень функции*** $y=f\left(x\right)$ *– это значение аргумента* x *, при котором* $f\left(x\right)=0$.

Чтобы найти корни функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = 0$. Множество корней уравнения $f(x) = 0$ и является множеством корней функции $y = f(x)$.

☹ **Пример 6.** Найти корни функции $y = 2x + 3$.

😐 <u>*Решение*</u>. Решим уравнение $2x + 3 = 0$. Это уравнение имеет один корень $x = -3/2$. Следовательно, функция $y = 2x + 3$ имеет один корень $x = -3/2$. На графике функции корень – координата *x* точки пересечения графика функции с осью *OX* (рис. 9).

☺ <u>Ответ.</u> $\{-3/2\}$.

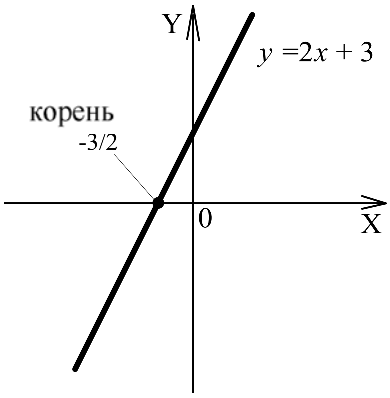


Рис. 9. График функции $y = 2x + 3$, *которая имеет 1 корень*

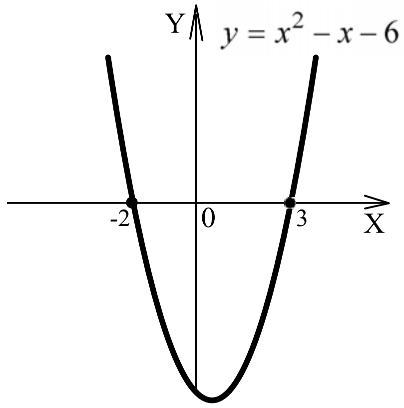


Рис. 10. График функции $y = x^2 - x - 6$, *которая имеет 2 корня*

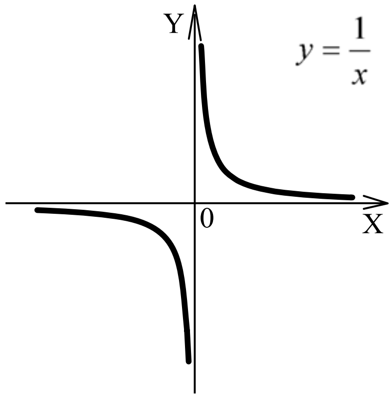


Рис. 11. График функции $y = \frac{1}{x}$, *которая не имеет корней*

☹ **Пример 7.** Найти корни функции $y = x^2 - x - 6$.

😐 <u>*Решение*</u>. Решим уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, и функция $y = x^2 - x - 6$ имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. График функции пересекает ось *OX* в точках с координатами $(-2,0)$ и $(3,0)$ (рис. 10).

☺ <u>Ответ.</u> $\{-2;3\}$.

☹ **Пример 8.** Найти корни функции $y = \dfrac{1}{x}$.

☹ *Решение*. Решим уравнение $\frac{1}{x}=0$. Это уравнение не имеет корней (множество корней $X=\varnothing$). Следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$ не имеет корней, а её график не пересекает ось OX (рис. 11).

☺ Ответ. $\varnothing$.

Итак, на графике корень функции есть x-координата (абсцисса) точки пересечения графика функции с осью OX. На рис. 12 изображён график функции, которая имеет три корня: x_1, x_2 и x_3: её график пересекает ось OX три раза (в точках $(x_1,0)$, $(x_2,0)$ и $(x_3,0)$). На рис. 13 изображён график функции, которая не имеет корней: её график не пересекает ось OX.

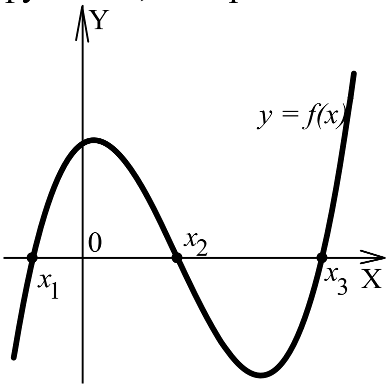


Рис. 12. График функции, которая имеет три корня

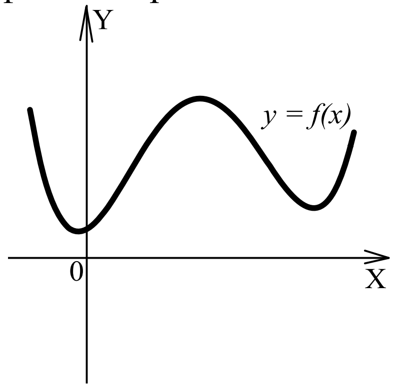


Рис. 13. График функции, которая не имеет корней

Точка пересечения графика с осью ординат

Точка пересечения графика функции с осью ординат OY лежит одновременно и на оси OY, и на графике (рис. 14). Это значит, что x-координата (абсцисса) этой точки всегда равна 0. Чтобы найти y-координату (ординату) точки пересечения графика с осью OY, нужно вычислить значение функции при $x=0$: $y\big|_{x=0}=f(0)$. Точка $P\big(0;f\big(0\big)\big)$ с координатами 0 и $f\big(0\big)$ есть точка пересечения графика функции с осью ординат OY.

График любой функции пересекает ось OY не более одного раза.

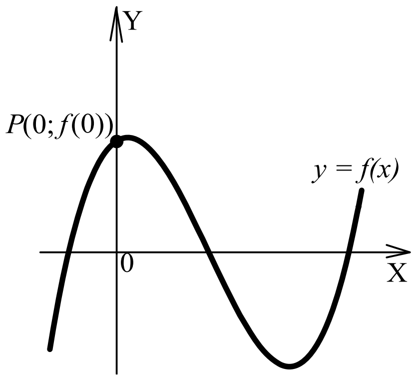


Рис.14. График функции $y = f(x)$*, пересекающий ось OY в точке* $P(0; f(0))$

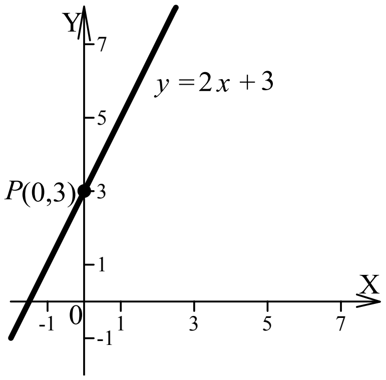


Рис.15. График функции $y = 2x + 3$ *пересекающий ось OY в точке* $P(0;3)$

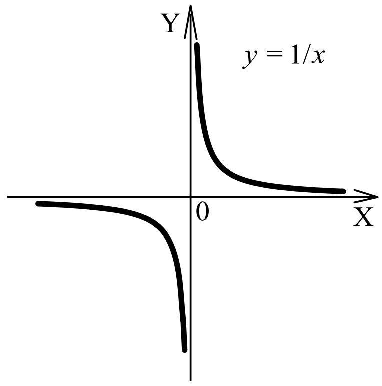


Рис. 16. График функции $y = 1/x$*, не пересекающий ось OY*

☹ **Пример 9.** Найти координаты точки пересечения графика функции $y = 2x + 3$ с осью OY.

😐 <u>*Решение*</u>. Вычислим значение функции $y = 2x + 3$ при $x = 0$: $y\big|_{x=0} = 2 \cdot 0 + 3 = 3$. Итак, $y = 3$ при $x = 0$. Этим координатам на графике соответствует точка P (0;3). Точка P (0;3) есть точка пересечения графика функции $y = 2x + 3$ с осью ординат (рис.15).

☺ <u>Ответ.</u> $(0;3)$.

☹ **Пример 10.** Найти координаты точки пересечения графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ с осью OY.

😐 <u>*Решение*</u>. Вычислим значение функции $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 0$: $y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{0} \Rightarrow$ функция не существует, так как деление на 0 не определено. Следовательно, функция $y = \dfrac{1}{x}$ не пересекает ось OY, что видно на графике функции (рис. 16).

☺ <u>Ответ.</u> График функции $y = \dfrac{1}{x}$ не пересекает ось OY.

Свойство чётности / нечётности

По свойству чётности / нечётности функция может быть:

- чётная;
- нечётная;
- общего вида.

Определение. ***Чётная функция*** *– это такая функция* $y = f\left(x\right)$*, что* $f(-x) = f(x)$ *для* $\forall x \in D(f)$.

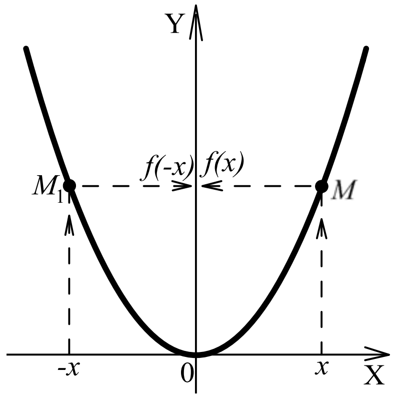
Подчеркнём, что данное определение содержит два утверждения:

1) для $\forall x \in D(f) \Rightarrow \left(-x\right) \in D(f)$;

2) для $\forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси OY (рис. 17).

Действительно, если точка $M(x, f\left(x\right))$ принадлежит графику функции, то точка $M_1(-x, f\left(x\right))$ также принадлежит этому графику, так как $f(-x) = f(x)$. Но точки M и M_1 симметричны относительно оси *OY*.



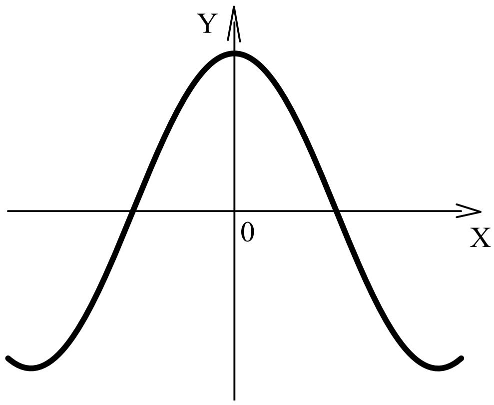


Рис. 17. Графики чётных функций симметричны относительно оси OY

Определение. ***Нечётная функция*** *– это такая функция* $y = f\left(x\right)$*, что* $f(-x) = -f(x)$ *для* $\forall x \in D(f)$.

Подчеркнём, что данное определение содержит два утверждения:

1) для $\forall x \in D(f) \Rightarrow \left(-x\right) \in D(f)$;

$$2) \text{ для } \forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (рис. 18).

Действительно, если точка $M(x, f(x))$ принадлежит графику функции, то точка $M_1(-x, -f(x))$ также принадлежит этому графику, так как $f(-x) = -f(x)$. Но точки M и M_1 симметричны относительно начала координат O.

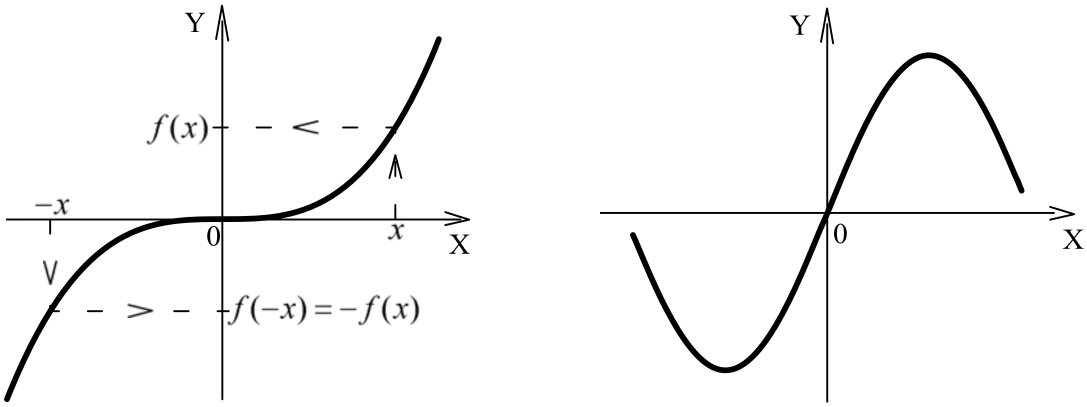


Рис. 18. Графики нечётных функций симметричны относительно начала координат O

Определение. ***Функция общего вида** – это функция, которая не является чётной или нечётной.*

Для того, чтобы доказать, что функция является функцией общего вида, нужно доказать по крайней мере одно из двух утверждений:

1) найдётся по крайней мере одно такое значение x из области определения функции $D(f)$, что значение $(-x)$ не принадлежит $D(f)$ $\left(\exists x \in D(f) : (-x) \notin D(f)\right)$;

2) найдётся по крайней мере одно такое значение x из области определения $D(f)$, что $f(-x) \neq \pm f(x)$ $\left(\exists x \in D(f) \Rightarrow f(-x) \neq \pm f(x)\right)$.

График функции общего вида
не симметричен относительно оси OY и
не симметричен относительно начала координат.

Графики функций общего вида представлены на рис. 19.

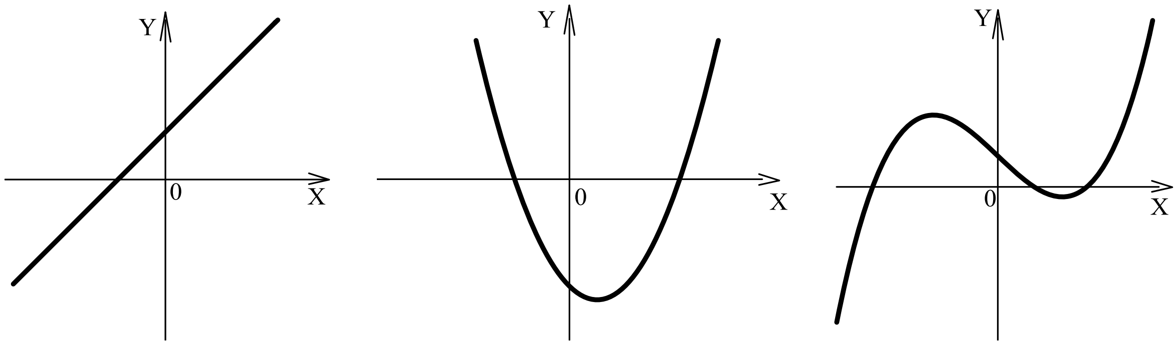


Рис. 19. Графики функций общего вида не имеют свойства симметрии относительно оси ординат или начала координат

☹ **Пример 11.** Определить чётность функции $y = x^2$ (рис. 20).

😐 <u>*Решение.*</u> 1) для $\forall x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$;

2) $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 .$$

Следовательно, $f(x) = f(-x)$ и функция $y = x^2$ чётная.

☺ <u>Ответ.</u> Функция $y = x^2$ чётная.

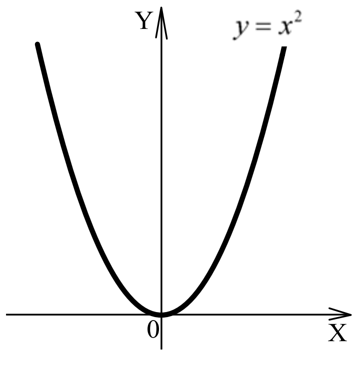


Рис. 20. График чётной функции $y = x^2$

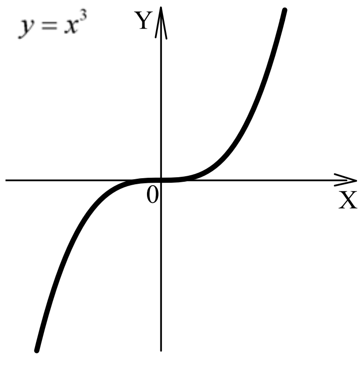


Рис. 21. График нечётной функции $y = x^3$

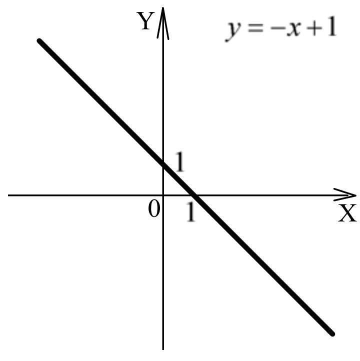


Рис. 22. График функции общего вида $y = -x + 1$

☹ **Пример 12.** Определить чётность функции $y = x^3$ (рис. 21).

😐 <u>*Решение.*</u> 1) для $\forall x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$;

2) $f(x) = x^3$;

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3.$$

Но $-x^3=-f(x)$. Следовательно, $f(-x)=-f(x)$ и функция $y=x^3$ нечётная.

☺ <u>Ответ.</u> Функция $y=x^3$ нечётная.

☹ **Пример 13.** Определить чётность функции $y=-x+1$ (рис. 22).

😐 *<u>Решение</u>.* 1) для $\forall x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$;

2) $f(x)=-x+1$;

$f(-x)=-(-x)+1=x+1 \neq -x+1=f(x) \Rightarrow \quad f(x)\neq f(-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция $y=-x+1$ не является чётной;

$f(-x)=-(-x)+1=x+1\neq -(-x+1)=x-1=-f(x) \Rightarrow f(-x)\neq -f(x)$

и функция $y=-x+1$ не является нечётной.

Следовательно, $f(x)\neq \pm f(-x)$ и функция $y=-x+1$ – общего вида.

☺ <u>Ответ.</u> Функция $y=-x+1$ общего вида.

☹ **Пример 14.** Определить чётность функции $y=\dfrac{x^3+x}{x+1}$ (рис. 23).

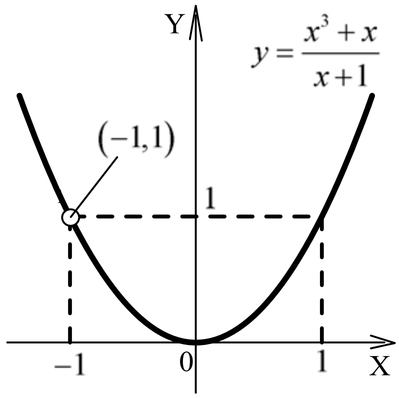


Рис. 23. График функции общего вида $y=\dfrac{x^3+x}{x+1}$, симметрия которого относительно оси ординат нарушена только «выколотой» точкой $(-1,1)$

😐 *<u>Решение</u>.* Формула, которой задана функция, допускает упрощение:

$$y=\frac{x^3+x}{x+1} \Leftrightarrow y=\frac{x^2(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x\neq -1. \end{cases}$$

График этой функции приведён на рис. 23 и очень похож на график чётной функции. Однако $y=\dfrac{x^3+x}{x+1}$ – функция общего вида. По графику видно, что он не обладает симметрией относительно оси ординат, хотя симметрия нарушена единственной «выколотой» точкой $(-1,1)$.

Это можно рассматривать как нарушение первого условия из определений свойств чётности / нечётности $\left(\forall x\in D(f)\ \Rightarrow (-x)\in D(f)\right)$:

$$\exists x=1\in D(f):\ (-x)=(-1)\notin D(f).$$

Вообще, если область определения функции несимметрична относительно 0, то функция является функцией общего вида.
«Выколотую» точку, нарушающую симметрию графика, можно рассматривать и как нарушение второго условия из определения свойства чётности / нечётности $\left(\forall x\in D(f)\ \Rightarrow\ f(-x)=f(x)\right)$:

$$\exists x=1\in D(f):\ f(-x)\neq \pm f(x)\ \left(f(-1)\neq \pm f(1)\right).$$

Следовательно, функция $y=\dfrac{x^3+x}{x+1}$ общего вида.

☺ <u>Ответ.</u> Функция $y=\dfrac{x^3+x}{x+1}$ общего вида.

Промежутки монотонности

Монотонностью называют свойство возрастания или убывания функции на некотором промежутке.

Определение. ***Возрастающая*** *на промежутке* (a,b) ***функция*** *– это такая функция* $y=f(x)$, *что для любых* $x_1,x_2\in(a,b)$ *из условия* $x_1<x_2$ *следует* $f(x_1)<f(x_2)$.

Определение. ***Убывающая*** *на промежутке* (a,b) ***функция*** *– это такая функция* $y=f(x)$, *что для любых* $x_1,x_2\in(a,b)$ *из условия* $x_1<x_2$ *следует* $f(x_1)>f(x_2)$.

Смысл этих определений понятен из рис. 24 и 25.

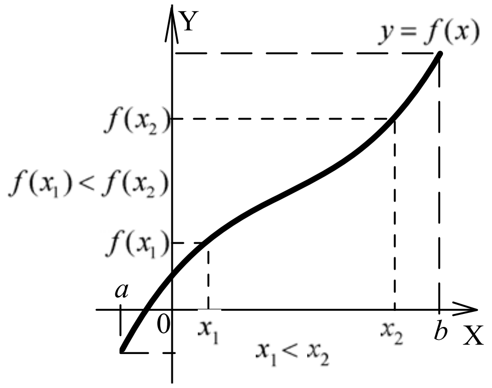


Рис. 24. График возрастающей функции

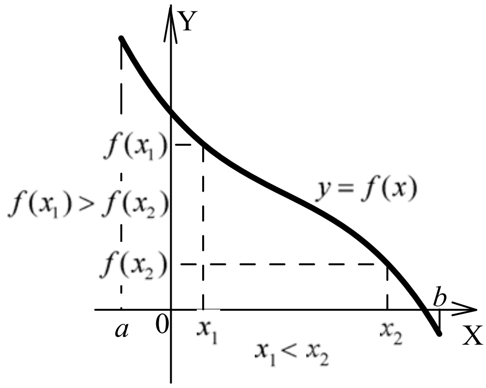


Рис. 25. График убывающей функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Функция, монотонная на промежутке*** *– это функция, которая возрастает (убывает) на всём данном промежутке.*

Промежутки монотонности функции – это промежутки возрастания и убывания функции. На рис. 24 и 25 изображены графики монотонных на промежутке (a,b) функций.

Свойство возрастания и / или убывания функции, например, на промежутке (a,b), символически обозначают следующим образом:

x	(a,b)
$f(x)$	$\nearrow$

x	(a,b)
$f(x)$	$\searrow$

Промежутки монотонности функций определяют на основании следующей теоремы.

Теорема (достаточное условие возрастания (убывания) функции). *Если для* $\forall x \in (a,b)$ *производная функции* $f'(x)$ *существует и* $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), *то функция* $y = f(x)$ *возрастает (убывает) на промежутке* (a,b).

Принимаем без доказательства.

В соответствии с этой теоремой для определения промежутков монотонности функции достаточно решить неравенство $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$).

☹ **Пример 15.** Определить промежутки монотонности функции $y=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ (рис. 26).

☺ <u>*Решение*</u>. Найдём производную:

$$y'=\frac{2}{3}\cdot 3x^2-2=2x^2-2=2\left(x^2-1\right)=2\left(x-1\right)\left(x+1\right).$$

Определим знак производной на каждом промежутке:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+1)$	$+1$	$(+1;+\infty)$
Знак y'	$+$	0	$-$	0	$+$
Характер изменения y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Согласно теореме, функция возрастает на тех промежутках, на которых её производная положительна $\left((-\infty,-1)\text{ и }(+1,+\infty)\right)$, и убывает на тех промежутках, на которых её производная отрицательна $\left((-1,+1)\right)$.

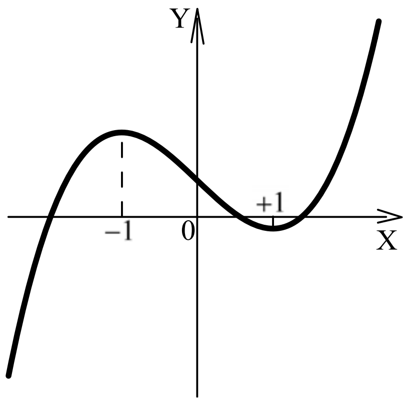


Рис. 26. График функции $y=\frac{2}{3}x^3-2x+1$

☺ <u>Ответ.</u> Функция $y=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ возрастает на промежутках $(-\infty,-1)$ и $(+1,+\infty)$, функция $y=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ убывает на промежутке $(-1,+1)$ (рис. 26).

Сформулируем ещё одну теорему, важную для определения обратной функции.

Теорема. *Если функция монотонна на промежутке (a,b), то каждое свое значение на этом промежутке она принимает один и только один раз.*

Принимаем без доказательства.

Экстремумы

Определение. ***Точка минимума функции*** *$y = f(x)$ – это такая точка x_0, для которой существует δ-окрестность, в которой для всех $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) > f(x_0)$.*

Значение функции $f(x_0)$ называют *минимумом функции*, а x_0 – *точкой минимума* (рис. 27).

Определение. ***Точка максимума функции*** *$y = f(x)$ – это такая точка x_0, для которой существует δ-окрестность, в которой для всех $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$.*

Значение функции $f(x_0)$ называют *максимумом функции*, а x_0 – *точкой максимума* (рис. 28).

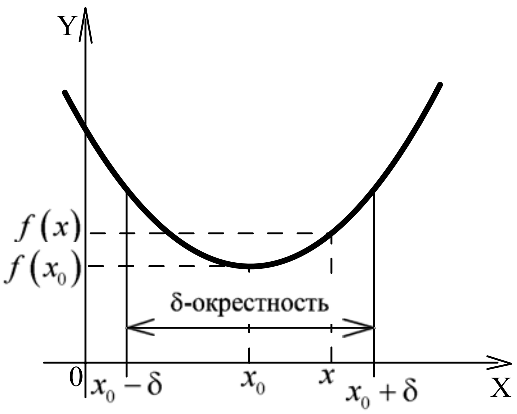


Рис.27. График функции, имеющей минимум в точке x_0

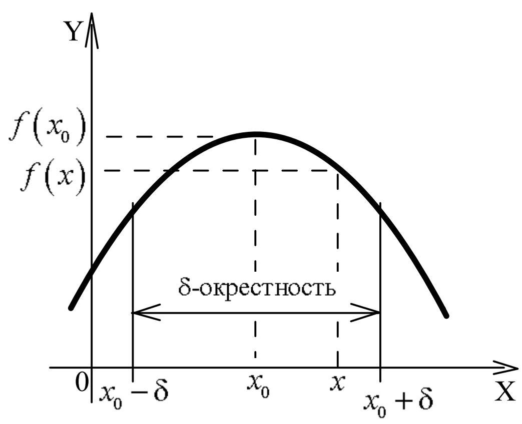


Рис.28. График функции, имеющей максимум в точке x_0

Точки минимума и максимума называют *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

Для отыскания точек, «подозрительных» на экстремум (*критических точек*), используют следующую теорему.

Теорема (необходимое условие существования экстремума функции). *Если функция имеет экстремум в точке* x_0, *то* $f'(x_0)=0$ *или* $f'(x_0)$ *не существует.*

Принимаем без доказательства.

Таким образом, критические точки – это точки, в которых $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Однако не все критические точки являются точками экстремума.

Это могут быть точки разрыва функции. Например, у функции $y=\frac{1}{x}$ производная $y'=-\frac{1}{x^2}$ не существует при $x=0$. Следовательно, $x=0$ – критическая точка. Но функция $y=\frac{1}{x}$ не может иметь экстремум в этой точке, так как $0\notin D(f)$ (0 не принадлежит области определения функции).

В критической точке может быть и точка перегиба. Например, у функции $y=x^3$ производная $y'=3x^2=0$ при $x=0$. Следовательно, $x=0$ – критическая точка. Но функция не имеет экстремума в этой точке (рис. 29). Это *точка перегиба*.

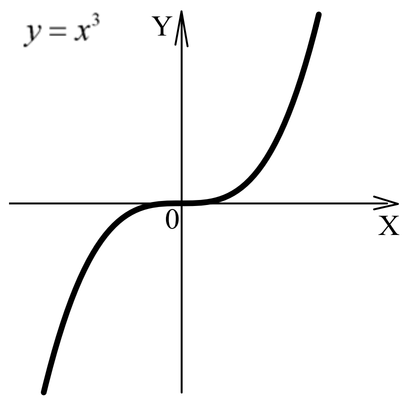


Рис.29. График функции, имеющей перегиб в точке $x_0=0$, *где* $y'=0$

Чтобы точно определить, является ли критическая точка точкой экстремума, используют следующую теорему.

Теорема (достаточное условие существования экстремума функции). *Если* x_0 *– критическая точка функции* $y = f(x)$ *и* $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$*, то функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *экстремум.*

Принимаем без доказательства.

Запись $f'(x_0 - 0) > 0$ означает, что производная $f'(x)$ вблизи точки x_0 слева от неё положительна.

Запись $f'(x_0 + 0) > 0$ означает, что производная $f'(x)$ вблизи точки x_0 справа от неё отрицательна.

Таким образом, запись $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$ означает, что при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак (по разные стороны от точки x_0 вблизи неё производная $f'(x)$ имеет разные знаки).

Если производная меняет знак с «+» на «–» ($f'(x_0 - 0) > 0$ и $f'(x_0 + 0) < 0$), то x_0 – точка максимума.

Если производная меняет знак с «–» на «+» ($f'(x_0 - 0) < 0$ и $f'(x_0 + 0) > 0$), то x_0 – точка минимума.

☹ **Пример 16.** Определить экстремумы функции $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ (рис. 30).

☺ *<u>Решение</u>.* Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Найдём критические точки:

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.;$$

$$\overline{\exists} y' \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Мы получили 3 критические точки: 0, 1, 2.

Определим знак производной на промежутках:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
Знак y'	+	0	–	$\overline{\exists}$	–	0	+
Характер изменения y	↗	0 max	↘	$\overline{\exists}$	↘	4 min	↗

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «–», следовательно, $x = 0$ – точка максимума; $f(0) = 0$ – локальный максимум функции при $x = 0$.
При переходе через точку $x = 1$ производная y' не меняет знак, следовательно, в точке $x = 1$ экстремума нет. (Так как в точке $x = 1$ функция не существует, это – точка разрыва.)
При переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, $x = 2$ – точка минимума; $f(2) = 4$ – локальный минимум функции при $x = 2$.

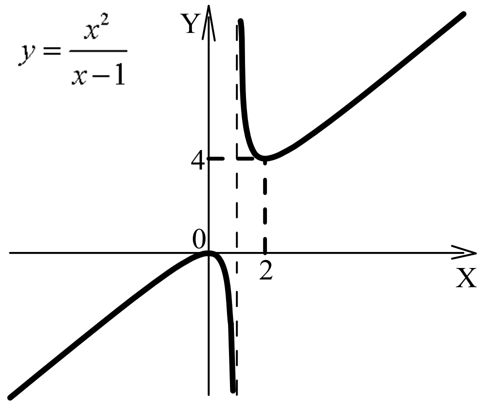


Рис. 30. График функции $y = \frac{x^2}{x-1}$

☺ Ответ. Функция $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ имеет локальный максимум $y = 0$ при $x = 0$ и локальный минимум $y = 4$ при $x = 2$ (рис. 30).

Асимптоты графика функции

Асимптоты рассматривают для тех функций, графики которых являются кривыми линиями; к графику линейной функции понятие *асимптоты* не применяют.

Асимптоты есть не у всех функций.

Определение. ***Асимптота графика функции*** $y = f(x)$ *– это прямая, к которой график функции* $y = f(x)$ *неограниченно приближается при неограниченном удалении от начала координат.*

Асимптота графика функции может быть:

- вертикальная (уравнение $x = a$);
- горизонтальная (уравнение $y = c$);
- наклонная (уравнение $y = kx + b$).

Вертикальные асимптоты. Найти точки, «подозрительные» на вертикальные асимптоты, помогает характер области определения функции $D(f)$: это точки разрыва области определения («выколотые» точки) или её границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вертикальная асимптота графика функции*** $y = f(x)$ *– это такая прямая* $x = a$*, в окрестности которой значения функции стремятся к бесконечности.*

Если в окрестности некоторой точки $x = a$ значения функции стремятся к бесконечности (т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ хотя бы слева или справа от точки $x = a$), то $x = a$ и есть уравнение вертикальной асимптоты.

☹ **Пример 17.** Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{1}{x+2}$ (рис. 31).

☺ <u>*Решение*</u>. Функция $y = \dfrac{1}{x+2}$ не определена в точке $x = -2$. В окрестности точки $x = -2$ значения функции $\dfrac{1}{x+2} \to \pm\infty$.

Действительно, пусть $x = -2 + (+0)$, где $(+0)$ – некоторое очень малое (бесконечно малое) положительное число. Тогда

$$\lim_{x \to -2+(+0)} \frac{1}{x+2} = \left\{ \frac{1}{-2+(+0)+2} \right\} = \left\{ \frac{1}{+0} \right\} = +\infty .$$

Пусть теперь $x = -2 + (-0)$, где (-0) – бесконечно малое отрицательное число. Тогда

$$\lim_{x \to -2+(-0)} \frac{1}{x+2} = \left\{ \frac{1}{-2+(-0)+2} \right\} = \left\{ \frac{1}{-0} \right\} = -\infty .$$

Таким образом, $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty \end{array} \right.$.

Следовательно, $x=-2$ – уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y=\frac{1}{x+2}$. Других вертикальных асимптот нет, так как $x=-2$ – единственная точка, не принадлежащая $D(f)$.

☺ Ответ. График функции $y=\frac{1}{x+2}$ имеет одну вертикальную асимптоту $x=-2$ (рис. 31).

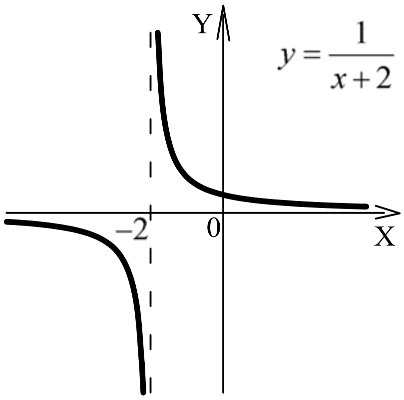


Рис. 31.

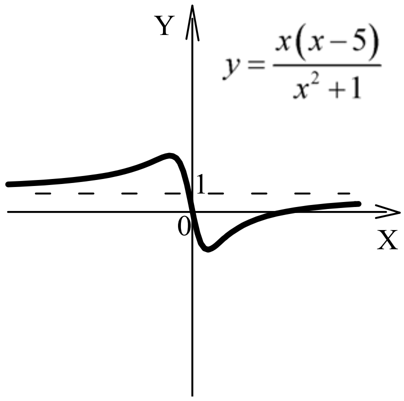


Рис. 32.

Горизонтальные асимптоты находят из условия $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$ (или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ – правосторонняя асимптота, или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ – левосторонняя асимптота).

Уравнением горизонтальной асимптоты является $y=c$.

В приведённом выше примере функция $y=\frac{1}{x+2}$ имеет и горизонтальную асимптоту $y=0$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\left\{\frac{1}{+\infty}\right\}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=\left\{\frac{1}{-\infty}\right\}=0$.

☹ **Пример 18.** Найти горизонтальные асимптоты графика функции $y=\frac{x(x-5)}{x^2+1}$ (рис. 32).

😐 *Решение*. Вычислим предел функции при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-5)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Значение предела не зависит от знака $\pm\infty$: левосторонняя и правосторонняя асимптоты совпадают. Следовательно, график функции $y=\frac{x(x-5)}{x^2+1}$ имеет одну горизонтальную асимптоту $y=1$.

☺ <u>Ответ.</u> График функции $y=\frac{x(x-5)}{x^2+1}$ имеет одну горизонтальную асимптоту $y=1$ (рис. 32).

Уравнением **наклонной асимптоты** является уравнение прямой

$$y=kx+b.$$

Его коэффициенты находят из условий:

1) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ($k\in\mathbf{R}$, $k\neq 0$, $k\neq\infty$ (k – конечное число))

($k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ или $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ для правосторонней или левосторонней асимптот соответственно);

2) $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$ ($b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$ или $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]$ для правосторонней или левосторонней асимптот соответственно).

!	**В одном направлении** ($x\to-\infty$ или $x\to+\infty$) у функции может быть **не более одной** асимптоты: или наклонная, или горизонтальная.	!

На рис. 33 показан график, имеющий 2 наклонных асимптоты. Но это график не-функции, так как существуют значения независимой переменной *x*, которым соответствуют более одного значения зависимой переменной *y* (на рис. 33 – y_1 и y_2).

☹ **Пример 19.** Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^2}{3x+1}$ (рис. 34).

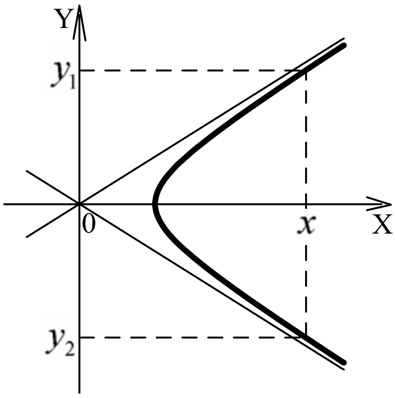


Рис. 33. Пример графика н е - ф у н к ц и и с двумя наклонными асимптотами в одном направлении. Для графика ф у н к - ц и и такая ситуация ***невозможна***

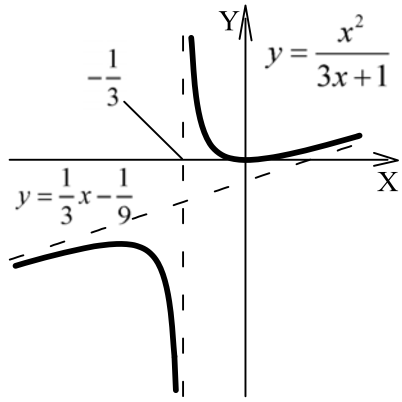


Рис. 34. График функции $y = \dfrac{x^2}{3x+1}$ *с вертикальной асимптотой* $x = -\dfrac{1}{3}$ *и наклонной асимптотой* $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}$

☹ <u>*Решение*</u>. 1. Вертикальные асимптоты.

График функции $y = \dfrac{x^2}{3x+1}$ имеет разрыв (функция не существует) при $x = -\dfrac{1}{3}$ $\left(D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1/3\}\right)$.

Вычислим предел функции при $x = -\dfrac{1}{3}$, положив $x = -\dfrac{1}{3} + (+0)$ и / или $x = -\dfrac{1}{3} + (-0)$, где через $(+0)$ и (-0) обозначены соответственно положительная и отрицательная бесконечно малые величины:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}+0} \frac{x^2}{3x+1} = \left\{ \frac{(-1/3+0)^2}{3(-1/3+0)+1} \right\} = \left\{ \frac{(-1/3)^2}{3(-1/3)+3\cdot(+0)+1} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{(-1/3)^2}{-1+3\cdot(+0)+1} \right\} = \left\{ \frac{1/9}{3\cdot(+0)} \right\} = \left\{ \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{(+0)} \right\} = \left\{ \frac{1}{27} \cdot (+\infty) \right\} = +\infty\,;$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}-0} \frac{x^2}{3x+1} = \left\{ \frac{(-1/3-0)^2}{3(-1/3-0)+1} \right\} = \left\{ \frac{(-1/3)^2}{3(-1/3)+3\cdot(-0)+1} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{(-1/3)^2}{-1+3\cdot(-0)+1} \right\} = \left\{ \frac{1/9}{3\cdot(-0)} \right\} = \left\{ \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{(-0)} \right\} = \left\{ \frac{1}{27} \cdot (-\infty) \right\} = -\infty\,.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}+0} \dfrac{x^2}{3x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}-0} \dfrac{x^2}{3x+1} = -\infty \end{array}\right. .$$

Это означает, что $x = -\dfrac{1}{3}$ – вертикальная асимптота графика функции $y = \dfrac{x^2}{3x+1}$. Других вертикальных асимптот нет, так как $x = -\dfrac{1}{3}$ – единственная точка, не принадлежащая $D(f)$.

2. Чтобы определить наличие горизонтальных асимптот, вычислим предел функции $y = \dfrac{x^2}{3x+1}$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \pm\infty .$$

В этом случае отсутствие конечного предела означает, что горизонтальных асимптот у данной функции нет.

3. Найдём наклонные асимптоты. Для этого вычислим параметры k и b в уравнении наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{3x+1} \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3x\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3};$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{3x+1} - \frac{1}{3}x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{3x^2 - (3x+1)x}{3(3x+1)} \right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{3x^2 - 3x^2 - x}{3(3x+1)} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{3x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{3\left(3+\dfrac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{3\cdot 3} = -\frac{1}{9}.$$

В обоих случаях существуют конечные пределы. Это означает, что график функции $y=\dfrac{x^2}{3x+1}$ имеет одну наклонную асимптоту, уравнение которой $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}$.

☺ <u>Ответ.</u> График функции $y=\dfrac{x^2}{3x+1}$ имеет одну вертикальную асимптоту $x=-\dfrac{1}{3}$ и одну наклонную асимптоту $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}$ (рис. 34).

Периодичность

> ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Периодическая функция*** $y=f\left(x\right)$ *– это функция, для которой существует число* $T\in\mathbf{R}$, $T\neq 0$ *такое, что при всех значениях* $x\in D\left(f\right)$: $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$.

Периодом функции называют н а и м е н ь ш и й положительный период T.

Действительно, $\sin x=\sin(x+4\pi)=\sin(x+6\pi)$ и т.д., однако наименьшим будет число 2π, которое и называют периодом функции $y=\sin x$.

Из элементарных функций периодическими являются тригонометрические функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ (период 2π), $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ (период π). Остальные элементарные функции свойством периодичности не обладают.

1.3. Исследование функций

Исследовать функцию означает определить её свойства. Следовательно, чтобы исследовать функцию $y=f\left(x\right)$, нужно определить:

1) область определения функции $D(f)$;
2) множество значений $E(f)$;
3) корни функции $f(x)=0$;
4) точку пересечения графика функции с осью OY $y_0=f(0)$;

5) четность и нечетность функции;
6) промежутки монотонности функции и её экстремумы;
7) асимптоты графика функции;
8) период функции (если есть основания полагать, что функция периодическая).

Используя перечисленные выше свойства функции, можно построить график функции.

Рассмотрим пример полного исследования функции и построения её графика.

☹ **Пример 20.** Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ и построить её график.

😐 <u>*Решение*</u>. Исследуем функцию по вышеприведённому плану.

1. Область определения. Функция не существует при $x=-1$. Следовательно, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}\Rightarrow D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

2. Множество значений. Выразим x через y: $y=\dfrac{x^2}{x+1}\Rightarrow$ $x^2-yx-y=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2+4y}}{2}$. Ограничения на y: $y^2+4y\geq 0$.

Решим это неравенство:

$$y^2+4y\geq 0\Rightarrow y(y+4)\geq 0.$$

Используем метод интервалов. Точки $y=-4$ и $y=0$ разбивают числовую прямую y на 3 интервала знакопостоянства (рис. 35).

Следовательно, решение неравенства

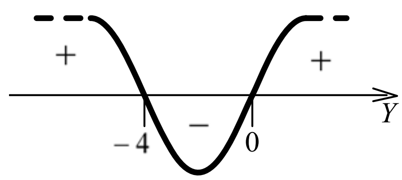


Рис. 35. Интервалы знакопостоянства выражения y^2+4y

$\left[\begin{array}{l} y\leq -4 \\ y\geq\ 0 \end{array}\right.$ или $y\in(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$ и множество значений функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

$$E(f)=(-\infty;-4]\cup[0;+\infty).$$

3. Корни. Решим уравнение $y=\dfrac{x^2}{x+1}=0$. Получим $x=0$ – один корень.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*. Вычислим $y|_{x=0}=\dfrac{0^2}{0+1}=0 \quad \Rightarrow P(0;0)$.

5. Свойство чётности.

Область определения функции $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ несимметрична относительно оси ординат и относительно начала координат, следовательно, и график функции не может обладать симметрией, свойственной чётным и нечётным функциям.

Таким образом, $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ – функция общего вида.

6. Промежутки монотонности. Монотонность определяем на основе теоремы по знаку производной функции. Вычислим производную функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ и определим её знак:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x+1}\right)'=\frac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2};$$

$$y'=0\Rightarrow \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\ \ 0 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

В точке $x=-1$ производная не существует.

Для определения интервалов знакопостоянства производной применим метод интервалов (рис. 36).

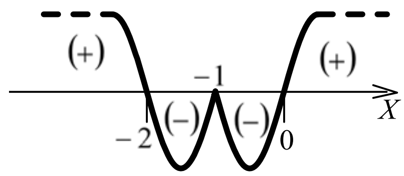


Рис. 36. Интервалы знакопостоянства выражения $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Производная положительна на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-2;-1)$ и $(-1;0)$. Следовательно, функция $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

в о з р а с т а е т на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$;

убывает на интервалах $(-2;-1)$ и $(-1;0)$ (см. табл.).

Интервал изменения переменной x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
Знак y'	«+»		«–»	$\nexists$	«–»	0	«+»
Характер изменения y	$\nearrow$	-4 max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

7. Асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Функция $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ не определена при $x=-1$ $\left(D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}\right)$. Следовательно, через точку $x=-1$ может проходить вертикальная асимптота. Проверим это.

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2}{x+1}=\left\{\frac{(-1-0)^2}{-1-0+1}\right\}=\left\{\frac{(-1)^2}{-0}\right\}=\left\{\frac{1}{-0}\right\}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{x+1}=\left\{\frac{(-1+0)^2}{-1+0+1}\right\}=\left\{\frac{(-1)^2}{+0}\right\}=\left\{\frac{1}{+0}\right\}=+\infty.$$

Следовательно, $x=-1$ – вертикальная асимптота. Других вертикальных асимптот нет, так как $x=-1$ – единственная точка, не принадлежащая $D(f)$.

Горизонтальные асимптоты. Вычислим предел функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty.$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет и могут быть наклонные асимптоты.

Наклонные асимптоты. Вычислим параметры k и b в уравнении наклонной асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-(x+1)x}{x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-x^2-x}{x+1}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x}=-1.$$

В обоих случаях существуют конечные пределы, которые не зависят от знака $\pm\infty$. Это означает, что график функции $y=\frac{x^2}{x+1}$ имеет одну наклонную асимптоту $y=x-1$.

8. Периодичность. Так как функция не тригонометрическая, свойство периодичности не рассматриваем.

По результатам исследования функции можно построить её график (рис. 37).

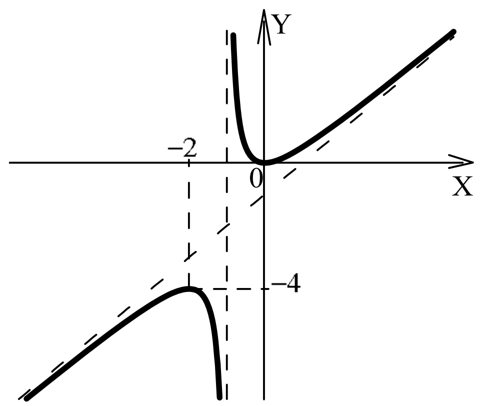


Рис. 37. График функции $y=\frac{x^2}{x+1}$

☺ <u>Ответ.</u> График функции $y=\frac{x^2}{x+1}$ изображён на рис. 37.

Несмотря на то, что наиболее часто в математике приходится решать задачи на исследование функции по её уравнению и на построение графика функции по её свойствам, не менее важным является умение определять свойства функции по её графику.

☹ **Пример 21.** Определить свойства функции по её графику (рис. 38).

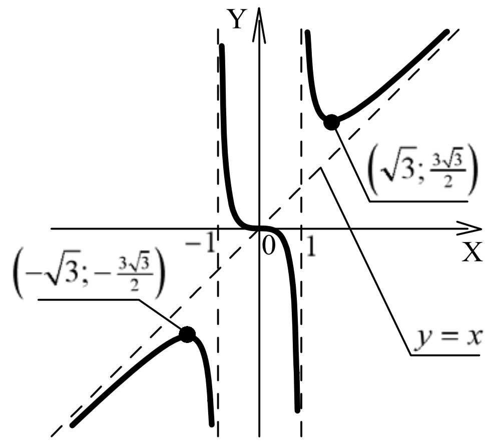


Рис. 38. График функции к примеру 21

☺ _Решение_. Исследуем свойства функции по её графику по обычной схеме.

1. Область определения. Так как для любого $x \neq \pm 1$ можно найти соответствующий $y = f(x)$, а для $x = \pm 1$ такой y найти нельзя, то $D(f) = R \setminus \{\pm 1\}$.

2. Множество значений. Для любого значения y можно найти хотя бы один соответствующий ему x. Следовательно $E(f) = R$.

3. Корни. График пересекает ось OX в одной точке $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ – корень функции.

4. Точка P пересечения графика с осью *OY*. График пересекает ось OY в одной точке $y = 0$. Следовательно, P(0;0).

5. Свойство чётности/ нечётности. График данной функции симметричен относительно начала координат, следовательно, функция нечётная.

6. Промежутки монотонности, экстремумы. По графику видно, что функция $y = f(x)$ возрастает на интервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ и убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$.

Экстремумы функции: $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ – максимум, $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ – минимум.

Кроме того, по графику мы можем сделать некоторые выводы относительно производной этой функции:

$x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right) \Rightarrow f(x)$ возрастает $\Rightarrow f'(x) > 0$;
$x \in \left(-\sqrt{3};-1\right) \cup \left(-1;0\right) \cup \left(0;1\right) \cup \left(1;+\infty\right) \Rightarrow f(x)$ убывает $\Rightarrow f'(x) < 0$.

В точке $x = 0$ функция имеет перегиб, в точках $x = \pm\sqrt{3}$ функция имеет экстремумы. В этих точках предположительно $f'(x) = 0$ (точно по графику этого утверждать нельзя).

В точках $x = \pm 1$ функция не определена (имеет разрыв), а в окрестностях этих точек стремится к $\pm\infty$. В этих точках $f'(x)$ не существует.

7. Асимптоты. График данной функции не пересекает две вертикальные прямые $x = \pm 1$ и неограниченно к ним приближается. Эти прямые являются вертикальными асимптотами, причём:

справа от точки $x = +1$ $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = +\infty$;

слева от точки $x = +1$ $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$;

справа от точки $x = -1$ $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = +\infty$;

слева от точки $x = -1$ $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$.

Горизонтальных асимптот данная функция не имеет, однако у неё есть наклонная асимптота $y = x$.

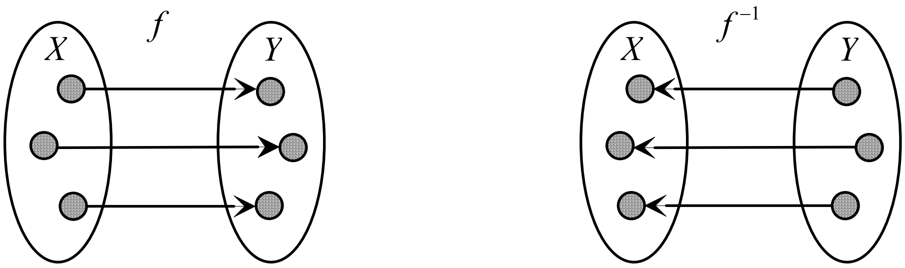
Исследование свойств функции по её аналитической формуле мы обычно завершаем построением графика. В этом примере тоже хотелось бы по свойствам функции, определённым на основании графика, найти аналитическую формулу функции. Такая задача, однако, в подавляющем большинстве случаев не имеет решения, тем более если ограничиваться только элементарными функциями. Но даже если решение есть, его построение – искусство, требующее глубоких знаний, опыта, интуиции. Первая задача – задача анализа. Вторая задача – задача синтеза. Из сказанного следует, что задачи синтеза многократно сложнее задач анализа.

☺ Ответ. Ответ на задание содержится в тексте решения.

1.4. Обратная функция и её свойства

Определение обратной функции

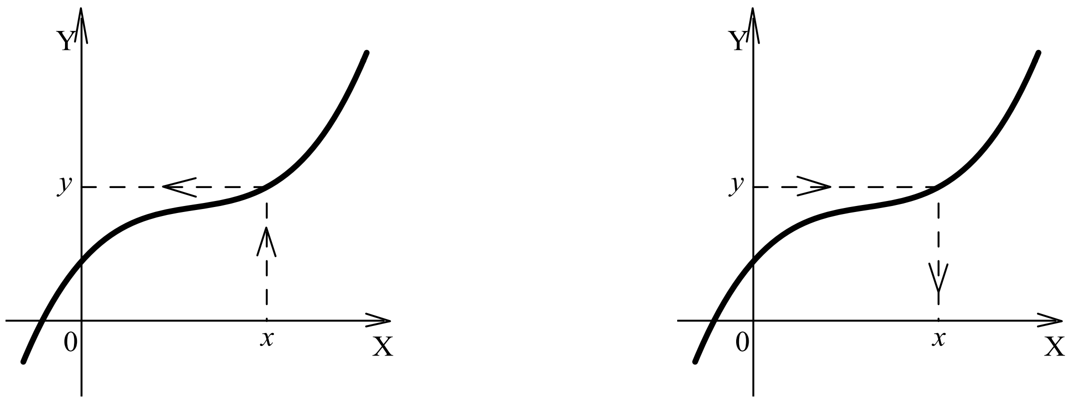
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ (рис. 39а). Каждому $x \in X$ соответствует один и только один $y \in Y$. Но и каждому $y \in Y$ соответствует один и только один $x \in X$. Поэтому можно говорить о функции $x = f^{-1}(y)$ (рис. 39б).



а) б)

Рис. 39. Функции $y = f(x)$ (а) и $x = f^{-1}(y)$ (б)

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 40а). Здесь также каждому $x \in X$ соответствует один и только один $y \in Y$. И каждому $y \in Y$ соответствует один и только один $x \in X$ (рис. 40б). Поэтому существует функция $x = f^{-1}(y)$.



а) *б)*

Рис. 40. Графики функций $y = f(x)$ (а) и $x = f^{-1}(y)$ (б)

Подставим $y = f(x)$ в $x = f^{-1}(y)$. Получим:

$$x = f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \text{ для } \forall x \in D\left(f\right).$$

Подставим $x = f^{-1}\left(y\right)$ в $y = f\left(x\right)$. Получим:

$$y = f\left(f^{-1}\left(y\right)\right) \text{ для } \forall y \in E\left(f\right).$$

Мы получили две важные формулы:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \text{ для } \forall x \in D\left(f\right); \\ y &= f\left(f^{-1}\left(y\right)\right) \text{ для } \forall y \in E\left(f\right). \end{aligned}}$$

Обычно функцию f^{-1} записывают в виде $y = f^{-1}\left(x\right)$. Для этого в формуле $x = f^{-1}\left(y\right)$ делают замены $x \leftrightarrow y$.

Определение. ***Обратная функция*** *(к $y = f\left(x\right)$) – это такая функция $y = f^{-1}\left(x\right)$, что $x = f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)$ для $\forall x \in D\left(f\right)$ и / или $y = f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)$ для $\forall y \in E\left(f\right)$.*

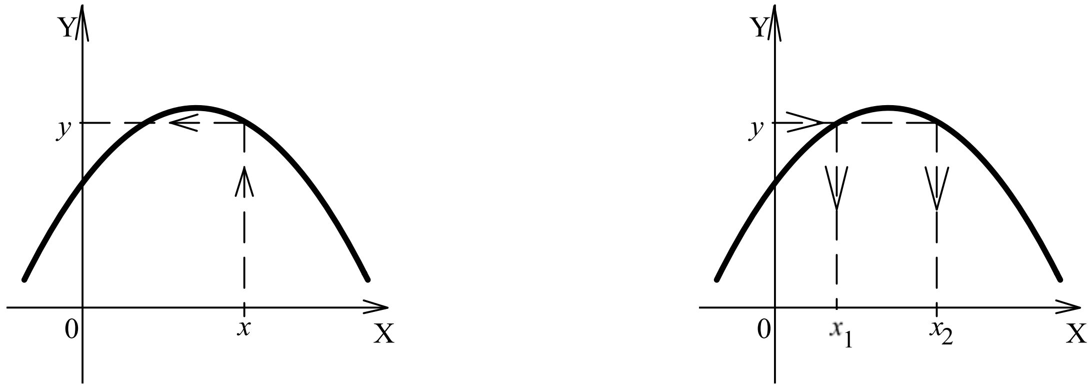
Функции $y = f\left(x\right)$ и $y = f^{-1}\left(x\right)$ называют *взаимно обратными функциями*.

Функция $y = f^{-1}\left(x\right)$ – *обратная функция к* $y = f\left(x\right)$. Функция $y = f\left(x\right)$ – *обратная функция к* $y = f^{-1}\left(x\right)$.

Не любая функция имеет обратную. Например, соответствие h на рис. 41а – функция $y = h\left(x\right)$. Но обратное соответствие (рис. 41б) – не функция, потому что одному $y_1 \in Y$ соответствуют два различных $x_1, x_2 \in X$. Следовательно, функция $y = h\left(x\right)$ не имеет обратной функции.

Рис. 41. Соответствие h, которое является функцией $y = h\left(x\right)$ (а), и обратное соответствие (б), которое функцией не является

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 42а). И здесь каждому $x \in X$ соответствует один и только один $y \in Y$. Но существуют $y \in Y$, которым соответствует более одного $x \in X$ (рис. 42б). Поэтому обратная функция не существует.



а) *б*)

Рис. 42. График функции, которая не имеет обратной функции: каждому $x \in D$ соответствует один и только один $y \in E$ (а), но можно найти $y \in E$, которому соответствует более одного (два) $x \in D$ (б)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Обратимая функция*** *– это функция, которая имеет обратную функцию.*

Если функция монотонна на промежутке, то каждое свое значение она принимает один и только один раз. Следовательно, на этом промежутке функция является *обратимой*.

Можно сформулировать и доказать теорему.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ монотонна на промежутке, то она обратима на этом промежутке.*

Принимаем без доказательства.

Если функция возрастает, то обратная функция также возрастает.

Если функция убывает, то обратная функция также убывает.

Отыскание обратной функции

Если обратимая функция задана аналитически $y=f(x)$, то можно получить формулу обратной функции $y=f^{-1}(x)$. Для этого нужно:

- выразить переменную x из равенства $y=f(x)$:

$$y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y);$$

- изменить обозначение переменных по правилу $x \leftrightarrow y$:

$$x=f^{-1}(y) \Rightarrow y=f^{-1}(x).$$

Полученная формула $y=f^{-1}(x)$ – формула обратной функции к функции $y=f(x)$.

☹ **Пример 22.** Найти обратную функцию к функции $y=2x+3$.

😐 *Решение*. а) В формуле $y=2x+3$ выразим x через y:

$$y=2x+3 \Rightarrow \quad x=\frac{y-3}{2}.$$

б) В формуле $x=\frac{y-3}{2}$ изменим обозначения переменных по правилу $x \leftrightarrow y$. Получим функцию, обратную к $y=2x+3$:

$$y=\frac{x-3}{2}.$$

☺ Ответ: $y=\frac{x-3}{2}$.

Функции $y=2x+3$ и $y=\frac{x-3}{2}$ – обратные функции. Функция $y=\frac{x-3}{2}$ – обратная функция к $y=2x+3$. А функция $y=2x+3$ – обратная функция к $y=\frac{x-3}{2}$.

График обратной функции

Графики функции $y=f(x)$ и функции $x=f^{-1}(y)$ показаны на рис. 40а и 40б. Эти графики одинаковые.

Действительно, график функции $y=f(x)$ – множество всех точек на координатной плоскости с координатами $(x,y)=(x,f(x))$. График функции $x=f^{-1}(y)$ – то же самое множество точек $(x,y)=(f^{-1}(y),y)=(x,f(x))$, потому что $f^{-1}(y)=x$ и $y=f(x)$. Однако при изменении обозначений переменных $x\leftrightarrow y$ и переходе к формуле $y=f^{-1}(x)$ необходимо произвести замену переменных и в координатах точек графика: $(f^{-1}(y),y)=(f^{-1}(x),x)=(y,x)$. Тогда графики обратных функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ будут различными.

Следовательно, координаты точек графика обратной функции $y=f^{-1}(x)$ можно найти, если по правилу $x\leftrightarrow y$ заменить координаты точек графика функции $y=f(x)$.

Координаты точек графика $y=f(x)$	Координаты точек графика $y=f^{-1}(x)$
$(x,y)=(x,f(x))$	$(y,x)=(f(x),x)$

Рассмотрим функцию f, заданную множеством упорядоченных пар чисел:

$$\{(1,0),\ (3,1)\}.$$

Тогда обратная функция f^{-1} есть множество упорядоченных пар:

$$\{(0,1),\ (1,3)\}.$$

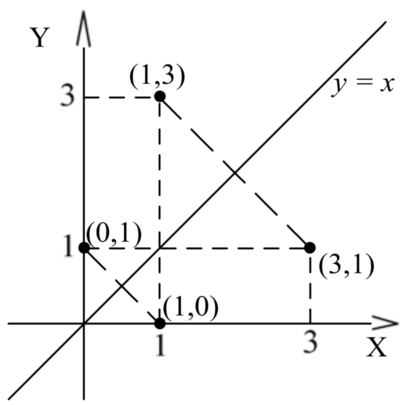


Рис. 43. Графики функции f $\{(1,0),\ (3,1)\}$ *и функции* f^{-1} $\{(0,1),\ (1,3)\}$:
симметрия относительно прямой $y=x$

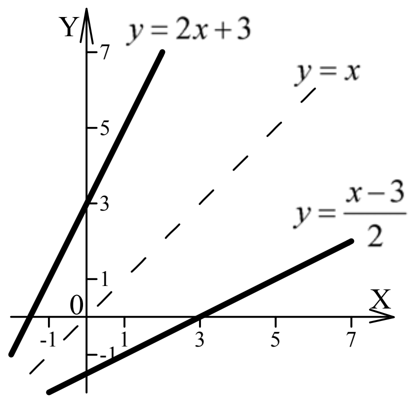


Рис. 44. Графики взаимно обратных функций $y=2x+3$ *и* $y=\frac{x-3}{2}$
симметричны относительно прямой $y=x$

Графики этих функций состоят всего из двух точек. Точки графиков функции *f* и функции f^{-1} (1,0) и (0,1), (3,1) и (1,3) на координатной плоскости симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 43).

Графики взаимно обратных функций $y = 2x + 3$ и $y = \dfrac{x-3}{2}$ (см. пример 22) также симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 44).

Графики прямой и обратной функции всегда расположены симметрично относительно прямой $y = x$.

Примеры графиков прямой и обратной функции приведены на рис. 45.

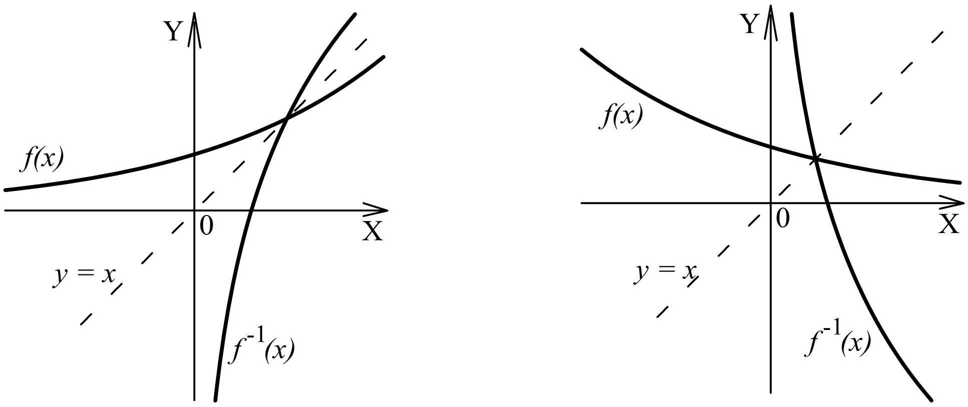


Рис. 45. Графики прямой и обратной функции

Имеют место следующие связи между свойствами прямой и обратной функции, легко выводимые из свойства симметрии графиков относительно прямой $y = x$.

Свойства $y = f(x)$		Свойства $y = f^{-1}(x)$
Область определения $D(f)$	$\Leftrightarrow$	Множество значений $E(f^{-1})$
Множество значений $E(f)$	$\Leftrightarrow$	Область определения $D(f^{-1})$
Корень $x = a$	$\Leftrightarrow$	Точка $P(0;a)$
Точка $P(0;b)$	$\Leftrightarrow$	Корень $x = b$
Монотонность		
Интервал возрастания (a,b)	$\Leftrightarrow$	Интервал возрастания $(f(a);f(b))$
Интервал убывания (c,d)	$\Leftrightarrow$	Интервал убывания $(f(c);f(d))$

Свойства $y = f(x)$		Свойства $y = f^{-1}(x)$
Асимптоты		
Вертикальная $x = a$	$\Leftrightarrow$	Горизонтальная $y = a$
Горизонтальная $y = c$	$\Leftrightarrow$	Вертикальная $x = c$
Наклонная $y = kx + b$	$\Leftrightarrow$	Наклонная $y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$

2. Элементарные функции

Элементарные функции делят на алгебраические и трансцендентные функции.

В этой главе мы рассмотрим самые простые алгебраические функции:

- функцию прямой пропорциональной зависимости;
- линейную функцию;
- функцию обратной пропорциональной зависимости;
- семейство степенных функций.

В главе 3 рассмотрим ещё две алгебраические функции:

- квадратичную функцию;
- дробно-рациональную функцию.

Трансцендентные элементарные функции в этом пособии подробно не рассмотрены, но их графики и свойства для справки приведены в приложении. К трансцендентным функциям относят:

- показательную функцию;
- логарифмическую функцию;
- семейство тригонометрических функций;
- семейство обратных тригонометрических функций.

2.1. Функция прямой пропорциональной зависимости

Определение. ***Функция прямой пропорциональной зависимости*** – *это функция вида* $y = kx$*, где* $k \neq 0$ *– постоянная.*

Построим графики функции $y = kx$, например, при $k = \pm 2$. Иными словами, построим графики функций $y = 2x$ ($k = +2$) и $y = -2x$ ($k = -2$). Для этого вычислим $y = 2x$ и $y = -2x$, например, при $x = 0, \pm 1, \pm 2$.

x	–2	–1	0	1	2
$y = 2x$	–4	–2	0	2	4
$y = -2x$	4	2	0	–2	–4

В результате получим графики функций $y = 2x$ и $y = -2x$ (рис. 46).

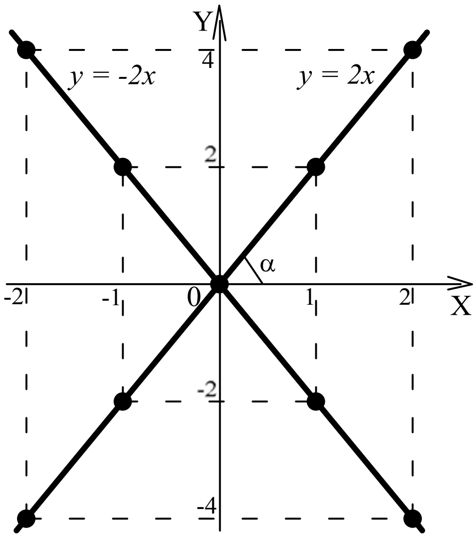


Рис. 46. Графики функции y=kx при k = ±2

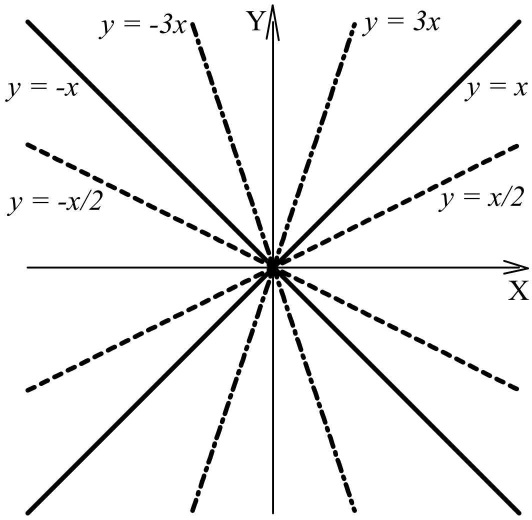


Рис. 47. Графики функции y=kx при различных значениях k

На рис. 47 изображены графики функций $y = kx$ при различных значениях k $\left(k = \pm\frac{1}{2}, \pm 1; \pm 3\right)$.

График функции $y = kx$ – прямая, которая проходит через начало координат и образует угол α с осью *OX*. Коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент этой прямой.

Чтобы построить график функции $y = kx$ достаточно знать координаты одной точки при $x \neq 0$. Координаты второй точки – (0; 0) – известны. Через две точки можно провести только одну прямую, которая и является графиком функции $y = kx$.

Основные свойства функции прямой пропорциональности

1. Область определения. Нет ограничений на *x*. Следовательно, $x \in \mathbf{R} \Rightarrow D(kx) = \mathbf{R}$.

2. Множество значений. Выразим *x* через *y*: $y = kx\,(k \neq 0) \Rightarrow x = \dfrac{y}{k}$.

Нет ограничений на *y*. Следовательно, $y \in \mathbf{R} \Rightarrow E(kx) = \mathbf{R}$.

3. Корни: $kx = 0 \Rightarrow x = 0$ – один корень.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*: $y|_{x=0} = k \cdot 0 = 0 \Rightarrow P(0;0)$.

5. Свойство чётности.

Для $\forall x \in D(kx)$ значение $(-x) \in D(kx)$ и $f(-x) = k \cdot (-x) = -kx = -f(x)$.

Следовательно, $f(-x) = -f(x)$ и $y = kx$ – нечётная функция и её график симметричен относительно начала координат.

6. Промежутки монотонности. Монотонность определяем на основе теоремы (если производная функции положительна (отрицательна) на некотором промежутке, то функция возрастает (убывает) на данном промежутке). Поэтому вычислим производную функции $y = kx$ и определим её знак:

$$y' = (kx)' = k \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y' > 0 \text{ при } k > 0; \\ y' < 0 \text{ при } k < 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, функция $y = kx$

возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ при $k > 0$

или

убывает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ при $k < 0$.

$k < 0$	
x	$(-\infty,+\infty)$
$y = kx$	↘

$k > 0$	
x	$(-\infty,+\infty)$
$y = kx$	↗

7. Асимптоты. Понятие асимптоты для функции прямой пропорциональности (частного случая линейной функции) не рассматривают.

2.2. Линейная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейная функция*** *– это функция вида* $y = kx + b$*, где* k *и* b *– постоянные.*

Построим график функции $y = 2x + 3$ ($k = 2, b = 3$). Для этого вычислим $y = 2x + 3$, например, при $x = 0, \pm 1, \pm 2$.

x	–2	–1	0	1	2
$y = 2x + 3$	–1	+1	3	5	7

В результате получим график функции $y = 2x + 3$ (рис. 48).

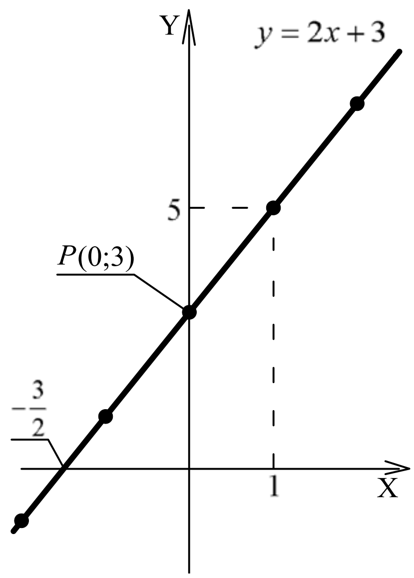


Рис. 48. График линейной функции

График функции $y = 2x + 3$ есть прямая линия.

В общем случае график функции $y = kx + b$ – прямая, которая образует с осью OX угол α такой, что $k = \operatorname{tg}\alpha$.

График функции $y = kx + b$ параллелен графику функции $y = kx$, так как оба графика – прямые линии, образующие с осью OX равные углы (угловые коэффициенты равны).

Чтобы построить график функции $y = kx + b$, необходимо знать координаты двух точек.

Основные свойства линейной функции

1. Область определения. Нет ограничений на x. Следовательно, $x \in \mathbf{R} \Rightarrow D(kx+b) = \mathbf{R}$.

2. Множество значений. Выразим x через y:

$$y = kx + b \quad (k \neq 0) \;\Rightarrow\; x = (y-b)/k.$$

Нет ограничений на y. Следовательно, $y \in \mathbf{R} \Rightarrow E(kx+b) = \mathbf{R}$.

Частный случай $k = 0$. Тогда $y = b$ при $\forall x \in \mathbf{R}$. Следовательно, $E(y=b) = \{b\}$.

3. Корни: $kx + b = 0 \Rightarrow x = -b/k$ – один корень.

Частный случай $k = 0$. Тогда $y = b$ при $\forall x \in \mathbf{R}$. Следовательно, корней нет при $b \neq 0$ или бесконечное множество корней при $b = 0$.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*:

$$y|_{x=0} = k \cdot 0 + b = b \Rightarrow P(0;b).$$

5. Свойство чётности.

Для $\forall x \in D(kx+b)$ значение $-x \in D(kx+b)$ и

$$f(-x) = k \cdot (-x) + b = -kx + b \neq \pm f(x).$$

Следовательно, $y = kx + b$ – функция общего вида.

Частный случай $k = 0$. Для $\forall x \in D(y=b)$ значение $-x \in D(y=b)$ и $f(-x) = b = f(x)$ $(b \neq 0)$. Следовательно, $y = b$ – чётная функция.

6. Промежутки монотонности. Интервалы монотонности функции определим, изучая знак её производной. Вычислим производную функции $y = kx + b$ и определим её знак:

$$y' = (kx+b)' = k \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y' > 0 \text{ при } k > 0; \\ y' < 0 \text{ при } k < 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, функция $y = kx + b$

возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ при $k > 0$

или

убывает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ при $k < 0$.

$k<0$	
x	$(-\infty,+\infty)$
$y=kx+b$	$\searrow$

$k>0$	
x	$(-\infty,+\infty)$
$y=kx+b$	$\nearrow$

Частный случай $k=0$. Тогда $y=b$ и $y'=0$ при $\forall x \in \mathbf{R}$. Следовательно, функция $y=b$ п о с т о я н н а на промежутке $(-\infty;+\infty)$ при $k=0$.

7. Асимптоты. Понятие асимптоты для линейной функции не рассматривают.

Частные случаи линейной функции.

1). $k \neq 0; b=0$, тогда $y=kx$. Это функция прямой пропорциональной зависимости.

2). $k=0; b \neq 0$, тогда $y=b$. График этой функции – прямая линия, параллельная оси OX (рис. 49).

3). $k=0; b=0$, тогда $y=0$. График функции $y=0$ – прямая линия, которая лежит на оси OX (рис. 50).

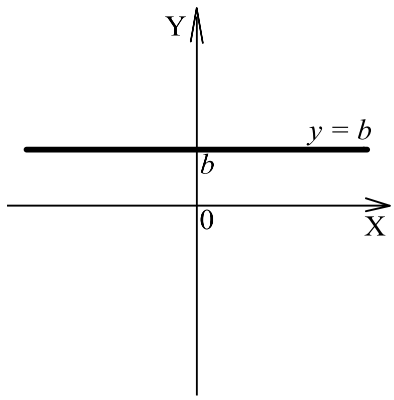


Рис. 49. График функции $y=b$

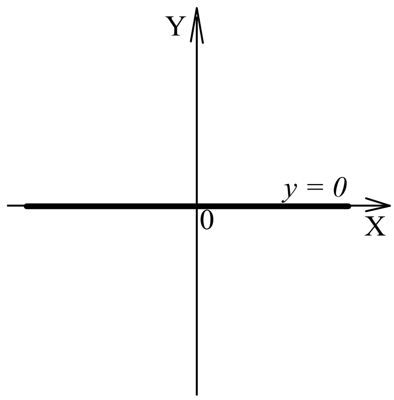


Рис. 50. График функции $y=0$

2.3. Функция обратной пропорциональной зависимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Функция обратной пропорциональной зависимости*** *– это функция вида $y=\dfrac{k}{x}$, где $k \neq 0$ – постоянная.*

Построим графики функции $y=\dfrac{k}{x}$, например, при $k=\pm1$. Иными словами, построим графики функций $y=\dfrac{1}{x}$ $(k=1)$ и $y=-\dfrac{1}{x}$ $(k=-1)$ по точкам. Для этого вычислим $y=\pm\dfrac{1}{x}$, например, при $x=\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm2, \pm3$.

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=1/x$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	–1	–2	–3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$y=-1/x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

В результате получим график функции $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 51) и график функции $y=-\dfrac{1}{x}$ (рис. 52).

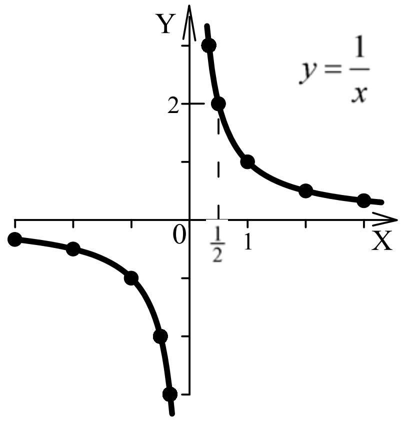


Рис. 51. График функции $y=\dfrac{1}{x}$

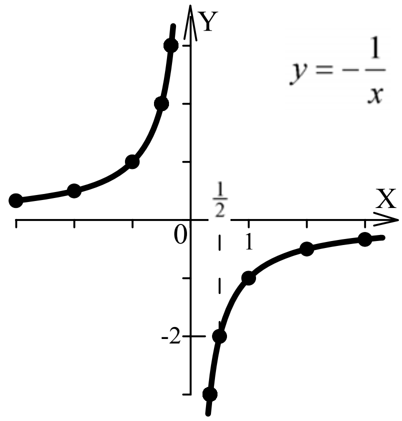
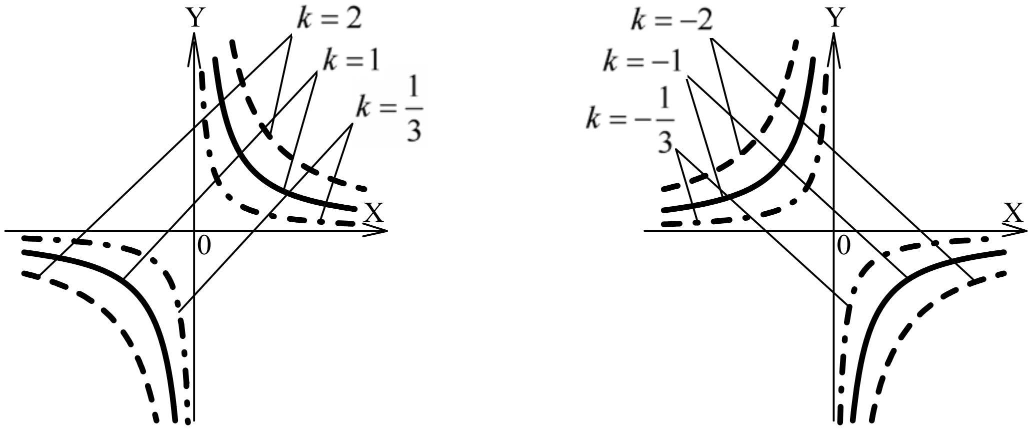


Рис. 52. График функции $y=-\dfrac{1}{x}$

График функции $y=\dfrac{k}{x}$ – гипербола. Гипербола состоит из двух ветвей. Они лежат в I и III координатных углах, если $k>0$, и во II и IV координатных углах, если $k<0$. На рис. 53 изображены графики функции $y=\dfrac{k}{x}$ при различных значениях k ($k=\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{3}$).



а) *б*)

Рис. 53. Графики функции $y=\dfrac{k}{x}$ *при* $k=\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{3}$ $k>0$ *(а) и* $k<0$ *(б)*

Основные свойства функции обратной пропорциональности.

1. Область определения. Ограничение на x: $x\neq 0$ (деление на 0 не определено). Следовательно,

$$x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\Rightarrow D(k/x)=\mathbf{R}\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

2. Множество значений. Выразим x через y: $y=\dfrac{k}{x}\ \Rightarrow\ x=\dfrac{k}{y}$. Ограничение на y: $y\neq 0$ (деление на 0 не определено).

Следовательно, $y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\Rightarrow E(k/x)=\mathbf{R}\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3. Корни. $\dfrac{k}{x}\neq 0\ \Rightarrow$ нет корней. Следовательно, график функции не пересекает ось OX.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*: $y|_{x=0}=\dfrac{k}{0}$ – деление на 0 не определено. Следовательно, график функции не пересекает ось OY.

5. Свойство чётности.

Для $\forall x\in D\left(\dfrac{k}{x}\right)$ значение $-x\in D\left(\dfrac{k}{x}\right)$ и

$$f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x).$$

Следовательно, $f(-x)=-f(x)$ и $y=\dfrac{k}{x}$ – нечётная функция. Её график симметричен относительно начала координат O.

6. Промежутки монотонности. Промежутки монотонности функции определим, изучая знак её производной. Вычислим производную функции $y=\dfrac{k}{x}$ и определим её знак:

$$y'=\left(\frac{k}{x}\right)'=-\frac{k}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y'>0 \text{ при } k<0; \\ y'<0 \text{ при } k>0. \end{array}\right.$$

Учтём, что функция $y=\dfrac{k}{x}$ имеет разрыв при $x=0$. Поэтому у неё два промежутка монотонности: $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

Следовательно, функция $y=\dfrac{k}{x}$

у б ы в а е т на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ при $k>0$

или

в о з р а с т а е т на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ при $k<0$.

$k<0$		
x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Знак y'	«+» ($y'>0$)	«+» ($y'>0$)
$y=\dfrac{k}{x}$	$\nearrow$	$\nearrow$

$k>0$		
x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Знак y'	«–» ($y'<0$)	«–» ($y'<0$)
$y=\dfrac{k}{x}$	$\searrow$	$\searrow$

7. Асимптоты.

Вертикальная асимптота: разрыв функции при $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{x}=\infty$. Следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота графика функции $y=\dfrac{k}{x}$.

Горизонтальная асимптота: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{k}{x}=0 \Rightarrow$ Следовательно, $y=0$ – горизонтальная асимптота графика функции $y=\dfrac{k}{x}$.

Наклонных асимптот у графика функции $y=\dfrac{k}{x}$ быть не может, так как есть горизонтальная асимптота при $x\to\pm\infty$.

2.4. Семейство степенны́х функций

Определение. ***Степенна́я функция*** *– это функция вида* $y = k \cdot x^a$*, где* $a \in \mathbf{R}$ *и* $k \neq 0$ *– постоянная.*

Мы уже рассмотрели степенные функции $y = kx$ $(a = 1)$ и $y = \frac{k}{x}$ $(a = -1)$. Рассмотрим теперь степенные функции $y = x^2$ $(a = 2)$, $y = x^{-2}$ $(a = -2)$, $y = x^3$ $(a = 3)$, $y = x^{-3}$ $(a = -3)$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ и $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ $\left(a = \frac{1}{3}\right)$.

1. Функция $y = x^2$

Построим график функции $y = x^2$ по точкам. Для этого вычислим $y = x^2$, например, при $x = 0; \pm 0,5; \pm 1; \pm 1,5; \pm 2; \pm 2,5$.

Составим таблицу значений функции и по точкам построим ее график (рис. 54).

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = x^2$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

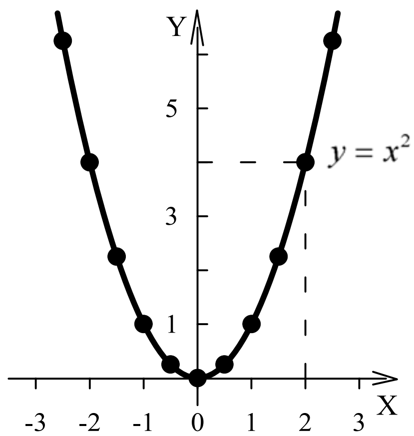


Рис. 54. График функции $y = x^2$ *(парабола)*

График функции $y=x^2$ – парабола. Парабола имеет две ветви, симметричные относительно оси OY. Точка пересечения параболы с осью симметрии – это вершина параболы. В данном случае вершина параболы – точка (0; 0).

Основные свойства функции $y=x^2$.

1. Область определения. Ограничений на x нет.

Следовательно, $x\in\mathbf{R}\Rightarrow D(x^2)=\mathbf{R}=(-\infty;+\infty)$.

2. Множество значений. Выразим x через y:

$$y=x^2\Rightarrow|x|=\sqrt{y}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{y}\ (x\geq 0),\\ -x=\sqrt{y}\ (x<0);\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}+\sqrt{y}\ (x\geq 0),\\ -\sqrt{y}\ (x<0).\end{cases}$$

Ограничение на y: $y\geq 0$ (квадратный корень из отрицательного числа не определён).

Следовательно, $y\in[0;+\infty)\Rightarrow E(x^2)=[0;+\infty)$.

3. Корни. $x^2=0\Rightarrow x=0$ – единственный корень функции $y=x^2$.

4. Точка P пересечения графика с осью OY: $y|_{x=0}=0^2=0$. Следовательно, график функции $y=x^2$ пересекает ось OY в точке с координатами (0; 0).

5. Свойство чётности.

Для $\forall x\in D(x^2)$ значение $-x\in D(x^2)$ и

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

Следовательно, $f(-x)=f(x)$ и $y=x^2$ – чётная функция. Её график симметричен относительно оси OY.

6. Промежутки монотонности. Промежутки монотонности функции определим, изучая знак её производной. Вычислим производную функции $y=x^2$ и определим её знак:

$$y'=(x^2)'=2x\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}y'>0\ \text{при}\ x>0;\\ y'<0\ \text{при}\ x<0.\end{array}\right.$$

Функция $y=x^2$ имеет два промежутка монотонности: $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

Таким образом, функция $y=x^2$

у б ы в а е т на промежутке $(-\infty;0)$

и в о з р а с т а е т на промежутке $(0;+\infty)$.

x	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,+\infty)$
Знак y'	«–» ($y'<0$)	0	«+» ($y'>0$)
$y=x^2$	↘	0 min	↗

7. Асимптоты. Область определения функции $y=x^2$ – множество вещественных чисел $\mathbf{R}$, разрывов нет. Поэтому вертикальных асимптот нет.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$, следовательно, горизонтальных асимптот нет.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$, следовательно, наклонных асимптот нет.

Таким образом, у графика функции $y=x^2$ асимптот нет.

2. Функция $y=x^{-2}$

Построим график функции $y=x^{-2}$ по точкам. Для этого вычислим $y=x^{-2}$, например, при $x=\pm 0,5;\ \pm 1;\pm 1,5;\pm 2;\pm 2,5;\pm 3$.

Составим таблицу значений функции и по точкам построим ее график (рис. 55).

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y=x^{-2}$	$\frac{1}{9}$	0,16	0,25	$\frac{4}{9}$	1	4	4	1	$\frac{4}{9}$	0,25	0,16	$\frac{1}{9}$

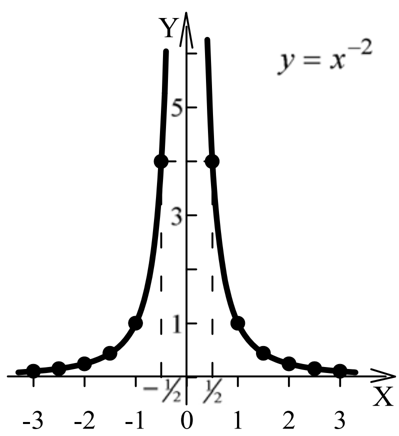


Рис. 55. График функции $y=x^{-2}$

График функции $y = x^{-2}$ имеет две ветви, симметричные относительно оси OY. График не пересекает ось OY.

Основные свойства функции $y = x^{-2}$

1. Область определения. $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Ограничения на x: $x \neq 0$ (деление на 0 не определено).

Следовательно, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow D(x^{-2}) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Множество значений. Выразим x через y:

$$y = x^{-2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{y} \ \ (x \geq 0) \\ -x = 1/\sqrt{y} \ \ (x < 0) \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} +1/\sqrt{y} \ \ (x \geq 0) \\ -1/\sqrt{y} \ \ (x < 0) \end{cases}.$$

Ограничения на y: 1) $y \geq 0$ (квадратный корень из отрицательного числа не определён); 2) $y \neq 0$ (деление на 0 не определено).

Следовательно, $y \in (0; +\infty) \Rightarrow E(x^{-2}) = (0; +\infty)$.

3. Корни. $x^{-2} = 1/x^2 \neq 0 \Rightarrow$ нет корней. Следовательно, график функции не пересекает ось OX.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*: $y|_{x=0} = 0^{-2} = \frac{1}{0^2}$ – деление на 0 не определено. Следовательно, график функции не пересекает ось OY.

5. Свойство чётности.

Для $\forall x \in D(x^{-2})$ значение $-x \in D(x^{-2})$ и

$$f(-x) = (-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = x^{-2} = f(x).$$

Следовательно, $f(-x) = f(x)$ и $y = x^{-2}$ – чётная функция. Её график симметричен относительно оси OY.

6. Промежутки монотонности. Промежутки монотонности функции определим, изучая знак её производной. Вычислим производную функции $y = x^{-2}$ и определим её знак:

$$y' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y' > 0 \text{ при } x < 0; \\ y' < 0 \text{ при } x > 0. \end{array}\right.$$

Функция $y = x^{-2}$ имеет два промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Таким образом, функция $y = x^{-2}$

возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$

и у б ы в а е т на промежутке $(0;+\infty)$.

x	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,+\infty)$
Знак y'	«+» ($y'>0$)	$\nexists$	«–» ($y'<0$)
$y=x^{-2}$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$

7. Асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Область определения функции $y=x^{-2}$ – множество $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, имеется разрыв при $x=0$, причём $\lim\limits_{x\to+0}x^{-2}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-0}x^{-2}=+\infty$. Следовательно, $x=0$ – единственная вертикальная асимптота.

Горизонтальная асимптота: $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, следовательно, $y=0$ – горизонтальная асимптота графика функции $y=x^{-2}$.

Наклонных асимптот нет, так как у графика функции $y=x^{-2}$ есть лево- и правосторонняя горизонтальные асимптоты.

Таким образом, у графика функции $y=x^{-2}$ одна вертикальная ($x=0$) и одна горизонтальная ($y=0$) асимптота.

3. Функция $y=x^3$

Построим график функции $y=x^3$ по точкам. Для этого вычислим $y=x^3$, например, при $x=0;\pm0{,}5;\pm1;\pm1{,}5$.

Составим таблицу значений функции и по точкам построим её график (рис. 56).

x	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5
$y=x^3$	–3,375	–1	–0,125	0	0,125	1	3,375

График функции $y=x^3$ есть *кубическая* парабола. Кубическая парабола симметрична относительно начала координат O.

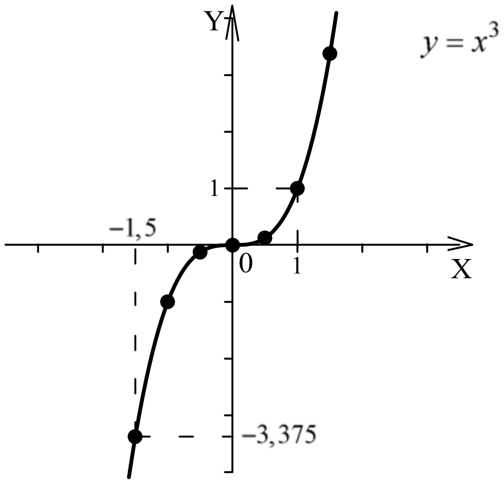


Рис. 56. График функции $y = x^3$
(кубическая парабола)

Основные свойства функции $y = x^3$.

1. Область определения. Ограничений на x нет.

Следовательно, $x \in \mathbf{R} \Rightarrow D(x^3) = \mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений. Выразим x через y: $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Ограничений на y нет.

Следовательно, $y \in \mathbf{R} \Rightarrow E(x^3) = \mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$.

3. Корни. $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ – единственный корень функции $y = x^3$.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*: $y|_{x=0} = 0^3 = 0$. Следовательно, график функции $y = x^3$ пересекает ось OY в точке с координатами (0; 0).

5. Свойство чётности.

Для $\forall x \in D(x^3)$ значение $-x \in D(x^3)$ и

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Следовательно, $f(-x) = -f(x)$ и $y = x^3$ – нечётная функция. Её график симметричен относительно начала координат O.

6. Промежутки монотонности. Промежутки монотонности функции определим, изучая знак её производной. Вычислим производную функции $y = x^3$ и определим её знак:

$$y' = \left(x^3\right)' = 2x^2 \geq 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Функция $y = x^3$ имеет один промежуток монотонности: $(-\infty; +\infty)$.

Таким образом, функция $y = x^3$

возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

x	$(-\infty;0)$	$\{0\}$	$(0;+\infty)$
Знак y'	«+» ($y' > 0$)	$y' = 0$	«+» ($y' > 0$)
$y = x^3$	$\nearrow$	0 точка перегиба[1]	$\nearrow$

7. Асимптоты. Область определения функции $y = x^3$ – множество вещественных чисел $\mathbf{R}$, разрывов нет. Поэтому вертикальных асимптот нет.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, следовательно, горизонтальных асимптот нет.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, следовательно, наклонных асимптот нет.

Таким образом, у графика функции $y = x^3$ асимптот нет.

4. Функция $y = \sqrt{x}$

Рассмотрим функцию $y = x^2$. На промежутке $[0;+\infty)$ эта функция монотонно возрастает и $y \ge 0$. Следовательно, на промежутке $[0;+\infty)$ она имеет обратную функцию.

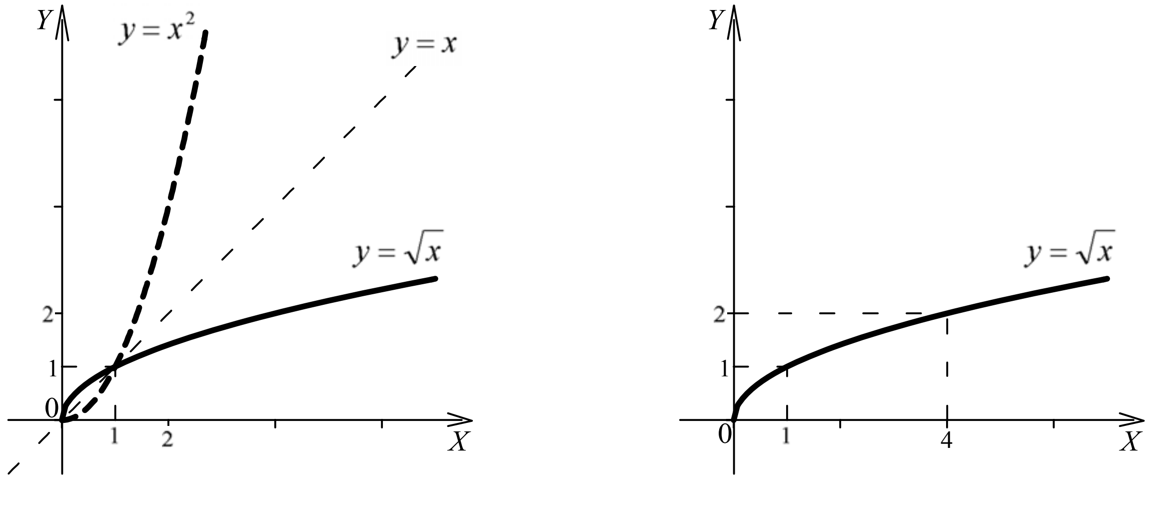
Из равенства $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$. Следовательно, функция $y = \sqrt{x}$ есть функция обратная к функции $y = x^2$ на промежутке $[0;+\infty)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов $y = x$. Поэтому график функции $y = \sqrt{x}$ легко построить по известному графику функции $y = x^2$ (рис. 57).

Исследуем функцию $y = \sqrt{x}$ по схеме.

1. Область определения функции. $x \ge 0 \Rightarrow D(y) = [0;+\infty)$.

[1] Точка перегиба – это точка графика, в которой характер выпуклости графика меняется на противоположный. Например, у кубической параболы выпуклость вверх при движении вправо по оси x меняется на выпуклость вниз.



(а) *(б)*

Рис. 57. Графики взаимно обратных функций
$y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ при $x \geq 0$ (а); график функции $y=\sqrt{x}$ (б)

2. Множество значений функции. $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow E(y)=[0;+\infty)$.

3. Корень функции. $\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*: $y(0)=\sqrt{0}=0 \Rightarrow P(0;0)$. Следовательно, точка $(0;0)$ графика функции лежит на оси OY.

5. Свойство чётности.

Для $\forall x \in D(y)$ значение $(-x) \notin D(y)$. Поэтому $y=\sqrt{x}$ функция общего вида.

6. Промежутки монотонности. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$.

x	0	$(0,+\infty)$
Знак y'	$\nexists$	«+» ($y'>0$)
$y=\sqrt{x}$	0	↗

7. Асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Область определения функции $y=\sqrt{x}$ – множество $[0;+\infty)$. В области определения разрывов нет. На границе области определения ($x=0$) $y=f(0)=0$. Следовательно, вертикальных асимптот нет.

Горизонтальных асимптот нет (правосторонней асимптоты нет, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, левосторонней асимптоты нет, так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x}$ не существует).

Наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, следовательно, наклонных асимптот нет.

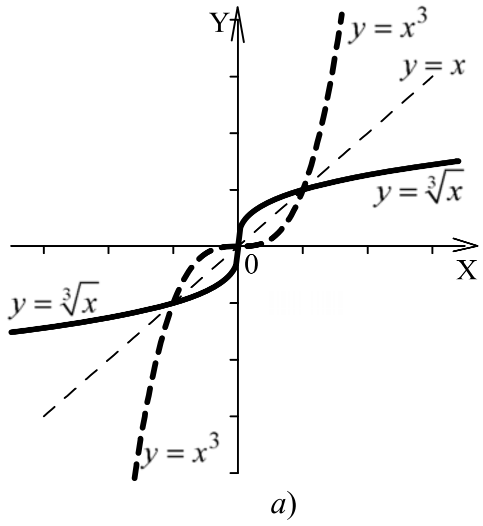
Таким образом, у графика функции $y=\sqrt{x}$ асимптот нет.

5. Функция $y=\sqrt[3]{x}$

Рассмотрим функцию $y=x^3$. По графику этой функции (рис. 56) видно, что функция монотонно возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$. Следовательно, на промежутке $(-\infty;+\infty)$ она имеет обратную функцию.

Из равенства $y=x^3$ находим: $x=\sqrt[3]{y}$. Следовательно, функция $y=\sqrt[3]{x}$ есть функция обратная к функции $y=x^3$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов $y=x$. Поэтому график функции $y=\sqrt[3]{x}$ легко построить по известному графику функции $y=x^3$ (рис. 58).



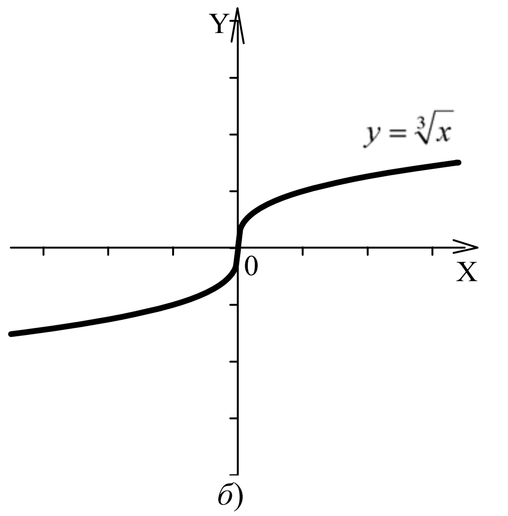


Рис. 58. Графики взаимно обратных функций $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^3$ (а) и график функции $y=\sqrt[3]{x}$ (б)

Исследуем функцию $y=\sqrt[3]{x}$ по схеме.

1. Область определения функции. Ограничений на x нет, следовательно, $D(y)=\mathbf{R}$.

2. Множество значений функции. $y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow x=y^3$. Ограничений на y нет, следовательно, $E(y)=\mathbf{R}$.

3. Корень функции. $\sqrt[3]{x}=0\Rightarrow x=0$.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*: $y(0)=\sqrt[3]{0}=0\Rightarrow P(0;0)$. Следовательно, точка $(0;0)$ графика функции лежит на оси *OY*.

5. Свойство чётности.

Для $\forall x\in D(\sqrt[3]{x})$ значение $-x\in D(\sqrt[3]{x})$ и

$$f(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-f(x).$$

Следовательно, $f(-x)=-f(x)$ и $y=\sqrt[3]{x}$ – нечётная функция. Её график симметричен относительно начала координат *O*.

6. Промежутки монотонности. $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$

x	$(-\infty;0)$	$\{0\}$	$(0;+\infty)$
Знак y'	«+» ($y'>0$)	$\nexists$	«+» ($y'>0$)
$y=\sqrt[3]{x}$	$\nearrow$	0 точка перегиба[2]	$\nearrow$

7. Асимптоты. Область определения функции $y=\sqrt[3]{x}$ – множество вещественных чисел $\mathbf{R}$, разрывов нет. Поэтому вертикальных асимптот нет.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$, следовательно, горизонтальных асимптот нет.

$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0$ и $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0$, следовательно, наклонных асимптот нет.

Таким образом, у графика функции $y=\sqrt[3]{x}$ асимптот нет.

---

[2] Точка перегиба – это точка графика, в которой характер выпуклости графика меняется на противоположный. Например, у графика функции $y=\sqrt[3]{x}$ при движении по оси x выпуклость вниз меняется на выпуклость вверх.

2.5. Задания для самостоятельной работы

Исследовать функции и построить их графики:

1) $y = x^3 - 3x^2$;
2) $y = x^3 - 3x$;
3) $y = 3x^4 - 4x^3$;
4) $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2$;
5) $y = \frac{x-2}{x-1}$;
6) $y = \frac{x+3}{x+2}$;
7) $y = \frac{2x-1}{x+2}$;
8) $y = \frac{1}{x^2-2}$;
9) $y = x + \frac{3}{x}$;
10) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;
11) $y = \frac{x^2}{x+3}$;
12) $y = \frac{x^2+1}{3x}$;
13) $y = \frac{x^2-1}{3(x-2)(x+1)}$;
14) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$;
15) $y = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2}$.

Ответы см. на стр. 98 – 100.

3. Основные преобразования графиков функций

Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии и т.д.) можно построить графики более сложных функций.

3.1. Параллельный перенос

1) Параллельный перенос вдоль оси ординат:

$$\boxed{f(x) \Rightarrow f(x) + b}$$

(из графика функции $y = f(x)$ получаем график функции $y = f(x) + b$).

Теорема. *Если точка* $M(x_0;y_0)$ *принадлежит графику функции* $y=f(x)$, *то точка* $M_1(x_0;y_0+b)$ *принадлежит графику функции* $y=f(x)+b$.

Доказательство. Доказать, что точка принадлежит графику функции, означает показать, что её координаты обращают уравнение, задающее функцию, в верное числовое равенство.

Так как точка $M(x_0;y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то $y_0=f(x_0)$ – верное числовое равенство (по условию теоремы).

Рассмотрим функцию $y=f(x)+b$ и докажем, что точка $M_1(x_0;y_0+b)$ принадлежит графику функции $y=f(x)+b$.

Действительно, подставим значения координат $x=x_0$ и $y=y_0+b$ в уравнение, задающее функцию: $y_0+b=f(x_0)+b \Rightarrow y_0=f(x_0)$. Но это верное числовое равенство согласно условию теоремы.

Теорема доказана.

Точки $M(x_0;y_0)$ и $M_1(x_0;y_0+b)$ лежат на одной прямой, параллельной оси ординат, расстояние между ними равно b единиц.

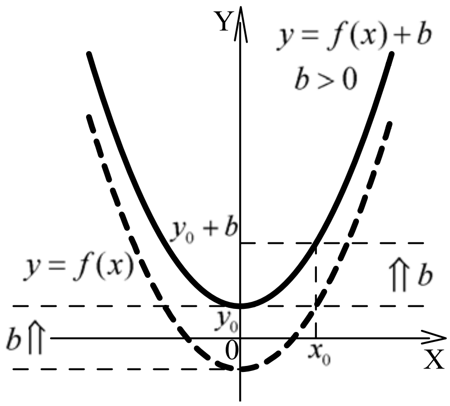


Рис. 59. Параллельный перенос графика функции $y=f(x)+b$ *на b единиц вдоль оси ординат*

График функции $y=f(x)+b$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси ординат на $|b|$ единиц вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$ (рис. 59).

2) Параллельный перенос вдоль оси абсцисс:

$$\boxed{f(x)\Rightarrow f(x-a)}$$

(из графика функции $y=f(x)$ получаем график функции $y=f(x-a)$).

Теорема. *Если точка* $M(x_0;y_0)$ *принадлежит графику функции* $y=f(x)$, *то точка* $M_1(x_0+a;y_0)$ *принадлежит графику функции* $y=f(x-a)$.

Доказательство. Доказать, что точка принадлежит графику функции, означает показать, что её координаты обращают уравнение, задающее функцию, в верное числовое равенство.

Так как точка $M(x_0;y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то $y_0=f(x_0)$ – верное числовое равенство (по условию теоремы).

Рассмотрим функцию $y=f(x-a)$ и докажем, что точка $M_1(x_0+a;y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x-a)$.

Действительно, подставим значения координат $x=x_0+a$ и $y=y_0$ в уравнение, задающее функцию: $y_0=f((x_0+a)-a) \Rightarrow y_0=f(x_0)$. Но это верное числовое равенство согласно условию теоремы.

Теорема доказана.

Точки $M(x_0;y_0)$ и $M_1(x_0+a;y_0)$ лежат на одной прямой, параллельной оси абсцисс, расстояние между ними равно $|a|$ единиц.

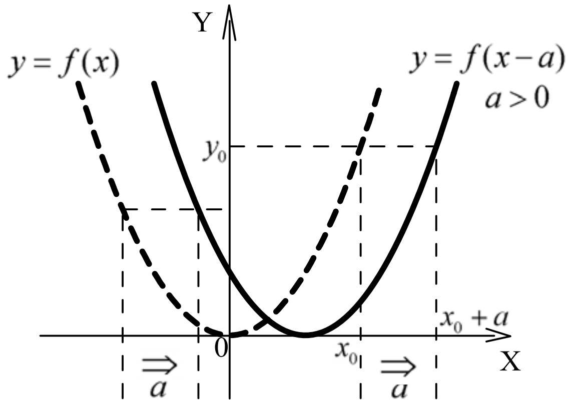


Рис. 60. Параллельный перенос графика функции $y=f(x-a)$ *на* a ($a>0$) *единиц вправо вдоль оси абсцисс*

График функции $y=f(x-a)$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц вправо, если $a>0$, и влево, если $a<0$ (рис. 60).

3.2. Деформация (сжатие и растяжение)

1) Деформация по оси ординат:

$$\boxed{f(x) \Rightarrow A \cdot f(x)} \quad (A > 0)^3$$

(из графика функции $y = f(x)$ получаем график функции $y = A \cdot f(x)$).
Мы рассматриваем только случай $A > 0$. Случай $A < 0$ можно рассматривать как «цепь» преобразований графиков

$$f(x) \Rightarrow |A| f(x) \Rightarrow -|A| f(x).$$

Теорема. *Если точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $M_1(x_0; A \cdot y_0)$ принадлежит графику функции $y = A \cdot f(x)$.*

Доказательство. Так как точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то $y_0 = f(x_0)$ – верное числовое равенство (по условию теоремы).

Рассмотрим функцию $y = A \cdot f(x)$ и докажем, что точка $M_1(x_0; A \cdot y_0)$ принадлежит графику этой функции.

Действительно, подставим значения координат $x = x_0$ и $y = Ay_0$ в уравнение, задающее функцию: $y = A \cdot f(x) \Rightarrow Ay_0 = A \cdot f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$. Но это верное числовое равенство согласно условию теоремы.

Теорема доказана. Точки $M(x_0; y_0)$ и $M_1(x_0; Ay_0)$ лежат на одной прямой, параллельной оси ординат. Отношение ординат равно A единиц.

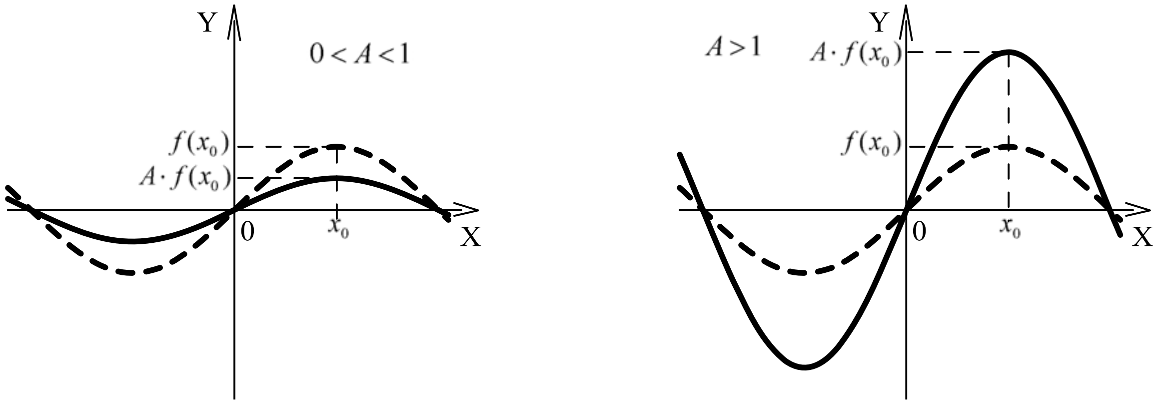


Рис. 61. Деформация в A раз (сжатие или растяжение по оси ординат) графика функции $y = Af(x)$ (сплошная линия) относительно графика функции $y = f(x)$ (пунктир).

---

[3] Случай $A < 0$ почти полностью аналогичен рассмотренному случаю $A > 0$, если учесть преобразование графиков $f(x) \Rightarrow -f(x)$.

График функции $y = A \cdot f(x)$ получается растяжением графика $y = f(x)$ по оси ординат в A раз, если $A > 1$, и сжатием его в том же направлении, если $0 < A < 1$ (рис. 61).

2) Деформация по оси абсцисс:

$$\boxed{f(x) \Rightarrow f(Kx)} \quad (K > 0).$$

(из графика функции $y = f(x)$ получаем график функции $y = f(Kx)$).

Мы рассматриваем только случай $K > 0$. Случай $K < 0$ можно рассматривать как «цепь» преобразований графиков

$$f(x) \Rightarrow f(|K|x) \Rightarrow f(-|K|x).$$

Теорема. *Если точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $M_1\left(\frac{x_0}{K}; y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(Kx)$.*

Доказательство. Так как точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то $y_0 = f(x_0)$ – верное числовое равенство (по условию теоремы).

Рассмотрим функцию $y = f(Kx)$ и докажем, что точка $M_1\left(\frac{x_0}{K}; y_0\right)$ принадлежит графику этой функции.

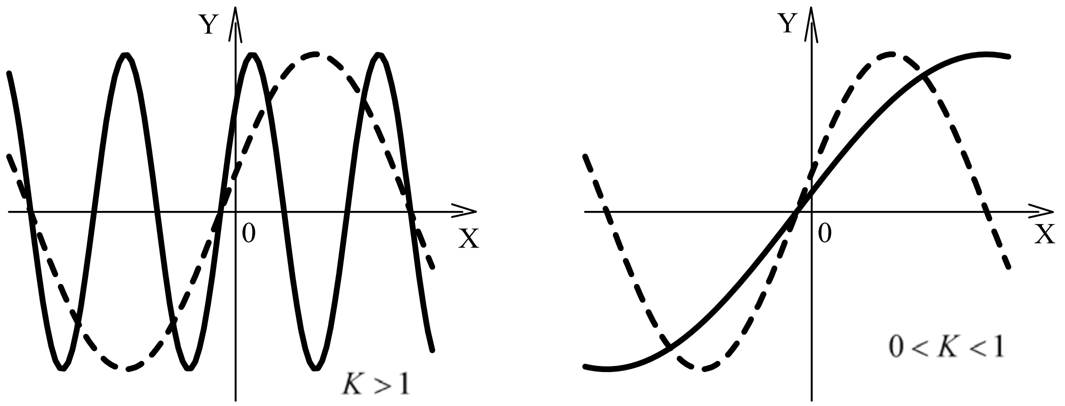


Рис. 62. Деформация в K раз (сжатие или растяжение по оси абсцисс) графика функции $y = f(Kx)$ (сплошная линия) относительно графика функции $y = f(x)$ (пунктир)

Действительно, подставим значения координат $x = \frac{x_0}{K}$ и $y = y_0$ в уравнение, задающее функцию: $y = f(Kx) \Rightarrow y_0 = f(K\frac{x_0}{K}) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$. Но это верное числовое равенство согласно условию теоремы.

Теорема доказана.

Точки $M(x_0; y_0)$ и $M_1\left(\frac{x_0}{K}; y_0\right)$ лежат на одной прямой, параллельной оси абсцисс. Отношение абсцисс равно $\frac{1}{K}$ единиц.

График функции $y = f(Kx)$ получается сжатием графика $y = f(x)$ в K раз по оси абсцисс, если $K > 1$, и растяжением, если $0 < K < 1$ (рис. 62).

3.3. Симметрия относительно осей координат

1) Симметрия относительно оси ординат:

$$\boxed{f(x) \Rightarrow f(-x)}$$

(из графика функции $y = f(x)$ получаем график функции $y = f(-x)$).

Теорема. *Если точка* $M(x_0; y_0)$ *принадлежит графику функции* $y = f(x)$, *то точка* $M_1(-x_0; y_0)$ *принадлежит графику функции* $y = f(-x)$.

Доказательство. Так как точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то $y_0 = f(x_0)$ – верное числовое равенство (по условию теоремы).

Рассмотрим функцию $y = f(-x)$ и докажем, что точка $M_1(-x_0; y_0)$ принадлежит графику этой функции.

Действительно, подставим значения координат $x = -x_0$ и $y = y_0$ в уравнение, задающее функцию: $y = f(-x) \Rightarrow y_0 = f(-(-x_0)) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$. Но это верное числовое равенство согласно условию теоремы.

Теорема доказана.

Точки $M(x_0; y_0)$ и $M_1(-x_0; y_0)$ симметричны относительно оси ординат.

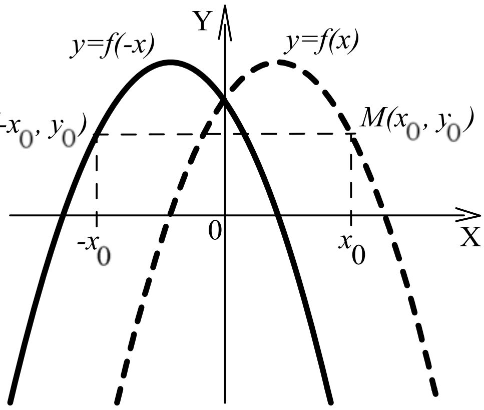


Рис. 63. Симметрия графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ относительно оси ординат

График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси ординат (рис. 63).

2) Симметрия относительно оси абсцисс:

$$\boxed{f(x) \Rightarrow -f(x)}$$

(из графика функции $y = f(x)$ получаем график функции $y = -f(x)$).

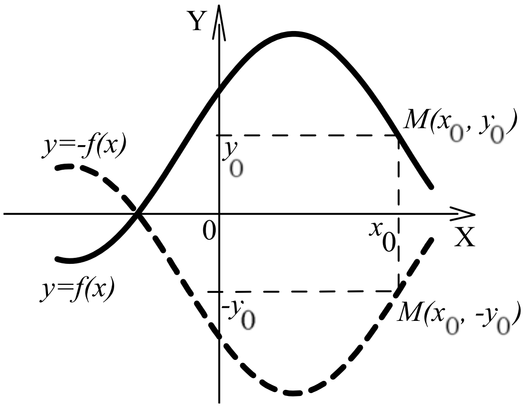


Рис. 64. Симметрия графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ относительно оси абсцисс

Теорема. *Если точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $M_1(x_0; -y_0)$ принадлежит графику функции $y = -f(x)$.*

Доказательство. Так как точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то $y_0 = f(x_0)$ – верное числовое равенство (по условию теоремы).

Рассмотрим функцию $y = -f(x)$ и докажем, что точка $M_1(x_0; -y_0)$ принадлежит графику этой функции.

Действительно, подставим значения координат $x = x_0$ и $y = -y_0$ в уравнение, задающее функцию: $y = -f(x) \Rightarrow -y_0 = -f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$. Но это верное числовое равенство согласно условию теоремы.

Теорема доказана.

Точки $M(x_0; y_0)$ и $M_1(x_0; -y_0)$ симметричны относительно оси абсцисс.

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси абсцисс (рис. 64).

3.4. Построение графиков функций с помощью преобразований

Квадратичная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Квадратичная функция*** *– это функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где x, y – переменные, a, b, c – постоянные, и $a \neq 0$.*

Квадратичную функцию всегда можно привести к виду $y = a(x - m)^2 + n$ путем выделения полного квадрата:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введем обозначения $\dfrac{b}{2a}=-m; \dfrac{4ac-b^2}{4a}=n$, тогда получим: $y=a(x-m)^2+n$. Можно указать алгоритм геометрических преобразований графиков для построения графика функции $y=a(x-m)^2+n$ по известному графику функции $y=x^2$:

Построение известного графика $y=x^2$

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=x^2$ в график $y=\lvert a\rvert\cdot x^2$
Деформация графика $y=x^2$ по оси OY: растяжение ($\lvert a\rvert>1$) в $\lvert a\rvert$ раз или сжатие ($\lvert a\rvert<1$) в $\dfrac{1}{\lvert a\rvert}$ раз

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=\lvert a\rvert\cdot x^2$ в график $y=a\cdot x^2$
Зеркальное отражение графика $y=\lvert a\rvert\cdot x^2$ относительно оси OX при $a<0$, отсутствие преобразования при $a>0$

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=a\cdot x^2$ в график $y=a(x-m)^2$
Параллельный перенос графика $y=a\cdot x^2$ вдоль оси OX на $\lvert m\rvert$ единиц вправо ($m>0$) или влево ($m<0$)

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=a(x-m)^2$ в график $y=a(x-m)^2+n$
Параллельный перенос графика $y=a(x-m)^2$ вдоль оси OY на $\lvert n\rvert$ единиц вверх ($n>0$) или вниз($n<0$)

Итак, построение искомого графика квадратичной функции сводится к построению известного графика и его геометрическим преобразованиям.

☹ **Пример 23.** Построить график функции $y = 2x^2 - 12x + 17$.

😐 *Решение*. Преобразуем выражение, задающее функцию, к виду $y = a(x-m)^2 + n$:

$$2x^2 - 12x + 17 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{17}{2}\right) = 2\left[(x^2 - 6x + 9) - 9 + \frac{17}{2}\right] =$$

$$= 2\left[(x-3)^2 - \frac{1}{2}\right] = 2(x-3)^2 - 1.$$

Тогда $a = 2$, $m = 3$, $n = -1$, и процесс построения графика состоит в последовательности геометрических преобразований известного графика функции $y = x^2$:

Построение известного графика $y = x^2$

$$\Downarrow$$

Преобразование графика $y = x^2$ в график $y = 2x^2$
Растяжение ($\lvert a \rvert = 2 > 1$) по оси OY в $\lvert a \rvert = 2$ раза

$$\Downarrow$$

Преобразование графика $y = 2x^2$ в график $y = 2(x-3)^2$
Параллельный перенос по OX на $\lvert m \rvert = 3$ вправо ($m = 3 > 0$)

$$\Downarrow$$

Преобразование графика $y = 2(x-3)^2$ в график $y = 2(x-3)^2 - 1$
Параллельный перенос по OY на $\lvert n \rvert = 1$ вниз ($n = -1 < 0$)

Построение графика функции $y = 2x^2 - 12x + 17 = -\frac{1}{2}\left(x-3\right)^2 + 2$ по этому алгоритму проиллюстрировано на рис. 65.

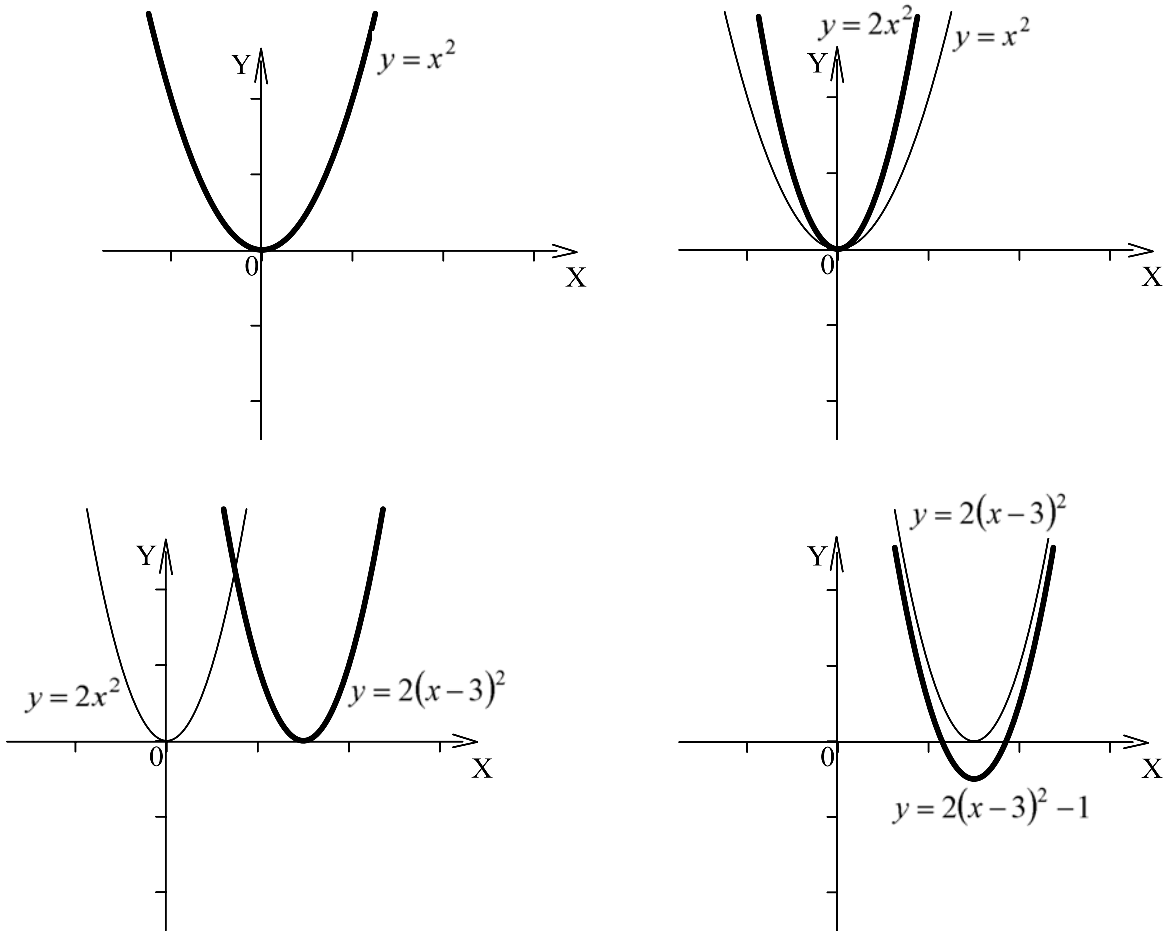


Рис. 65. Процесс построения графика функции $y = 2x^2 - 12x + 17 = 2(x-3)^2 - 1$

методом преобразования графика функции $y = x^2$

☺ <u>Ответ</u>. График функции $y = 2x^2 - 12x + 17$ представлен на последнем из рис. 65.

☹ **Пример 24.** Построить график функции $y = -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{5}{2}$.

😐 *<u>Решение</u>*. Преобразуем выражение, задающее функцию, к виду $y = a(x-m)^2 + n$:

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 5\right) = -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 5\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 5\right] = -\frac{1}{2}\left[\left(x-3\right)^2 - 4\right] = -\frac{1}{2}\left(x-3\right)^2 + 2.$$

Тогда $a=-\frac{1}{2}$, $m=3$, $n=3$, и процесс построения графика состоит в последовательности геометрических преобразований известного графика функции $y=x^2$:

Построение известного графика $y=x^2$

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=x^2$ в график $y=\left\|-\frac{1}{2}\right\|x^2=\frac{1}{2}x^2$
Сжатие ($\|a\|=\frac{1}{2}<1$) по OY в $\frac{1}{\|a\|}=1:\left\|-\frac{1}{2}\right\|=1:\frac{1}{2}=2$ раза

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=\left\|-\frac{1}{2}\right\|x^2=\frac{1}{2}x^2$ в график $y=-\frac{1}{2}x^2$
Зеркальное отражение $(a<0)$ относительно OX ($a=-\frac{1}{2}<0$)

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=-\frac{1}{2}x^2$ в график $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2=-\frac{(x-3)^2}{2}$
Параллельный перенос по OX на $\|m\|=3$ вправо ($m=3>0$)

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2=-\frac{(x-3)^2}{2}$ в график $y=-\frac{(x-3)^2}{2}+2$
Параллельный перенос по OY на $\|n\|=2$ вверх ($n=2>0$)

Построение графика функции $y=-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-3\right)^2+2$ по этому алгоритму проиллюстрировано на рис. 66.

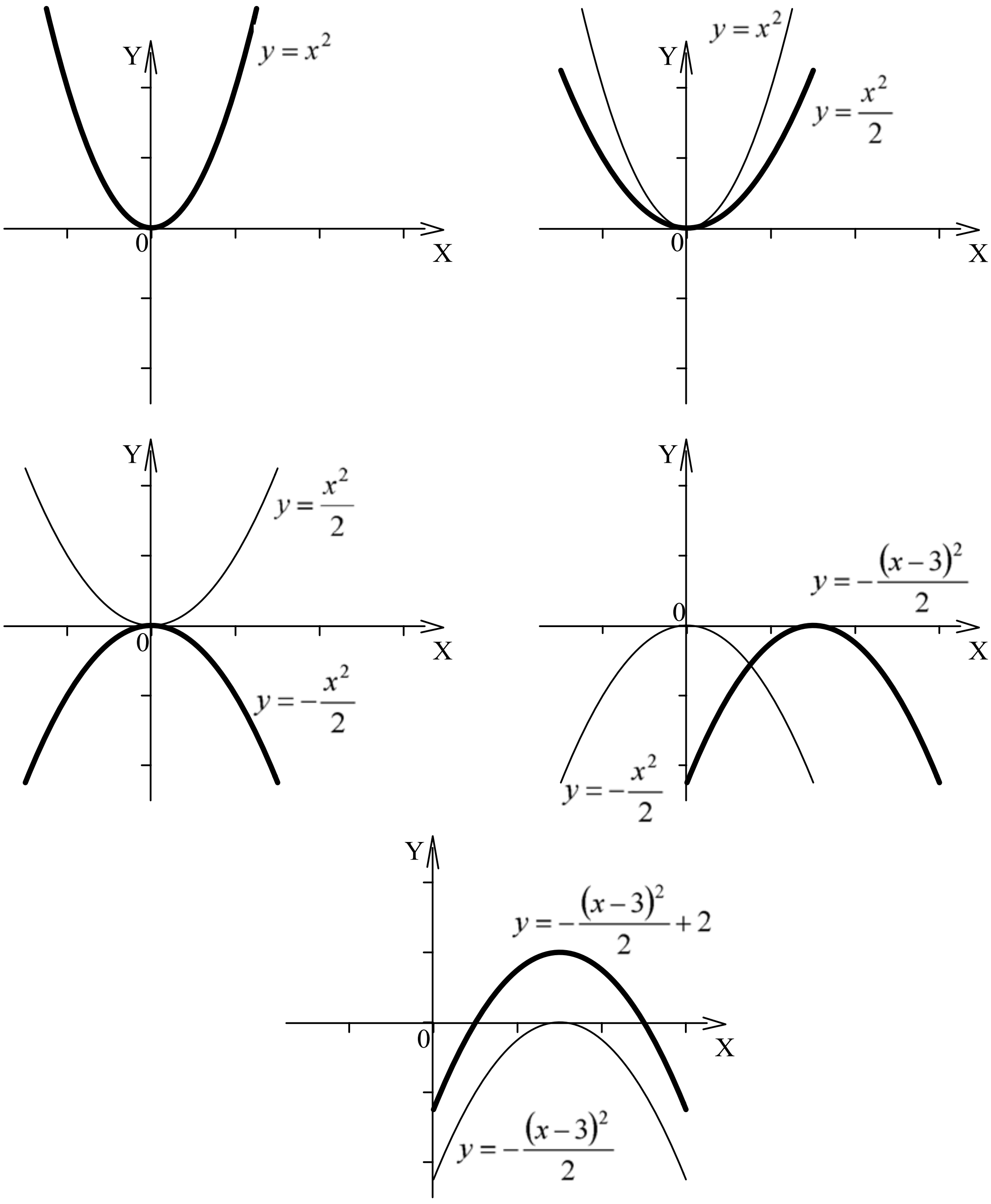


Рис. 66. Процесс построения графика функции $y=-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-3\right)^2+4$

методом преобразования графика функции $y=x^2$

☺ <u>Ответ</u>. График функции $y=-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}$ представлен на последнем из рис. 66.

График функции $y=ax^2+bx+c$ – парабола, вершина которой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Ветви параболы направлены вверх (если $a>0$) или вниз (если $a<0$). Парабола имеет ось симметрии – это прямая $x=-\frac{b}{2a}$.

Чтобы найти корни функции $y=ax^2+bx+c$, надо решить квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Известна формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Выражение b^2-4ac обозначают знаком Δ и называют дискриминантом. В зависимости от знака Δ возможно различное расположение параболы в декартовой системе координат (табл. 1).

Исследуем функцию $y=ax^2+bx+c$ по обычной схеме.

Основные свойства квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$.

1. Область определения. Нет ограничений на *x*. Следовательно, $x\in\mathbf{R}\Rightarrow D(y)=\mathbf{R}$.

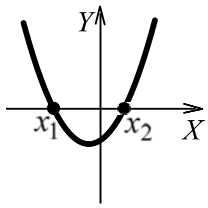
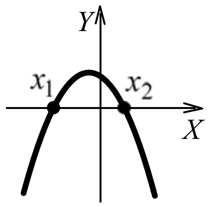
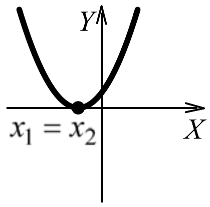
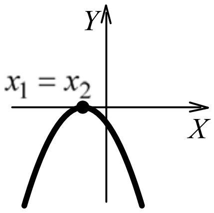
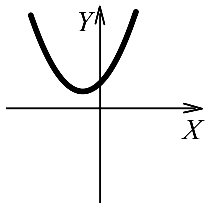
2. Множество значений. Известно, что вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ находится в точке $\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, а её ветви направлены вверх или вниз в зависимости от знака коэффициента a ($a>0$ или $a<0$ соответственно). Следовательно,

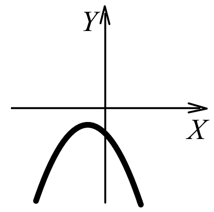
$$\text{если } a>0 \quad y\in\left[\frac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right);$$

$$\text{если } a<0 \quad y \in \left(-\infty; \frac{4ac-b^2}{4a}\right].$$

Таблица 1

ВАРИАНТЫ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПАРАБОЛЫ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАКОВ КОЭФФИЦИЕНТА a И ДИСКРИМИНАНТА D

<table>
<tr><td rowspan="2">$D>0$
$x_1 \neq x_2 \quad x_1, x_2 \in R$</td><td>$a>0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$D=0$
$x_1 = x_2 \in R$</td><td>$a>0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$D<0$
нет корней в R</td><td>$a>0$</td><td></td></tr>
</table>

	$a<0$	

Другой подход: выразим x через y. Тогда
$ax^2+bx+\left(c-y\right)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a\left(c-y\right)}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4ay}}{2a}.$$

Ограничения на y : $b^2-4ac+4ay\geq 0 \Rightarrow ay\geq\frac{4ac-b^2}{4}$. И следовательно,

$$\left[\begin{array}{ll} y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a} & \left(a>0\right), \\ y\leq\dfrac{4ac-b^2}{4a} & \left(a>0\right). \end{array}\right.$$

Этот результат совпадает с полученным выше.

3. Корни. Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$:

при $\Delta>0 \Rightarrow x_1\neq x_2$ два различных корня,

при $\Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2$ два равных корня,

при $\Delta<0$ нет корней.

4. Точка *P* пересечения графика с осью *OY*:

$$y\,|_{x=0}=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \Rightarrow P(0;c).$$

5. Свойство чётности.

Для $\forall x\in D(y)$ значение $(-x)\in D(f)$ и $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Следовательно, функция $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0;\, b\neq 0)-$ это функция общего вида.

Частный случай: $y=ax^2+c$ $(a\neq 0;\, b=0)$ – чётная функция.

6. Монотонность. Монотонность определяем по графикам табл. 1.

	$a>0$

x	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$	$-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
y	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ min	$\nearrow$

	$a<0$		
x	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$	$-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
y	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ max	$\searrow$

7. Асимптоты. График функции $y = ax^2 + bx + c$ (как и функции $y = x^2$) – парабола. Исследуя функцию $y = x^2$, мы выяснили, что у её графика асимптот нет. Следовательно, асимптот нет и у графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Дробно-линейная функция

Определение. ***Дробно-линейная функция*** *– это функция вида* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, *где* a, b, c, d *– постоянные* ($c \neq 0$) *и* $ad \neq bc$.

Требование $c \neq 0$ необходимо, в противном случае функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+b}{d}$ становится линейной.

Преобразуем функцию $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ к виду $y = \dfrac{k}{x-m} + n$:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right) - a\frac{d}{c} + b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}.$$

Пусть $\frac{a}{c}=n;\ \frac{bc-ad}{c^2}=k;\ \frac{d}{c}=-m$. Тогда получим:

$$y=n+k\cdot\frac{1}{x-m}=\frac{k}{x-m}+n.$$

Можно построить цепочку получения искомого графика функции $y=\frac{k}{x-m}+n$ с помощью геометрических преобразований известного графика функции $y=\frac{1}{x}$. Эта цепочка преобразований представлена в форме следующего алгоритма.

Построение известного графика $y=\frac{1}{x}$

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=\frac{1}{x}$ в график $y=\frac{\lvert k\rvert}{x}$
(деформация графика по оси OY $\left(\lvert k\rvert\neq 1\right)$)

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=\frac{\lvert k\rvert}{x}$ в график $y=\frac{k}{x}$
(зеркальное отражение относительно оси OX $\left(k<0\right)$)

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=\frac{k}{x}$ в график $y=\frac{k}{x-m}$
(параллельный перенос графика по оси OX на $\lvert m\rvert$ единиц)

$\Downarrow$

Преобразование графика $y=\frac{k}{x-m}$ в график $y=\frac{k}{x-m}+n$
(параллельный перенос графика по оси OY на $\lvert n\rvert$ единиц)

Итак, построение графика функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ можно свести к построению известного графика $y=\dfrac{1}{x}$ и его геометрическим преобразованиям. Следовательно, график дробно-линейной функции – гипербола.

Гипербола имеет асимптоты:

вертикальную $x=m$, т.е $x=-\dfrac{d}{c}$,

горизонтальную $y=n$, т.е. $y=\dfrac{a}{c}$.

Точку пересечения гиперболы с осью *OY* найдём, вычислив $y|_{x=0}$:
$y|_{x=0}=\dfrac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}=\dfrac{b}{d}\Rightarrow P\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$ – точка пересечения гиперболы с осью *OY*.

Аналогично, положив $y=0$, находим точку пересечения графика с осью *OX*, т.е. корни функции:

$$y=0\Rightarrow ax+b=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}.$$

☹ **Пример 25.** Построить график функции $y=\dfrac{3x-2}{2(x-1)}$.

😐 <u>*Решение*</u>. Преобразуем функцию к виду $y=\dfrac{k}{x-m}+n$:

$$y=\frac{3x-2}{2(x-1)}=\frac{3x-2-1+1}{2(x-1)}=\frac{(3x-3)+1}{2(x-1)}=\frac{3(x-1)+1}{2(x-1)}$$

$$\frac{3(x-1)+1}{2(x-1)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2(x-1)}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2}=\frac{0,5}{x-1}+\frac{3}{2}.$$

Алгоритм построения графика функции $y=\dfrac{0,5}{x-1}+\dfrac{3}{2}$ представлен на стр. 84, а сам процесс построения – на рис. 67 (стр. 85). ☺

График функции есть гипербола, которая имеет две асимптоты: вертикальную $x=1$ и горизонтальную $y=3/2$. Гипербола пересекает ось OY в точке, которую находим из условия:

$$y|_{x=0}=\frac{3\cdot 0-2}{2(0-1)}=\frac{-2}{-2}=1 \Rightarrow P(0;1).$$

Функция имеет единственный корень, который находим из уравнения:

$$3x-2=0 \Rightarrow x=2/3.$$

Построение известного графика $y=\dfrac{1}{x}$

$$\Downarrow$$

Преобразование графика $y=\dfrac{1}{x}$ в график $y=\dfrac{0,5}{x}$ (сжатие графика по оси OY в $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{1/2}=2$ раза)

$$\Downarrow$$

Преобразование графика $y=\dfrac{0,5}{x}$ в график $y=\dfrac{0,5}{x-1}$ (параллельный перенос по оси OX на $\lvert m \rvert=1$ вправо $(m>0)$)

$$\Downarrow$$

Преобразование графика $y=\dfrac{0,5}{x-1}$ в график $y=\dfrac{0,5}{x-1}+\dfrac{3}{2}$ (параллельный перенос по оси OY на $\lvert n \rvert=\dfrac{3}{2}$ вверх $(n>0)$)

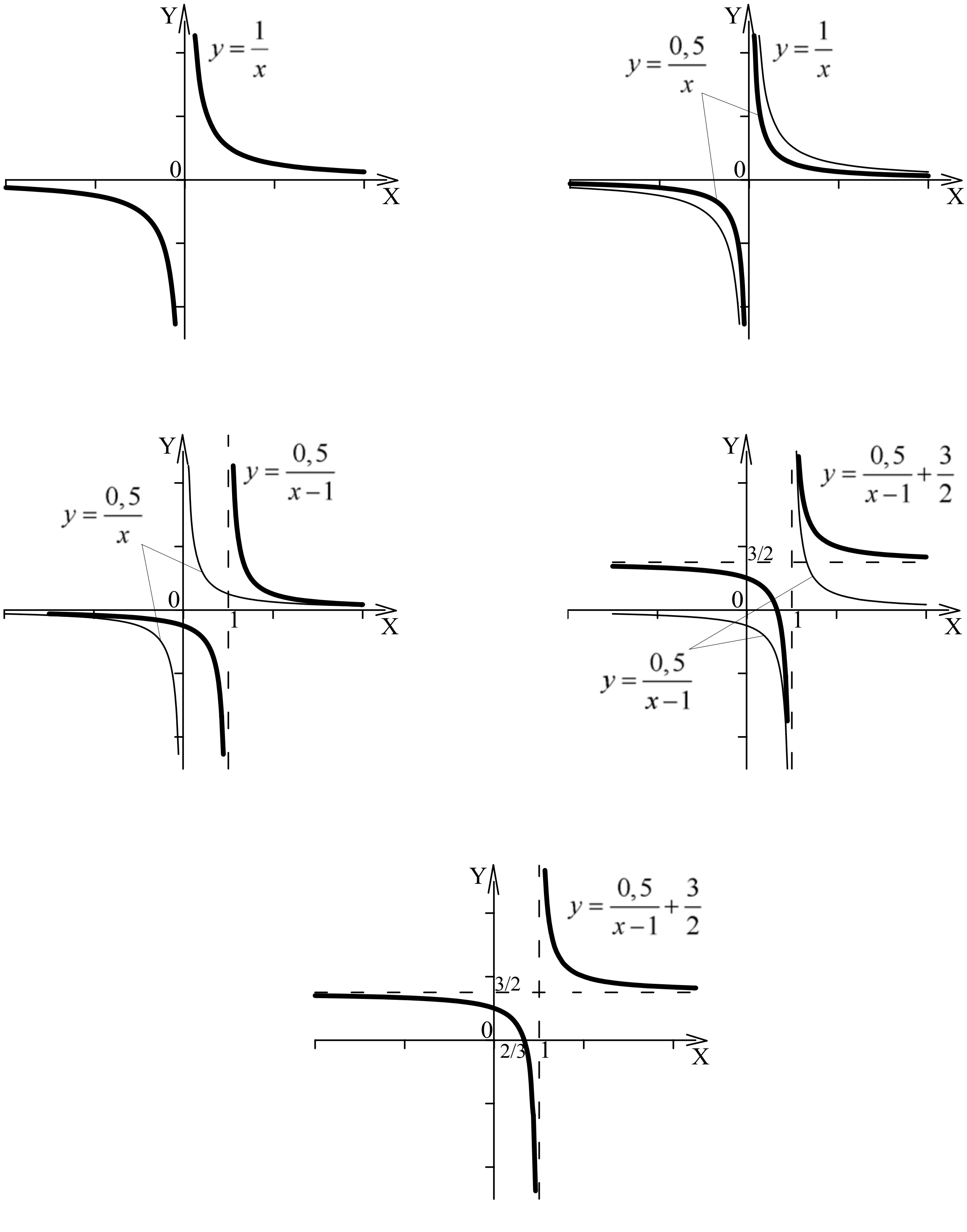


Рис. 67. Процесс построения графика дробно-линейной функции $y=\frac{3x-2}{2(x-1)}=\frac{0,5}{x-1}+\frac{3}{2}$ *методом преобразования графика функции* $y=\frac{1}{x}$

4. Преобразования графиков функций с модулем

4.1. Преобразования с модулем

1. Построение графика функции вида $y = |f(x)|$.

По определению модуля заданную функцию можно представить в виде

$$y = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{при} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Следовательно, чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, надо сначала построить график функции $y = f(x)$, а затем ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, отразить симметрично относительно оси абсцисс.

Чтобы построить график функции $y = \|f(x)\|$, надо сначала построить график функции $y = f(x)$, а затем ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, отразить симметрично относительно оси абсцисс (рис. 68).

☹ **Пример 26.** Построить график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$.

😐 *Решение.* Сначала надо построить график квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 3$.

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4.$$

Следовательно, можно построить график функции $y = \left(x-1\right)^2 - 4$, а затем отразить симметрично относительно оси абсцисс ту часть графика, где $f(x) < 0$ (рис. 68). ☺

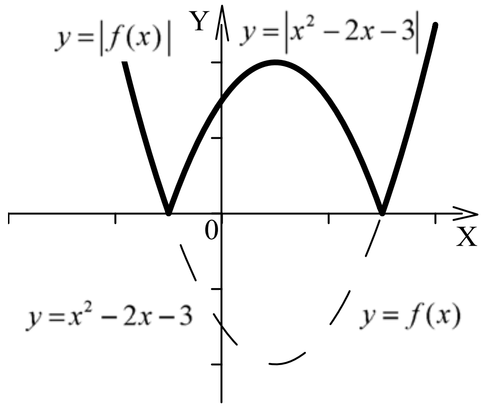


Рис. 68. Построение графика функции $y=\left|x^2-2x-3\right|$

2. Построение графика функции вида $y=f\left(|x|\right)$

Прежде всего покажем, что эта функция чётная. Действительно, $y(-x)=f\left(|-x|\right)=f\left(|x|\right)=y(x)$. Следовательно, $y(-x)=y(x)$ и построение графика такой функции сводится к следующему: сначала надо построить часть графика для положительных значений аргумента *x*, затем отразить эту часть графика симметрично относительно оси ординат OY.

Построение графика функции $y=f\left(|x|\right)$ можно объяснить и так.

По определению модуля функцию $y=f\left(|x|\right)$ можно представить в виде

$$f\left(|x|\right)=\left[\begin{array}{ll} f(x) & x\geq 0, \\ f(-x) & x<0. \end{array}\right.$$

Следовательно, для $x\geq 0$ график функции будет таким же, как и график функции $y=f(x)$. А для $x<0$ надо построить график $y=f(-x)$. Это можно сделать, отразив график $y=f(x)$ для $x\geq 0$ симметрично относительно оси OY.

Чтобы построить график функции $y=f\left(|x|\right)$, надо сначала построить часть графика для положительных значений аргумента *x*, затем отразить эту часть графика симметрично относительно оси ординат OY (рис. 69).

☹ **Пример 27.** Построить график функции $y = x^2 - 2 \cdot |x| - 3$.

☺ *Решение*. Рассмотрим

$$y(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot |x| - 3 = x^2 - 2 \cdot |x| - 3 = y(x).$$

Следовательно, функция чётная. Построим график функции $y = x^2 - 2 \cdot x - 3 = (x-1)^2 - 4$, а затем отобразим правую ветвь графика (для $x \geq 0$) симметрично относительно оси ординат. График функции составляют обе ветви, симметричные относительно оси ординат (рис. 69). ☺

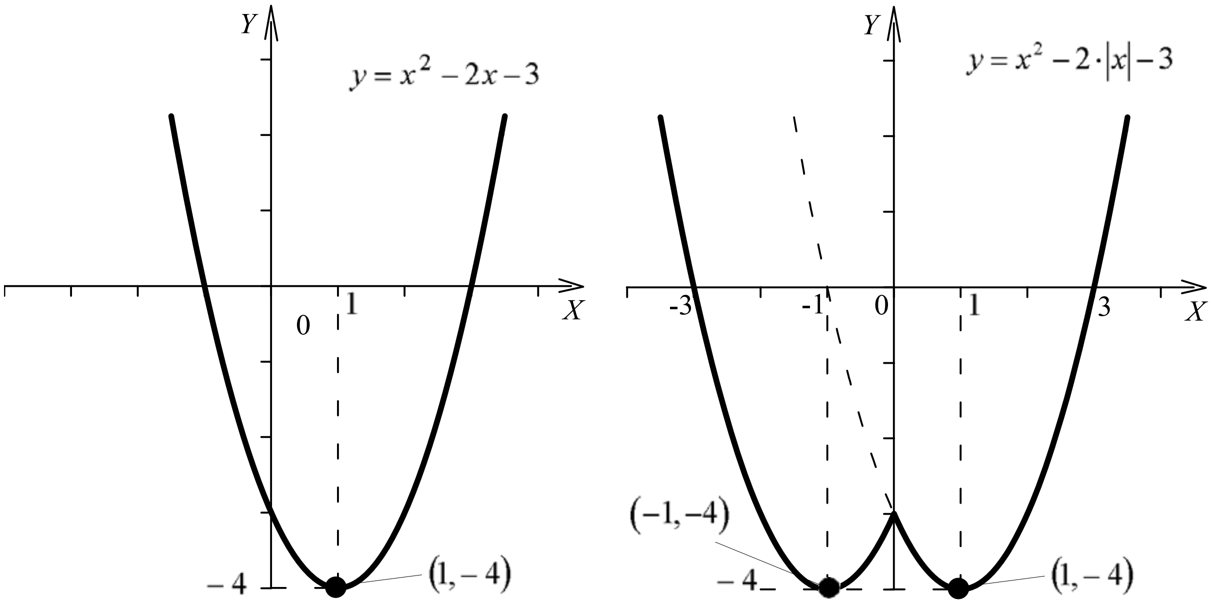


Рис. 69. Построение графика функции $y = x^2 - 2 \cdot |\, x \,| - 3$

3. Построение графика функции вида $y = \left| f\left(|\, x \,| \right) \right|$.

Можно предложить два алгоритма построения этого графика:

$$1)\ f(x) \to f\left(|x|\right) \to \left|f\left(|x|\right)\right|$$

или

$$2)\ f(x) \to \left|f\left(x\right)\right| \to \left|f\left(|x|\right)\right|.$$

Для построения этого графика надо использовать правила построения графиков функций $y = f\left(|x|\right)$ и $y = \left|f(x)\right|$.

Чтобы построить график функции $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$, надо использовать правила построения графиков функций $y=f\left(|x|\right)$ и $y=|f(x)|$ в любом порядке (рис. 70, 71).

☹ **Пример 28.** Построить график функции $y=\left|x^2-2\cdot|x|-3\right|$.

😐 <u>*Решение.*</u> Построим сначала график квадратного трехчлена $y=x^2-2x-3$. Затем построим искомый график двумя способами:

1) график $y=x^2-2x-3$ $\Rightarrow$ график $y=\left|x^2-2x-3\right|$ $\Rightarrow$ график $y=\left||x|^2-2\cdot|x|-3\right|$;

2) график $y=x^2-2x-3$ $\Rightarrow$ график $y=|x|^2-2\cdot|x|-3$ $\Rightarrow$ график $y=\left||x|^2-2\cdot|x|-3\right|$.

1-й способ. Используя график квадратного трехчлена $y=x^2-2x-3$, построим график функции с модулем $y=\left|x^2-2x-3\right|$. Для этого отрицательную часть графика (где $y\le 0$) отобразим симметрично относительно оси абсцисс OX (рис. 70а). Затем, чтобы получить график искомой функции $y=\left||x|^2-2\cdot|x|-3\right|$, ту часть графика, которая соответствует положительным значениям аргумента ($x\ge 0$, рис. 70б) отобразим симметрично относительно оси ординат OY (рис. 70в).

2-й способ. Используя график квадратного трехчлена $y=x^2-2x-3$, построим график функции $y=|x|^2-2\cdot|x|-3$. Для этого ту часть графика функции $y=x^2-2x-3$, которая соответствует положительным значениям аргумента ($x\ge 0$), отобразим симметрично относительно оси ординат OY (рис. 71а). Затем, чтобы получить график искомой функции $y=\left||x|^2-2\cdot|x|-3\right|$, отрицательную часть графика (где $y\le 0$) отобразим симметрично относительно оси абсцисс OX (рис. 71б).

☺

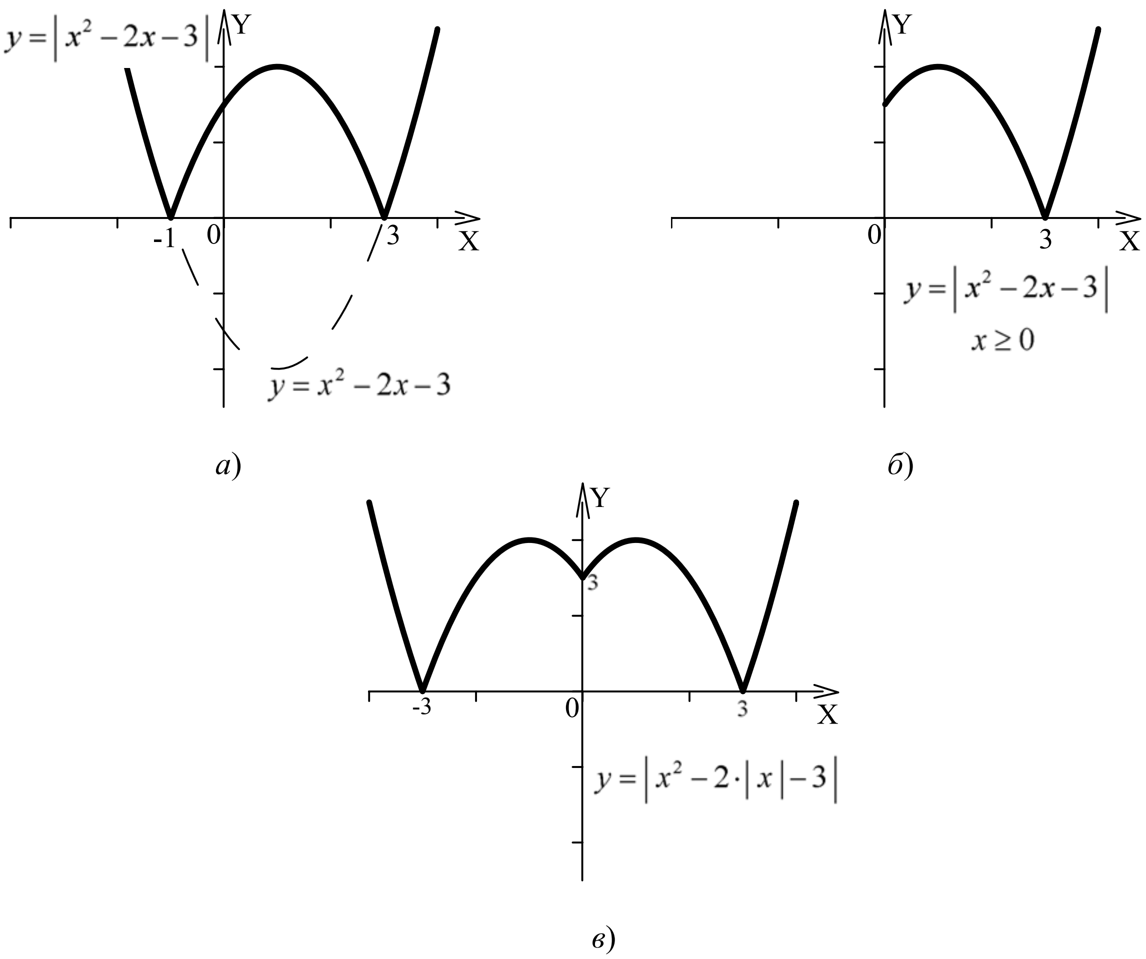


Рис. 70. Построение графика функции $y=\left|x^2-2\cdot\left|x\right|-3\right|$ *первым способом*

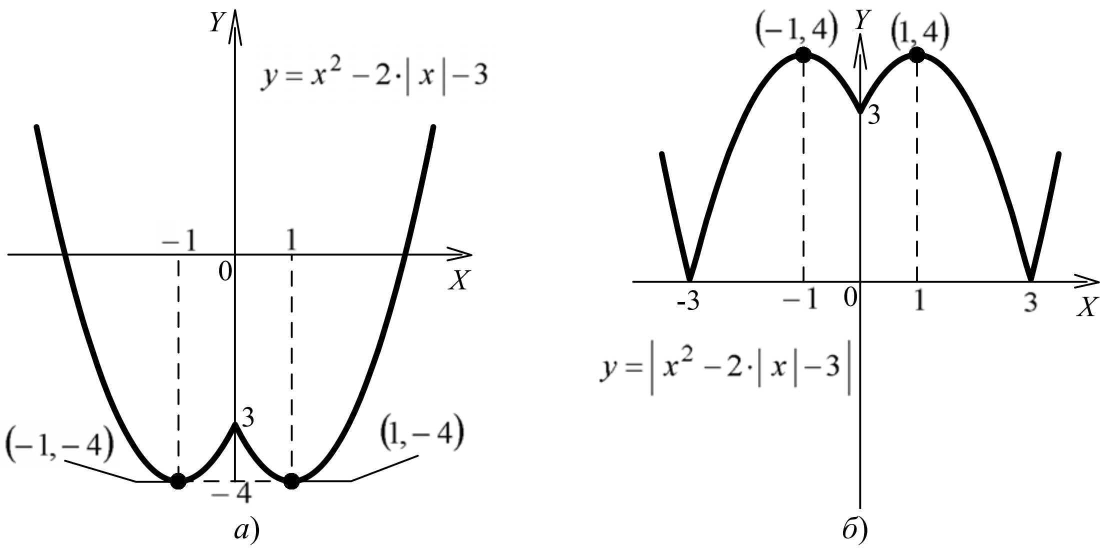


Рис. 71. Построение графика функции $y=\left|x^2-2\cdot\left|x\right|-3\right|$ *вторым способом*

4. Построение графиков функций, которые содержат знак модуля частично (аргумент может входить со знаком модуля и без него).
Прежде чем строить график такой функции, надо в соответствии с правилами раскрыть знак модуля и выполнить построение графика на отдельных интервалах.

☹ **Пример 29.** Построить график функции $y = |x| + x - 2$.

😐 *Решение*. Раскрыв знак модуля, функцию $y = |x| + x - 2$ можно представить в виде:

$$y = \left[\begin{array}{ll} x + x - 2 = 2x - 2, & \text{если } x \geq 0 \\ -x + x - 2 = -2, & \text{если } x < 0 \end{array}\right.$$

График функции изображён на рис. 72.

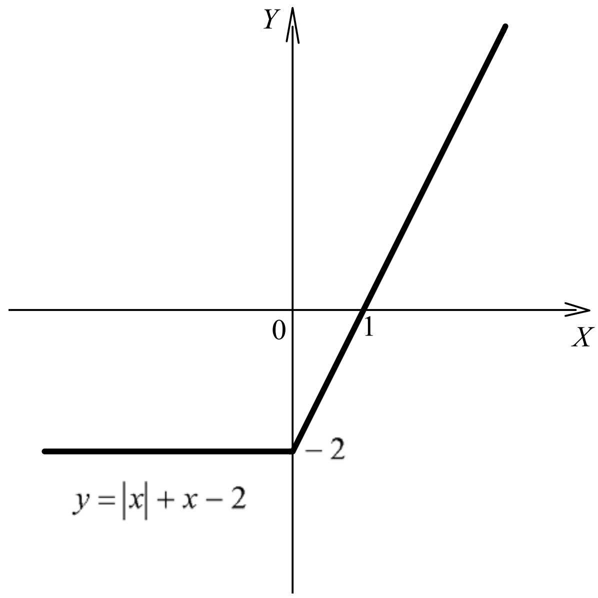


Рис. 72. График функции $y = |x| + x - 2$

4.2. Задачи на определение формулы функции по её графику

В подавляющем большинстве случаев подобрать формулу функции по её уравнению практически невозможно. Однако иногда, когда функция получена с помощью несложных преобразований элементарной функции, можно решить и такую задачу.

☹ **Пример 30.** По графику функции (рис. 73) подобрать её формулу.

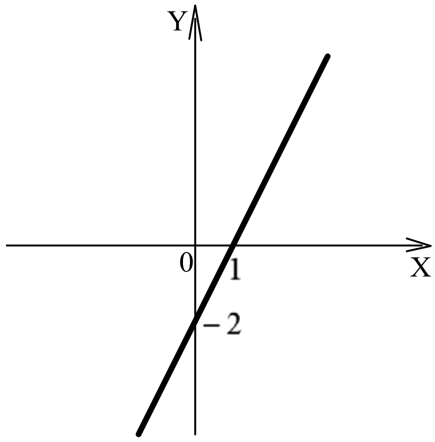


Рис. 73. График функции к примеру 30

😐 *Решение.* 1) График неизвестной функции – прямая. Будем искать ответ в виде $y = kx + b$.

2) По графику можем определить две точки, координаты которых должны удовлетворять уравнению этой функции. Это точки $(0;-2)$ и $(1;0)$. Подставим их координаты в уравнение $y = kx + b$ и получим уравнений

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 1 + b, \\ -2 = k \cdot 0 + b. \end{cases}$$

Решив систему $\begin{cases} 0 = k \cdot 1 + b \\ -2 = k \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -b \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = -2 \end{cases}$, получим уравнение $y = 2x - 2$.

☺ Ответ. $y = 2x - 2$.

☹ **Пример 31.** По графику функции (рис. 74) подобрать её формулу.

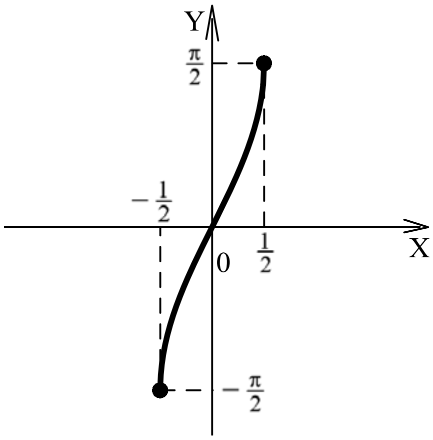


Рис. 74. График функции к примеру 31

☺ <u>*Решение*</u>. 1) Обратим внимание на то, что график ограничен точками $\left(-0{,}5;-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(0{,}5;\frac{\pi}{2}\right)$. Мы знаем только две функции, которые имеют похожие графики – $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ (см. раздел 5.3). Из этих двух функций монотонно возрастает и проходит через начало координат график функции $y = \arcsin x$. Его мы и возьмём в качестве базового графика.

2) Не удовлетворяет нашему базовому уравнению только область определения. У функции $y = \arcsin x$ $D(f) = [-1;1]$, а у нашей функции $D(f) = [-0{,}5;\ 0{,}5]$. Мы знаем преобразование, которое «отвечает» за растяжение и сжатие графика функции по оси *OX*: это преобразование $f(Kx)$. В нашем случае имеет место сжатие в 2 раза, следовательно, $K = 2$.

Получим уравнение $y = \arcsin 2x$.

☺ <u>Ответ</u>. $y = \arcsin 2x$.

☹ **Пример 32.** По графику функции (рис. 75) подобрать её формулу.

☺ <u>*Решение*</u>. 1) График, изображённый на рисунке – парабола. Следовательно, мы имеем дело с квадратичной функцией. Её уравнение имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$. Так как нам известны координаты только двух точек, а найти требуется три коэффициента, то решить задачу, просто составив систему, нам не удастся. Однако мы знаем ещё один вид записи формулы квадратичной функции: $y = a(x-m)^2 + n$, где $(-m; n)$ – координаты вершины параболы, которые по условию задачи нам известны. Таким образом, в качестве базового уравнения лучше выбрать $y = a(x-m)^2 + n$.

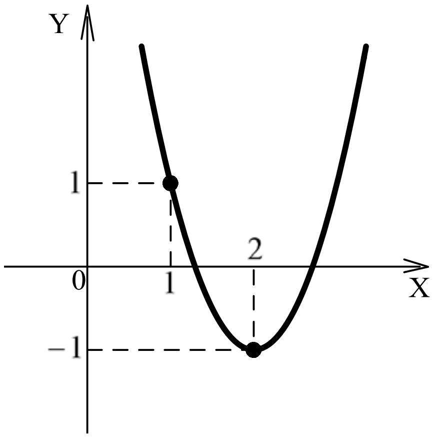


Рис. 75. График функции к примеру 32

2) вершина параболы имеет координаты $(2;-1)$, следовательно, $-m = 2$ или $m = -2$ и $n = -1$. Получим уравнение $y = a(x-2)^2 - 1$. Чтобы найти коэффициент *a*, подставим в уравнение координаты второй известной точки $(1;1)$. Получим: $1 = a(1-2)^2 - 1 \Rightarrow a = 2$.

В результате мы получим уравнение $y = 2(x-2)^2 - 1$.

☺ Ответ. $y = 2(x-2)^2 - 1$.

☹ **Пример 33.** По графику функции (рис. 76) подобрать её формулу.
😐 *Решение*. 1) На первый взгляд график этой функции не похож ни на один из графиков элементарных функций. Заметим однако, что он изображён только в верхней полуплоскости. Можно предположить, что в уравнении присутствует преобразование $y = |f(x)|$. Тогда график функции $y = f(x)$ будет иметь вид, показанный на рис. 77а или 77б. В обоих случаях график – гипербола. Следовательно, мы имеем дело с дробно-линейной функцией. Уравнение будет иметь вид: $y = \dfrac{k}{x-m} + n$, где *n* – сдвиг по оси *OY* на *n* единиц, *m* – сдвиг по оси *OX* на *m* единиц.

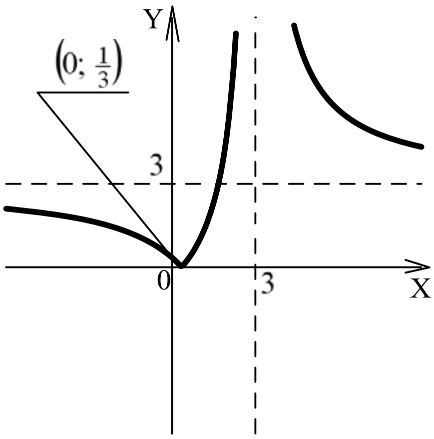
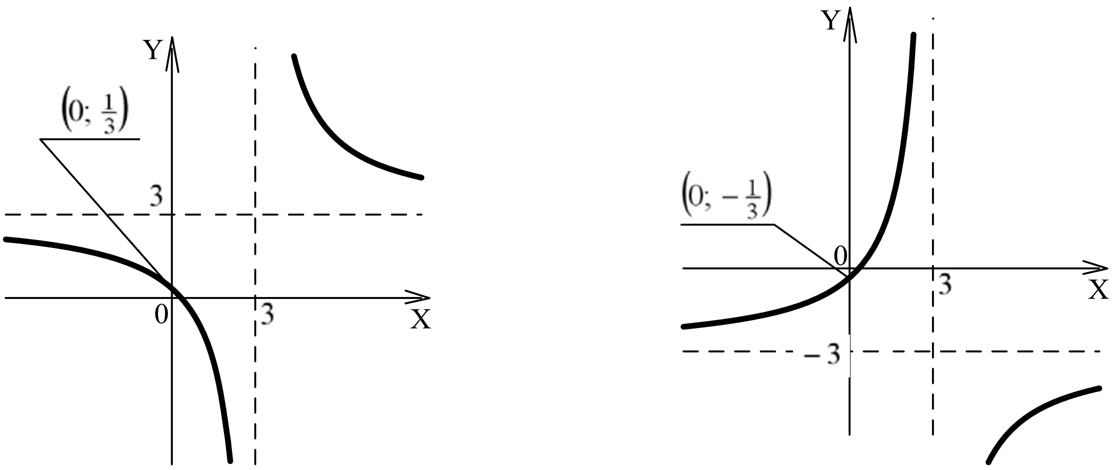


Рис. 76. График функции к примеру 33



а) *б)*

Рис. 77. Варианты графиков функций, не содержащих модуля, к примеру 33

2) Рассмотрим функцию, график которой изображён на рис. 77а. Так как график сдвинут по оси OY на 3 единицы вверх, то $n=3$, так как график сдвинут по оси OX на 3 единицы вправо, то $m=3$. Получим $f(x)=\dfrac{k}{x-3}+3$. Чтобы определить *k,* подставим в это уравнение координаты известной по условию задачи точки $\left(0;\,\dfrac{1}{3}\right)$. Тогда

$$\frac{1}{3}=\frac{k}{0-3}+3 \Rightarrow \frac{1}{3}=-\frac{k}{3}+3 \ \Rightarrow 1=-k+9 \ \Rightarrow k=8.$$

Таким образом $f(x)=\dfrac{8}{x-3}+3$ и, с учётом модуля, $y=\left|\dfrac{8}{x-3}+3\right|$.

3) Рассмотрим функцию, график которой изображён на рис. 77б. Аналогично предыдущему рассуждению получим, что $n=-3$ и $m=3$. Получим $f(x)=\dfrac{k}{x-3}-3$. Чтобы определить *k,* подставим в это уравнение координаты известной нам точки $\left(0;\,-\dfrac{1}{3}\right)$. Тогда

$$-\frac{1}{3}=\frac{k}{0-3}-3 \Rightarrow -\frac{1}{3}=-\frac{k}{3}-3 \Rightarrow -1=-k-9 \Rightarrow k=-8.$$

Таким образом $f(x)=\dfrac{-8}{x-3}-3$ и, с учётом модуля, $y=\left|\dfrac{-8}{x-3}-3\right|$.

☺ <u>Ответ</u>. $y=\left|\dfrac{8}{x-3}+3\right|$ и / или $y=\left|\dfrac{-8}{x-3}-3\right|$

4.3. Задания для самостоятельной работы

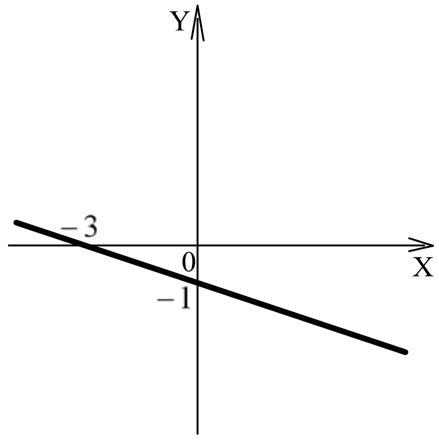
Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=-2|x|+|x+3|$;
2) $y=-x^2-2x+3$; $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
3) $y=-\left|x^2-2x+3\right|$;
4) $y=-x^2-2|x|+3$;
5) $y=\dfrac{x+5}{x-2}$;
6) $y=\left|\dfrac{x+5}{x-2}\right|$;
7) $y=\left|\dfrac{|x|+5}{|x|-2}\right|$;
8) $y=\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}$;
9) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$;
10) $y=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right|$;
11) $y=\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{2}{|x|}$;
12) $y=\left|\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{2}{|x|}\right|$.

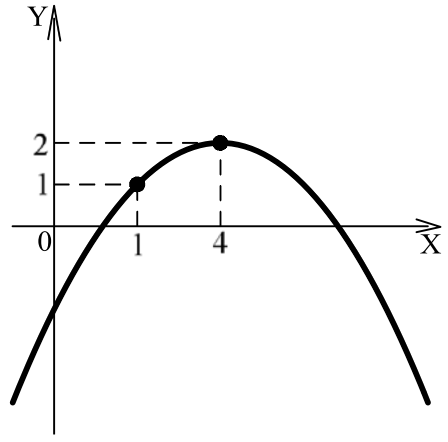
(продолжение – на следующей странице)

Определить аналитические формулы функций по их графикам:

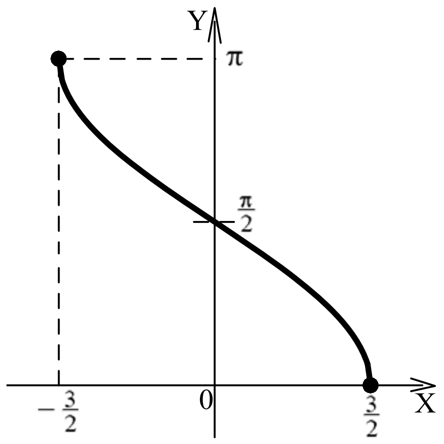
13)



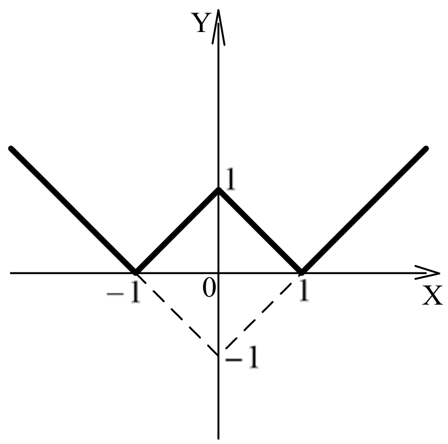
14)



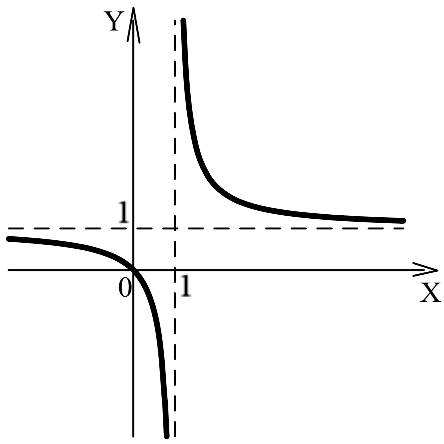
15)



16)



17)

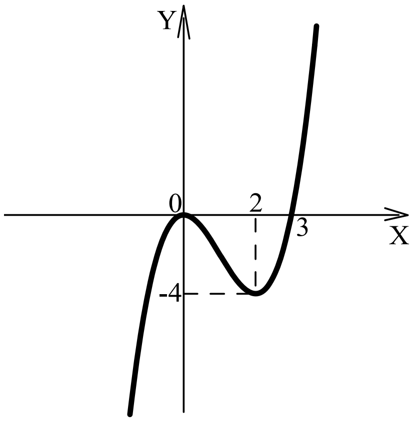


Ответы см. на стр. 101 – 103.

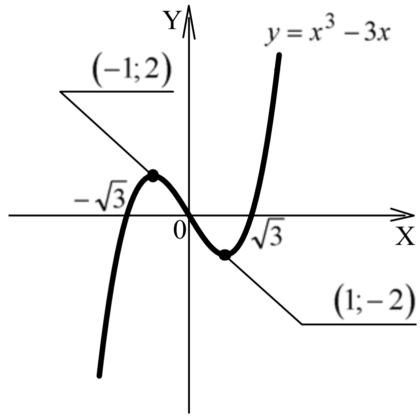
5. Ответы к заданиям

5.1. Ответы к разделу 2.5 Задания для самостоятельной работы (стр. 65)

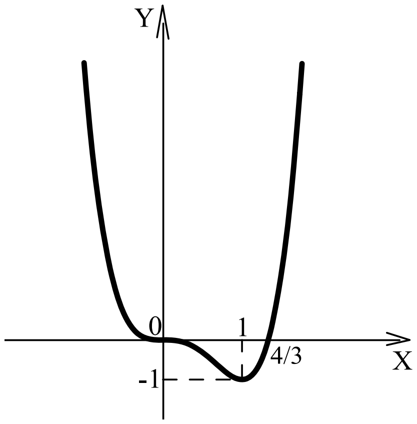
1) $y = x^3 - 3x^2$



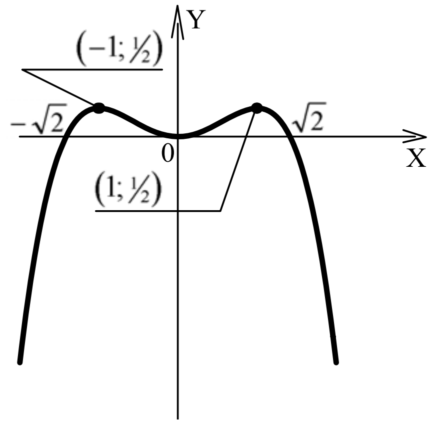
2) $y = x^3 - 3x$



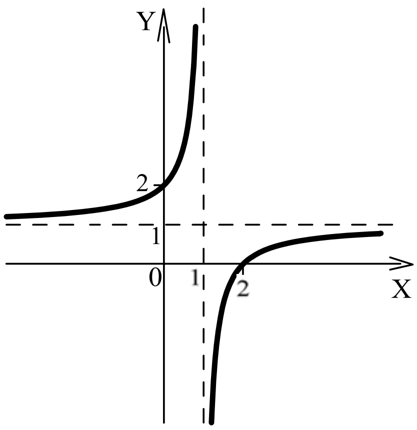
3) $y = 3x^4 - 4x^3$



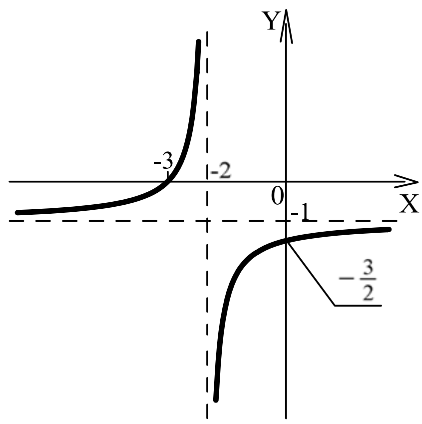
4) $y = -\dfrac{1}{2}x^4 + x^2$



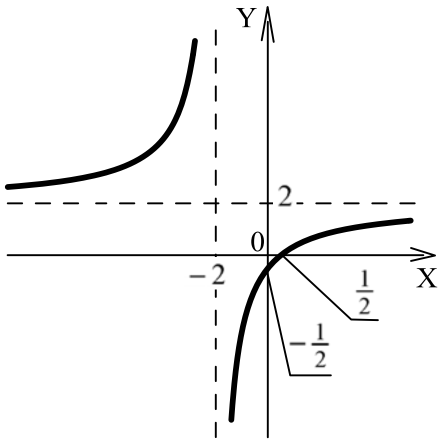
5) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$



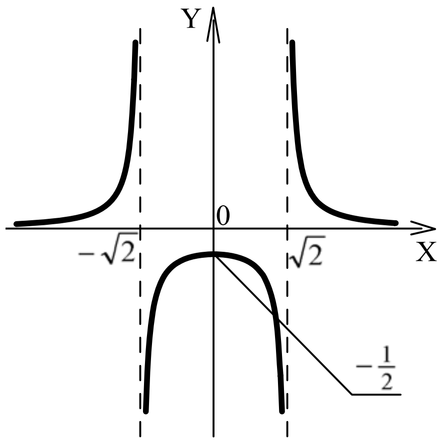
6) $y = \dfrac{x+3}{x+2}$



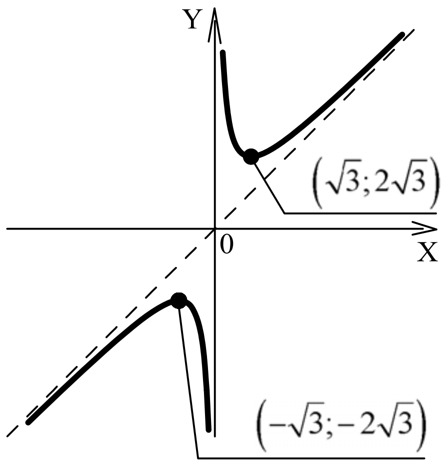
7) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$



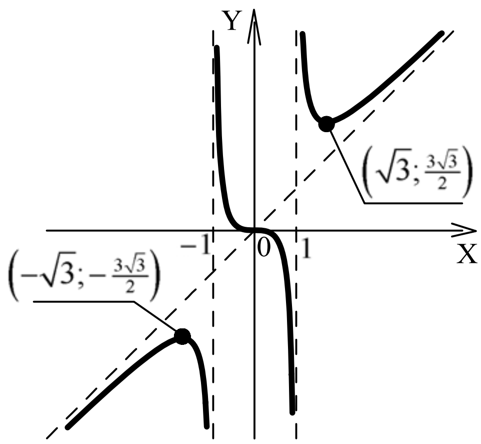
8) $y = \dfrac{1}{x^2-2}$



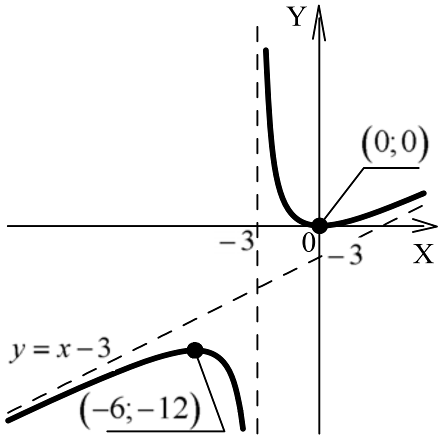
9) $y = x + \dfrac{3}{x}$



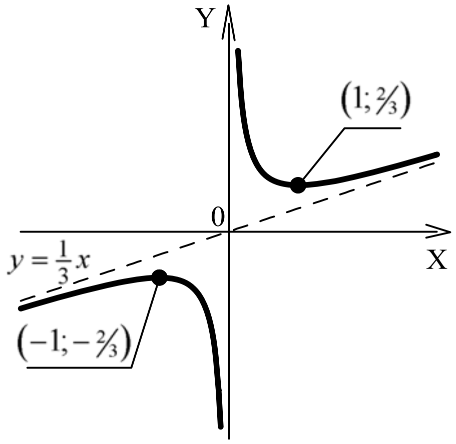
10) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$



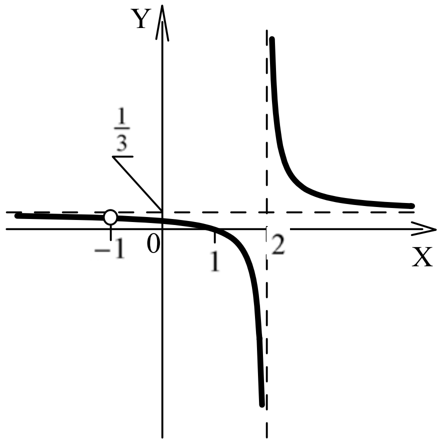
11) $y = \dfrac{x^2}{x+3}$



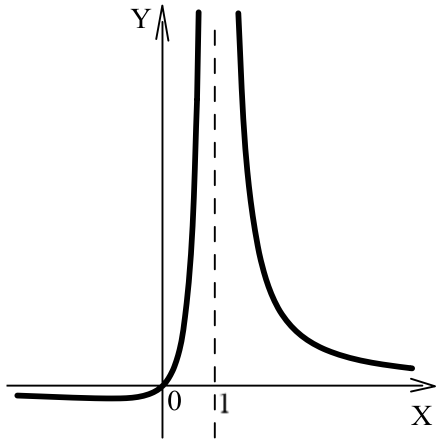
12) $y = \dfrac{x^2+1}{3x}$



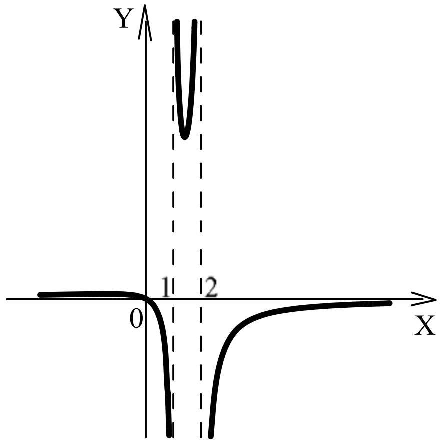
13) $y=\dfrac{x^2-1}{3(x-2)(x+1)}$



14) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

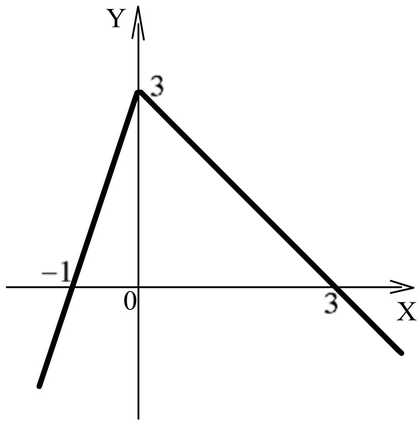


15) $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}$

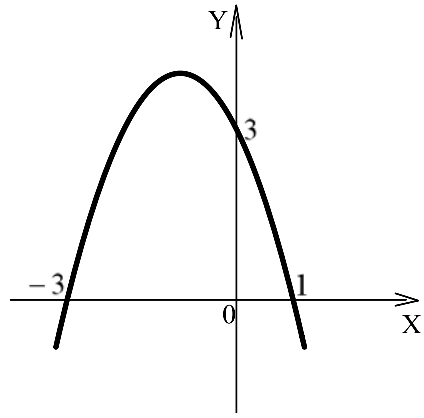


5.2. Ответы к разделу 4.3. Задания для самостоятельной работы (стр. 96)

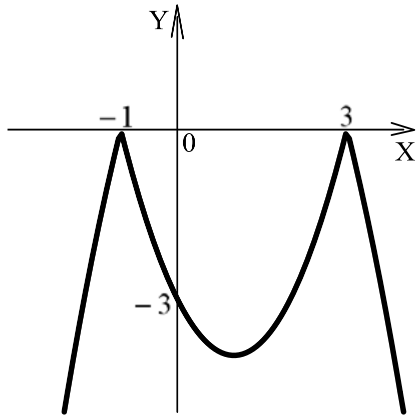
1) $y = -2|x| + |x+3|$



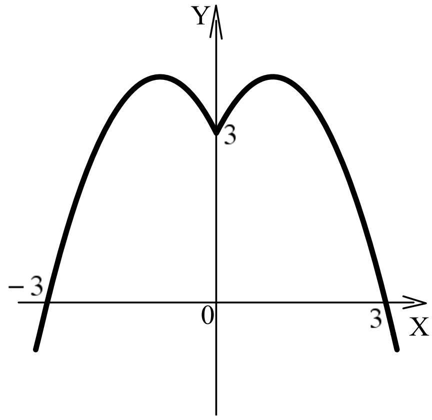
2) $y = -x^2 - 2x + 3$



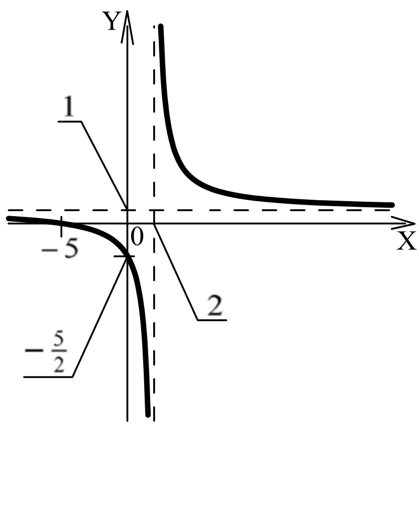
3) $y = -|x^2 - 2x + 3|$



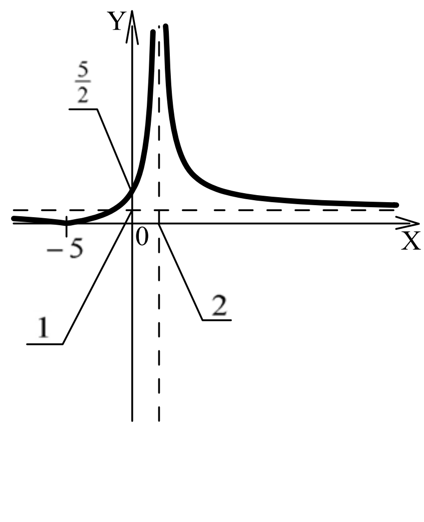
4) $y = -x^2 - 2|x| + 3$



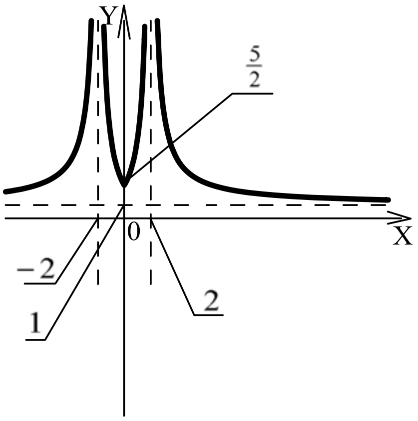
5) $y = \frac{x+5}{x-2}$



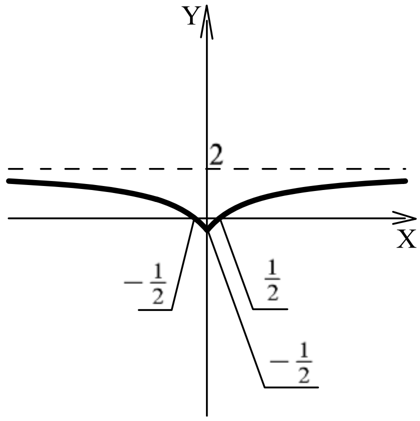
6) $y = \left|\frac{x+5}{x-2}\right|$



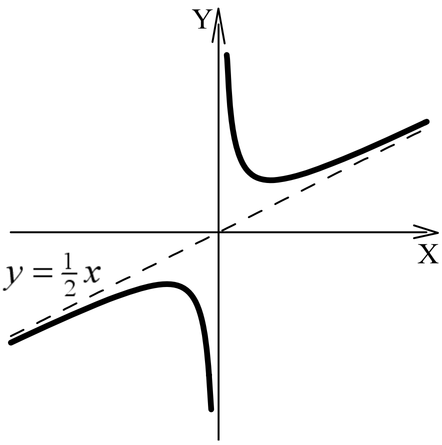
7) $y=\left|\dfrac{|x|+5}{|x|-2}\right|$



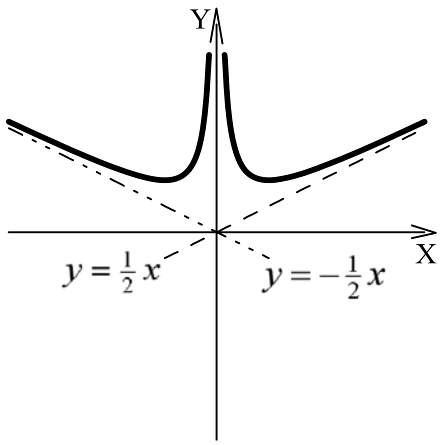
8) $y=\dfrac{2|x|-1}{|x|+2}$



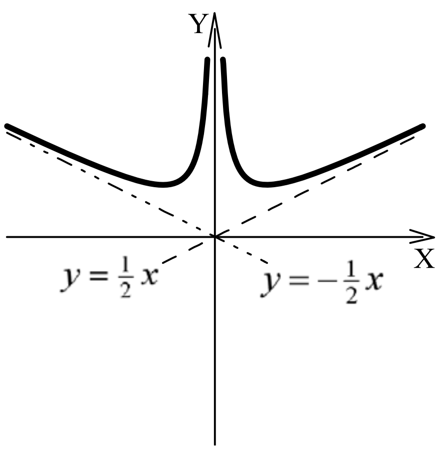
9) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$



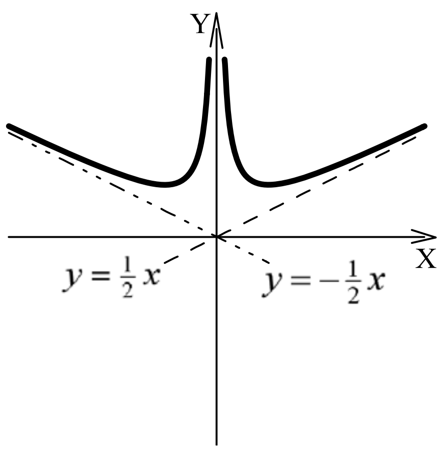
10) $y=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right|$



11) $y=\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{2}{|x|}$



12) $y=\left|\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{2}{|x|}\right|$



13) $y=-\frac{1}{3}x-1$; 14) $y=-\frac{1}{4}(x-4)^2+2$; 15) $y=\arccos\left(\frac{2x}{3}\right)$;

16) $y=\left|\,|x|-1\,\right|$; 17) $y=\frac{1}{x-1}+1$.

6. Приложения

6.1. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция $y = a^x$

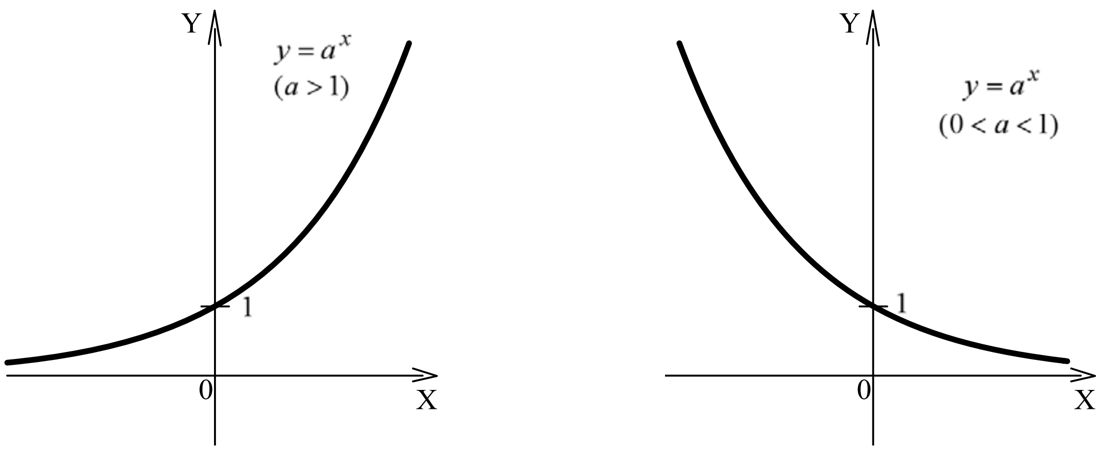


Рис. 78. Графики показательной функции $y = a^x$

1. Область определения. $D(y) = R$.

2. Множество значений. $E(y) = (0;+\infty)$.

3. Корни функции. Корней нет.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P(0;1)$

5. Свойство чётности. Функция общего вида.

6. Промежутки монотонности.

$a > 1$	
x	$(-\infty;+\infty)$
$y = a^x$	↗

$0 < a < 1$	
x	$(-\infty;+\infty)$
$y = a^x$	↘

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.

Горизонтальные асимптоты: $y = 0$

($a > 1$ – левосторонняя;
$0 < a < 1$ – правосторонняя).

Наклонные асимптоты: нет.

8. График. Графики функции $y = a^x$ при различных основаниях a изображены на рис. 78.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$

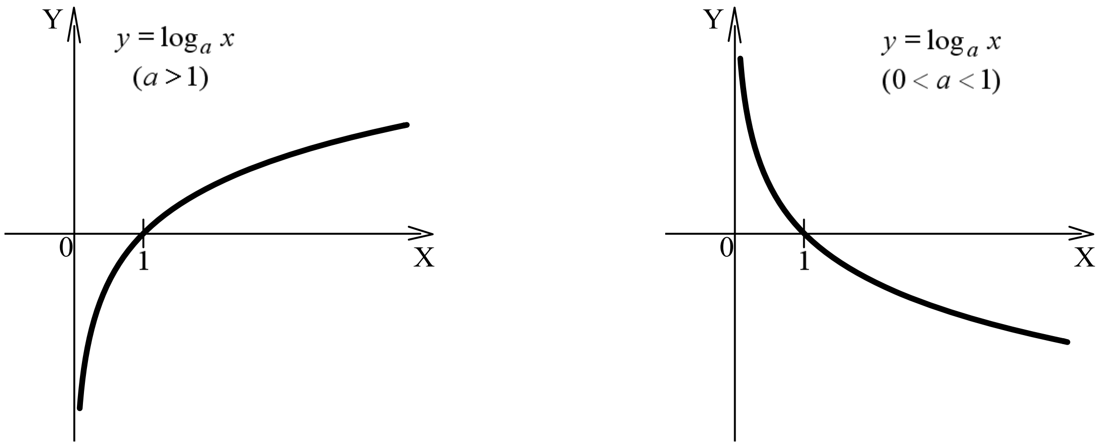


Рис. 79. Графики логарифмической функции $y = \log_a x$

1. Область определения. $D(y) = (0; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = R$.

3. Корни функции. $x = 1$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. Ось OY график функции не пересекает.

5. Свойство чётности. Функция общего вида.

6. Промежутки монотонности.

$a > 1$	
x	$(0; +\infty)$
$y = \log_a x$	↗

$0 < a < 1$	
x	$(0; +\infty)$
$y = \log_a x$	$\searrow$

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: $x = 0$
($\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ при $a > 1$;
$\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ при $0 < a < 1$).
Горизонтальные асимптоты: нет.
Наклонные асимптоты: нет.

8. График. Графики функции $y = \log_a x$ при различных основаниях a изображены на рис. 79.

6.2. Тригонометрические функции

Функция $y = \sin x$

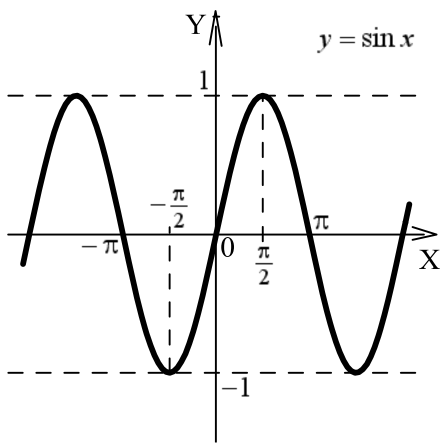


Рис. 80. График функции $y = \sin x$

1. Область определения. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = [-1; +1]$.

3. Корни функции. $x = \pi k$, $k \in Z$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P(0; 0)$.

5. Свойство чётности. Функция нечётная.

6. Промежутки монотонности.

x	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$
y	$\nearrow$	$\searrow$

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.
Горизонтальные асимптоты: нет.
Наклонные асимптоты: нет.

8. Периодичность. Функция периодическая с (наименьшим) периодом 2π.

9. График. График функции $y=\sin x$ изображён на рис. 80.

Функция $y=\cos x$

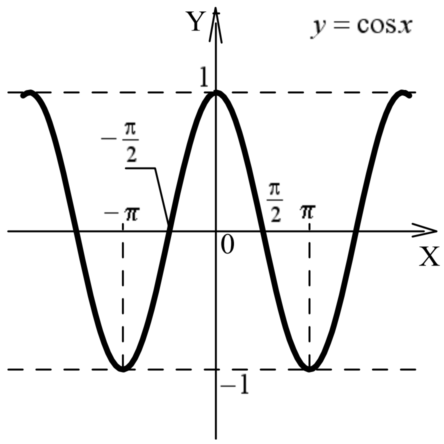


Рис. 81. График функции $y=\cos x$

1. Область определения. $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2. Множество значений. $E(y)=[-1;+1]$.

3. Корни функции. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P(0;1)$.

5. Свойство чётности. Функция чётная.

6. Промежутки монотонности.

x	$\left[-\pi+2\pi k; 2\pi k\right]$	$\left[2\pi k; \pi+2\pi k\right]$
y	↗	↘

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.
Горизонтальные асимптоты: нет.
Наклонные асимптоты: нет.

8. Периодичность. Функция периодическая с (наименьшим) периодом 2π.

9. График. График функции $y=\cos x$ изображён на рис. 81.

Функция $y=\operatorname{tg} x$

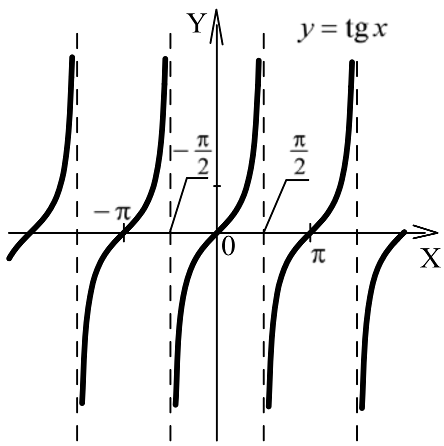


Рис. 82. График функции $y=\operatorname{tg} x$

1. Область определения. $D(y)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

2. Множество значений. $E(y)=(-\infty;+\infty)$.

3. Корни функции. $x=\pi k$, $k\in Z$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P(0;0)$.

5. Свойство чётности. Функция нечётная.

6. Промежутки монотонности.

x	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$,

	$k \in Z$
y	↗

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: $y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Горизонтальные асимптоты: нет.

Наклонные асимптоты: нет.

8. Периодичность. Функция периодическая с (наименьшим) периодом π.

9. График. График функции $y = \operatorname{tg} x$ изображён на рис. 82.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

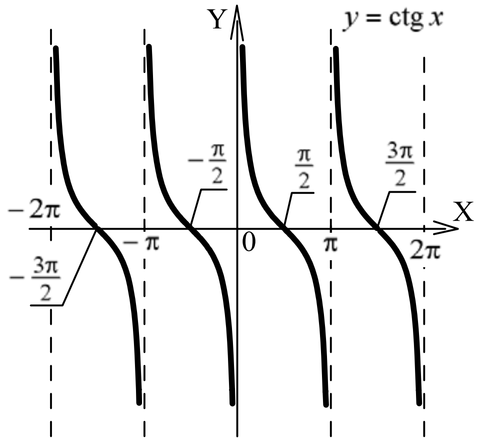


Рис. 83. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. Область определения. $D(y) = (\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

2. Множество значений. $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3. Корни функции. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. Ось OY график функции не пересекает.

5. Свойство чётности. Функция нечётная.

6. Промежутки монотонности.

x	$(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$
y	↘

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: $y = \pi k$, $k \in Z$.

Горизонтальные асимптоты: нет.

Наклонные асимптоты: нет.

8. Периодичность. Функция периодическая с (наименьшим) периодом π.

9. График. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображён на рис. 83.

6.3. Обратные тригонометрические функции

Функция $y = \arcsin x$

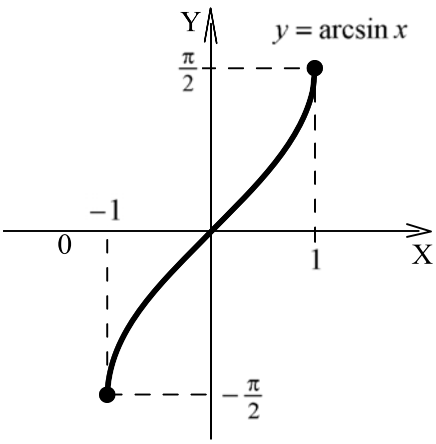


Рис. 84. График функции $y = \arcsin x$

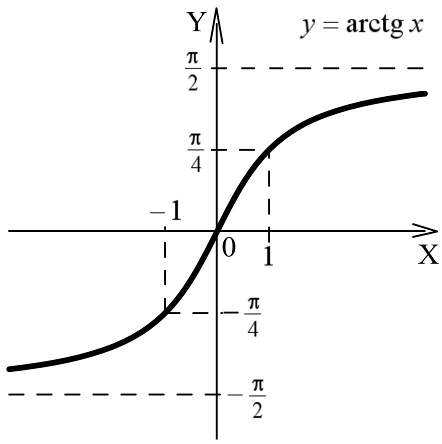


Рис. 85. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. Область определения. $D(y) = [-1; +1]$.

2. Множество значений. $E(y) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Корни функции. $x = 0$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P(0; 0)$.

5. Свойство чётности. Функция нечётная.

6. Промежутки монотонности.

x	$[-1; +1]$
$y = \arcsin x$	↗

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.

Горизонтальные асимптоты: нет.

Наклонные асимптоты: нет.

8. График. График функции $y = \arcsin x$ изображён на рис. 84.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$

1. Область определения. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Корни функции. $x = 0$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P(0; 0)$.

5. Свойство чётности. Функция нечётная.

6. Промежутки монотонности.

x	$(-\infty; +\infty)$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\nearrow$

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.

Горизонтальные асимптоты: $y = \frac{\pi}{2}$ – правосторонняя,

$y = -\frac{\pi}{2}$ – левосторонняя.

Наклонные асимптоты: нет.

8. График. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображён на рис. 85.

Функция $y = \arccos x$

1. Область определения. $D(y) = [-1; +1]$.

2. Множество значений. $E(y) = [0; \pi]$.

3. Корни функции. $x = 1$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

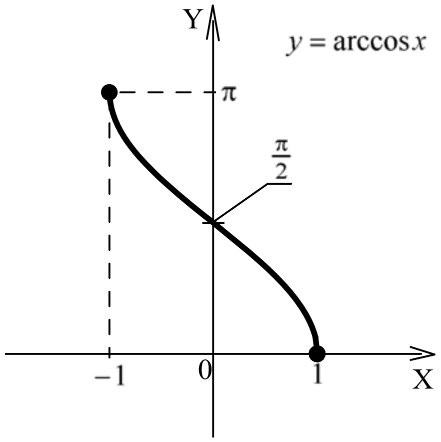


Рис. 86. График функции $y = \arccos x$

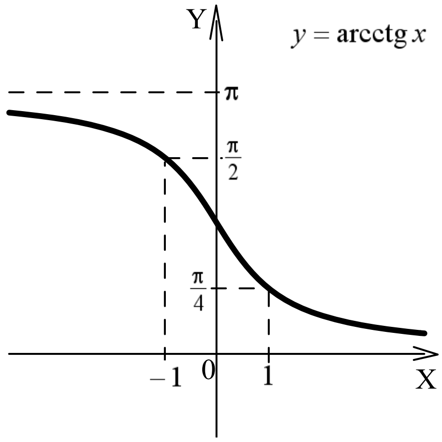


Рис. 87. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

5. Свойство чётности. Функция общего вида.
Полезно знать следующее свойство функции $y = \arccos x$:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x).$$

6. Промежутки монотонности.

x	$[-1; +1]$
$y = \arccos x$	↘

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.
Горизонтальные асимптоты: нет.
Наклонные асимптоты: нет.

8. График. График функции $y = \arccos x$ изображён на рис. 86.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

1. Область определения. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = (0; \pi)$.

3. Корни функции. $x = 0$.

4. Точка пересечения с осью *OY*. $P\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Свойство чётности. Функция общего вида.
Полезно знать следующее свойство функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}(x).$$

6. Промежутки монотонности.

x	$(-\infty; +\infty)$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$\searrow$

7. Асимптоты. Вертикальные асимптоты: нет.

Горизонтальные асимптоты: $y = 0$ – правосторонняя,

$y = \pi$ – левосторонняя.

Наклонные асимптоты: нет.

8. График. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображён на рис. 87.

Библиографический список

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.] – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 384 с.

2. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин – 4-е изд. – М.: Дрофа, 2007. – 285 с.

3. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин – 5-е изд. – М.: Дрофа, 2005. – 395 с.

Оглавление

СУРЫГИН Александр Игоревич
ИЗОТОВА Екатерина Фёдоровна
НОВИКОВА Ольга Анатольевна
ЧАЙКИНА Тамара Алексеевна

Математика. Элементарные функции и их графики.

Учебное пособие

Под ред. А.И. СУРЫГИНА

Корректор *М.Г. Крашенникова*

Оригинал-макет подготовлен авторами

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать Формат 60×84/16
Уч.-изд.л. 7,25 Усл.печ.л. 7,25 Тираж 100 Заказ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета,
член Издательско-полиграфической ассоциации
университетов России.
Адрес университета и издательства:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.