

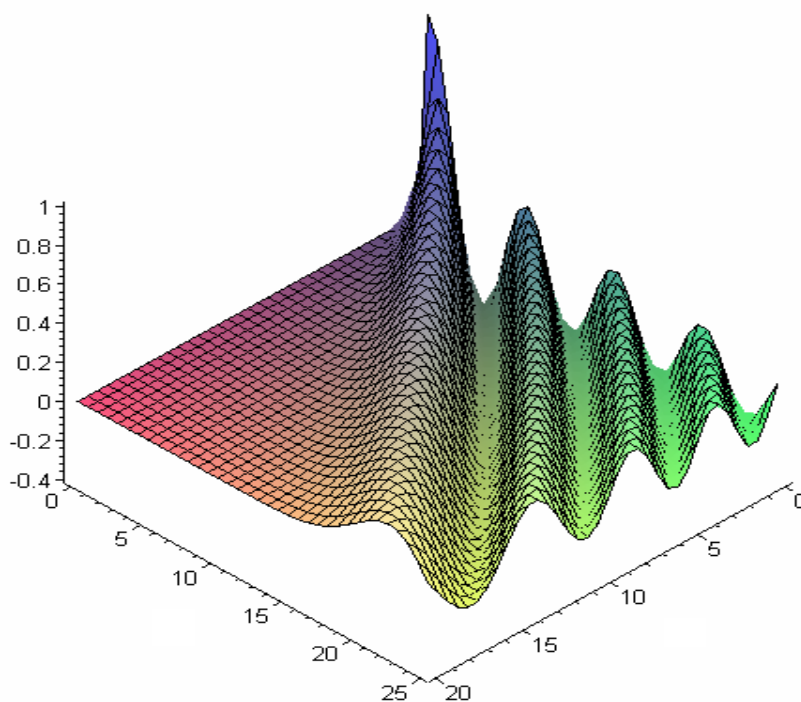
**Федеральное агентство по образованию**  
**САНКТ – ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

***МАТЕМАТИКА***  
***В ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ***

***К.Г. Куликов, А.Н. Фирсов***

**Уравнения и методы математической физики**  
**I. Классические модели**



**Санкт - Петербург**

**Издательство Политехнического университета**

**2009**

**Федеральное агентство по образованию**  
**САНКТ – ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

***МАТЕМАТИКА***  
***В ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ***

***К.Г. Куликов, А.Н. Фирсов***

**Уравнения и методы математической физики**  
**I. Классические модели**

**Санкт - Петербург**

**Издательство Политехнического университета**

**2009**

УДК 517(075.8)  
ББК 22.16я73  
А50

**Куликов К.Г., Фирсов А.Н.** Уравнения и методы математической физики. I. Классические модели /Под. ред. В.Н. Козлова - СПб.: Издательство Политехнического университета, 2009. с.  
(Математика в политехническом университете).  
**ISBN 5-7422-1705-6**

Данное пособие посвящено изложению вопросов, относящихся к курсу уравнений с частными производными (уравнений математической физики). Рассматриваются вопросы, относящиеся к классическим аналитическим методам решения основных уравнений математической физики (гиперболических, параболических и эллиптических) и численным методам их решений. Кроме того, в учебном пособии излагаются начальные сведения по специальным функциям и асимптотическим оценкам. В пособии имеется много задач и упражнений для самостоятельной работы, которые позволяют лучше усвоить изложенный материал, по существу разобраться в его содержании, научить применять математический аппарат к решению практических задач. Пособие может быть использовано преподавателями при подготовке к лекциям и к проведению практических занятий по курсу «уравнения в частных производных», «введение в асимптотические методы и специальные функции математической физики», «численные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными», студентами инженерно-физических специальностей, аспирантами, стажерами–исследователями, и слушателями факультета повышения квалификации преподавателей СПбГПУ.

Табл.1. Ил. 23. Библиогр.: 39 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

ISBN 5-7422-1705-6

© Куликов К.Г., Фирсов А.Н.  
© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2009

**МАТЕМАТИКА**  
**В ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

Куликов Кирилл Геннадьевич, Фирсов Андрей Николаевич

Уравнения и методы математической физики.

I. Классические модели

Учебное пособие

Дизайн обложки

Оригинал макет подготовлен авторами

Директор Издательства Политехнического университета *А.В.Иванов*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т.2;  
95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать                      Формат 60x90/16.  
Усл. печ. л.      . Уч.-изд. л.      Тираж      . Заказ      .

---

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.  
Издательства Политехнического Университета.  
Член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.  
Адрес университета и издательства:  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	6
<b>1. Уравнения первого порядка</b> .....	9
1.1 Общие понятия.....	9
1.2 Задача Коши.....	10
1.3 Линейные однородные уравнения первого порядка.....	11
1.4 Квазилинейные уравнения первого порядка.....	14
1.5 Геометрическая интерпретация.....	15
<b>2. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка</b> .....	20
2.1 Понятие об общем решении уравнения в частных производных.....	21
2.2 Классификация уравнений в частных производных второго порядка.....	25
<b>3. Уравнения гиперболического типа</b> .....	30
3.1 Свободные колебания струны, с закрепленными концами.....	30
3.2 Продольные колебания стержня.....	32
3.2 Метод бегущих волн. Решение Даламбера.....	33
3.4 Решение задачи Коши для неограниченной струны.....	36
3.5 Корректность постановки задачи.....	38
3.6 Пример Адамара некорректно поставленной задачи.....	40
3.7. Метод Фурье. Свободные колебания однородной струны, закрепленной на концах.....	41
3.8 Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.....	53
3.9 Вынужденные колебания струны с подвижными концами.....	57
3.10 Общая схема метода Фурье.....	60
3.11 Единственность решения смешанной задачи.....	69
3.12 Колебания прямоугольной мембраны.....	71
<b>4. Уравнения параболического типа</b> .....	76
4.1 Вывод уравнения теплопроводности для стержня.....	76
4.2 Распространения тепла в конечном стержне.....	78
4.3 Интегрирование уравнения распространения тепла в ограниченном стержне методом Фурье.....	81
4.4 Охлаждение бесконечного стержня.....	90
<b>5. Уравнения эллиптического типа</b> .....	96
5.1. Определения. Постановка задач.....	96
5.2. Фундаментальное решение уравнений Лапласа.....	98
5.3 Формулы Грина.....	99
5.4 Основная интегральная формула Грина.....	100
5.5 Свойства гармонических функций.....	104
5.6. Решение Дирихле для круга методом Фурье.....	108
5.7. Метод функции Грина.....	112
5.8. Решение задачи Дирихле для шара методом функции Грина.....	116
<b>6. Специальные функции математической физики</b> .....	123
6.1 Эйлеравы интегралы.....	124

6.2	Интеграл вероятности.....	129
6.3	Функции Бесселя.....	131
6.4	Функция Вебера.....	136
6.5	Представление функции Вебера в виде ряда.....	139
6.6	Рекуррентные формулы для функций Бесселя.....	142
6.7	Интегральные представления для цилиндрических функций.....	144
6.8	Примеры использования интегрального представления Пуассона.....	146
6.9	Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента.....	148
6.10	Модифицированные цилиндрические функции.....	151
6.11	Задача Штурма-Лиувилля, связанная с цилиндрическими функциями.....	154
6.12	Разложение функции в ряды Фурье-Бесселя и Дини.....	157
6.13	Приложения цилиндрических функций в математической физики...	160
6.14	Решение задачи Дирихле для цилиндра.....	163
6.15	Сферические функции. Полиномы Лежандра.....	167
6.16	Производящая функция для полиномов Лежандра.....	171
6.17	Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра.....	173
6.18	Задача Штурма-Лиувилля, связанная с полиномами Лежандра.....	175
6.19	Вычисление нормы для полиномов Лежандра.....	176
6.20	Приложения полиномов Лежандра в математической физике.....	178
7.	<b>Метод Гринберга</b> .....	181
8.	<b>Асимптотические методы</b> .....	193
8.1	Определение асимптотических рядов.....	194
8.2	Свойства асимптотических разложений.....	198
8.3	Равномерные и неравномерные асимптотические разложения.....	201
8.4.	Пример расходящегося асимптотического ряда.....	202
8.5	Определение и основные свойства асимптотических разложений.....	203
8.6.	Метод Лапласа асимптотической оценки интеграла.....	208
8.7	Метод стационарной фазы.....	212
8.8	Метод перевала.....	216
9.	<b>Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными</b> .....	221
9.1.1	Численное решение уравнений параболического типа. Понятие о методе конечных разностей. Основные определения и конечно-разностные схемы. Постановка задач для уравнений параболического типа.....	221
9.1.2.	Понятие о методе конечных разностей. Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа....	223
9.1.3.	Аппроксимация граничных условий, содержащих производные.....	227
9.2.	Метод конечных разностей для решения уравнений гиперболического типа.....	233
9.2.1.	Постановка задач для уравнений гиперболического типа.....	233
9.2.2.	Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа.....	235

9.3. Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа.....	239
9.3.1. Постановка задач для уравнений эллиптического типа.....	239
9.3.2. Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений эллиптического типа.....	240
9.6. Основные понятия, связанные с конечно - разностной аппроксимацией дифференциальных задач.....	243
<b>Дополнение. Метод ВКБ.....</b>	<b>248</b>
<b>Литература.....</b>	<b>259</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Построение и исследование математических моделей физических явлений составляет предмет теории уравнений в частных производных (уравнений математической физики). Математическая физика развивалась со времен Ньютона параллельно развитию физики и математики. В конце XVII в. было открыто дифференциальное и интегральное исчисление и сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения. В XVIII в. методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн и стержней, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой; закладываются основы аналитической механики (Ж.Даламбер, Л.Эйлер, Д.Бернулли, Ж.Лагранж, П.Лаплас). В XIX в. идеи математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами и т.д.; создаются теория потенциала и теория устойчивости движения (Ж.Фурье, С.Пуассон, К.Гаусс, О.Коши, М.В.Остроградский, Д.Стокс, П. Дирихле, Б.Риман, С.В. Ковалевская, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунов, В.А.Ляпунов, Д.Гильберт). В XX в. в математическую физику включаются задачи квантовой физики и теории относительности, а также новые проблемы газовой динамики, переноса частиц и физики плазмы.

С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты. В этом интенсивном взаимодействии теоретической физики и современной математики создаются качественно новые классы моделей современной математической физики.

Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач, т.е. задач для которых решение существует и единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естественными, их, тем не менее, необходимо доказывать в рамках принятой математической модели.



Доказательство корректности - это первая апробация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель мало чувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задач). В данном пособии изучаются в основном корректно поставленные краевые задачи для дифференциальных уравнений классической математической физики.

В пособии принята следующая схема расположения материала.

В главе I рассматриваются основные понятия и определения, связанные с уравнениями с частными производными первого порядка. Глава II посвящена приведению к каноническому виду линейных уравнений второго порядка, а также вопросам, относящимся к аналитическим методам решения основных уравнений математической физики (гиперболических, параболических и эллиптических). В главах III – V рассматриваются следующие методы решения задач, связанных с уравнениями в частных производных второго порядка: метод Даламбера, метод Фурье с сопутствующей теорией задачи Штурма – Лиувилля, метод функции Грина. В главе VII кратко излагается метод Гринберга, который является обобщением метода Фурье на случай неоднородного уравнения и неоднородных граничных условий. Кроме того, в учебном пособии излагаются начальные сведения по специальным функциям - глава VI и асимптотическим оценкам. В частности приведены методы Лапласа, стационарной фазы и метод перевала асимптотической оценки интеграла - глава VIII. Глава IX посвящена методу конечных разностей, который является одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений с частными производными. В частности в данной главе приведен способ, заключающийся в сохранении одного того же порядка аппроксимации при численном решении уравнений в частных производных второго порядка. Предложенный метод аппроксимации позволяет сохранить консервативность конечно-разностной схемы, т.е. в конечно-разностной аппроксимации соблюдаются законы

сохранения. В приложении приведен метод ВКБ (Вентцель, Крамерс и Бриллюэн). Необходимость включения данного метода в пособие обусловлена тем, что во многих задачах механики, а также в приложениях часто возникает большой параметр в дифференциальных уравнениях и краевых условиях и численные методы при больших значениях параметров плохо аппроксимируют решение краевой задачи, поэтому появляется необходимость построения асимптотических разложений, в частности метод ВКБ.

# ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

## §1. Общие понятия

Пусть имеется функция  $u$  независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Уравнением с частными производными называется соотношение, связывающее переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , функцию  $u$  и все ее частные производные до некоторого порядка

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0. \quad (1.1)$$

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Функция  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  называется решением уравнения (1.1), если при подстановке ее в это уравнение оно обращается в тождество при допустимых значениях аргументов. Совокупность всех решений уравнения называется общим решением.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений с частными производными для функции, зависящей от двух переменных  $u = u(x, y)$ .

**Пример 1.1.** Пусть дано уравнение  $u_x = 0$ . Это уравнение фактически означает, что функция  $u(x, y)$  не зависит от  $x$ . Следовательно, решениями являются, например, функции  $u(x, y) = y^2 + 2y$ ,  $u(x, y) = e^y + \sin y$ . Общее решение:  $u(x, y) = C(y)$ , где  $C$  – произвольная функция одной переменной  $y$ .

**Пример 1.2.** Рассмотрим уравнение  $u_x = f(x, y)$ . Для нахождения решения этого уравнения проинтегрируем его по переменной  $x$

$$\int u_x dx = \int f(x, y) dx + C. \quad (1.2)$$

При интегрировании по  $x$  мы считаем  $y$  постоянным и поэтому произвольная постоянная  $C$  в (2) может зависеть от  $y$ . Тем самым общее решение имеет вид:  $u(x, y) = \int f(x, y) dx + C(y)$ .

**Пример 1.3.** Пусть дано уравнение  $u_{xy} = 0$ . Из примера 1.1 следует, что  $u_y = C(y)$ . Решая это уравнение аналогично тому, как решалось уравнение в примере 1.2, будем иметь  $u(x, y) = \int C(y)dy + C_1(x)$ . Обозначим  $C_2(y) = \int C(y)dy$ . Тогда общее решения примет вид  $u(x, y) = C_1(x) + C_2(y)$ .

**Заметим, что в отличие от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от произвольных постоянных, общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций.**

## §2. Задача Коши

Будем рассматривать случай, когда искомая функция  $u$  зависит от двух переменных  $x, y$ . Тогда уравнение первого порядка будет иметь вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1.3)$$

Всякое решение уравнения (1)  $u = u(x, y)$  будем называть интегральной поверхностью (график решения – поверхность в пространстве с координатами  $x, y, u$ ).

Для того чтобы из совокупности всех решений уравнений (1.3) выделить некоторое частное решение, формулируется задача Коши: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию  $u(x, y)|_{x=x_0} = \varphi(y)$ , где  $\varphi(y)$  – некоторая заданная функция.

Обозначим через  $l$  кривую в пространстве  $x, y, u$ , задаваемую уравнениями

$$x = x_0, \quad u = \varphi(y). \quad (1.4)$$

Тогда задача Коши имеет следующий геометрический смысл: среди всех интегральных поверхностей найти ту, которая проходит через заданную кривую  $l$ .

Можно поставить более общую задачу Коши, не ограничивая кривую  $l$  видом (1.4), а беря произвольную пространственную кривую. Если обозначить через  $\lambda$  проекцию кривой на плоскость  $(x, y)$ , то эта задача Коши

может быть сформулирована следующим образом: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию  $u(x, y)|_{(x, y) \in \lambda} = \varphi(x, y)$ .

### **§3. Линейные однородные уравнений первого порядка**

Уравнение с частными производными называются линейными, если искомая функция  $u(x, y)$  и ее частные производные входят в уравнение линейно. Таким образом, линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = f(x, y), \quad (1.5)$$

где  $A, B, C$  и  $f$  - заданные функции. Если  $f(x, y) = 0$ , то уравнение называется однородным. Отметим, что основные свойства линейных уравнений с частными производными во многом аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Так, например, линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является решением этого уравнения. Общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Будем рассматривать сначала однородное линейное уравнение вида

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y = 0. \quad (1.6)$$

Этому уравнению поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = B(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

которую будем называть характеристической системой для уравнения (1.6), а всякое решение  $x(t), y(t)$  этой системы назовем характеристикой.

Функция  $\varphi(x, y)$ , не сводящаяся тождественно к постоянной, или равенство  $\varphi(x, y) = C$  называется первым интегралом системы (1.7), если при

подстановке в нее любого решения системы получается постоянная величина, зависящая лишь от выбора решения.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\varphi(x, y) = C$  есть первый интеграл системы (1.7). Тогда функция  $u = \varphi(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1.6).

Доказательство. Подставим в первый интеграл системы (1.7) какое-либо решение  $x(t), y(t)$  этой системы. Получим  $\varphi(x(t), y(t)) = C$ .

Возьмем производную по  $t$  от обеих частей этого равенства

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = \varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} \equiv 0.$$

Поскольку  $x(t), y(t)$  - решения характеристической системы (1.7), имеем

$$\varphi_x A(x, y) + \varphi_y B(x, y) = 0.$$

В силу того, что последнее равенство выполнено для любого решения системы (1.7), оно справедливо для любых  $x, y$ , входящих в область определения. Тем самым функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (1.6). Теорема доказана.

Можно доказать и обратное утверждение.

**Теорема 1.2.** Пусть функция  $u = \varphi(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1.6).

Тогда  $\varphi(x, y) = C$  есть первый интеграл системы (1.7).

Доказательство. Подставим в функцию  $\varphi(x, y)$  какое-нибудь решение системы (3)  $x(t), y(t)$  и возьмем полную производную по  $t$

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = \varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} = \varphi_x A(x, y) + \varphi_y B(x, y).$$

Поскольку  $\varphi$  - решение уравнения (1.6), имеем  $\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = 0$ .

Следовательно,  $\varphi(x(t), y(t)) = C$ , а это и означает, что  $\varphi(x, y) = C$  есть первый интеграл системы (1.7). Теорема доказана.

Доказанные две теоремы устанавливают эквивалентность понятий первого интеграла системы (1.7) и решения уравнения (1.6).

Если  $\varphi(x, y) = C$  - первый интеграл системы (1.7), то произвольная функция  $F(\varphi)$  является также первым интегралом этой системы. Следовательно, по **теореме 1**  $F(\varphi)$  удовлетворяет уравнению (1.6) при произвольной достаточно гладкой функции  $F$ .

Можно показать, что при выполнении некоторых условий всякое решение уравнения (1.6) может быть представлено в виде  $u = F(\varphi)$ . Отсюда вытекает следующее правило: чтобы найти общее решение уравнения (1.6), надо составить характеристическую систему (1.7) и найти первый интеграл этой системы. Общее решение уравнения (1.6) будет  $u = F(\varphi)$ , где  $F$  - произвольная функция.

**Пример 1.4.** Рассмотрим уравнение

$$xu_x + yu_y = 0. \quad (1.8)$$

Характеристическая система для этого уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases} \quad (1.9)$$

Решение этой системы (характеристики) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t. \end{cases}$$

Первым интегралом системы (1.9) является функция  $\varphi(x, y) = \frac{y}{x}$ .

Следовательно, общее решение уравнения (1.8) будет  $u(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$ ,

т.е. произвольная однородная функция переменных  $x, y$ .

Для нахождения первого интеграла характеристической системы (1.9) можно исключить переменную  $t$  и получить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \quad (1.10)$$

Если  $y = y(x, C)$  - общее решение этого уравнения, то выразим произвольную постоянную  $C$  через  $x, y$  и получим первый интеграл системы (1.3.3)  $\varphi(x, y) = C$ . Аналогично поступим, если будет найден общий интеграл уравнения (1.10)  $F(x, y, C) = 0$ .

**Пример 1.5.** Рассмотрим уравнение

$$yu_x - xu_y = 0. \quad (1.11)$$

Характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (1.12)$$

Исключим переменную  $t$  из этой системы

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Разделяя переменные, получим

$$ydy = -xdx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим его общий интеграл  $x^2 + y^2 = C$ .

Это соотношение одновременно является первым интегралом для системы (1.12). Заметим, что характеристиками в данном случае будут являться окружности с центром в начале координат. Итак, общее решение уравнения (1.11) имеет вид

$$u(x, y) = F(x^2 + y^2). \quad (1.13)$$

#### **§4. Квазилинейные уравнения первого порядка**

Квазилинейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = C(x, y, u). \quad (1.14)$$

Заметим, что линейное уравнение (1.3.1) является частным случаем квазилинейного уравнения, в которое функция  $u$  может входить и нелинейно.



Будем искать решение уравнения (1.14) в виде неявной функции  $\varphi(x, y, u) = C$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявной функции имеем

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u}.$$

Подставляя эти выражения в (1.14), получим для  $\varphi$  уравнение

$$A(x, y, u)\varphi_x + B(x, y, u)\varphi_y + C(x, y, u)\varphi_u = 0. \quad (1.15)$$

Это уравнение отличается от уравнения (1.6) лишь тем, что коэффициенты и искомая функция  $\varphi$ , входящие в него, зависят от трёх переменных  $x, y, u$ . Поэтому уравнение (1.15) решается аналогично уравнению (1.6). Для этого рассматривается характеристическая система, состоящая уже из трёх уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x, y, u), \\ \frac{dy}{dt} = B(x, y, u), \\ \frac{du}{dt} = C(x, y, u). \end{cases} \quad (1.16)$$

Если

$$\varphi_1(x, y, u) = C_1; \quad \varphi_2(x, y, u) = C_2 \quad (1.17)$$

- два независимых (под независимостью понимается разрешимость относительно каких-либо двух из переменных  $x, y, u$  равенства (1.17)) интеграла системы (1.16), то общее решение уравнения (1.15), а значит, и решение исходного уравнения (1.14) в виде неявной функции, будет иметь вид

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2), \quad (1.18)$$

где  $F$  - произвольная функция своих аргументов.

### **§5. Геометрическая интерпретация**

Пусть в пространстве с координатами  $(x, y, u)$  задано поле направлений

$$(A(x, y, u), B(x, y, u), C(x, y, u)),$$

т.е. в каждой точке пространства мы имеем направление, у которого направляющие косинусы пропорциональны  $A, B, C$ . Это поле направлений определяет семейство линий, таких, что любая линия семейства имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A(x, y, u)} = \frac{dy}{B(x, y, u)} = \frac{du}{C(x, y, u)},$$

которая, если обозначить через  $dt$  общую величину написанных трех отношений, переходит в систему (1.16).

Если имеется некоторая поверхность  $u = u(x, y)$ , то величины  $u_x, u_y$  и  $-1$  пропорциональны направляющим косинусам нормали к этой поверхности. Таким образом, уравнение (1.14) выражает условие перпендикулярности нормали и поверхности  $u = u(x, y)$  с направлением поля, т.е. уравнение (1.14) сводится к требованию, чтобы в каждой точке искомой поверхности  $u = u(x, y)$  направление, определяемое полем  $(A, B, C)$ , находилось в касательной плоскости к поверхности.

Пусть некоторая поверхность  $u = u(x, y)$  состоит из характеристик системы (1.16). Тогда в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности, и следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (1.14), т.е. является интегральной поверхностью этого уравнения.

Можно показать, что верно и обратное: если некоторая гладкая поверхность (предполагается существование и непрерывность производных  $u_x, u_y$ ) удовлетворяет уравнению (1.14), то ее можно полностью заполнить характеристиками.

Из (1.18) следует, что общее уравнение интегральных поверхностей для уравнения (1.14) будет иметь вид:

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \tag{1.19}$$

(постоянную  $C$  можно не писать в силу произвольности  $F$ ).

Если выбрать некоторую функцию  $F$ , а поверхность (1.19) будет геометрическим местом тех характеристик системы (1.16), у которых значения постоянных в равенствах (1.17) связаны соотношением:

$$F(C_1, C_2) = 0. \quad (1.20)$$

Решение уравнения (1.14) становится, вообще говоря, однозначно определенным, если потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через заданную в пространстве кривую  $l$ , т.е. если решать задачу Коши. Искомая поверхность будет образована теми характеристиками, которые выходят из точек кривой  $l$ .

Исключительным является тот случай, когда сама кривая  $l$  является характеристикой. В этом случае через линию  $l$  проходит, вообще говоря, бесчисленное множество поверхностей.

**Пример 1.6.** Рассмотрим уравнение

$$xuu_x + yuu_y = -(x^2 + y^2). \quad (1.21)$$

Соответствующая характеристическая система будет такова:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xu, \\ \frac{dy}{dt} = yu, \\ \frac{du}{dt} = -(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.22)$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Отсюда  $\ln|y| = \ln|C_1x|$ , что равносильно соотношению

$$\frac{y}{x} = C_1. \quad (1.23)$$

Чтобы найти второй интеграл системы (1.22), разделим последнее ее уравнение на второе:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x^2 + y^2}{yu}.$$

Пользуясь равенством (1.23), получаем

$$\frac{du}{C_1 dx} = -\frac{x^2 + y^2}{C_1 x u}.$$

Отсюда

$$u du = -x(1 + C_1^2) dx.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$u^2 + x^2(1 + C_1^2) = C_2.$$

Подставив  $C_1$  из (1.23), получим второй интеграл

$$x^2 + y^2 + u^2 = C_2. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.23) определяют плоскости, проходящие через ось  $Ou$ , а уравнения (1.24) – сферы с центром в начале координат. Тем самым характеристики системы (1.22) – это семейство окружностей, лежащих в указанных плоскостях и имеющих центр в начале координат. Общее решение уравнения (1.21) будет

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0, \quad (1.25)$$

где  $F$  – производная функция двух аргументов.

**Пример 1.7.** Решим задачу Коши для уравнения (1.21). Среди интегральных поверхностей этого уравнения найдем ту, которая проходит через прямую

$$x = 1, \quad y = u. \quad (1.26)$$

Исключим  $x, y$  и  $u$  из уравнений (1.23), (1.24) и (1.26). Уравнения (1.23) и (1.26) дают  $x = 1, \quad y = C_1, \quad u = C_1$ . Подставляя в уравнение (1.24), получаем  $1 + 2C_1^2 - C_2 = 0$ . Таким образом,  $F(C_1, C_2) = 1 + 2C_1^2 - C_2$ . Отсюда искомая интегральная поверхность имеет вид  $1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (x^2 + y^2 + u^2) = 0$ .

**Пример 1.8.** Будем искать интегральную поверхность для уравнения (1.11), проходящую через окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в плоскости  $(x, y)$ . Из общего

решения (1.13) видно что таковой будет любая поверхность  $u = F(x^2 + y^2) - F(1)$ . Например, параболоид  $u = x^2 + y^2 - 1$  или конус  $u = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ , наконец, просто плоскость  $u = 1$ . Неоднозначность решения связана здесь с тем, что заданная кривая, через которую должна проходить интегральная поверхность, является характеристикой.

## Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Так, например:

1) при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

где  $c$  – скорость распространения волн в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z). \quad (*)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (\*) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и, соответственно, электрические заряды.

Приведенные уравнения называют основными уравнениями математической физики. Их подробное изучение дает возможность

построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Функция  $u = u(x, y, z)$ , удовлетворяющая какому-либо из приведенных уравнений, называется его решением.

### **§1. Понятие об общем решении уравнения в частных производных**

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка:  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Его общий интеграл представляет собой некоторое семейство функций, зависящее от  $n$  произвольных постоянных  $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ . Любое частное решение получается из него, если параметрам  $C_1, C_2, \dots, C_n$  придать определенные значения.

У дифференциального уравнения в частных производных общее решение содержит произвольные функции, количество которых равно порядку уравнения.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Найдем его общий интеграл, т.е. функцию  $u(x; y)$ , удовлетворяющую (2.1).

Для этого сначала запишем это уравнение в виде:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ . Поскольку

производная по переменной  $x$  от величины, стоящей в скобках, равна нулю,

то последняя является некоторой произвольной функцией от  $y$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$ .

Поэтому  $u(x, y) = \int f(y) dy$ . Но интегрируя произвольную функцию  $f(y)$ , получим новую, также произвольную функцию, скажем  $F(y)$ , плюс произвольная функция  $\phi(x)$  ( $\phi(x)$  играет роль произвольной постоянной интегрирования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений). Таким образом, общий интеграл уравнения второго порядка (1)  $u(x, y) = \phi(x) + F(y)$  содержит две произвольные функции. Чтобы теперь из общего решения  $u(x; y)$  найти определенное частное решение, нужно найти

конкретный вид функций  $\phi(x)$  и  $F(y)$ . Однако – и в этом состоит причина существенного различия методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и в частных производных – из-за чрезвычайной общности общего решения уравнения в частных производных, как правило, очень трудно из него выделить нужное конкретное решение.

**Пример 2.1.** Найти общее решение дифференциального уравнения в частных производных  $\frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} = 0$ , где  $u(x; y)$  – неизвестная функция двух независимых переменных.

Перепишем уравнение в виде:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$ . Отсюда видно, что  $\frac{\partial u}{\partial x}$  не зависит

от  $x$ , так как частная производная от нее по  $x$ , равна нулю. Поэтому

$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y)$  где  $C_1(y)$  – произвольная функция от  $y$ . В уравнении

$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y)$  частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$  берется по  $x$ , а  $y$  считается

постоянной. Взяв интеграл от левой и правой частей, получим решение

поставленной задачи:  $u(x, y) = \int C_1(y) dx = xC_1(y) + C_2(y)$ , где  $C_1(y)$  и  $C_2(y)$  –

произвольные функции от  $y$ . Если найденную функцию  $u(x, y)$  два раза

продифференцировать по  $x$ , то получим  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , и, следовательно,

найденная функция является общим решением данного уравнения.

**Пример 2.2.** Найти общее решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y$ .

Перепишав уравнение в виде:  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 - y$  и интегрируя левую и правую

части по  $y$  (считая в это время  $x$  постоянным), получим:



$\frac{\partial u}{\partial x} = \int (x^2 - y) dy = x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x)$ . Интегрируя теперь по  $x$  полученное уравнение (считая в это время  $y$  постоянным), получим:

$$u(x, y) = \int (x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x)) dx = \frac{x^3 y}{3} - \frac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y). \text{ Здесь}$$

$C_1^*(x) = \int C_1(x) dx$ . Таким образом, общим решением рассматриваемого уравнения будет функция:  $u(x, y) = \frac{x^3 y}{3} - \frac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)$ , где  $C_1^*(x)$  и  $C_2(y)$  – произвольные функции, причем  $C_1^*(x)$  дифференцируема.

**Пример 2.3.** Решить дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Перепишав уравнение в виде  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - 2u \right) = 0$  и интегрируя левую и правую

части по переменной  $x$ , получим:  $\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = C_1(y)$ . В этом уравнении  $\frac{\partial u}{\partial y}$

можно рассматривать как обычную производную по  $y$ , а  $x$  при этом считать параметром. Тогда уравнение переписется в виде:  $\frac{du}{dy} - 2u = C_1(y)$ . Мы

получили неоднородное линейное уравнение первого порядка. Решая его, получаем:

$$u(x, y) = e^{\int 2 dy} \left( C_2(x) + \int C_1(y) e^{-\int 2 dy} dy \right) = C_2(x) e^{2y} + C_1^*(y).$$

Таким образом,  $u(x, y) = C_2(x) e^{2y} + C_1^*(y)$ , где  $C_2(x)$  и  $C_1^*(y)$  – произвольные функции.

### Упражнения

**2.1.**  $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + (x - y)\psi'(y)$ . Проверить, что

$$(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

( $\varphi$  и  $\psi$  – дважды дифференцируемые функции).

. Исключить произвольные функции  $\phi$  и  $\psi$  из семейства:

$$u(x, t) = \phi(x - at) + \psi(x + at).$$

**Ответ.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений с частными производными:

2.3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$

**Ответ.**  $u(x, y) = C_1(x) + C_2(y).$

2.4.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y.$

**Ответ.**  $u(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + C_1(x) + C_2(y).$

2.5.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + y.$

**Ответ.**  $u(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{yx^2}{2} + xC_1(y) + C_2(y).$

2.6.  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}.$

**Ответ.**  $u(x, y) = e^{x+y} + yC_1(x) + C_2(x).$

2.7.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

**Ответ.**  $u(x, y) = C_1(x) + \frac{1}{x} C_2(y).$

2.8.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial x}.$

**Ответ.**  $u(x, y) = C_1(x)e^{y^2} + C_2(y).$

2.9.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 5 \frac{\partial u}{\partial y}.$

**Ответ.**  $u(x, y) = C_1(x) + C_2(y)e^{5x}$ .

2.10.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ .

**Ответ.**  $u(x, y) = x^2 + C_1(y)x + C_2(y)$ .

2.11.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x$ .

**Ответ.**  $u(x, y) = x^2 y + C_1(y) + C_2(x)$ .

2.12.  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

**Ответ.**  $u(x, y) = C_1(x)e^y + C_2(x)$ .

2.13.  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y$ .

**Ответ.**  $u(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6} + yC_1(x) + C_2(x)$ .

2.14.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$ .

**Ответ.**  $u(x, y) = x^3 + xC_1(y) + C_2(y)$ .

## **§2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка**

С помощью замены переменных уравнение второго порядка

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

сведем к одному из простейших уравнений. Полагая, что коэффициент  $c \neq 0$ , введем новые независимые переменные  $\xi = x + \lambda_1 y$ ,  $\eta = x + \lambda_2 y$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  пока произвольные, но различные (иначе  $\xi$  и  $\eta$  не будут взаимно независимые функции) числа. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ и} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

то имеет место соответствие  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta}$ . Поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Умножим эти вторые производные соответственно на  $a$ ,  $2b$  и  $c$  и затем их сложим. Тогда левая часть уравнения (2.2) примет вид:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

где  $A = a + 2b\lambda_1 + c\lambda_1^2$ ,  $B = a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\lambda_1\lambda_2$ ,  $C = a + 2b\lambda_2 + c\lambda_2^2$ .

Рассмотрим теперь вспомогательное квадратное уравнение  $c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0$ .

Его корнями являются  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$ . В зависимости от значений

дискриминанта  $D = b^2 - ac$  возможны три случая: если в рассматриваемой области  $b^2 - ac > 0$ ,

то уравнение принадлежит к гиперболическому типу; если  $b^2 - ac = 0$ , то уравнение (2.2) параболического типа; если  $b^2 - ac < 0$ , то уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Следовательно, каноническое уравнение гиперболического типа имеет

вид  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z'_x, z'_y)$ , (или  $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, z, \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$ ,

где  $\alpha = \frac{x-y}{2}$ ,  $\beta = \frac{x+y}{2}$ ); параболического типа  $-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z'_x, z'_y)$ ;

эллиптического типа  $-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z'_x, z'_y)$ . В общем случае вводятся

новые переменные  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ .  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  – дважды

непрерывно дифференцируемые функции и  $\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0$ .

Дифференциальное уравнение  $a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0$  называют уравнением характеристик уравнения

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}).$$

**Пример 2.4. Привести к каноническому виду уравнение**

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Здесь  $a = x^2, b = xy, c = y^2, b^2 - ac = x^2 y^2 - x^2 y^2 = 0$ ; следовательно, уравнение принадлежит к параболическому типу. Составим уравнение характеристик  $x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0$ . В этом случае оба семейства характеристик совпадают. Рассмотрим уравнение  $x dy = y dx$ . Разделим переменные и

проинтегрируем это уравнение  $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$  или  $\ln|y| - \ln|x| = \ln|C|$ , т.е.  $\frac{y}{x} = C$ .

Введем новые переменные  $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$ .  $\eta$  выбираем таким образом, чтобы

выполнялось условие  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$ . Вводим новые переменные  $\xi$  и

$\eta$ . Тогда данное уравнение примет вид  $-\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$ .

Данное уравнение параболического вида, его каноническая форма  $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$ .

**Пример 2.5.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение гиперболического типа, так как  $b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Составляем уравнение характеристик  $dy^2 + 2 \sin x dx dy - \cos^2 x dx^2 = 0$  или,

дописав в левой части этого равенства  $dx dy - dx dy + \sin x dx^2 - \sin x dx^2$  и

сгруппировав, получаем  $(dy + (1 + \sin x) dx)(dy - (1 - \sin x) dx) = 0$ . Интегрируя

уравнения  $dy + (1 + \sin x) dx = 0$  и  $dy - (1 - \sin x) dx = 0$  получим

$x + y - \cos x = C_1$ ,  $x - y + \cos x = C_2$ . Вводим новые переменные по формулам

$\xi = x + y - \cos x$ ,  $\eta = x - y + \cos x$ . Тогда данное уравнение в новых

переменных приводится к виду  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ . Положив  $\xi = \alpha + \beta$ ,  $\eta = \alpha - \beta$ ,

приведем уравнение к каноническому виду:  $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0$ . Данное

уравнение гиперболического вида, его каноническая форма  $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0$ .

### Упражнения

**2.15.** Привести к каноническому виду уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

**Ответ.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ ,  $\xi = \frac{x^2}{2} + y$ ,  $\eta = x$ .

$$\text{б) } (1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

**Ответ.**  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ ,  $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ,  $\eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ .

$$\mathbf{B)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\mathbf{Ответ.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = 3x + y.$$

## ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

### §1 Свободные колебания струны с закрепленными концами

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Натяжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины  $l$  в начальный момент направлена по отрезку оси от  $0$  до  $l$  (см.рис.3.1). Предположим, что концы струны закреплены в точках  $x=0$  и  $x=l$ . Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя положение, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения – говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси  $Ox$  и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией  $u(x,t)$ , которая дает величину перемещения точек струны с абсциссой  $x$  в момент  $t$ .

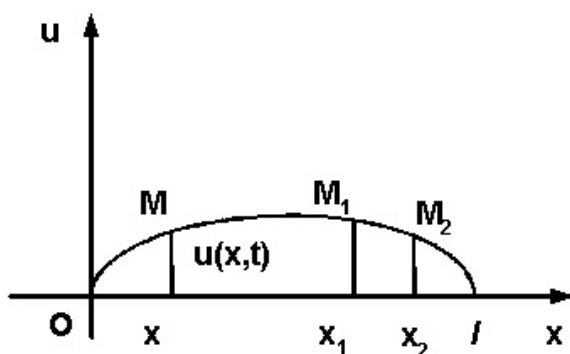


Рис. 3.1

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости  $(x,u)$ , то будем предполагать, что длина элемента струны  $\cup M_1M_2$  равняется ее



проекции на ось  $OX$ , т.е.  $\cup M_1M_2 = x_2 - x_1$ . Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаковое, обозначим его через  $T$ .

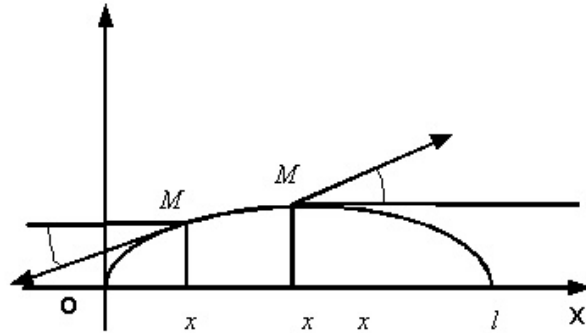


Рис. 3.2

Рассмотрим элемент струны  $MM'$ . На концах этого элемента, по касательным к струне, действует сила  $\vec{T}$ . Пусть касательные образуют с осью  $OX$  углы  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$  (см.рис.3.2). Тогда проекция на ось  $Ox$  сил, действующих на элемент  $MM'$  будет равна  $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$ . Так как угол  $\varphi$  мал, то можно положить  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$ , и мы будем иметь

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi \approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg} \varphi = T \left[ \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] =$$

$$= T \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть  $\rho$  – линейная плотность струны.

Тогда масса элемента струны будет  $\rho \Delta x$ . Ускорение элемента равно  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь  $\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$ .

Сокращая на  $\Delta x$  и обозначая  $\frac{T}{\rho} = a^2$ , получаем уравнение движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это и есть волновое уравнение – уравнение колебаний струны. Для полного определения движения струны одного уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  недостаточно.

Искомая функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны ( $x = 0$  и  $x = l$ ), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ( $t = 0$ ).

## §2. Продольные колебания стержня

Рассмотрим однородный стержень длины  $l$  (см. рис. 3.2), для изгибающего которого надо приложить усилие. Ограничимся исследованием только таких усилий, при которых поперечные колебания перемещаясь вдоль оси стержня остаются плоскими и параллельными друг другу. Это допущение оправдано, если поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной.

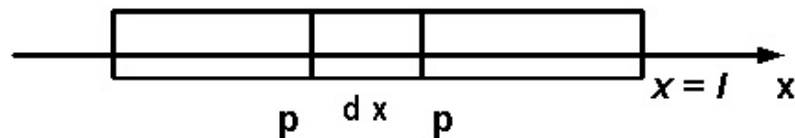


Рис.3.3

Если стержень несколько растянуть или сжать вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут продольные колебания. Направим ось  $Ox$  вдоль оси стержня и будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Пусть  $x$ - абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое. Обозначим через  $u(x, t)$  смещение этого сечения в момент времени  $t$ ; тогда смещенное сечение с абсциссой  $x + dx$  будет равно  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ . А относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой  $x$  выражается производной  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ . Считая, что стержень совершает малые колебания, можно

вычислить в этом сечении натяжение  $T$ . Действительно, применяя закон Гука, найдем, что  $T = ES \frac{\partial u}{\partial x}$ , где  $E$  - модуль упругости материала стержня, а  $S$  - площадь поперечного сечения. На элемент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами  $x$  и  $x+dx$  действуют силы натяжения  $T_x$  и  $T_{x+dx}$ , направленные вдоль оси  $OX$ ; их результирующая

$$T_{x+dx} - T_x = ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \approx ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

также направлена вдоль оси  $OX$ . С другой стороны, ускорение элемента равно  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Согласно второму закону

$$\text{Ньютона } \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, \text{ где } \rho - \text{объемная плотность стержня.}$$

Положив  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , получим дифференциальное уравнение продольных

$$\text{колебаний стержня } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \text{ Форма этого уравнения показывает, что}$$

продольные колебания стержня носят волновой характер, причем скорость распространения продольных волн равна  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

### **§3 Метод бегущих волн. Решение Даламбера**

Рассматривая свободные колебания струны, мы должны решить однородное

$$\text{уравнение } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Здесь  $u(x, t)$  - смещение точек струны в момент времени  $t$  от положения равновесия. При каждом фиксированном значении  $t$  график функции  $u = u(x, t)$  дает форму струны в момент времени  $t$ . Введем новые независимые переменные  $\xi, \eta$  по формулам

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (3.2)$$

В переменных  $\xi, \eta$  уравнение (3.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

В этом легко убедиться, вычислив производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

и подставив полученные выражения в уравнение (3.1).

Уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  интегрируется весьма просто. Записав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0,$$

будем иметь  $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi)$ , где  $\omega(\xi)$  – произвольная функция. Интегрируя

полученное уравнение по  $\xi$  ( $\eta$  рассматривается как параметр), найдем, что

$$u = \int \omega(\xi) d\xi + \theta_2(\eta),$$

где  $\theta_2(\eta)$  – произвольная функция аргумента  $\eta$ . Полагая  $\int \omega(\xi) d\xi = \theta_1(\xi)$ ,

получим  $u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$ . Возвращаясь к исходным переменным  $x, t$ ,

получим

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (3.3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция  $u(x, t)$ , определяемая формулой (3.3), где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, есть решение уравнения

(3.1). Это общее решение (решение Даламбера) волнового уравнения (3.1): всякое решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде (3.3) при соответствующем выборе функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . В частности, каждое слагаемое в формуле (3.3) также является решением уравнения (3.1). Физический смысл решения

$$u = \theta_1(x - at) \quad (3.4)$$

таков. При  $t = 0$  имеем  $u = \theta_1(x)$ . Если наблюдатель, выйдя в начальный момент  $t = 0$  из точки  $x = c$  оси  $Ox$ , передвигается по этой оси в положительном направлении со скоростью  $a$ , так что для абсциссы его

положение имеем  $\frac{dx}{dt} = a$ , откуда  $x = at + c$  и  $x - at = c$ , то для него

$u = \theta_1(x - at) = \theta_1(c) = \text{const}$ . Иными словами, для такого наблюдателя смещение  $u$  струны, определяемое формулой (3.4), будет все время постоянным и равным  $\theta_1(c)$ .

Тем самым, решение (3.4) представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $a$ .

Если за  $\theta_1(\xi)$  взять  $\sin \xi$ , то будем иметь синусоидальную волну.

Решение  $u = \theta_2(x + at)$  представляет обратную волну, которая распространяется со скоростью  $a$  в отрицательном направлении оси  $Ox$ .

Таким образом, решение (3.3) является суммой прямой и обратной волн. Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени  $t$ : сначала строим кривые  $u = \theta_1(x)$  и  $u = \theta_2(x)$ , изображающие прямую и обратную волны в начальный момент времени  $t = 0$ , а затем, не изменяя их формы, передвигаем их одновременно на величину  $at > 0$  в разные стороны, кривую  $u = \theta_1(x)$  – вправо,  $u = \theta_2(x)$  – влево. Чтобы получить график струны, достаточно построить алгебраическую сумму ординат передвинутых кривых.

#### §4. Решение задачи Коши для неограниченной струны

Задача Коши для неограниченной струны состоит в следующем: найти функцию  $u(x,t) \in C^2$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.5)$$

где  $\varphi_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ ,  $\varphi_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ . В начальный момент  $t = 0$  функция  $\varphi_0(x)$  определяет форму струны, а функция  $\varphi_1(x)$  задает распределение скоростей  $\frac{\partial u}{\partial t}$  вдоль струны. Допустим, что решение рассматриваемой задачи

существует; тогда оно дается формулой  $u(x,t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at)$ .

Определим функции  $\theta_1$  и  $\theta_2$  таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (3.5). Имеем

$$u(x,0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x), \quad (3.6)$$

$$u_t(x,0) = -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = \varphi_1(x). \quad (3.7)$$

Интегрируя второе равенство, получим  $\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + C$ ,

где  $C$  – произвольная постоянная. Из равенств

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x), \quad \theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + C$$

находим 
$$\theta_1(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2},$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Подставляя найденные выражения для  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в формулу (3.3), получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \varphi_0(x-at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \varphi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \varphi_0(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \varphi_1(\alpha) d\alpha,$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\alpha) d\alpha \quad (3.8)$$

– формула Даламбера.

Нетрудно проверить, что если  $\varphi_0(x) \in C^2(R^1)$ ,  $\varphi_1(x) \in C^1(R^1)$ , то функция  $u(x,t)$  определяемая формулой (3.8), удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям (3.5), т.е. решает поставленную задачу.

Полученное решение единственно. В самом деле, если бы существовало другое решение задачи (3.1), (3.5), то оно также представлялось бы формулой (3.8) и, значит, совпадало с построенным решением.

**Пример 3.1** Найти решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , если  $u|_{t=0} = x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ .

Так как  $a = 1$ , а  $F(x) = 0$ , то  $u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2}$ , где  $u = \frac{x-t+x+t}{2}$ , или

окончательно  $u = x$ .

**Пример 3.2** Найти решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , если

$u|_{t=0} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x^3$ . Здесь  $f(x) = 0$ ,  $F(x) = x^3$ .

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} z^3 dz = \frac{1}{8a} z^4 \Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{8a} ((x+at)^4 - (x-at)^4) = \\ &= \frac{1}{8a} (x^2 + 2axt + a^2t^2 + x^2 - 2axt + a^2t^2)(x^2 + 2axt + a^2t^2 - x^2 + 2axt - a^2t^2) = \\ &= \frac{1}{8a} (2x^2 + 2a^2t^2) \cdot 2 \cdot 2axt = \frac{1}{a} (x^3at + xa^3t^3) = x^3t + xt^3a^2. \end{aligned}$$

**Пример 3.3** Найти форму струны, определяемой уравнением  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

в момент  $t = \pi$ , если  $u|_{t=0} = \cos x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$ .

$$u = \frac{\cos(x + at) + \cos(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} z \, dz =$$

$$= \cos x \cos at + \frac{1}{2a} \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{x-at}^{x+at} = \cos x \cos at + \frac{1}{4a} \cdot 4atx = \cos x \cos at + xt.$$

Если  $t = \pi$ , то  $u = \cos a\pi \cdot \cos x + \pi x$ .

### §5. Корректность постановки задачи

**Определение.** Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если

- 1) решение задачи существует в каком-то классе  $M_1$  функций;
- 2) решение задачи единственно в некотором классе  $M_2$  функций;
- 3) решение задачи непрерывно зависит от данных задачи (начальных и граничных условий, коэффициентов уравнения и т. д.).

Множество  $M_1 \cap M_2$  функций называется классом корректности рассматриваемой математической задачи.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что задача Коши  $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$  поставлена корректно, если функция  $f(x, y)$  непрерывна по совокупности аргументов и имеет ограниченную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в некоторой области, содержащей точку  $(x_0, y_0)$ .

Рассмотрим задачу Коши для неограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.9)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.10)$$

$$\varphi_0(x) \in C^2(R^1), \quad \varphi_1(x) \in C^1(R^1).$$

Выше мы установили, что решение задачи (3.9)-(3.10)

- 1) существует и
- 2) единственно.



Покажем, что при непрерывном изменении начальных условий это решение изменяется непрерывно.

**Теорема 3.1.** Каков бы ни был отрезок  $[0; t_0]$  изменения времени  $t$  и каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , найдется такое  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , что для любых двух решений  $u(x, t)$  и  $\tilde{u}(x, t)$  уравнения (1), отвечающих начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\varphi}_1(x), \end{aligned}$$

для  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , выполняется неравенство  $|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon$ ,

если только

$$|\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| < \delta, \quad |\varphi_1(x) - \tilde{\varphi}_1(x)| < \delta, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.11)$$

(малое изменение начальных условий влечет за собой малое изменение решений).

Доказательство. Функции  $u(x, t)$  и  $\tilde{u}(x, t)$  связаны со своими начальными условиями формулой Даламбера, так что

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) - u(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}_0(x - at) - \varphi_0(x - at)}{2} + \\ + \frac{\tilde{\varphi}_0(x + at) - \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} (\tilde{\varphi}_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)) d\alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \frac{|\tilde{\varphi}_0(x - at) - \varphi_0(x - at)|}{2} + \\ + \frac{|\tilde{\varphi}_0(x + at) - \varphi_0(x + at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\tilde{\varphi}_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)| d\alpha, \end{aligned}$$

или, используя соотношения (3.11),

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} 2at\delta \leq \delta(1 + t_0).$$

Если положить  $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$ , то из последнего неравенства получаем

$$|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon$$

для всех  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ .

Таким образом, для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

задача Коши поставлена корректно.

### **§6 Пример Адамара некорректно поставленной задачи**

Рассмотрим задачу Коши: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.12)$$

удовлетворяющее при  $t = 0$  условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \sin nx \quad (3.14)$$

( $n$  – натуральное число).

Решением этой задачи будет функция

$$u(x,t) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \sin nx. \quad (3.15)$$

Так как

$$\left| \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{n} \sin nx \right| \leq \frac{1}{n},$$

то при достаточно большом  $n$  абсолютная величина  $u_1(x,0)$  как угодно мала при любом  $x$ . Вместе с тем, как показывает формула (3.15), решение  $u(x,t)$  рассматриваемой задачи будет принимать как угодно большие по абсолютной величине значения при произвольно малом  $t > 0$ , если  $n$  достаточно велико.

Допустим, что мы нашли решение  $u_0(x, t)$  задачи Коши для уравнения (3.12) при некоторых начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Тогда для начальных условий

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) + \frac{1}{n} \sin nx$$

решением задачи Коши будет функция

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \cdot \sin nx.$$

Отсюда видно, что малое изменение начальных условий может повлечь за собой как угодно большие изменения решения задачи Коши и притом в любой близости от линии начальных значений  $t = 0$ . Следовательно, задача Коши для данного уравнения является некорректно поставленной.

Далее рассмотрим метод Фурье или метод разделения переменных, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Рассмотрим этот метод, обратившись к простейшей задаче о свободных колебаниях однородной струны длины  $l$ , закрепленной на концах.

### **§7. Метод Фурье. Свободные колебания однородной струны, закрепленной на концах**

Задача о свободных колебаниях однородной струны с закрепленными концами сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.16)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.17)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.18)$$

Задачу (3.16)–(3.18) называют смешанной: она содержит и начальные и граничные условия.

Решение задачи начнем с поиска частных решений уравнения (3.16) вида

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (3.19)$$

При этом будем предполагать, что каждое из них удовлетворяет граничным условиям (3.17), но не равно нулю тождественно. Подставляя функцию  $u(x, t)$  в форме (3.19) в уравнение (3.16), получаем

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Последнее равенство (его левая часть зависит только от  $t$ , а правая – только от  $x$ ) возможно лишь в том случае, если обе его части не зависят ни от  $t$ , ни от  $x$ , т. е. равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную (разделения) через  $(-\lambda)$ ,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (3.20)$$

Из равенства (3.20) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.21)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.22)$$

Граничные условия (3.17) дают

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

откуда ( $T(t) \neq 0$ ) следует, что функция  $X(x)$  должна удовлетворять граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3.23)$$

Чтобы получить нетривиальные решения  $u(x, t)$  вида (3.19), удовлетворяющие граничным условиям (3.17), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (3.22)

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

удовлетворяющие граничным условиям (3.23)

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (3.22)–(3.23), а также сами эти решения. Такие значения параметра  $\lambda$  называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями задачи (3.22)–(3.23). Сформулированную таким образом задачу называют задачей Штурма–Лиувилля.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (3.22)–(3.23).

Рассмотрим отдельно три случая, когда  $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$ .

1. При  $\lambda < 0$  общее решение уравнения (3.6.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Потребовав выполнения граничных условий (3.23), получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x} = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Так как определитель системы (3.24) отличен от нуля, то  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ . Следовательно,  $X(x) \equiv 0$ , т. е. при  $\lambda < 0$  нетривиальных решений задачи не существует.

2. При  $\lambda = 0$  общее решение уравнения (3.22) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия (3.23) дают

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда  $C_1 = C_2 = 0$ , и следовательно,  $X(x) \equiv 0$ , т.е. при  $\lambda = 0$  нетривиальных решений задачи (3.22)–(3.23) также не существует.

3. При  $\lambda > 0$  общее решение уравнения (3.22) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Потребовав выполнение граничных условий (3.23), получим

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Система (3.25) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0,$$

или  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , откуда  $\sqrt{\lambda}l = \pi k$ , где  $k$  – любое целое число. Таким образом, нетривиальные решения задачи (3.22)–(3.23) возможны лишь при

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это – собственные значения задачи (3.22)–(3.23).

Из первого уравнения системы (3.25) получаем, что  $C_1 = 0$  и, значит, функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots$$

будут собственными функциями задачи. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя, который мы выбрали равным единице.

При  $\lambda = \lambda_k$  общее решение уравнения (3.21) имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l}t,$$

где  $A_k$  и  $B_k$  – произвольные постоянные. Таким образом, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left( A_k \cos \frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l}t \right) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

удовлетворяют уравнению (3.16) и граничным условиям (3.17) при любых  $A_k$  и  $B_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n, \dots$

В силу линейности и однородности уравнения (3.16) всякая конечная сумма решений будет также решением уравнения (3.16). То же справедливо и для ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (3.26)$$

если он сходится равномерно и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и по  $t$ . Поскольку каждое слагаемое в ряде (3.26) удовлетворяет граничным условиям (3.17), то этим условиям будет удовлетворять и сумма  $u(x, t)$  этого ряда. Остается определить в формуле (3.26) постоянные  $A_k$  и  $B_k$  так, чтобы выполнялись и начальные условия (3.18). Продифференцируем формально ряд (3.26) по  $t$ . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -A_k \sin \frac{k\pi a}{l} t + B_k \cos \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.27)$$

Полагая в соотношениях (3.26) и (3.27)  $t = 0$ , в силу начальных условий (3) получим

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} B_k \cos \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.28)$$

Формулы (3.28) представляют собой разложения заданных функций  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, l)$ .

Коэффициенты разложений (3.28) вычисляются по известным формулам

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.29)$$

**Теорема 3.2.** Если  $\varphi_0(x) \in C^3[0, l]$  и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0,$$

а  $\varphi_1(x) \in C^2[0, l]$  и удовлетворяет условию

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0,$$

то сумма  $u(x, t)$  ряда (3.26), где  $A_k$  и  $B_k$  определяются формулами (3.29), имеет в области  $\{0 < x < l, t > 0\}$  непрерывные частные производные до второго порядка включительно по каждому из аргументов, удовлетворяет уравнению (3.16), граничным условиям (3.17) и начальным условиям (3.18), т. е. является решением задачи (3.16)–(3.18).

**Пример 3.1.** Найти закон свободных колебаний однородной струны длины  $l$ , закрепленной на концах, если в начальный момент  $t = 0$  струна имеет форму параболы  $hx(l - x)$  ( $h > 0 - \text{const}$ ), а начальная скорость отсутствует.

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.30)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.31)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = hx(l - x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.32)$$

Применяя метод Фурье, ищем нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (3.31), в виде

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (3.33)$$

Подставляя  $u(x, t)$  в форме (3.33) в уравнение (3.30) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (3.34)$$

откуда

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.35)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.36)$$

причем в силу (3.31)



$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3.37)$$

Как было установлено выше, собственные значения задачи (3.36)–(3.37)

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для  $\lambda = \lambda_n$  общее решение уравнения (3.35) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t.$$

Будем искать решение исходной задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.38)$$

Для определения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  воспользуемся начальными условиями (3.32). Имеем

$$u|_{t=0} = hx(l-x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 = \frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.40)$$

Из формулы (3.40) сразу получаем, что  $B_n = 0$  для любого  $n$ , а из (3.39)

$$A_n = \frac{2h}{l} \int_0^l x(l-x) \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

откуда, интегрируя по частям дважды, находим

$$A_{2m+1} = \frac{8l^2 h}{\pi^3 (2m+1)^3}, \quad A_{2m+2} = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Подставляя найденные значения  $A_n$  и  $B_n$  в ряд (3.38), получим решение поставленной задачи

$$u(x, t) = \frac{8l^2 h}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \cos \frac{(2m+1)\pi a}{l} t \sin \frac{(2m+1)\pi}{l} x.$$

**Замечание.** Если начальные функции  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$  не удовлетворяют условиям теоремы 2, то дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (3.30)–(3.32) может и не существовать. Однако если  $\varphi_0(x) \in C^1[0, l]$  и  $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0$ , а  $\varphi_1(x) \in C^0[0, l]$  и  $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0$ , то ряд (3.38) сходится равномерно при  $0 \leq x \leq l$  и любом  $t$  и определяет непрерывную функцию  $u(x, t)$ . В этом случае можно говорить лишь об обобщенном решении задачи.

Каждая из функций

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = \left( A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

определяет так называемые собственные колебания струны, закрепленной на концах. При собственных колебаниях, отвечающих  $k = 1$ , струна издает основной, самый низкий тон. При колебаниях, соответствующих большему  $k$ , она издает более высокие тоны, обертоны. Записав  $u_k(x, t)$  в виде

$$u_k(x, t) = H_k \sin \frac{k\pi}{l} x \left( \frac{k\pi a}{l} t + \alpha_k \right),$$

закключаем, что собственные колебания струны – стоячие волны, при которых точки струны совершают гармонические колебания с амплитудой  $H_k \sin \frac{k\pi}{l} x$

, частотой  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$  и фазой  $\alpha_k$ . Мы рассмотрели случай свободных колебаний однородной струны, закрепленной на концах. Рассмотрим теперь случай других граничных условий. Пусть, например, левый конец струны закреплен,  $u(0, t) = 0$ , а правый конец  $x = l$  упруго связан со своим положением равновесия, что соответствует условию  $u_x(l, t) = -hu(l, t)$  ( $h > 0 - \text{const}$ ). Нетривиальное решение  $u(x, t)$  уравнения (3.16), удовлетворяющее поставленным граничным условиям, будем опять искать в виде

$$u(x, t) = T(t)X(x).$$

В результате подстановки  $u(x, t) = T(t)X(x)$  в уравнение (3.16) приходим к следующей задаче о собственных значениях: найти такие значения параметра  $\lambda$ , для которых дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.41)$$

при граничных условиях

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0 \quad (3.42)$$

имеет нетривиальные решения  $X(x)$ .

Общее решение уравнения (3.41) имеет вид  $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Первое из граничных условий (3.42) дает  $C_1 = 0$ , так что функциями  $X(x)$  с точностью до постоянного множителя являются  $\sin \sqrt{\lambda}x$ .

Из второго граничного условия (3.42) имеем

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l + h \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \quad (3.43)$$

Положим  $\lambda = v^2$ . Тогда

$$\operatorname{tg}(vl) = -\frac{v}{h}. \quad (3.44)$$

Для отыскания  $v$  получаем трансцендентное уравнение. Корни этого уравнения можно найти графически, взяв в плоскости  $(v, z)$  сечения последовательных ветвей кривой  $z = \operatorname{tg}(vl)$  прямой линией  $z = -\frac{1}{h}v$ .

Обе части уравнения (3.44) – нечетные функции относительно  $v$ , поэтому каждому положительному корню  $v_k$  соответствует равный ему по абсолютной величине отрицательный корень. Поскольку изменение знака  $v_k$  не влечет за собой появления новых собственных функций (они только изменят знак, что несущественно), достаточно ограничиться положительными корнями уравнения (3.44). В результате опять получается последовательность собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , и отвечающие им

последовательности собственных функций  $\sin v_1 x, \sin v_2 x, \dots, \sin v_n x, \dots$  и собственных колебаний

$$(A_1 \cos av_1 t + B_1 \sin av_1 t) \sin v_1 x, \dots, (A_n \cos av_n t + B_n \sin av_n t) \sin v_n x, \dots$$

Кстати, для  $n$ -ой собственной частоты  $v_n$  получается асимптотическое

соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = \frac{\pi}{l}$ , в частности, для  $l = \pi$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = 1$ .

Если правый конец струны  $x = l$  свободен,  $u_x(l, t) = 0$ , то из (3.43) получаем

$\cos vl = 0$ . Отсюда  $vl = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , так что в случае свободного конца

собственные значения и собственные функции соответственно равны

$$v_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

**Пример 3.2.** Струна длины  $l$  закреплена на концах. В начальный момент

времени она оттянута в точке  $x = \frac{l}{2}$  на расстояние  $\frac{l}{10}$ , а затем отпущена без

толчка (см. рис.4). Методом Фурье определить отклонение  $u(x, t)$  точек струны в любой момент времени.

В поставленной задаче мы имеем дело со свободными колебаниями струны, закрепленной на обоих концах. Ее решение сведется к решению следующей математической задачи. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{здесь } a^2 = \frac{T}{\rho}, \text{ где } T - \text{натяжение струны, а } \rho - \text{плотность}$$

струны), удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям:

Начальные условия:

$$\text{а) } u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ -\frac{1}{5}(x-l), & \text{при } \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

б)  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = 0$  (струна была отпущена без толчка, значит, начальная скорость ее точек была равна нулю).

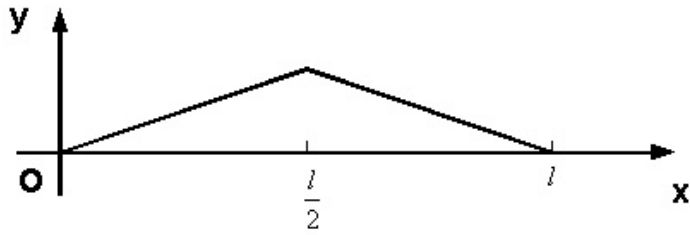


Рис. 3.4

Граничные условия:  $u(0,t)=0$ ,  $u(l,t)=0$ . Физически они означают, что в точках  $x=0$  и  $x=l$  струна закреплена.

Вычисляя  $a_n$ , получим:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \frac{1}{5} \left( \int_0^{l/2} x \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) =$$

$$= \frac{4}{5l} \cdot \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \cdot \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Таким образом,  $a_n = \frac{4}{5} \cdot \frac{l}{\pi^2 n^2} \cdot \sin \frac{\pi n}{2}$  ( $n=1,2,\dots$ ). Заметим, что при четных  $n$

имеем:  $a_n = 0$ , так как  $\sin \frac{\pi n}{2} = \sin \frac{2\pi k}{2} = 0$ . При нечетных  $n=2k-1$  имеем

$\sin \frac{\pi n}{2} = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1}$  ( $k=1,2,\dots$ ). Окончательно для коэффициентов

$$a_{2n} = 0.$$

$$a_n \text{ получим формулу: } a_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{4l}{5\pi^2 (2n-1)^2} \quad (n=1,2,\dots).$$

Поскольку в рассматриваемой задаче  $\psi(x)=0$ , то  $b_n=0$  ( $n=1,2,\dots$ ).

Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi a n}{l} t \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{4l}{5\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos \frac{\pi a n}{l} t \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

**Упражнения.**

3.1. Струна длины  $l$ , закрепленная на концах, изогнута так, что она приняла форму синусоиды  $u = 2 \sin \frac{\pi x}{l}$ , и отпущена без начальной скорости. Найти закон колебания струны.

**Ответ.**  $u(x, t) = 2 \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$ .

3.2. Струна с закрепленными концами  $x=0$  и  $x=l$  в начальный момент времени имеет форму, определяемую уравнением  $u(x, 0) = 2 \sin \frac{5\pi x}{l}$ .

Начальные скорости точек струны определяются формулой  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 3 \sin \frac{4\pi x}{l}$ . Найти смещение  $u(x, t)$  точек струны.

**Ответ.**  $u(x, t) = \frac{3l}{4\pi a} \sin \frac{4\pi a t}{l} \sin \frac{4\pi x}{l} + 2 \cos \frac{5\pi a t}{l} \sin \frac{5\pi x}{l}$ .

3.3. Решить уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$  при нулевых начальных и краевых условиях  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ .

**Ответ.**  $u(x, t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}$ .

3.4. Найти закон колебаний струны, концы которой закреплены в точках  $x=-l$  и  $x=l$ , а в начальный момент времени точки струны отклонены по параболе, симметричной относительно центра струны, причем максимальное начальное смещение равно  $h$ .

**Ответ.**  $u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x \cdot \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t$ .

### §8. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Рассмотрим колебания однородной струны длины  $l$ , закрепленной на концах, под действием внешней силы  $f(x, t)$ , рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводит к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3.45)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (3.46)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (3.47)$$

Будем искать решение  $u(x, t)$  этой задачи в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (3.48)$$

где  $v(x, t)$  – решение неоднородного уравнения. Причем одна из них подбирается так, чтобы уравнение и граничные условия по одной из переменных были однородными. Этот метод требует применения искусственных приемов. Его целесообразно использовать в простых случаях, когда легко бывает выделить частное решение.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.49)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad (3.50)$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3.51)$$

а  $w(x, t)$  – решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.52)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \quad (3.53)$$

и начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (3.54)$$

Решение  $v(x, t)$  представляет вынужденные колебания струны, т.е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы  $f(x, t)$ , когда начальные возмущения отсутствуют, а решение  $w(x, t)$  представляет свободные колебания струны, т.е. такие колебания, которые происходят только вследствие начальных возмущений.

Метод нахождения свободных колебаний  $w(x, t)$  был изложен ранее, так что остается только найти вынужденные колебания  $v(x, t)$ , т.е. решение неоднородного уравнения (3.49)–(3.51). Применим метод разложения по собственным функциям, который является одним из мощных методов решения неоднородных линейных уравнений с частными производными. Основная идея метода состоит в разложении внешней силы  $f(x, t)$  в ряд

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x)$$

по собственным функциям  $\{X_n(x)\}$  соответствующей однородной краевой задачи и нахождении откликов  $u_k(x, t)$  системы на воздействие каждой компоненты  $f_k(t) X_k(x)$ . Суммируя все такие отклики, получим решение исходной задачи

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t).$$

Решение  $v(x, t)$  задачи (3.49)–(3.51) будем искать в следующем виде:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.55)$$

Здесь  $\sin \frac{k\pi}{l} x$  – собственные функции однородной краевой задачи, и граничные условия (3.50) выполняются автоматически. Определим функции



$T_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) так, чтобы функция  $v(x, t)$  удовлетворяла уравнению (3.49) и начальным условиям (3.51). Подставив  $v(x, t)$  в виде (3.55) в уравнение (3.49), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ T_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x, t). \quad (3.56)$$

Разложим функцию  $f(x, t)$  в интервале  $(0; l)$  в ряд Фурье по синусам (собственным функциям)

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (3.57)$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{k\pi}{l} \xi \, d\xi. \quad (3.58)$$

Сравнивая разложения (3.56) и (3.57) для одной и той же функции  $f(x, t)$ , получим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_k(t) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.59)$$

для неизвестных функций  $T_k(t)$ . Чтобы решение  $v(x, t)$ , определяемое рядом (3.55), удовлетворяло нулевым начальным условиям (3.51), достаточно подчинить функции  $T_k(t)$  условиям

$$T_k(t) = 0, \quad T_k'(t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.60)$$

Действительно, полагая в (3.55)  $t = 0$ , получим

$$v(x, 0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x \Rightarrow T_k(0) = 0 \quad \forall k.$$

Дифференцируя (3.55) по  $t$  и полагая  $t = 0$ , найдем, что  $T_k'(0) = 0 \quad \forall k$ .

Пользуясь методом вариации постоянных, получим, что решения уравнений (3.59) при начальных условиях (3.60) имеют вид

$$T_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau) \, d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.61)$$

где  $f_k(t)$  определяются по формулам (3.58).

Подставив найденные выражения для  $T_k(t)$  в ряд (3.55), получим решение  $v(x,t)$  задачи (3.49)–(3.51), если ряд (3.55) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по  $x$  и по  $t$  дважды, сходятся равномерно.

Как можно показать, такая сходимость рядов будет обеспечена, если функция  $f(x,t)$  непрерывна, имеет непрерывные частные производные по  $x$  до второго порядка включительно и для всех значений  $t$  выполняется условие  $f(0,t) = f(l,t) = 0$ . Тогда решение  $u(x,t)$  исходной задачи (3.45)–(3.47) представляется в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

где функции  $T_k(t)$  определяются по формулам (3.61), а

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

**Пример. 3.3.** Решить смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (3.62)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.63)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3.64)$$

Начальные возмущения отсутствуют, так что мы имеем «чистую» задачу на вынужденные колебания однородной струны длины  $\pi$ , закрепленной на концах. Система функций  $\{\sin nx\}$  есть ортогональная на  $[0, \pi]$  система собственных функций краевой задачи  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(\pi) = 0$  (здесь  $l = \pi$ ). Ищем решение задачи (3.62)–(3.64) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx, \quad (3.65)$$

где  $T_n(t)$  – неизвестные функции. Подставляя  $u(x,t)$  в форме (3.65) в уравнение (3.62), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''(t) + n^2 T_n(t)) \sin nx = t \sin x,$$

откуда легко усматриваем, что

$$T_1''(t) + T_1(t) = t, \quad (3.66)$$

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.67)$$

Используя формулу (3.65), в силу начальных условий (3.64) получаем

$$u(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin nx,$$

откуда

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.68)$$

Таким образом, для  $T_1(t)$  имеем

$$T_1''(t) + T_1(t) = t, \quad (3.69)$$

$$T_1(0) = T_1'(0) = 0. \quad (3.70)$$

Выпишем общее решение уравнения (3.69)

$$T_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t.$$

Потребовав выполнение начальных условий (3.70), находим  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -1$ ,

так что  $T_1(t) = t - \sin t$ . Далее  $n \geq 2$  имеем  $T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0$ ,  $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ ,

откуда  $T_n(t) \equiv 0$ ,  $(n = 2, 3, \dots)$ . Пользуясь формулой (3.65), для решения

$u(x,t)$  исходной задачи получаем следующее выражение:

$$u(x,t) = (t - \sin t) \sin x.$$

### **§9. Вынужденные колебания струны с подвижными концами**

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны длины  $l$  под действием внешней силы  $f(x,t)$ , рассчитанной на единицу длины, причем концы струны не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.71)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t), \quad t \geq 0, \quad (3.72)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.73)$$

К решению этой задачи метод Фурье непосредственно неприменим, т. к. граничные условия (3.72) неоднородны. Однако эта задача легко сводится к задаче с нулевыми (однородными) граничными условиями.

Действительно, введем вспомогательную функцию

$$\omega(x, t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (3.74)$$

Легко видеть, что

$$\omega|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \omega|_{x=l} = \psi_2(t). \quad (3.75)$$

Таким образом, функция  $\omega(x, t)$  на концах отрезка  $0 \leq x \leq l$  удовлетворяет условиям (3.72), а внутри этого отрезка она линейна по  $x$ . Говорят, что функция  $\omega(x, t)$  продолжает граничные условия в интервале  $0 < x < l$ .

Решение задачи (3.71)–(3.73) ищем в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t), \quad (3.76)$$

где  $v(x, t)$  – новая неизвестная функция.

В силу выбора функции  $\omega(x, t)$  функция  $v = u - \omega$  удовлетворяет нулевым граничным условиям

$$v|_{x=0} = (u - \omega)|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = (u - \omega)|_{x=l} = 0 \quad (3.77)$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - \omega|_{t=0} = \varphi_0(x) - \psi_1(0) - [\psi_2(0) - \psi_1(0)] \frac{x}{l} = \tilde{\varphi}_0(x), \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} - \frac{\partial \omega}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) - \psi_1'(0) - [\psi_2'(0) - \psi_1'(0)] \frac{x}{l} = \tilde{\varphi}_1(x).$$

Подставив  $u = v + \omega$  в уравнение (3.71), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + f(x, t),$$

или, учитывая выражение для  $\omega(x, t)$ ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t),$$

где

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \psi_1''(t) - [\psi_2''(t) - \psi_1''(t)] \frac{x}{l}.$$

Таким образом, при  $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^2$  приходим к смешанной задаче с нулевыми граничными условиями для функции  $v(x, t)$ : найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x).$$

Метод решения таких задач был изложен ранее.

**Пример.3.4** Решить смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3.79)$$

$$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 2t, \quad t \geq 0, \quad (3.80)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1 + x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.81)$$

Граничные условия неоднородные (концы струны подвижные). Здесь  $\psi_1(t) = t, \psi_2(t) = 2t$ . Вводим вспомогательную функцию

$$\omega(x, t) = t + tx = t(1 + x). \quad (3.82)$$

Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t), \quad (3.83)$$

где  $v(x, t)$  – новая неизвестная функция.

Для нее получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3.84)$$

граничные условия

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad (3.85)$$

начальные условия

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.86)$$

Задача (3.84)–(3.86) имеет очевидное решение  $v(x, t) \equiv 0$ , и, как ясно из физических соображений, это ее единственное решение. Тогда по формуле (3.83) получаем решение  $u(x, t)$  исходной задачи  $u(x, t) = t(1 + x)$ .

### §10. Общая схема метода Фурье

Рассмотрим в области  $Q = \{t > 0, \quad 0 < x < l\}$  дифференциальное уравнение

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \quad (3.87)$$

(уравнение колебаний неоднородной струны длины  $l$ ), где  $\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geq 0$  для  $0 \leq x \leq l$ , так что уравнение (3.87) является уравнением гиперболического типа в области  $Q$ . Предположим, что

$$\rho(x) \in C[0, l], \quad p(x) \in C^1[0, l], \quad q(x) \in C[0, l],$$

и займемся изучением смешанной задачи для уравнения (3.87) при однородных граничных условиях

$$\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0, \quad \gamma u(l, t) + \delta u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – некоторые постоянные, причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ .

(Напомним, что задача называется однородной, если, наряду с решением и этой задачи, ее решением является также  $cu$ , где  $c$  – произвольная постоянная).

Возможны граничные условия следующих типов:

1.  $u(0, t) = 0$  и  $u(l, t) = 0$  (струна с закрепленными концами);
2.  $u_x(0, t) = 0$  и  $u_x(l, t) = 0$  (струна со свободными концами);
3.  $u_x(0, t) = h_0 u(0, t)$  и  $u_x(l, t) = -h_1 u(l, t)$  (упруго закрепленные концы). Числа  $h_0, h_1$  должны быть положительными, если положение покоя есть положение устойчивого равновесия.

Ограничившись для простоты случаем струны с закрепленными концами, приходим к следующей задаче: найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.88)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.89)$$

начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.90)$$

Будем решать эту задачу методом Фурье.

1. Ищем нетривиальные решения уравнения (3.88), удовлетворяющие граничным условиям (3.89), в виде произведения

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (3.91)$$

Представляя  $u(x, t)$  в форме (3.91) в уравнение (3.88), получим

$$T(t) \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dX}{dx} \right] - q(x)X(x)T(t) = \rho(x)X(x)T''(t),$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dX}{dx} \right] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (3.92)$$

Левая часть последнего равенства зависит только от  $x$ , а правая часть – только от  $t$ , и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (3.92) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через  $(-\lambda)$ .

Тогда из равенства (3.92) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (3.93)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dX}{dx} \right] + (\lambda \rho(x) - q(x)) X(x) = 0. \quad (3.94)$$

Чтобы получить нетривиальные уравнения (3.88) вида (3.91), удовлетворяющие граничным условиям (3.89), необходимо, чтобы функция  $X(x)$  была нетривиальным решением уравнения (3.94), удовлетворяющим граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3.95)$$

Как мы уже видели, эта задача имеет отличное от тождественного нуля решение не при всяком  $\lambda$ .

**Задача Штурма–Лиувилля о собственных значениях:** найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (3.94), удовлетворяющие граничным условиям (3.95), а также сами эти решения. Те значения параметра  $\lambda$ , при которых задача (3.94)–(3.95) имеет нетривиальное решение, называются собственными значениями (числами), а сами эти решения – собственными функциями, отвечающими данному собственному значению. Совокупность всех собственных значений называется спектром данной задачи. В силу однородности уравнения (3.94) и граничных условий (3.95) собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1. \quad (3.96)$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (3.96), будем называть нормированными с весом  $\rho(x)$ .

Установим некоторые общие свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.



**Теорема 3.3.** Каждому собственному значению с точностью до постоянного множителя отвечает лишь одна собственная функция.

В самом деле, пусть существуют две собственные функции  $X_1(x)$  и  $X_2(x)$ , отвечающие одному и тому же собственному значению  $\lambda_0$ , т.е. удовлетворяющие дифференциальному уравнению (3.94) при одном и том же  $\lambda = \lambda_0$ . Так как по предположению  $X_1(0) = 0, X_2(0) = 0$ , то определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) \end{vmatrix}$$

решений  $X_1(x)$  и  $X_2(x)$  уравнения (3.94) в точке  $x = 0$  обращается в нуль и, следовательно, решения  $X_1(x)$  и  $X_2(x)$  линейно зависимы.

**Теорема 3.4.** Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на отрезке  $[0, l]$  с весом  $\rho(x)$ ,

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad (3.97)$$

где  $X_m(x), X_n(x)$  – собственные функции, соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$ .

Предварительно установим одно предложение, имеющее самостоятельный интерес. Введем так называемый оператор Штурма–Лиувилля

$$Ly \equiv \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y \quad (3.98)$$

( $p(x), p'(x), q(x) \in C[0, l], p(x) \geq 0, q(x) \geq 0$ ) на  $[0, l]$ . Будем рассматривать этот оператор на множестве  $\dot{C}^2[0, l]$  функций, дважды непрерывно дифференцируемых на  $[0, l]$  и удовлетворяющих граничным условиям  $y(0) = y(l) = 0$ :

$$\dot{C}^2[0, l] = \{y(x) \mid y(x) \in C^2[0, l], y(0) = y(l) = 0\}$$

**Лемма.** Оператор Штурма–Лиувилля (11) на  $\dot{C}^2[0, l]$  является симметрическим:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

(здесь  $u(x), v(x) \in C^2[0, l]$ ;  $(f, g) = \int_0^l f(x)g(x)dx$ ).

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u \right\} v(x) dx = \\ &= - \int_0^l q(x)uv(x) dx - \int_0^l p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последний интеграл справа и принимая во внимание, что  $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$ , найдем

$$(Lu, v) = - \int_0^l q(x)uv dx - \int_0^l p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx.$$

Вновь интегрируя по частям второе слагаемое справа и учитывая, что  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= - \int_0^l q(x)uv dx + \int_0^l \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dv}{dx} \right) u dx = \\ &= - \int_0^l u \left\{ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dv}{dx} \right) - q(x)v \right\} dx = (u, Lv). \end{aligned}$$

Обратимся к доказательству теоремы. Запишем уравнение (3.94) в виде

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x)X(x) = -\lambda \rho(x)X(x) \quad (3.99)$$

и обозначим через  $L[X]$  оператор, стоящий в левой части (3.99). Это – оператор Штурма–Лиувилля. На множестве собственных функций  $X_k(x)$  задачи (3.94)–(3.95) это симметрический оператор.

Пусть  $X_m(x)$  – собственная функция задачи (3.94)–(3.95), отвечающая собственному значению  $\lambda_m$ , а  $X_n(x)$  – собственная функция, отвечающая собственному значению  $\lambda_n$ , ( $\lambda_n \neq \lambda_m$ ). Тогда имеют место тождества

$$\begin{aligned} L[X_m(x)] &\equiv -\lambda_m \rho(x)X_m(x), \\ L[X_n(x)] &\equiv -\lambda_n \rho(x)X_n(x) \end{aligned} \quad (0 < x < l).$$

Умножим первое тождество на  $X_n(x)$ , второе – на  $X_m(x)$  и проинтегрируем результаты по  $x$  от 0 до  $l$ . Получим

$$(L[X_m], X_n) = -\lambda_m (\rho X_m, X_n), \quad (3.100)$$

$$(L[X_n], X_m) = -\lambda_n (\rho X_n, X_m). \quad (3.101)$$

Замечая, что

$$(L[X_m], X_n) = (X_m, L[X_n]) = (L[X_n], X_m),$$

и вычитая равенства (3.100) и (3.101) почленно, найдем

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m)(\rho X_m, X_n), \text{ откуда, при } \lambda_n \neq \lambda_m, \text{ следует, что } (\rho X_m, X_n) = 0$$

, или, что то же  $\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad (\lambda_n \neq \lambda_m).$

Так, в частном случае однородной струны ( $\rho = p = 1, q = 0$ ), закрепленной на концах, собственные функции  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) образуют ортогональную систему функций на отрезке  $[0, l]$ ,

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx = 0, \quad m \neq n.$$

**Теорема 3.5.** Все собственные значения (3.94)–(3.95) действительны.

Доказательство. В самом деле, допустим, что существует комплексное собственное значение  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , которому отвечает собственная функция  $X(x) = u(x) + iv(x)$ . Тогда комплексно сопряженное число  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  также будет собственным значением, а функция  $\bar{X}(x)$ , комплексно сопряженная с  $X(x)$ , будет соответствующей собственной функцией, поскольку коэффициенты уравнения (3.94) и граничные условия (3.95) – действительные. Из условия ортогональности собственных функций, отвечающих различным собственным значениям, следует

$$\int_0^l \rho(x) X(x) \bar{X}(x) dx = \int_0^l \rho(x) |X(x)|^2 dx = 0,$$

откуда  $X(x) \equiv 0$ , т.е. комплексное число  $\lambda$  не является собственным значением.

**Теорема 3.6.** Если  $p(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$  на отрезке  $[0, l]$ , то все собственные значения задачи (3.94)–(3.95) положительные.

Доказательство. В самом деле, пусть  $\lambda_k$  – собственное значение, а  $X_k(x)$  – соответствующая собственная функция, нормированная с весом  $\rho(x)$ . Тогда справедливо тождество

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dX_k}{dx} \right) - q(x) X_k(x) \equiv -\lambda_k \rho(x) X_k(x).$$

Умножая обе части тождества на  $X_k(x)$ , интегрируя результат по  $x$  от 0 до  $l$  и принимая во внимание, что  $\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1$ , получим

$$\lambda_k = \int_0^l q(x) X_k^2(x) dx - \int_0^l \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dX_k}{dx} \right) X_k(x) dx.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое справа, придем к равенству

$$\lambda_k = \int_0^l q(x) X_k^2(x) dx + \int_0^l p(x) \left( \frac{dX_k}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.102)$$

Производная  $\frac{dX_k}{dx} \neq 0$ , так как в противном случае  $X_k(x) \equiv \text{const}$  и из граничных условий (3.95) мы имели бы  $X_k(x) \equiv 0$ , что исключено. Таким образом, правая часть (3.102) положительна, откуда следует, что все собственные значения  $\lambda_k$  задачи (3.94)–(3.95) положительны.

**Теорема 3.7.** У задачи (3.94)–(3.95) существует счетное множество собственных значений  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$  которым отвечают собственные функции  $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$ .

Продолжим описание метода Фурье.

2. Обратимся к дифференциальному уравнению (3.93). Его общее решение при  $\lambda = \lambda_k > 0$  имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

где  $A_k, B_k$  – произвольные постоянные.

Каждая функция

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t)X_k(x)$$

будет решением уравнения (3.88), удовлетворяющим граничным условиям (3.89).

3. Составим формальный ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t)X_k(x). \quad (3.103)$$

Если этот ряд, вместе с рядами, полученными из него двукратным почленным дифференцированием по  $x$  и по  $t$ , сходится равномерно, то его сумма  $u(x, t)$  будет решением уравнения (3.88), удовлетворяющим граничным условиям (3.89).

Для выполнения начальных условий (3.90) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \quad (3.104)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x). \quad (3.105)$$

Таким образом, мы пришли к задаче о разложении произвольной функции в ряд Фурье по собственным функциям  $X_k(x)$  граничной задачи (3.94)–(3.95). Предполагая, что ряды (3.104) и (3.105) сходятся равномерно, можно найти коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$ , умножив обе части равенства (3.104) и (3.105) на  $\rho(x) X_n(x)$  и проинтегрировав по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . Считая функции  $X_k(x)$  ортонормированными с весом  $\rho(x)$  на отрезке  $[0, l]$ , получим для коэффициентов Фурье функций  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$  по системе  $\{X_k(x)\}$  следующие выражения:

$$A_n = \int_0^l \rho(x) \varphi_0(x) X_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \rho(x) \varphi_1(x) X_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При нахождении коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  мы опираемся на теорему разложения Стеклова.

**Теорема 3.8.** Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция  $F(x)$ , удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям  $X_k(x)$

этой задачи, где  $c_n = \int_0^l \rho(x)F(x)X_n(x)dx$ , а  $X_n(x) (n=1,2,\dots)$  –

нормированные с весом  $\rho(x)$  собственные функции. Подставим найденные значения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  в ряд (3.103) и, если ряд (3.103) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по  $x$  и по  $t$ , сходятся равномерно, получим решение  $u(x,t)$  смешанной задачи (3.88)–(3.90).

**Замечание.** Мы рассмотрели случай простейших граничных условий  $u(0,t) = u(l,t) = 0$ . Несколько изменяя приведенные выше рассуждения, можно доказать аналогичные свойства собственных значений и собственных функций более общей однородной краевой задачи

$$\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0, \quad \gamma u(l,t) + \delta u_x(l,t) = 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0).$$

Некоторые общие замечания относительно области применения метода разделения переменных.

В основе применимости метода лежит линейность, как самих дифференциальных уравнений, так и краевых условий. Коэффициенты исходных дифференциальных уравнений должны быть либо постоянными, либо представляться в виде функций, каждая из которых содержит лишь одну из переменных. Например, в случае дифференциального уравнения с двумя независимыми переменными  $x$  и  $t$  соответствующее дифференциальное уравнение должно иметь вид

$$A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x) \frac{\partial u}{\partial x} + D(t) \frac{\partial u}{\partial t} + (F_1(x) + F_2(t))u = 0 \quad \text{или}$$

приводиться к этому виду. Краевые условия должны быть однородными. Если в исходной задаче эти условия не однородны, надо привести их к однородным. В случае двумерных (не считая времени) задач граница рассматриваемой области должна состоять из координатных линий (в трехмерном случае – из координатных поверхностей). Таким образом, если используется, декартова система координат, границы области – отрезки прямых, параллельных осям координат (куски плоскостей, параллельных координатным плоскостям); при использовании полярной системы координат границы области – дуги окружностей с центрами в полюсе и отрезки лучей, выходящих из полюса, и т.д. Это обстоятельство сильно ограничивает применимость метода. И в задаче распространения волн в пространстве, и в задачах расчета тепловых режимов, и в теории потенциала приходится при использовании метода разделения переменных ограничиваться лишь самыми простыми конфигурациями исследуемых областей.

### **§11. Единственность решения смешанной задачи**

**Теорема 3.9.** Решение смешанной задачи для вынужденных колебаний однородной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.106)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad t \geq 0, \quad (3.107)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.108)$$

единственно.

Допустим, что существуют два решения  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  задачи (3.106)–(3.108). Тогда разность  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  этих решений будет удовлетворять однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.109)$$

нулевым граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.110)$$

и нулевым начальным условиям

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.111)$$

Покажем, что соотношениям (3.109)–(3.111) удовлетворяет лишь функция, тождественно равная нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (3.112)$$

и покажем, что при условиях (3.109)–(3.111) она не зависит от времени  $t$ .

Взяв производную по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^l \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right] dx = \\ &= \int_0^l \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx \right] + \left( a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t} \right) \Big|_{x=0}^{x=l} - a^2 \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \\ &= \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx \equiv 0, \end{aligned}$$

так как внеинтегральное слагаемое обращается в нуль в силу условий (3.110),

а  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \equiv 0$ , так как  $v(x, t)$  – решение уравнения (3.109).

Итак,  $\frac{dE(t)}{dt} \equiv 0$ , т. е.  $E(t) \equiv \text{const}$ . Учитывая начальные условия (3.111),

получаем  $E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{t=0} dx = 0$ , и, следовательно,  $E(t) \equiv 0$ . Из

того, что интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен нулю,



$$\int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0, \text{ следует, что } \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \equiv 0, \text{ откуда } \frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0 \text{ и}$$

$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$ , так что  $v(x, t) \equiv \text{const}$ . В силу первого из начальных условий (3.111)

$v(x, 0) = 0$ , и значит,  $v(x, t) \equiv 0$ , т. е.  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ .

Интеграл (3.112) можно переписать в виде  $\left( a^2 = \frac{T}{\rho} \right)$

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{\rho} \int_0^l \left( \frac{1}{2} \rho v_t^2 + \frac{1}{2} T v_x^2 \right) dx.$$

Величина  $\int_0^l \frac{1}{2} \rho v_t^2 dx$  является кинетической энергией струны в момент

времени  $t$ , а  $\int_0^l \frac{1}{2} T v_x^2 dx$  - ее потенциальная энергия, так что функция  $E(t)$  с

точностью до постоянного множителя  $\rho^{-1} = \text{const}$  выражает полную энергию струны. Равенство  $E(t) \equiv 0$  является математическим выражением закона сохранения энергии для свободных колебаний любой физической природы при нулевых граничных условиях, т.е. когда нет притока или рассеивания энергии в процессе колебаний. Неоднородность в граничных условиях и неоднородность в уравнении означает наличие постоянно действующих факторов, подводящих или рассеивающих энергию. Неоднородность в начальных условиях означает, что в начальный момент процесс обладал некоторым запасом энергии, который он и сохраняет в течение всего колебания. Изложенный метод доказательства единственности решения смешанной задачи называется энергетическим и широко используется при установлении различных теорем единственности.

## **§12. Колебания прямоугольной мембраны**

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами  $p$  и  $q$ , закрепленной по контуру. Эта задача сводится к решению

$$\text{волнового уравнения} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.113)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0 \quad (3.114)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \quad (3.115)$$

Будем искать частные решения уравнения (3.113) в виде

$$u(x, y, t) = T(t)v(x, y), \quad (3.116)$$

Подставляя (3.116) в уравнение (3.113), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -k^2.$$

Отсюда, принимая во внимание граничные условия (3.114), будем иметь

$$T''(t) + a^2 k^2 T(t) = 0, \quad (3.117)$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0, \quad (3.118)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=p} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=q} = 0. \quad (3.119)$$

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (3.117), (3.119).

Положим

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.120)$$

Подставляя (3.120) в уравнение (3.118), получим

$$\frac{Y''}{Y} + k^2 = -\frac{X''}{X}, \quad \text{откуда получаем два уравнения}$$

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0, \quad (3.121)$$

$$\text{где} \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (3.121)$$

Общие решения уравнений (3.121) имеют следующий вид:

$$X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x; \quad Y(y) = C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y. \quad (3.123)$$

Из граничных условий получаем

$X(0) = 0, X(p) = 0, Y(0) = 0, Y(q) = 0$ , откуда ясно, что  $C_1 = C_3 = 0$ , и, если мы положим  $C_2 = C_4 = 1$ , то окажется  $X(x) = \sin k_1 x, Y(y) = \sin k_2 y$ , причем должно быть

$$\sin k_1 p = 0, \quad \sin k_2 q = 0. \quad (3.124)$$

Из уравнений (3.124) вытекает, что  $k_1$  и  $k_2$  имеют бесчисленное множество

значений  $k_{1,m} = \frac{m\pi}{p}, k_{2,n} = \frac{n\pi}{q}$  ( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ). Тогда

$$k_{m,n}^2 = k_{1,m}^2 + k_{2,n}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right). \quad (3.125)$$

Таким образом, собственным значениям (3.125) соответствуют собственные

функции  $v_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$  граничной задачи (3.118), (3.119).

Обращаясь теперь к уравнению (3.117), мы видим, что для каждого собственного значения  $k^2 = k_{mn}^2$  его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos ak_{mn} t + B_{mn} \sin ak_{mn} t, \quad (3.126)$$

где  $A_{mn}$ , и  $B_{mn}$  – произвольные постоянные.

Таким образом, частные решения уравнения (3.113) имеют вид

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos ak_{mn} t + B_{mn} \sin ak_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos ak_{mn} t + B_{mn} \sin ak_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по  $x, y, t$ , то сумма его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (3.113) и граничным условиям (3.114). Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a k_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}.$$

Эти формулы представляют собой разложение заданных функций  $\varphi_0(x, y)$  и  $\varphi_1(x, y)$  в двойной ряд Фурье по синусам. Коэффициенты разложений определяются по формулам

$$A_{mn} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \phi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy, B_{mn} = \frac{4}{a k_{mn} pq} \int_0^p \int_0^q \phi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy.$$

**Пример 3.5** Найти закон свободных колебаний квадратной мембраны со стороной  $l$ , если в начальный момент отклонение в каждой точке определялось равенством  $u(x, y, t)|_{t=0} = \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$ . Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.

В рассматриваемом случае  $\varphi_0(x, y) = \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$ ,  $\varphi_1(x, y) = 0$ .

Следовательно,  $B_{mn} = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$A_{mn} = \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} dx dy.$$

В силу ортогональности тригонометрической системы функций только  $A_{11} \neq 0$ ,

$$A_{mn} = 0. \quad A_{11} = \frac{4}{100l} \left( \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right)^2 =$$

а все остальные

$$= \frac{4}{100l} \left( \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx \right)^2 = \frac{1}{100l} \left( x \Big|_0^l - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} \Big|_0^l \right)^2 = \frac{l}{100}.$$

Следовательно,  $u(x, y, t) = \frac{l}{100} \cos \frac{a\pi\sqrt{2}}{l} t \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$ .

### Упражнения.

3.5. Струна длины  $l$ , закрепленная на концах, изогнута так, что она приняла форму синусоиды  $u = 2 \sin \frac{\pi x}{l}$ , и отпущена без начальной скорости. Найти закон колебания струны.

**Ответ.**  $u(x,t) = 2 \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$ .

3.6. Струна с закрепленными концами  $x=0$  и  $x=l$  в начальный момент времени имеет форму, определяемую уравнением  $u(x,0) = 2 \sin \frac{5\pi x}{l}$ .

Начальные скорости точек струны определяются формулой  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3 \sin \frac{4\pi x}{l}$ . Найти смещение  $u(x,t)$  точек струны.

**Ответ.**  $u(x,t) = \frac{3l}{4\pi a} \sin \frac{4\pi at}{l} \sin \frac{4\pi x}{l} + 2 \cos \frac{5\pi at}{l} \sin \frac{5\pi x}{l}$ .

3.7 Решить уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$  при нулевых начальных и краевых условиях  $u(0,t) = 0$ ,  $u(l,t) = 0$ .

**Ответ.**  $u(x,t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}$ .

3.8. Найти закон колебаний струны, концы которой закреплены в точках  $x=-l$  и  $x=l$ , а в начальный момент времени точки струны отклонены по параболе, симметричной относительно центра струны, причем максимальное начальное смещение равно  $h$ .

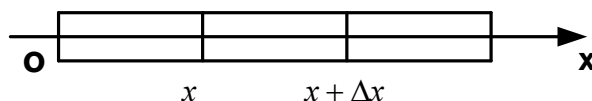
**Ответ.**  $u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x \cdot \cos \frac{2n+1}{2l} \pi at$ .

## ГЛАВА 4. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

### §1. Вывод уравнения теплопроводности для стержня

Рассмотрим однородный теплоизолированный с боков стержень конечной длины  $l$ , имеющий постоянную по длине толщину, и настолько тонкий, чтобы в любой момент времени температуру тела во всех точках поперечного сечения можно было бы считать одинаковой.

Выберем ось  $x$  (направив ее по оси стержня) так, чтобы стержень совпадал с отрезком  $[0;l]$  оси  $x$  (см. рис. 4.1).



**Рис. 4.1**

Обозначим температуру стержня в сечении  $x$  в момент  $t$  через  $u(x,t)$ . Тогда функция  $u=u(x,t)$  дает закон распределения температуры в стержне. Выведем дифференциальное уравнение для этой функции.

Выделим элемент стержня  $[x,x+\Delta x]$  и составим для него уравнение теплового баланса, согласно которому скорость изменения количества тепла в рассматриваемом объеме (изменение количества тепла в единицу времени), обусловленная теплоемкостью материала, равна количеству тепла, поступившему в этот объем в единицу времени вследствие теплопроводности. Скорость изменения тепла в выделенном элементе

стержня равна  $\int_x^{x+\Delta x} c\rho s \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx$ , где  $c$  – теплоемкость материала стержня;  $\rho$  –

плотность;  $s$  – площадь поперечного сечения. Применяя к этому интегралу

теорему о среднем, получим  $\int_x^{x+\Delta x} c\rho s \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = c\rho s \frac{\partial u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial t} \Delta x$ , где

$0 < \theta_1 < 1$ . Теперь найдем количества тепла, поступившее в выделенный элемент стержня за единицу времени. Так как стержень теплоизолирован с боков, то тепло может поступать только через сечения, ограничивающие выделенный элемент стержня. Известно, что количество тепла, протекающее через сечение с абсциссой  $x$  за единицу времени, равно  $-k \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} s$ , где  $k$  –

коэффициент теплопроводности, а  $s$  – площадь сечения. Поэтому искомое количество тепла равно

$$\begin{aligned} & -ks \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} s - \left( -k \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} s \right) = ks \left( \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \\ & = ks \frac{\partial^2 u(x+\theta_2\Delta x,t)}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned}$$

где  $0 < \theta_2 < 1$ . (Здесь применяется формула конечных приращений Лагранжа к функции  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ). Составим уравнение теплового баланса

$$c\rho s \frac{\partial u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial t} \Delta x = ks \frac{\partial^2 u(x+\theta_2\Delta x,t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Разделим обе части этого уравнения на  $s\Delta x$  (объем выделенного элемента стержня) и устремим  $\Delta x$  к нулю (стягивая выделенный элемент стержня к сечению). Получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \left( a^2 = \frac{k}{c\rho} \right). \quad (*)$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности для однородного стержня. Величина  $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$  называется коэффициентом температуропроводности. Искомая функция  $u(x,t)$  должна удовлетворять уравнению (\*), начальному условию

$u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l)$ , где  $\varphi(x)$  – заданная функция от  $x$  (это условие выражает закон распределения температуры по длине стержня в начальный момент времени  $t=0$ ), и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(x, t)|_{x=l} &= u(l, t) = \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq +\infty), \text{ где } \mu_1(t) \text{ и } \mu_2(t) \text{ – заданные}$$

функции от времени  $t$ . Они определяют температуру, поддерживаемую на концах стержня. Отметим, что уравнение не учитывает тепловой обмен между поверхностью стержня и окружающим пространством.

## §2. Распространение тепла в конечном стержне

Если стержень имеет конечную длину  $l$  и занимает отрезок  $0 \leq x \leq l$  оси  $Ox$ , то для постановки задачи о распространении тепла в таком стержне помимо уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

если источники отсутствуют, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начального условия  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  необходимо задать еще температурный режим на концах стержня  $x=0$  и  $x=l$ , т. е. задать граничные условия. Граничные условия могут быть различными в зависимости от температурного режима на концах стержня. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На концах стержня задана температура

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

где  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  – функции, заданные для отрезка времени  $0 \leq t \leq T$ , в течение которого изучается процесс.

2. На концах стержня заданы значения производной



$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = v_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = v_2(t).$$

Эти условия возникают, если задана величина теплового потока  $Q$ , протекающего через торцевое сечение стержня. Например, если для  $x=l$  задана величина  $Q(l,t)$ , то

$$Q(l,t) = -k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l},$$

откуда  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = v_2(t)$ , где  $v_2(t) = -\frac{Q(l,t)}{k}$ . Если  $v_1(t)$  (или  $v_2(t)$ ) тождественно равна нулю, то говорят, что соответствующий конец стержня теплоизолирован.

3. На концах стержня заданы линейные соотношения между функцией и ее производной

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda[u(0,t) - \theta(t)], \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)],$$

где  $\theta(t)$  – известная функция – температура окружающей среды,  $\lambda$  – коэффициент теплообмена. Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой  $\theta(t)$ .

Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, протекающего через сечение  $x=l$ ,  $Q = h(u - \theta)$  и  $Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$ , получаем формулировку третьего граничного условия в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)], \quad \lambda = \frac{h}{k}.$$

Для сечения  $x=0$  стержня третье граничное условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda[u(0,t) - \theta(t)],$$

поскольку для теплового потока  $-k \frac{\partial u}{\partial n}$  при  $x=0$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

(внешняя нормаль к стержню в конце  $x = 0$  противоположна по направлению с осью  $Ox$ ).

Перечисленные основные задачи далеко не исчерпывают возможных краевых задач для уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t).$$

Например, на разных концах стержня могут задаваться условия разных типов. Мы ограничимся рассмотрением первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Задача ставится так: найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (4.1)$$

в области  $0 < x < l, t > 0$ ,  $u(x, t) \in C^2\{0 < x < l, t > 0\}$ , удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.2)$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Считаем, что функция  $u(x, t)$  непрерывна в замкнутой области  $D\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ , для чего необходимо, чтобы функции  $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$  были непрерывными и выполнялись условия согласования  $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0)$ .

**Замечание.** Как и для уравнений гиперболического типа, функция  $u(x, t)$  ищется только для  $0 < x < l$  и  $t > 0$  (но не при  $t = 0, x = 0$  и  $t = 0, x = l$ , где значения функции  $u(x, t)$  заранее задаются начальными и граничными условиями).

Сформулируем принцип максимального значения.

**Теорема 4.1** Если функция  $u(x,t) \in C(D)$ , удовлетворяет уравнению теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в точках области  $\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ , то максимальное и минимальное значения функции  $u(x,t)$  достигаются или в начальный момент времени  $t = 0$ , или в точках границы на отрезках  $x = 0$  или  $x = l$ .

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура тела не превосходит некоторого значения  $M$  в граничных точках или в начальный момент, то внутри тела (источники отсутствуют!) не может возникнуть температура, большая  $M$ .

Как следствия из принципа максимального значения вытекают теоремы.

**Теорема 4.2 (единственности).** Решение задачи (4.1)–(4.3) в прямоугольнике  $\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  единственно.

**Теорема 3.** Решение задачи (4.1)–(4.3) непрерывно зависит от начальных и граничных функций.

### **§3 Интегрирование уравнения распространения тепла в ограниченном стержне методом Фурье**

Задача о распространении тепла в теплоизолированном с боков стержне длины  $l$  приводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

в области  $0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty$ , удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (4.5)$$

и граничным условиям  $\left. \begin{array}{l} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{array} \right\} (0 \leq t < +\infty).$

Ограничимся рассмотрением случая, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура, т.е. когда граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= \mu_0 = \text{const}, \\ u(l,t) &= \mu_1 = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < +\infty). \quad (4.6)$$

Не умаляя общности можно считать, что  $u_0 = 0, u_1 = 0$ , ибо в противном случае этого всегда можно добиться при помощи замены искомой функции  $u(x,t)$  по формуле

$$v(x,t) = u(x,t) - u_0 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{l} x, \quad (4.7)$$

где  $v$  – новая неизвестная функция. Действительно, так как

$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , то функция  $v$  удовлетворяет тому же уравнению, что и

функция  $u$ :  $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ . Далее из (4.7) и (4.6) следует, что

$$\left. \begin{aligned} v(0,t) &= 0, \\ v(l,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

Таким образом, достаточно найти решение уравнения (4.4), удовлетворяющее начальному условию (4.5) и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

Как и в случае волнового уравнения, будем искать решение уравнения (4.4) в виде произведения двух функций

$$u = X(x)T(t), \quad (4.8)$$

одна из которых зависит только от  $x$ , а другая – только от  $t$ ; причем  $X(x) \neq 0$  и  $T(t) \neq 0$ , ибо в противном случае  $u(x,t) \equiv 0$ , что невозможно: функция  $u \equiv 0$  не удовлетворяет начальному условию (4.5), поскольку предполагается, что  $\varphi(x) \neq 0$ .

В силу граничных условий функция  $X(x)$  должна обращаться в нуль на концах интервала  $[0; l]$ :  $X(0) = 0 \quad X(l) = 0$ . Подставляя (4.8) в (4.4), получим

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \quad \text{или} \quad \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда заключаем, что функции  $X(x)$  и  $T(t)$  должны быть решениями однородных линейных дифференциальных уравнений

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (4.9)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0 \quad (4.10)$$

Ненулевые решения уравнения (4.9) существуют только при  $\lambda = \lambda_k$ , где

$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$  ( $k=1,2,\dots$ ), причем в качестве этих решений можно взять

функции  $X_k = \sin \frac{k\pi}{l} x$  ( $k=1,2,\dots$ ). Заменяя в уравнении (4.10)  $\lambda$  на  $\lambda_k$ ,

получаем уравнение  $T_k' + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k = 0$ . Его общим решением будет

$T_k = c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}$ , где  $c_k$  — произвольная постоянная, соответствующая

взятому значению  $k$ . Подставляя найденные значения  $X = X_k$  и  $T = T_k$  в

(4.8), получим решение уравнения (4.4) в виде

$$u_k(x, t) = c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (k=1,2,\dots) \quad (4.11)$$

Каждая из функций (4.11) удовлетворяет граничным условиям. Можно показать, что функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (4.12)$$

тоже является решением уравнения (4.4), удовлетворяющим граничным условиям.

Выберем теперь коэффициенты  $c_k$  таким образом, чтобы функция (4.12) удовлетворяла и начальному условию (4.5). Полагая в (9)  $t=0$ , получим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (4.13)$$

Предположим, что функция  $f(x)$  разложима в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по синусам

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (4.14)$$

Тогда  $b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$ . Сравнивая (4.13), (4.14), видим, что  $c_k = b_k$ ,

т.е.  $c_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$ , чем и завершается решение задачи. Предположим,

что  $\varphi(x) \in C^2[0, l]$  и  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ . Тогда ряд (4.14) с коэффициентами,

определяемыми по формуле  $c_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$  будет сходиться к

функции  $\varphi(x)$  абсолютно и равномерно. Так как  $0 < e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \leq 1$

при  $t \geq 0$ , то ряд (4.12) при  $t \geq 0$  также сходится абсолютно и равномерно.

Следовательно, функция  $u(x, t)$  - сумма ряда (4.12) – непрерывна в области  $0 < x < l, t > 0$  и удовлетворяет начальному и граничному условиям.

Остается показать, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (4.4) в области  $0 < x < l, t > 0$ . Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (4.12) почленным дифференцированием по  $t$  один раз и почленным дифференцированием по  $x$  два раза, также абсолютно и равномерно сходятся при  $0 < x < l, t > 0$ . Но это следует из того, что при любом  $t > 0$

$$0 < \left(\frac{a^2 \pi^2 k^2}{l^2}\right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \left(\frac{k^2 \pi^2}{l^2}\right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} < 1,$$

если  $k$  достаточно велико.

Единственность решения задачи (4.4) с начальными (4.5) и граничными условиями (4.6) и непрерывная зависимость решения от начальной функции  $\varphi(x)$  были уже установлены ранее. Таким образом, для

$t > 0$  задача (4.4)-(4.6) поставлена корректна, напротив для отрицательных  $t$  задача эта некорректна.

Перейдем к рассмотрению следующей задачи. Найти решение  $u(x,t)$  неоднородного уравнения.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (4.15)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.16)$$

и однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.17)$$

Предположим, что функция  $f(x,t)$  непрерывна, имеет непрерывную производную  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и при всех  $t > 0$  выполняется условие  $f(0,t) = f(l,t) = 0$ .

Решение задачи (4.15)–(4.17) будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad (4.18)$$

где  $v(x,t)$  определим как решение задачи.

Причем одна из них подбирается так, чтобы уравнение и граничные условия по одной из переменных были однородными. Этот метод требует применения искусственных приемов. Его целесообразно использовать в простых случаях, когда легко бывает выделить частное решение.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (4.19)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (4.20)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad (4.21)$$

а функцию  $w(x,t)$  – как решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.22)$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad (4.23)$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \quad (4.24)$$

Задача (4.22)–(4.24) рассмотрена выше. Будем искать решение  $v(x, t)$  задачи (4.19)–(4.21) в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.25)$$

по собственным функциям  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$  краевой задачи

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Подставляя  $v(x, t)$  в виде (4.25) в уравнение (4.19), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( T_n'(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x, t). \quad (4.26)$$

Разложим функцию  $f(x, t)$  в ряд Фурье по синусам,

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (4.27)$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi. \quad (4.28)$$

Сравнивая два разложения (4.26) и (4.27) функции  $f(x, t)$  в ряд Фурье, получаем

$$T_n'(t) + \left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.29)$$

Пользуясь начальным условием для  $v(x, t)$

$$v(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

находим, что

$$T_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.30)$$

Решения уравнений (4.29) при начальных условиях (4.30) имеют вид:



$$T_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \quad (n=1,2,\dots).$$

Подставляя найденные выражения для  $T_n(t)$  в ряд (4.25), получим решение  $v(x,t)$  задачи (4.19)-(4.21)

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (4.31)$$

Функция  $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$  будет решением исходной задачи (4.15)–(4.17).

Рассмотрим еще одну задачу: найти в области  $\{0 < x < l, t > 0\}$  решение  $u(x,t)$  уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (4.32)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (4.33)$$

и неоднородных граничных условиях

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t). \quad (4.34)$$

Непосредственно метод Фурье неприменим из-за неоднородности условий (4.34). Введем новую неизвестную функцию  $v(x,t)$ , положив  $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ , где  $w(x,t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \frac{x}{l}$ .

Тогда решение задачи (4.32)–(4.34) сведется к решению задачи (4.15)–(4.17), рассмотренной в параграфе 2 настоящей главы, для функции  $v(x,t)$ .

**Пример 4.1.** Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при граничных условиях  $u(0;t) = 0$ ,  $u(l;t) = 0$  и начальном условии

$$u(x;0) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x, & \text{если } \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Решение определяется формулой  $u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}$ , где  $c_n$

вычисляется по формулам

$$c_n = \frac{2}{l} \left( \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right).$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{l^2}{2\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2},$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{l^2}{2\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{l^2}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Складывая вычисленные интегралы, найдем, что  $c_n = \frac{4l}{\pi^2} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^2}$ . Так как

$\sin \pi n = 0$ , то и  $c_{2n} = 0$ . Далее имеем  $c_{2n+1} = \frac{4l}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ . Решение задачи

запишется так:  $u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a^2 (2n-1)^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{l}.$

### **Упражнения.**

4.1. Дан тонкий однородный стержень длины  $l$ , на концах которого поддерживается постоянная температура, равная нулю. Начальная температура стержня определяется уравнением  $u(x,0) = 3 \sin \frac{\pi x}{l} - 2 \sin \frac{3\pi x}{l}.$

Определить температуру стержня при  $t > 0$ .

**Ответ.**  $u(x,t) = 3e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l} - 2e^{-\frac{9\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{3\pi x}{l}.$

4.2. Концы стержня длиной  $l=100$  см поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру  $u(x,t)$  в точках стержня для любого момента времени

$t$ , если известно начальное распределение температуры

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & \text{если } 0 \leq x \leq 25, \\ \frac{100}{15} - \frac{x}{15}, & \text{если } 25 < x \leq 100. \end{cases}$$

**Ответ.**  $u(x,t) = \frac{160}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4} e^{-\frac{a^2 n^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$

4.3. Концы стержня длиной  $l$  поддерживаются при температуре, равной нулю. Начальная температура определяется формулой

$$u(x,0) = 5 \sin \frac{\pi x}{l} - 2 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Определить температуру стержня для любого момента времени.

**Ответ.**  $u(x,t) = 5e^{-\frac{a^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l} - 2e^{-\frac{9a^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{3\pi x}{l}.$

4.4. Найти распределение температуры в стержне длиной  $l$ , если на концах его поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна единице вдоль всего стержня.

**Ответ.**  $u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{2n+1}{l} \pi x.$

4.5. Найти решение уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , удовлетворяющее граничным условиям  $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$  и начальному условию  $u(x,0) = 3 \sin 2x$ .

**Ответ.**  $u(x,t) = 3e^{-4t} \sin 2x.$

4.6. Конец стержня  $x = 0$  имеет температуру  $u(0, t) = 0$ , а на конце  $x = l$  поддерживается температура  $u(l, t) = 100^\circ$ . Вычислить распределение температуры  $u(x, t)$  в точках стержня для любого момента времени  $t$ , если известно распределение ее в начальный момент

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{200}{l}x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 100, & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

**Указание.** Эту задачу целесообразно свести к задаче с нулевыми граничными условиями.

**Ответ.** 
$$u(x, t) = \frac{100x}{l} + \frac{400}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 n^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

4.7. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины  $l$ , лежащего на отрезке  $[0, l]$ , если в начальный момент температура внутри стержня была распределена следующим образом:

$$f(x) = u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{x}{l}u_0, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}; \\ \frac{l-x}{l}u_0, & \text{при } \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$$

где  $u_0 = \text{const}$ . На концах стержня поддерживается нулевая температура. Теплообмен свободный.

**Ответ.** 
$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}. \quad (\text{при } 0 \leq x \leq l, t \geq 0).$$

4.8. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины  $l$ , если в начальный момент температура внутри стержня во всех точках равнялась  $0^\circ$ , в левом конце поддерживается все время постоянная температура  $u_1$ , а в правом – постоянная температура  $u_2$ . Теплообмен свободный.

**Ответ.** 
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-u_1 + (-1)^n u_2) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} + u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l}.$$

#### §4. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4.35)$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени  $t > 0$ .

Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции  $u(x, \tau)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.36)$$

(где  $\tau = \frac{k}{c\rho}t$ ) и начальному условию (4.35).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в предыдущем параграфе с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Ясно поэтому, что, разделяя переменные по методу Фурье можно представить решение уравнения (1) в виде

$$u(x, \tau) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (4.37)$$

В случае стержня конечной длины  $l$  мы определяли из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра  $\lambda : \lambda_n = n \frac{\pi}{l}$ , где каждому значению индекса  $n$  соответствуют некоторые коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ . Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений  $\lambda_n$  (расстояние между  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$  равно  $\frac{\pi}{l}$  и стремится к нулю, когда  $l \rightarrow \infty$ ).

Поэтому для бесконечного стержня  $\lambda$  может иметь любое значение от 0 до  $\infty$ . Таким образом, каждому значению  $\lambda$  соответствует частное решение:

$$u_\lambda(x, \tau) = (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (4.38)$$

Общее решение получается из частных решений не суммированием, а интегрированием по параметру  $\lambda$ :

$$u_\lambda(x, \tau) = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \int_0^\infty (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (4.39)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье.

В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ , может быть

представлена в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_0^\infty (f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda, \quad (4.40)$$

$$\text{где } f_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad f_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \quad (4.41)$$

Подставляя значения Фурье - преобразований  $f_c(\lambda)$  и  $f_s(\lambda)$  в интеграл (4.40), получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi) d\lambda,$$

$$\text{или} \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) (\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi) d\xi.$$

Учитывая, что выражение в скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (4.42)$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  в (4.39) выбрать соответственно  $A(\lambda) = f_c(\lambda)$ ,  $B(\lambda) = f_s(\lambda)$ , то интеграл

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (4.43)$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения, получается из (4.42):

$u(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi$ . Преобразуем последний интеграл

меняя порядок интегрирования:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda. \quad (4.44)$$

Обозначив  $q := \xi - x$ , можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу :

$$K(\tau, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau \lambda^2} \cos \lambda q d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \quad (4.45)$$

Заменяя обратно  $q$  через  $\xi - x$  и подставляя (4.45) в (4.44), получим окончательно:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G(x, \xi, \tau) d\xi, \quad (4.46)$$

где

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \quad (4.47)$$

Функцию  $G(x, \xi, \tau)$ , определяемую формулой (4.47), часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Чтобы понять физический смысл полученного решения, допустим, что в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки  $x=0$ , где  $u = u_0$ . Можно себе представить, что в момент  $\tau = 0$  элементу длины  $2h$  стержня сообщили некоторое количество тепла  $Q_0 = 2hc\rho u_0$ , которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения  $u_0$ . Следовательно, формула (4.46)

принимает вид: 
$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} \int_{-h}^h u_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \frac{Q_0}{4h\sqrt{\pi \tau c \rho}} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Будем теперь уменьшать  $h$ , устремляя его к нулю, считая количество тепла неизменным, т.е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла

мощности  $Q_0$ , помещенного в момент  $\tau = 0$  в точке  $x=0$ . При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой:

$$u(x, \tau) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\tau c\rho}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi, \quad \text{или по теореме о среднем}$$

$$u(x, \tau) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\tau c\rho}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}. \quad \text{В частности, если } Q_0 = c\rho, \text{ то температура в любой}$$

точке стержня в произвольный момент времени  $t = \frac{\tau}{a}$  ( $a$  – коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad \text{Заметим, что величина } c\rho \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \text{ есть общее}$$

количество тепла, полученное стержнем к моменту времени  $t$ :

$$Q(t) = c\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx.$$

Но последний(справа) интеграл есть интеграл Пуассона:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ .

Поэтому получаем, что  $Q(t) = c\rho = Q_0 = const$ , что согласуется с законом сохранения энергии.

**Пример 4.1** Решить уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , если начальное распределение

температуры стержня определяется равенством

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & \text{если } x_1 < x < x_2, \\ 0, & \text{если } x < x_1, \text{ или } x > x_2. \end{cases}$$

Стержень является бесконечным, следовательно, решение запишется в виде



$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$ . Так как  $\varphi(x)$  в интервале  $[x_1, x_2]$  равна

постоянной температуре  $u_0$ , а вне интервала температура равна нулю, то

решение примет вид 
$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

**Замечание.** Решение  $u(x,t)$  можно выразить через интеграл вероятности.

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu.$$

Действительно, полагая  $x - \xi/(2a\sqrt{t}) = \mu$ ,  $d\xi = -2a\sqrt{t}d\mu$ , получим

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})}^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2} d\mu.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left[ \Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$$

## ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

### § 1. Определения. Постановка краевых задач

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т.е. не меняющихся во времени, процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5.1)$$

Этим уравнением характеризуется гравитационный и электростатический потенциалы в точках свободного пространства, оно описывает потенциал скорости безвихревого потока несжимаемой жидкости, и оно же справедливо для температуры однородной изотропной среды при установившемся движении тепла.

В случае функции  $u = u(x, y)$  двух независимых переменных  $x, y$  уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.2)$$

Оно лежит в основе теории аналитических функций комплексного переменного. Его решения – действительные и мнимые части аналитических в некоторой области  $D$  функций  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . В случае функции одного аргумента  $u = u(x)$  имеем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (5.3)$$

Решениями уравнения (5.3) являются функции  $u = C_1x + C_2$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

**Определение.** Функция  $u = u(x, y, z)$  называется гармонической в области  $\Omega \subset R^3$ , если  $u \in C^2(\Omega)$  и удовлетворяет в области  $\Omega$  уравнению Лапласа .

Пусть область  $\Omega$  ограничена поверхностью  $\Sigma$ . Типичной для уравнения Лапласа является задача: найти функцию  $u(M), M \in \Omega$ , гармоническую в  $\Omega$ , и удовлетворяющую на  $\Sigma$  граничному условию, которое может быть одного из следующих видов:

1.  $u|_{\Sigma} = f_1(p), p \in \Sigma$  – первая краевая задача, или задача Дирихле;
2.  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = f_2(p), p \in \Sigma$  – вторая краевая задача, или задача Неймана;
3.  $\left. \left( \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \right|_{\Sigma} = f_3(p), p \in \Sigma$  – третья краевая задача. Здесь  $f_1, f_2, f_3, h$  – заданные

функции,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  – производная в направлении внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ .

Геометрический смысл задачи Дирихле для одномерного уравнения Лапласа тривиален. Одномерные гармонические функции  $u = C_1x + C_2$  суть прямые линии, и задача Дирихле сводится к следующей: провести прямую через две точки  $A(x_1, u_1)$  и  $B(x_2, u_2)$ .

В зависимости от того, где ищется решение задачи – внутри области, ограниченной поверхностью  $\Sigma$  или в области, расположенной вне поверхности  $\Sigma$ , различают внутренние и внешние краевые задачи для уравнения  $\Delta u = 0$ .

Другим представителем эллиптических уравнений является уравнение Пуассона

$$\Delta u = g(x, y, z),$$

которое отвечает равновесному состоянию под действием внешней силы с плотностью, пропорциональной  $g(x, y, z)$ .

Еще пример. Рассмотрим волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0. \tag{5.4}$$

Будем искать решения уравнения (5.4) вида

$$u = u(x, y, z, t) = v(x, y, z)e^{i\omega t}. \quad (5.5)$$

Подставляя функцию  $u$  в форме (5.5) в уравнение (5.4), будем иметь  $e^{i\omega t} \Delta v + \frac{\omega^2}{a^2} v e^{i\omega t} = 0$ , откуда  $\Delta v + k^2 v = 0$ , где  $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$ . Таким образом, для функции  $v(x, y, z)$  мы получили эллиптическое уравнение  $\Delta v + k^2 v = 0$ , которое называется уравнением Гельмгольца. Как и для уравнения Лапласа, для уравнений Пуассона и Гельмгольца типичными являются 1-я, 2-я и 3-я краевые задачи.

## **§2. Фундаментальные решения уравнений Лапласа**

Декартовы, цилиндрические и сферические координаты являются наиболее употребительными. Оператор Лапласа в декартовых координатах  $(x, y, z)$  определяется формулой

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в цилиндрических координатах  $(x, \varphi, z)$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в сферических координатах  $(x, \theta, z)$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от переменной  $r$ . Пользуясь сферическими координатами, видим, что решение  $u = u(r)$ , обладающее сферической симметрией, определяется из

обыкновенного дифференциального уравнения  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$ . Интегрируя

это уравнение, находим  $u = \frac{C_1}{r} + C_2$  ( $C_1, C_2 = \text{const}$ ). Полагая, например,

$C_1 = 1, C_2 = 0$ , получаем функцию  $u_0(r) = \frac{1}{r}$ , которую называют

фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Функция

$u_0 = \frac{1}{r}$  удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$  всюду, кроме точки  $r = 0$ , где  $u_0$

обращается в бесконечность. Если рассматривать поле точечного заряда  $e$ ,

помещенного в начало координат, то потенциал этого поля равен  $u = \frac{e}{r}$ .

Пользуясь цилиндрическими координатами, находим, что решение  $u = u(r)$ ,

обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух

независимых переменных), определяется из обыкновенного

дифференциального уравнения  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0$ , интегрируя которое, получим

$u = C_1 \ln r + C_2$ . Выбирая  $C_1 = -1, C_2 = 0$ , будем иметь  $u_0(r) = \ln \frac{1}{r}$ .

Функцию  $u_0(r)$  называют фундаментальным решением уравнения Лапласа

на плоскости. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме

точки  $r = 0$ , где  $u = \ln \frac{1}{r}$  обращается в бесконечность.

### **§3. Формулы Грина**

Будем исходить из формулы Гаусса–Остроградского

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{a} d\Omega. \quad (5.6)$$

Положим  $\mathbf{a} = v \text{grad } u$  и будем считать, что функции  $u, v$  имеют непрерывные

вторые производные в области  $\Omega$  и непрерывны вместе с первыми

производными в ее замыкании  $\Omega = \Omega \cup \Sigma$ , т. е.  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ .

Имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = v(\text{grad } u, \mathbf{n}^0) = v \frac{\partial u}{\partial n},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, v \nabla u) = (\nabla v, \nabla u) + v \nabla^2 u = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + v \Delta u.$$

Поэтому из формулы (5.6) вытекает, что

$$\iiint_{\Omega} \{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + v \Delta u\} d\Omega = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (5.7)$$

Это – **первая формула Грина**.

Меняя в формуле (5.7)  $u$  и  $v$  местами, получим

$$\iiint_{\Omega} \{(\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u) + u \Delta v\} d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (5.8)$$

Вычитая равенства (5.7) и (5.8) почленно, находим

$$\iiint_{\Omega} \{u \Delta v - v \Delta u\} d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5.9)$$

Это – **вторая формула Грина**.

Наконец, полагая в (5.7)  $v = u$ , получим

$$\iiint_{\Omega} \{(\operatorname{grad} u)^2 + u \Delta u\} d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (5.10)$$

Это – **третья формула Грина**.

Здесь всюду  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к гладкой или кусочно-гладкой замкнутой поверхности  $\Sigma$ .

Граница  $\Sigma$  области  $\Omega$  может состоять из нескольких замкнутых поверхностей. В этом случае поверхностные интегралы в правых частях формул Грина следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область  $\Omega$ .

#### **§4. Основная интегральная формула Грина**

Мы установили, что функция  $v(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}$ , где

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \text{ – расстояние между точками } M(x, y, z)$$

и  $M(x_0, y_0, z_0)$ , удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  при  $\forall M, M \neq M_0$ .

Пусть  $\Omega$  – область в  $R^3$  с границей  $\Sigma$  и  $u(M) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Пусть  $M_0$  – некоторая внутренняя точка области  $\Omega$ . Поскольку функция  $v(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}$  разрывна в точке  $M_0 \in \Omega$ , непосредственно применить вторую формулу Грина (4) к функциям  $u$  и  $v$  нельзя.

Рассмотрим область  $\Omega \setminus K_\varepsilon$  с границей  $\Sigma \cup \Sigma_\varepsilon$ , получающуюся из области  $\Omega$  выбрасыванием шара  $K_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$  и поверхностью  $\Sigma_\varepsilon$  (рис. 5.1).

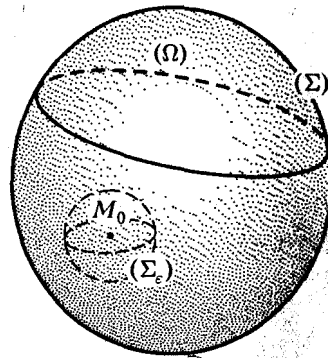


Рис.5.1

Область  $\Omega \setminus K_\varepsilon$  особенностей функции  $v(M)$  не содержит. Применяя вторую формулу Грина к функциям  $u(M)$  и  $v(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}$  в области  $\Omega \setminus K_\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \left( u \Delta \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right) d\Omega = \\ & = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Преобразуем второй интеграл в правой части равенства (1). Вычисляя производную по направлению внешней нормали к области  $\Omega \setminus K_\varepsilon$  на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$  (рис.5.2),

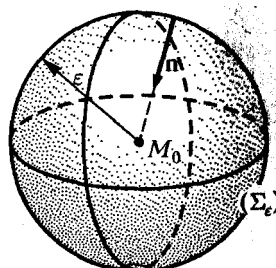


Рис.5.2

найдем, что  $\left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$ , откуда, воспользовавшись теоремой

о среднем для интеграла по поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ , получим

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 u^*, \quad (5.12)$$

где  $u^*$  – среднее значение функции  $u(M)$  на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ . Преобразуем теперь третий интеграл в правой части (5.11)

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (5.13)$$

где  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$  – среднее значение производной в направлении нормали  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на сфере  $\Sigma_\varepsilon$ . Подставляя выражения (5.12) и (5.13) в формулу (5.11) и учитывая,

что  $\Delta \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \equiv 0$  в  $\Omega \setminus K_\varepsilon$ , будем иметь

$$\iiint_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \right) \Delta u d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + 4\pi(u)^* - 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^*. \quad (5.14)$$

Устремим теперь радиус  $\varepsilon$  к нулю. Тогда получим:

1)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$ , так как  $u(M)$  – непрерывная функция, а  $u^*$  – ее среднее значение по сфере радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$ ;



2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0$ , т. к. из непрерывности первых производных функции

$u(M)$  внутри  $\Omega$  вытекает ограниченность производной в направлении

$$\text{нормали } \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

в окрестности точки  $M_0$ ;

3)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \left( -\frac{1}{r} \right) \Delta u d\Omega = -\iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} d\Omega$  по определению несобственного

интеграла.

В результате указанного предельного перехода в (5.14) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  приходим к основной интегральной формуле Грина

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} d\Omega, \quad (5.15)$$

Таким образом, всякая функция  $u(M) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  представима как сумма трех интегралов

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} d\Omega, \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma, \quad -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

которые называются **объемным потенциалом, потенциалом простого слоя и двойного слоя** соответственно.

Если  $u(M)$  – гармоническая в  $\Omega$  функция, то  $\Delta u \equiv 0$  и формула (5.15) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\sigma \quad (5.16)$$

(точка  $M_0$  внутри  $\Omega$ ). Это – основная формула теории гармонических функций. Она показывает, что значение гармонической функции в любой внутренней точке области  $\Omega$  выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$ .

Из формулы (5.16) следует

**Утверждение.** Всякая гармоническая в  $\Omega$  функция  $u(M)$  есть сумма потенциалов простого и двойного слоя.

Для уравнения Лапласа на плоскости фундаментальное решение имеет вид  $v_0 = \ln \frac{1}{r}$ . Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получаем основную интегральную формулу для гармонической функции двух аргументов:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left( \left( \ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right) ds. \quad (5.17)$$

Здесь  $\Gamma$  – граница области  $D$ ,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе. Таким образом, всякая гармоническая в области  $D$  функция  $u(x, y)$  есть сумма двух

потенциалов  $\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} ds$ ,  $-\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) ds$ ,

логарифмического потенциала простого слоя и логарифмического потенциала двойного слоя соответственно.

### **§5. Свойства гармонических функций**

**Теорема 5.1** Если  $u(M)$  – гармоническая в области  $\Omega$  функция, непрерывная вместе с первыми производными в  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$ , то ее нормальная производная  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$  удовлетворяет условию

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (5.18)$$

В самом деле, применяя вторую формулу Грина

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

к гармонической функции  $u(M)$  и к функции  $v(M) \equiv 1$ , получаем  $0 = \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ . Это свойство гармонических

функций выражает факт отсутствия источников внутри области  $\Omega$ .

**Теорема 5.2.** Если существует решение задачи Неймана для уравнения Лапласа, то оно определено с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство проведем при дополнительном предположении, что решение  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . Пусть решений два:  $u_1(M)$  и  $u_2(M)$ . Тогда

$$\Delta u_1 \equiv 0, \quad \Delta u_2 \equiv 0, \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_{\Sigma} = f(p) \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial n} \right|_{\Sigma} = f(p).$$

Разность  $u = u_1 - u_2$  будет решением задачи

$$\Delta u = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0.$$

Для такой функции  $u(M)$  третья формула Грина

$$\iiint_{\Omega} ((\text{grad } u)^2 + u \Delta v) d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

дает

$$\iiint_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega = 0, \quad \text{или} \quad \iiint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega = 0.$$

В силу непрерывности и неотрицательности подынтегральной функции

отсюда следует, что  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \equiv 0$ , или

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \text{ так что } u(x, y, z) \equiv \text{const} \quad \text{и,}$$

следовательно,  $u_1(M) - u_2(M) \equiv \text{const}$ . Подчеркнем, что в задаче Неймана функция  $f(p)$ ,  $p \in \Sigma$ , должна удовлетворять условию

$$\iint_{\Sigma} f(p) d\sigma = 0. \quad (5.19)$$

Если это условие не выполнено, задача Неймана решения не имеет.

**Теорема 5.3 (о среднем значении гармонической функции).** Если функция  $u(M)$  – гармоническая внутри шара радиуса  $R$  с центром в точке  $M_0$  и непрерывна вместе с первыми производными вплоть до его границы  $\Sigma_R$ , то

значение функции  $u(M)$  в центре  $M_0$  сферы  $\Sigma_R$  равно среднему арифметическому всех значений  $u(M)$  на этой сфере,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} u(p) d\sigma. \quad (5.20)$$

Доказательство. Для доказательства применим основную интегральную формулу теории гармонических функций

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\sigma$$

к сфере  $\Sigma_R$ . Для этой сферы  $r = M_0 p = R$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$  и поэтому

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{1}{R^2} \right) d\sigma \quad (5.21)$$

В силу теоремы 1 имеем  $\iint_{\Sigma_R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$ , и формула (5.21) дает

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} u(p) d\sigma$$

**Замечание.** Для одномерного уравнения Лапласа эта теорема является теоремой о средней линии трапеции.

**Теорема 5.4 (об экстремальных значениях функции).** Гармоническая в области  $\Omega$  функция  $u(M)$ , не равная тождественно постоянной, не может иметь локальных экстремумов внутри области  $\Omega$ .

Доказательство будем вести методом рассуждения от противного. Пусть в точке  $M_0 \in \Omega$  функция  $u(M)$  имеет, например, локальный максимум.

Иными словами, неравенство

$$u(M_0) > u(M) \quad (5.22)$$

выполняется во всех точках  $M$  шара достаточно малого радиуса с центром в точке  $M_0$ . По теореме о среднем значении гармонической функции

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} u(M) d\sigma$$

( $\Sigma_R$  – сфера в указанном шаре), откуда по теореме о среднем для двойного интеграла получаем, что  $u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 u(M_{cp}) = u(M_{cp})$ . Полученное противоречие с неравенством (5.22) доказывает теорему. Таким образом, функция  $u(M)$ , гармоническая в ограниченной области  $\Omega$  и непрерывная в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$ , достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$  (принцип максимального значения).

Отсюда получаем следующие теоремы.

**Теорема 5.5 (теорема единственности).** Решение внутренней задачи Дирихле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{\Sigma} = f(p)$ ,  $p \in \Sigma$ , непрерывное в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$ , единственно.

Пусть две функции  $u_1(M)$  и  $u_2(M)$  являются решениями задачи. Тогда их разность  $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$  является гармонической в  $\Omega$  функцией, непрерывной в  $\bar{\Omega}$  и равной нулю на  $\Sigma$ . По теореме 5.4 об экстремальных значениях отсюда следует, что наибольшее и наименьшее значения  $u(M)$  в  $\Omega$  равны нулю. Следовательно,  $u(M) = u_1(M) - u_2(M) \equiv 0$  в  $\Omega$ , т.е.  $u_1(M) \equiv u_2(M)$ .

**Теорема 5.6 (о непрерывной зависимости решений первой внутренней краевой задачи от граничных значений).** Пусть  $u_1(M)$  и  $u_2(M)$  – решения задач

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u|_{\Sigma} = \varphi_1(p) \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u|_{\Sigma} = \varphi_2(p), \end{array}$$

непрерывные в  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$ . Тогда если всюду на границе  $\Sigma$  выполняется неравенство  $|\varphi_1(p) - \varphi_2(p)| < \varepsilon$ ,  $p \in \Sigma$ , то всюду в области  $\Omega$

$|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon, \quad M \in \Omega.$  Функция  $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$  является гармонической в  $\Omega$ , непрерывна в  $\overline{\Omega}$ , и  $u|_{\Sigma} = \varphi_1(p) - \varphi_2(p)$ . Поскольку  $-\varepsilon < \varphi_1(p) - \varphi_2(p) < \varepsilon$ , то по теореме 4 об экстремальных значениях наибольшее и наименьшее значения функции  $u(M)$  заключены между  $-\varepsilon$  и  $\varepsilon$ . Следовательно,  $|u(M)| < \varepsilon$ , т.е.  $|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon \forall M \in \Omega$ .

### §6. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Функцию, удовлетворяющую в области  $D$  уравнению Лапласа, называют гармонической в этой области.

Пусть дан круг радиуса  $R$  с центром в полюсе  $O$  полярной системы координат. Будем искать функцию  $u(\rho, \theta)$ , гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности условию  $u|_{\rho=R} = \varphi(\theta)$ , где  $\varphi(\theta)$  – заданная функция, непрерывная на окружности. Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа  $\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ .

Допустим, что частное решение имеет вид  $u = Q(\rho) \cdot T(\theta)$ . Тогда получим  $\rho^2 Q''(\rho) \cdot T(\theta) + \rho Q'(\rho) \cdot T(\theta) + Q(\rho) \cdot T''(\theta) = 0$ . Разделяем переменные:  $\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{\rho^2 Q''(\rho) + \rho Q'(\rho)}{Q(\rho)}$ . Приравнявая каждую часть

полученного равенства постоянной  $-k^2$ , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(\theta) + k^2 \cdot T(\theta) = 0, \quad \rho^2 Q''(\rho) + \rho Q'(\rho) - k^2 Q(\rho) = 0.$$

Отсюда при  $k=0$  получим

$$T(\theta) = A + B\theta, \tag{5.23}$$

$$Q(\rho) = C + D \ln \rho. \tag{5.24}$$

$$\text{Если же } k > 0, \text{ то } T(\theta) = A \cos k\theta + B \sin k\theta, \tag{5.25}$$

а решение второго уравнения будем искать в виде  $Q(\rho) = \rho^m$ , что дает

$$\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + \rho m \rho^{m-1} - k^2 \rho^m = 0, \text{ или } \rho^m (m^2 - k^2) = 0, m = \pm k.$$

Следовательно,

$$Q(\rho) = C\rho^k + D\rho^{-k}. \quad (5.26)$$

Заметим, что  $u(\rho, \theta)$  как функция  $\theta$  есть периодическая функция с периодом  $2\pi$ , так как величины  $u(\rho, \theta)$  и  $u(\rho, \theta + 2\pi)$  соответствуют однозначной функции в одной и той же области. Поэтому, в (5.23)  $B=0$ , а в (5.25)  $k$  может иметь одно из значений  $1, 2, 3, \dots$  ( $k > 0$ ). Далее, в (5.24) и в (5.26)  $D=0$ , так как в противном случае функция  $u$  имела бы разрыв при  $r=0$  и не была бы гармонической в круге. Итак, мы получили бесчисленное множество частных решений уравнения  $\Delta u(\rho, \theta) = 0$ , непрерывных в круге, которые можно записать в виде

$$u_0(\rho, \theta) = \frac{A_0}{2}, \quad u_n(\rho, \theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Составим функцию  $u(\rho, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n$ , которая вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа также будет его решением. Остается определить величины  $A_0, A_n, B_n$  так, чтобы эта функция удовлетворяла условию

$$u|_{\rho=R} = \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)R^n.$$

Это разложение функции  $\varphi(\theta)$  в ряд Фурье в промежутке  $[-\pi, \pi]$ . В силу известных формул находим

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \cos n\tau d\tau, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \sin n\tau d\tau.$$

Таким образом,  $u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n \cos n(\tau - \theta) \right\} d\tau$ . После

преобразований получим

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\tau - \theta) + \rho^2} d\tau. \quad (5.26')$$

Это решение задачи Дирихле для круга. Интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Пуассона.

**Пример 5.1.** На окружности круга  $x^2 + y^2 \leq R^2$  температура распределяется по закону:  $u|_{x^2+y^2=R^2} = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y$ . Найти распределение температуры внутри круга, предполагая, что оно стационарно. Поставленная задача – задача Дирихле для круга: требуется найти функцию, гармоническую внутри круга и принимающую на границе круга заданные значения

$$u(R, \theta) = R^2 \cos^2 \theta - R^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} R \sin \theta = R^2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} R \sin \theta.$$

Согласно теории уравнения Лапласа искомая функция внутри круга имеет вид  $u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$ . При этом  $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\theta$

Из граничного условия получим:

$$u(\rho, \theta) = R^2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} R \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (R^n A_n \cos n\theta + R^n B_n \sin n\theta). \text{ Откуда,}$$

сравнивая коэффициенты при  $\cos 2\theta$  и  $\sin \theta$ , получим:  $R^2 = R^2 A_2$ ,  $\frac{1}{2} R = R B_1$ .

Следовательно,  $A_2 = 1$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}$ . Остальные коэффициенты равны нулю.

Подставляя найденные коэффициенты в выражение для  $u(\rho, \theta)$ , получим

$$\begin{aligned} \text{решение задачи: } u(\rho, \theta) &= \rho^2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \rho \sin \theta = \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \rho \sin \theta = x^2 - y^2 + \frac{1}{2} y, \text{ т.е. } u(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2} y. \end{aligned}$$

### Упражнения

5.1. Является ли гармонической функция  $u = \ln \frac{1}{\rho}$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  ?

**Ответ.** Да.

5.2. Решить задачу Дирихле для круга радиуса  $R$  с центром в начале координат, если заданы следующие граничные условия:



$$\text{а) } u|_{\rho=R} = \frac{3x}{R}; \quad \text{б) } u|_{\rho=R} = 3 - 5y;$$

$$\text{в) } u|_{\rho=R} = 2x^2 - 4xy - 6y^2; \quad \text{г) } u|_{\rho=R} = 3R\varphi(2\pi - \varphi).$$

$$\text{Ответ. а) } u(\rho, \theta) = \frac{3}{R} \rho \cos \theta = \frac{3x}{R};$$

$$\text{б) } u = 3 - 5y = 3 - 5\rho \sin \theta;$$

$$\text{в) } u = 4\rho^2 \cos 2\theta - 2\rho^2 \sin 2\theta - 2R^2 = 4x^2 - 4xy - 4y^2 - 2R^2;$$

$$\text{г) } u(\rho, \varphi) = 2\pi^2 R - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 R^n} \rho^n \cos n\theta.$$

5.3. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиуса  $R$ , если распределение температуры на окружности, ограничивающей эту пластинку, задается формулой

$$f(R, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & \pi < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } u = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \theta}, & \pi < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Указание.** В интеграле Пуассона нужно воспользоваться подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{\tau - \theta}{2} = t.$$

5.4. Найти гармоническую функцию внутри кольца  $1 \leq \rho \leq 2$ , удовлетворяющую краевым условиям  $u|_{\rho=1} = 0$ ;  $u|_{\rho=2} = Ay$ .

$$\text{Ответ. } u(\rho, \theta) = \frac{8A}{3} sh \ln \rho \sin \theta.$$

**Указание.** Ввести полярные координаты. Можно воспользоваться формулой

$$u(\rho, \varphi) = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( A_n \rho^n + \frac{C_n}{\rho^n} \right) \cos n\theta + \left( B_n \rho^n + \frac{D_n}{\rho^n} \right) \sin n\theta \right).$$

Коэффициенты определяются из граничных условий.

5.5. Найти решение уравнения Лапласа в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  с центром в начале координат, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_1} = \varphi_1(\theta), \quad u|_{\rho=R_2} = \varphi_2(\theta).$$

**Указание.** Решение представить в виде ряда Фурье по  $\cos k\theta$  и  $\sin k\theta$ .

### §7. Метод функций Грина

**Определение функции Грина.** Будем рассматривать краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в области } \Omega, \\ \left( \alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n} \right) = g \text{ на границе } \partial \Omega. \end{cases} \quad (5.27)$$

Считаем функцию  $u(x)$  непрерывной вместе с первыми частными производными в замкнутой области  $\bar{\Omega} \subset R^n$ , ограниченной достаточно гладкой поверхностью  $\partial \Omega$ , и имеющей вторые частные производные в  $\Omega$ , интегрируемые в этой области  $\Omega$ . Здесь  $\vec{n}$  – единичная внешняя нормаль к поверхности  $\partial \Omega$ , а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – вещественные числа такие, что  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Метод функций Грина решения таких задач состоит в следующем. Сначала решаем вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x, x_0), & x_0 \in \Omega, \\ \left( \alpha_1 G + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial n} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.28)$$

где  $\delta = \delta(x, x_0)$  —  $\delta$ -функция, которую можно формально определить при помощи соотношений

$$\delta(x, x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq x_0, \\ \infty, & \text{если } x = x_0, \end{cases} \quad \int_{\Omega} \delta(x, x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin \Omega, \end{cases}$$

$x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ . Основным свойством  $\delta$ -функции является равенство

$$\int_{\Omega} \delta(x, x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{если } x_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin \Omega, \end{cases}$$

где  $f(x)$  – произвольная непрерывная функция точки  $x$ .

**Определение.** Решение задачи (5.28) называется функцией Грина задачи (5.27).

Будем требовать, чтобы функция Грина  $G(x, x_0)$  была непрерывной (вместе с частными производными первого порядка) всюду в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ , кроме точки  $x_0$ , в которой функция  $G(x, x_0)$  может иметь особенность.

Если функция Грина найдена, то с ее помощью легко найти решение исходной задачи (5.27). Для этого воспользуемся второй формулой Грина

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (5.29)$$

Эта формула легко получается из формулы Гаусса–Остроградского

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx$$

( $\vec{a}$  – векторное поле;  $(\vec{a}, \vec{n})$  – скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{n}$ ), если положить последовательно  $\vec{a} = v\nabla u$  и  $\vec{a} = u\nabla v$  и вычесть результаты.

Действительно, имеем два равенства

$$\int_{\partial\Omega} v(\nabla u, \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v\nabla u) dx, \quad (5.30)$$

$$\int_{\partial\Omega} u(\nabla v, \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u\nabla v) dx. \quad (5.31)$$

Учитывая, что  $(\nabla u, \vec{n}) = \partial u / \partial n$  и  $(\nabla v, \vec{n}) = \partial v / \partial n$ ,  $\operatorname{div}(v\nabla u) = (\nabla u, \nabla v) + v\Delta u$  и  $\operatorname{div}(u\nabla v) = (\nabla u, \nabla v) + u\Delta v$ , из равенств (5.30) и (5.31) вычитанием получим вторую формулу Грина.

Положим теперь в формуле Грина (5.29)  $v = G$ . Тогда, учитывая, что  $\Delta u = f(x)$ ,  $\Delta G = -\delta(x, x_0)$ , получим

$$\int_{\Omega} f(x)G(x, x_0) dx + \int_{\Omega} u(x)\delta(x, x_0) dx = \int_{\partial\Omega} \left( G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds.$$

Но по основному свойству  $\delta$ -функции  $\int_{\Omega} u(x)\delta(x, x_0)dx = u(x_0)$ .

Поэтому предыдущее равенство дает

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left( G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) dx.$$

Из этой формулы получаем:

а) решение задачи Дирихле при

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad G|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

$$\text{в виде } u(x_0) = - \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) dx;$$

б) решение задачи Неймана при

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = g$$

$$\text{в виде } u(x_0) = - \int_{\partial\Omega} G g ds - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) dx.$$

**Замечание 1.** Физическая интерпретация интеграла

$$\int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) dx$$

состоит в том, что правая часть уравнения рассматривается как некоторое входное воздействие на систему и разлагается в непрерывную совокупность источников, распределенных на области  $\Omega$ . Затем находится отклик системы на каждый такой источник и все отклики суммируются.

**Построение функции Грина.** Одним из методов построения функции Грина является метод отражений.

**Пример 5.2** Функция Грина для полупространства. Пусть  $S$  есть плоскость  $z=0$ , а  $V$  – полупространство  $z>0$ . Если в точке  $P \in V$  поместить единичный положительный заряд, то его действие на  $S$  уничтожится, очевидно, единичным отрицательным зарядом, помещенным в точке  $P_1$ , которая является зеркальным изображением точки  $P$  относительно  $S$ . Потенциал

поля, созданного зарядом в  $P_1$ , есть  $g(M, P) = -\frac{1}{4\pi\rho_{MP_1}}$  и, следовательно, функция Грина –

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\rho_{MP}} - \frac{1}{\rho_{MP_1}} \right).$$

**Пример 5.3.** Функция Грина для шара. Пусть  $V$  – шар, ограниченный сферой  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  с центром в начале координат. Поместим единичный заряд в точку  $P$ , расположенную внутри сферы  $S$ . Покажем, что действие этого заряда на  $S$  может быть уничтожено некоторым зарядом, помещенным в точке  $P_1$ , являющейся инверсией точки  $P$  относительно сферы  $S$ ; точка  $P_1$  лежит на прямой  $OP$  вне шара, причем

$$\rho_{OP} \cdot \rho_{OP_1} = R^2. \quad (5.32)$$

Пусть  $\bar{P}$  – произвольно зафиксированная точка сферы  $S$ . Рассмотрим два треугольника  $OP\bar{P}$  и  $OP_1\bar{P}$ . Эти треугольники подобны, так как они имеют общий угол при вершине  $O$  и стороны, образующие этот угол, пропорциональны в силу (5.32). Из подобия треугольников следует  $\frac{\rho_{\bar{P}P}}{\rho_{\bar{P}P_1}} = \frac{\rho_0}{R}$ ,

где  $\rho_0 = \rho_{OP}$ ; откуда

$$\frac{1}{4\pi\rho_{\bar{P}P}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{4\pi\rho_{\bar{P}P_1}} = 0 \quad (5.33)$$

при любом положении точки  $\bar{P}$  на сфере.

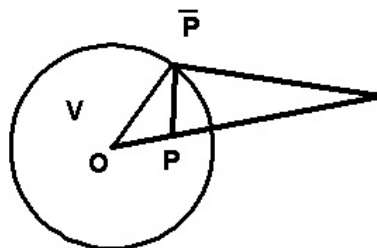


Рис. 5.3

Из (5.33) следует, что действие заряда  $q = 1$  в  $P$  уничтожается на  $S$  зарядом

$q = -\frac{R}{\rho_0}$ , помещенном в  $P_1$ . Следовательно, функция Грина – потенциал

поля, созданного этими зарядами – есть  $G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\rho_{MP}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\rho_{MP_1}} \right)$ .

Метод электростатических изображений можно применить и в плоском случае, однако физическая интерпретация здесь будет несколько иной.

Именно, если на прямой, проходящей через точку  $P$  ортогонально плоскости  $(x, y)$ , разместить положительные электрические заряды с единичной плотностью, то они создадут плоское поле (т.е. поле, не зависящее от координаты  $z$ ), потенциал которого (при соответствующем выборе системы

единиц) будет равен  $u_0(M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho_{MP}}$ .

### **§8. Решение задачи Дирихле для шара методом функции Грина**

Зная функцию Грина, можно построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Поскольку в этом случае  $f(M) = 0$ , то искомое решение

примет вид  $u(P) = -\int_S \varphi(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_M$ . Поскольку в этом случае

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\rho_{MP}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\rho_{MP_1}} \right), \text{ то}$$

$u(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\rho_{MP}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\rho_{MP_1}} \right) \varphi(M) dS_M$ , где  $\varphi(M) = u|_S$ . Таким образом,

остается произвести дифференцирование в подынтегральном выражении.

Пусть

$T$  – переменная точка, расположенная внутри шара.

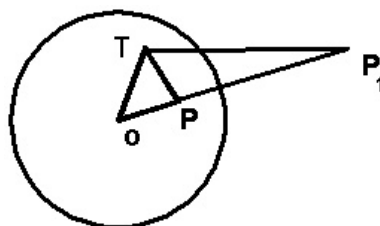


Рис. 5.4

Из треугольников  $OTP$  и  $OTP_1$  получим  $\rho_{PT} = (\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}$ ,

$\rho_{TP_1} = (\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}$ , где  $\rho = \rho_{OT}$ ,  $\rho_0 = \rho_{OP}$ ,  $\rho_1 = \rho_{OP_1}$ ,  $\gamma$  – угол при вершине  $O$ . Учитывая, что направление внешней нормали к сфере совпадает с направлением радиуса (т.е. с направлением роста  $\rho$ ), получим

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \left( \frac{1}{\rho_{PM}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\rho_{MP_1}} \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\rho_{TP}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\rho_{TP_1}} \right) \Big|_{\rho=R}. \text{ Учитывая выражения для}$$

$\rho_{TP}$  и для  $\rho_{TP_1}$ , а также, что  $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$  подсчитаем правую часть последнего

выражения и получим, что

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \varphi(M) dS_M.$$

Эта формула называется формулой Пуассона, а интеграл, стоящий справа – интегралом Пуассона (сравните с выражением (5.26')).

Можно проверить, что функция  $u(P)$  действительно является решением задачи Дирихле для шара при любой непрерывной функции  $\varphi(M)$ . Для этого следует записать подынтегральное выражение в декартовых координатах

$$\frac{R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2}{((x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}} \varphi(M),$$

где  $(x_0, y_0, z_0), (\xi, \eta, \zeta)$  – соответственно координаты точек  $P(x_0, y_0, z_0)$  и  $M(\xi, \eta, \zeta)$ . Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что это выражение как функция точки  $P(x_0, y_0, z_0)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

**Примеры решения задач с помощью функции Грина.** Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда решение этой задачи есть

$$u(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=0} dt$$

(мы положили  $M_0 = M_0(x, y), M = M(t, s)$ ), где

$$G(x, y; t, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + (y+s)^2}}.$$

Вычислив  $\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=0}$ , получим

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt. \quad (5.34)$$

**Пример 5.4** Найти гармоническую в полуплоскости  $y > 0$  функцию  $u(x, y)$ , если известно, что

$$u(x, 0) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1}.$$

**Решение.** Требуется вычислить интеграл

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)[(t-x)^2 + y^2]} dt.$$

По-видимому, проще всего это сделать, если воспользоваться теорией вычетов, а именно следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)[(t-x)^2 + y^2]} = 2\pi i [\text{res } f(i) + \text{res } f(x+iy)],$$

$$\text{где } f(z) = \frac{z}{(1+z^2)[(z-x)^2 + y^2]}.$$

Поскольку

$$\text{res } f(i) = \frac{1}{2[(i-x)^2 + y^2]}, \quad \text{res } f(x+iy) = \frac{x+iy}{2iy[1+(x+iy)^2]},$$

выполнено равенство



$$\begin{aligned}
& \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)[(t-x)^2+y^2]} = \frac{iy}{(i-x)^2+y^2} + \frac{x+iy}{1+(x+iy)^2} = \\
& = \frac{iy}{[(i-x)+iy][(i-x)-iy]} + \frac{x+iy}{(x+iy-1)(x+iy+1)} = \\
& = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i-x-iy} - \frac{1}{i-x+iy} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+iy-1} - \frac{1}{x+iy+1} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i(1-y)-x} - \frac{1}{i(1+y)-x} + \frac{1}{x+i(y-1)} - \frac{1}{i(1+y)+x} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i(1+y)+x} + -\frac{1}{i(1+y)-x} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left[ \frac{x-i(1+y)}{x^2+(1+y)^2} + -\frac{x+i(1+y)}{x^2+(1+y)^2} \right] = \frac{x}{x^2+(1+y)^2}.
\end{aligned}$$

Итак, искомое решение задачи есть

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (1+y)^2}.$$

**Замечание 2.** Решение рассмотренной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, & y > 0, \\ u|_{y=0} = \frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

можно получить, не прибегая к функции Грина.

В самом деле, используя тот факт, что функция  $u = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}}$

( $a > 0$ ) является решением уравнения Лапласа в верхней полуплоскости

( $y > 0$ ), можно написать  $\Delta \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} = 0$ . Дифференцируя это

равенство по переменной  $x$ , будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} = 0, \quad \text{или} \quad \Delta \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} = 0,$$

т.е.  $\Delta\left(\frac{x}{r^2}\right) = 0$ , где  $r = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$ . Таким образом, функция

$u = \frac{x}{x^2 + (y+a)^2}$  является гармонической в верхней полуплоскости. В нашем случае с учетом граничного условия решением задачи Дирихле является функция

$$u = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}.$$

**Пример 5.5** Найти решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, & z > 0, \\ u|_{z=0} = \cos x \cos y, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

**Решение.** Известно, что искомая гармоническая функция находится по формуле

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \zeta \cos \eta d\zeta d\eta}{[(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Для вычисления интеграла произведем замену  $\zeta - x = u$ ,  $\eta - y = v$  с якобианом, равным единице. Получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u+x)\cos(v+y) du dv}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos u \cos x - \sin u \sin x)(\cos v \cos y - \sin v \sin y)}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv = \\ &= \frac{z}{2\pi} \cos x \cos y \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \cos v}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv, \text{ ибо все остальные три интеграла} \end{aligned}$$

равны нулю в силу нечетности соответствующей подынтегральной функции.

Теперь вычислим интеграл:

$$J = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \cos v}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv =$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u+v) + \sin u \sin v}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u+v)}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv,$$

так как другой интеграл равен нулю. Сделаем замену независимых

$$\text{переменных } p = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),$$

что соответствует повороту плоскости на угол  $45^\circ$  против часовой стрелки.

Тогда будем иметь

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2})}{(p^2 + q^2 + z^2)^{3/2}} dp dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\sqrt{2}p) dp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(p^2 + q^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Но  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(p^2 + q^2 + z^2)^{3/2}}$  с помощью подстановки  $q = \sqrt{p^2 + z^2} \operatorname{tg} t$

преобразуется к виду  $J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{p^2 + z^2} dt = \frac{2}{p^2 + z^2}$ . Значит, интеграл

$J = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}p)}{p^2 + z^2} dp$  по теореме Коши о вычетах равен

$$J = 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2 + z^2} dp = 4\pi i \operatorname{res} \left. \frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2 + z^2} \right|_{p=zi} = 4\pi i \cdot \frac{e^{-z\sqrt{2}}}{2zi} = \frac{2\pi}{z} e^{-z\sqrt{2}}.$$

Итак, решение есть  $u(x, y, z) = e^{-z\sqrt{2}} \cos x \cos y$ .

**Замечание 3.** Так как  $\frac{y}{(t-x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t-z)}$ , где  $z = x + iy$ , то формулу

Пуассона (5.34) можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t-z} dt. \quad (5.35)$$

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  (т. е. при  $y > 0$ )

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, & y > 0, \\ u|_{y=0} = R(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

где рациональная функция  $R(z)$  действительна, не имеет полюсов на действительной оси  $R(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Решением указанной задачи Дирихле в силу (5.35) является функция

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t) dt}{t - z}.$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью вычетов по теореме Коши

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} \zeta_k < 0} \operatorname{res}_{\zeta = \zeta_k} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z}, \quad (5.36)$$

где вычеты берутся по всем полюсам функции  $R(z)$ , лежащим в нижней полуплоскости  $\operatorname{Im} z < 0$ .

**Пример 5.6.** Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, & y > 0, \\ u|_{y=0} = \frac{k}{1+x^2}, & k = \text{const}, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

**Решение.** По формуле (5.36) получим

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \operatorname{res}_{\zeta = -i} \frac{k}{(1+\zeta^2)(\zeta - z)} = -2 \operatorname{Re} \frac{k}{2i(z+i)} = \frac{k(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}.$$

## ГЛАВА 6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Решение многих задач теоретической и математической физики, связанных с изучением, например, с изучением процессов теплопроводности и взаимодействия излучения с веществом, распространения электромагнитных и звуковых волн, с разработкой теории ядерных реакторов и внутреннего строения звезд, приводит к использованию различных специальных функций, как например, цилиндрическим, сферическим и др.

Характерная особенность этих функций состоит в том, что многие из них являются решениями уравнений с особыми точками вида:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y = 0,$$

где коэффициент  $p(x)$  обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной  $x$ . Решение таких уравнений имеют ряд специфических свойств. В этой главе мы рассмотрим основные свойства цилиндрических и сферических функций, а точнее, простейшего их класса – полином Лежандра. Приведем примеры специальных функций:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt - \text{гамма – функция}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt - \text{интеграл вероятности}$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt - \text{интегральный синус}$$

$$Ci(x) = -\int_0^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \text{интегральный косинус}$$

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}} - \text{эллиптический интеграл первого рода}$$

$$E(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x^2t^2)}{(1-t^2)}} dt - \text{эллиптический интеграл второго рода}$$

Цилиндрическими функциями называются решения уравнения Бесселя

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$$

Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе как функции Бесселя.

Сферическими функциями называются решения уравнения

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \nu(\nu + 1)u = 0$$

$u(x) = P_\nu(x)$  - сферическая функция Лежандра первого рода.

### §1 Эйлеровы интегралы

Эйлеров интеграл первого рода. Так называется (по предложению Лежандра) интеграл вида

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (6.1)$$

$x > 0, y > 0$ . Он представляет собой функцию от двух переменных параметров  $x$  и  $y$ : функцию В – бета – функцию.

Заметим, что если одновременно  $x \geq 1, y \geq 1$ , то  $B(x, y)$  - интеграл собственный.

Если же хотя бы одно из этих двух неравенств нарушается, то  $B(x, y)$ - несобственный интеграл. Покажем, что  $B(x, y)$  сходится, если одновременно  $x > 0, y > 0$ . Имеем

$$B(x, y) = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Рассмотрим интеграл  $J_1 = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ . Точка  $t = 0$ - особая точка, если  $x < 1$ :

$$f(t) = t^{x-1} (1-t)^{y-1} \approx \frac{1}{t^{1-x}}, \quad \forall y \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Известно, что интеграл вида  $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-x}}$  сходится, если  $1-x < 1 \Rightarrow x > 0$ . Итак,

$J_1$  сходится при  $x > 0$  и  $\forall y$ .

Рассмотрим интеграл  $J_2 = \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ . Точка  $t=1$  - особая точка, если

$y < 1$ :

$$f(t) = t^{x-1} (1-t)^{y-1} \approx \frac{1}{(1-t)^{1-y}}, \forall x \text{ при } t \rightarrow 1.$$

Известно, что интеграл вида  $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-y}}$  сходится, если  $1-y < 1 \Rightarrow y > 0$ .

Итак,  $J_2$  сходится при  $y > 0$  и  $\forall x$ .

Отсюда заключаем, что  $B(x, y)$  сходится, если одновременно  $x > 0, y > 0$ .

Отметим некоторые свойства бета-функции.

### 1. Свойство симметрии:

$$B(x, y) = B(y, x)$$

Доказательство. Сделаем замену  $t = 1 - \tau \Rightarrow -dt = d\tau$

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{y-1} (1-\tau)^{x-1} d\tau = B(y, x).$$

2. Пусть  $y > 1$ ,

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \underbrace{(1-t)^{y-1} \frac{t^x}{x}}_{=0} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-2} dt.$$

Запишем  $t^x = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$ , тогда

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} \left[ \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-2} dt - \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \right] = \frac{y-1}{x} [B(x, y-1) - B(x, y)]$$

Таким образом,

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} [B(x, y-1) - B(x, y)] \text{ или } B(x, y) = \frac{(y-1)B(x, y-1)}{x+y-1}. \quad (6.2)$$

По свойству симметрии можно записать  $B(x, y) = \frac{(x-1)B(x-1, y)}{x+y-1}$ ,  $x > 1$ .

Пусть теперь  $y = n$  ( $n$ -натуральное), тогда

$$B(x, y) = \frac{n-1}{x+n-1} \cdot \frac{n-2}{x+n-2} \cdot \frac{n-3}{x+n-3} \cdots \frac{1}{x+1} \cdot B(x, 1),$$

но  $B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$ , откуда  $B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$ .

Пусть  $x = m$  ( $m$ -натуральное), тогда

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Другое выражение для бета-функции. Сделаем в интеграле

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \text{ замену, приняв } t = \frac{\xi}{1+\xi} \Rightarrow \xi = \frac{t}{1-t} \Rightarrow dt = \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}.$$

$$\text{Тогда } B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{\xi^{x-1}}{(1+\xi)^{x-1}} \frac{1}{(1+\xi)^{y-1}} \frac{d\xi}{(1+\xi)^2} = \int_0^\infty \frac{\xi^{x-1} d\xi}{(1+\xi)^{x+y}}.$$

6. Отметим без доказательства еще одно свойство  $B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ .

**Эйлеров интеграл второго рода.** Это название было присвоено Лежандром следующему интегралу вида

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

который сходится при любом  $x > 0$  и определяет функцию  $\Gamma(x)$  – гамма-функцию. Покажем, что  $\Gamma(x)$  сходится при  $x > 0$ . В самом деле

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Пусть  $J_1 = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ ,  $J_2 = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ . Рассмотрим интеграл  $J_1$ . Точка  $t = 0$ -

особая точка, если  $x < 1$ ,  $f(t) = e^{-t} t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \approx \frac{1}{t^{1-x}}$  при  $t \rightarrow 0$ , интеграл  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$

сходится, если  $1-x < 1 \Rightarrow x > 0$ . Итак,  $J_1$  сходится при  $x > 0$ .



Рассмотрим интеграл  $J_2$ . Для любого  $x$   $f(t) = e^{-t}t^{x-1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ .

Это значит, что существует число  $b$  такое, что для  $t \geq b$  будет, например,

$\frac{t^{x-1}}{e^t} < 1$ . Можно считать, что это справедливо для  $b > 1$ , а тогда для  $t \geq b$

$\frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \frac{1}{t^2}$ . Известно, что  $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$  ( $b > 1$ ) сходится, следовательно,  $J_2$  сходится для

любого  $x$ , а тогда  $\Gamma(x)$  сходится при  $x > 0$ .

Рассмотрим выражение  $x\Gamma(x)$ :

$$x\Gamma(x) = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x \int_0^\infty e^{-t} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \int_0^\infty e^{-t} d(t^x) = \underbrace{e^{-t}t^x}_{=0} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \Gamma(x+1)$$

Итак,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad (6.3)$$

Применяя формулу (6.3) повторно, получим

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= \Gamma((x+n-1)+1) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x), \end{aligned}$$

В частности, при  $x=1$ , будем иметь  $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$ , но

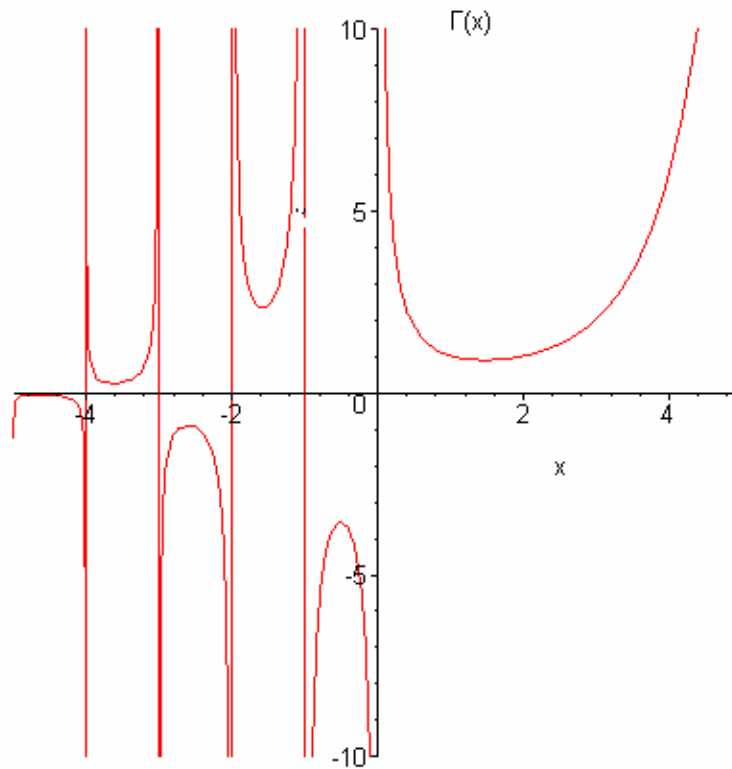
$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ , следовательно,

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (6.4)$$

Отметим следующее соотношение, связывающее между собой функции  $\Gamma$  и

$$B: \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (6.5)$$

На рис. 6.1 приведен график гамма – функции, построенный в системе Maple 10.



**Рис.6.1**

Отметим, что Эйлеровы интегралы первого и второго рода определяются и для комплексных значений аргументов. В случае комплексных  $x$  и  $y$

интеграл  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  сходится, когда  $\operatorname{Re}(x) > 0$  и  $\operatorname{Re}(y) > 0$ .

Гамма-функция – одна из важнейших трансцендентных функций математического анализа, распространяющая понятие факториала на случай комплексных значений  $z$ . Под гамма - функцией понимается значение

интеграла  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  для всех комплексных значений  $z$ , для которых

$\operatorname{Re}(z) > 0$ . Аналитическое продолжение гамма – функции всю комплексную плоскость можно получить с помощью соотношения

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n + 1)}{z(z + 1) \dots (z + n - 1)(z + n)}, \quad (6.6)$$

вытекающего из формулы  $z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$ . Из формулы (6.6), что функция  $\Gamma(z)$  будет аналитической всюду, кроме точек  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), в

которых  $\Gamma(z)$  имеет полюсы первого порядка с вычетами  $\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) \frac{(-1)^n}{n!}$ .

Кроме перечисленных свойств гамма – функции, отметим следующие:

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \quad (6.7)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-n) = \infty, \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \quad (6.9)$$

С гамма - функцией тесно связана еще одна специальная функция – пси-функция или логарифмическая производная гамма - функции:

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z)], \quad \Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma = 0.5772\dots, \quad \text{где } \gamma$$

- постоянная Эйлера-Маскерони.

## §2 Интеграл вероятности

Интеграл вероятности встречается в различных разделах прикладной математики, в частности, в теории вероятностей и теории ошибок, в математической теории теплопроводности и в других разделах математической физики.

Интегралом вероятности  $\Phi(z)$  называется функция, которая для любых комплексных  $z$  определяется равенством

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (6.10)$$

где интегрирование производится по произвольному пути, соединяющему начало координат с точкой  $t = z$ . Так как подынтегральное выражение является целой функцией комплексного переменного  $t$ , вид пути интегрирования не играет роли и можно считать, что интегрирование производится вдоль отрезка прямой, соединяющей точки  $t = 0$  и  $t = z$ .

Заметим, что интеграл  $\varphi(z) = \int_0^z f(t)dt$ , взятый по произвольному пути, принадлежащему односвязной области, в которой  $f(t)$  регулярна, есть регулярная функция в этой области (см., например, Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.3 Ч.2.- М.: Гостехиздат, 1956). Следовательно,  $\Phi(z)$  представляет целую функцию, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся при любых значениях переменного  $z$ . Для того, чтобы получить это разложение, достаточно подставить в  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  соответствующий ряд для экспоненты и проинтегрировать его почленно.

Тогда, 
$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}, |z| < \infty.$$

Отметим, что при вещественных значениях аргумента  $z = x$  функция  $\Phi(x)$  представляет собой вещественную монотонно возрастающую функцию, т.к.

$\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0, x \in (-\infty, +\infty)$ . Значение функции при нуле  $\Phi(0) = 0$ , а при возрастании  $x$  быстро приближается к предельному значению  $\Phi(\infty) = 1$ , т.к.

$\int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Разница между  $\Phi(x)$  и этим предельным значением может быть

представлена в форме  $1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, x > 0.$

Получим асимптотическую формулу (более подробно об асимптотических оценках см. параграф «Асимптотические методы» настоящего пособия). Для

этого воспользуемся формулой  $1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$  и преобразуем

входящий в нее интеграл с помощью интегрирования по частям, т.е.

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} d(e^{-t^2}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{e^{-t^2}}{t} \Big|_{t=x}^{t=\infty} + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} [1 + r(x)], \quad x > 0, \quad \text{где } r(x) = -xe^{-x^2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Оценим  $r(x)$ .

$$|r(x)| \leq -xe^{-x^2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^2} dt \quad (t \geq x) \leq \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{x^2} dt = -\frac{e^{x^2}}{x^2} \frac{e^{-t^2}}{2} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2x^2}.$$

Следовательно, имеем  $1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \left[ 1 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], x \rightarrow +\infty.$  (6.11)

На рис. 6.2 приведен график функции  $\Phi(x)$ , построенный в системе Maple 10.

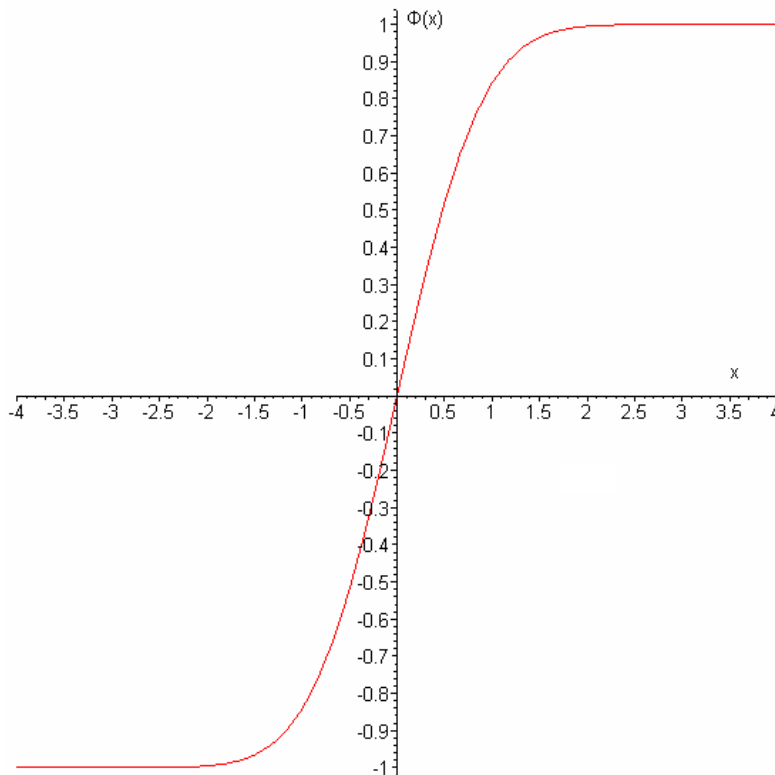


Рис.6.2.

### §3 Функции Бесселя

Многие задачи приводят к необходимости решать уравнение вида

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0. \quad (6.12)$$

К такому уравнению мы придем, например, при решении задач методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами (задача о колебании круглой мембраны, об остывании круглого цилиндра и др.).

Уравнение (6.12) называется уравнением Бесселя. Решения этого уравнения, не равные тождественно нулю, называются цилиндрическими (или бесселевыми) функциями. Здесь  $z$  – комплексное переменное,  $\nu$  – некоторый параметр, вообще говоря, комплексный.

Один класс цилиндрических функций мы построим следующим образом. Будем искать решение уравнения (6.12) в виде обобщенного степенного ряда

$$u = z^\sigma (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots), \quad (6.13)$$

где  $a_0 \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} zu' &= z^\sigma [a_0 \sigma + a_1 (\sigma + 1)z + a_2 (\sigma + 2)z^2 + \dots], \\ z^2 u'' &= z^\sigma [a_0 \sigma(\sigma - 1) + a_1 (\sigma + 1)\sigma z + a_2 (\sigma + 1)(\sigma + 2)z^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (6.12) в виде

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0; \quad (6.14)$$

подставим значения  $u$ ,  $zu'$ , и  $z^2 u''$  в уравнение (6.14) и соберем члены с одинаковыми степенями  $z$ :

$$\begin{aligned} & z^\sigma [a_0 \sigma^2 - a_0 \nu^2] + z^{\sigma+1} [a_1 (\sigma + 1)^2 - a_1 \nu^2] + z^{\sigma+2} [a_2 (\sigma + 2)^2 - a_2 \nu^2 + a_0] \dots \\ & \dots + z^{\sigma+n} [a_n (\sigma + n)^2 - a_n \nu^2 + a_{n-2}] + \dots \equiv 0 \end{aligned}$$

Чтобы ряд (6.13) был решением уравнения (6.14), необходимо выполнение равенств

$$\begin{aligned} a_0 [\sigma^2 - \nu^2] &= 0; \\ a_1 [(\sigma + 1)^2 - \nu^2] &= 0; \\ a_2 [(\sigma + 2)^2 - \nu^2] + a_0 &= 0; \\ &\vdots \\ a_n [(\sigma + n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} &= 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Из первого равенства находим  $\sigma = \pm v$ , так как  $a_0 \neq 0$ . Возьмем  $\sigma = v$ . Тогда из второго равенства находим  $a_1 = 0$ . Далее

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma+n)^2 - v^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2v+n)n}, n = 2, 3, \dots$$

Очевидно  $a_{2k+1} = 0$  для всех целых неотрицательных  $k$ , а

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2(v+k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(v+k)(v+k-1)\dots(v+1)k!}$$

Полагая  $a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$  и используя формулы (6.3) и (6.4), получим

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} \Gamma(k+1) \Gamma(k+v+1)}. \quad \text{Таким образом; мы построили одно}$$

формальное решение уравнения (6.12) в виде обобщенного степенного ряда:

$$u = u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \quad (6.15)$$

где  $z$  – комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом  $(-\infty, 0): |z| < \infty, |\arg z| < \pi$ ;  $v$  – параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Ограничение, наложенное на  $z$ , необходимо для однозначности функции  $z^v$  и может быть отброшено, если  $v$  – целое число. Докажем, что ряд (6.15) сходится. Обозначим общий член этого ряда

$$u_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}.$$

Будем иметь

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{\left| \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+2+v} k! \Gamma(k+v+1) \right|}{\left| \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+v} (k+1)! \Gamma(k+v+2) \right|} = \left| \frac{\left( \frac{z}{2} \right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right|, \quad (6.16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left( \frac{z}{2} \right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right| = 0, |z| < \infty.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд (6.15) сходится при любых конечных  $z$ . В плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  каждый член ряда (6.15) – однозначная и регулярная функция комплексного переменного  $z$ . Данный ряд сходится при любых  $z$  и  $v$ , причем в области  $|z| < R$  и  $|v| < N$  ( $R, N$  – произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных. Действительно, начиная с достаточно большого  $k$ , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему, равное на основании (6.16) величине

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\left( \frac{z}{2} \right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right| \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби  $q$ , не зависящей от  $z$  и  $v$ . Отсюда, согласно известному признаку сходимости, следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  сходится равномерно в некоторой области, если для всякого  $z$ , принадлежащего этой области и  $k \geq m$ , выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q \leq 1,$$

где  $q$  не зависит от  $z$ .



Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , то сумма ряда определяет некоторую функцию комплексного переменного  $z$ , регулярную в рассматриваемой области. Эта функция называется функцией Бесселя первого рода с индексом  $\nu$  и обозначается символом  $J_\nu(z)$ . Таким образом,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi, . \quad (6.17)$$

Покажем, что этот ряд в его области сходимости является фактическим решением уравнения (6.12). Имеем<sup>2</sup>

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad u' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$u'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(2k+\nu-1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-2}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \text{ умножаем функцию } u \text{ на } \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right),$$

функцию  $u'$  – на  $\frac{1}{z}$ , функцию  $u''$  – на 1 и складываем, получим

$$\begin{aligned} L(u) &= u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2] z^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Далее имеем  $[(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2] = 2^2 k(k+\nu)$ .

<sup>2</sup> Равномерно сходящийся ряд регулярных функций можно дифференцировать почленно.

$$\begin{aligned}
\text{Тогда } L(u) &= \sum_{\substack{k=0 \\ (k=1)}}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k+\nu) z^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu-2} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ (k-1) \rightarrow k}}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu-2} (k-1)! \Gamma(k+\nu)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} \equiv 0.
\end{aligned}$$

#### §4 Функция Вебера

По определению, цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка (6.12), поэтому общее ее выражение содержится в формуле  $u = Z_\nu(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z)$ , где  $u_1$  и  $u_2$  – какие-нибудь линейно независимые решения уравнения (6.12),  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра  $\nu$ . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда  $\nu$  отлично от целого числа. Действительно, для того чтобы записать общий интеграл уравнения (6.12), необходимо получить второе линейно независимое решение. Поскольку уравнение (6.12) не меняется при замене  $\nu$  на  $-\nu$ , то функция  $J_{-\nu}(z)$  также является решением уравнения (6.12), то есть второе решение может быть записано так:

$$u_2 = J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \quad (6.18)$$

Рассмотрим поведение функций (6.17) и (6.18) в окрестности начала координат. Если  $\nu$  не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при  $z \rightarrow 0$  будет

$$J_\nu(z) \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, |z| \rightarrow 0. \quad (6.19)$$

$$J_{-v}(z) \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-v}}{\Gamma(-v+1)}, |z| \rightarrow 0. \quad (6.20)$$

Эти формулы верны для всех  $v$  за исключением тех значений  $v$ , когда знаменатель обращается в бесконечность, то есть  $v \neq -1, -2, -3, \dots$  для (6.19) и  $v \neq 1, 2, 3, \dots$  для (6.20). Таким образом, при  $v \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  справедливы обе формулы. Далее,

$$\frac{J_v(z)}{J_{-v}(z)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{2v} \frac{\Gamma(-v+1)}{\Gamma(v+1)} \neq \text{const}, v \neq \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, функции (6.17) и (6.18) будут линейно независимы, если  $v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , то есть общее выражение цилиндрической функции при условии, что  $v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , будет таким:

$$u = A_v J_v(z) + B_v J_{-v}(z). \quad (6.21)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $v = n (n = 0, 1, 2, \dots)$ . В этом случае

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}, |z| < \infty, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

Функция (6.22) регулярна на всей плоскости без разреза. Это целая функция.

Далее  $J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)}$  поскольку  $\Gamma(k-n+1) = \infty$

для всех  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . В последней сумме произведем замену переменной

суммирования  $k = s + n$ . Получим  $J_{-n}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}}{s!(s+n)!} = (-1)^n J_n(z)$ .

Таким образом, бесселевы функции, с целым индексом линейно зависимы

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поэтому выражение (6.21) не является общим интегралом уравнения (6.12) в этом случае. Следовательно, для целых  $n$  надо построить еще одно решение уравнения (6.12). Будем предполагать, что  $\nu$  не является целым. Введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода  $Y_\nu(z)$ , которую для произвольных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , определим выражением

$$u = u_3 = Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi. \quad (6.23)$$

Это выражение для  $\nu$  не целого – цилиндрическая функция, линейно независимая с функцией Бесселя (6.17). Функция (6.23) – цилиндрическая функция второго рода или функция Вебера. В некоторых работах, посвященных теории функций Бесселя, для обозначения этой функции вместо  $Y_\nu(z)$  используется символ  $N_\nu(z)$ , а сама функция называется функцией Неймана. При  $\nu$ , равном целому числу, правая часть рассматриваемого выражения (6.23) приобретает неопределенный вид, и мы условимся понимать под значением функции в этом случае предел  $Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z)$ . Так как числитель и знаменатель в (6.23) – целые функции  $\nu$ , то рассматриваемый предел существует и может быть вычислен по правилу Лопиталя, применение которого дает

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}. \quad (6.24)$$

Из определения функции  $Y_\nu(z)$  следует, что эта функция регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , а при фиксированном  $z$  представляет собой целую функцию параметра  $\nu$ . Выражение (6.23) удовлетворяет уравнению Бесселя. Докажем, что функция  $Y_n(z)$  удовлетворяет уравнению Бесселя.

$$\text{Имеем } L(J_\nu) \equiv J_\nu'' + \frac{1}{z} J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu \equiv 0, \quad L(J_{-\nu}) \equiv J_{-\nu}'' + \frac{1}{z} J_{-\nu}' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_{-\nu} \equiv 0.$$

Продифференцируем каждое из этих тождеств по  $\nu$ . Получим

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} J_\nu \equiv 0, \quad L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} J_{-\nu} \equiv 0. \quad \text{Умножим теперь первое}$$

соотношение на 1, а второе – на  $(-1)^n$  и вычтем одно из другого. Получим

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - (-1)^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} [J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}] \equiv 0.$$

Разделим теперь последнее соотношение на  $\pi$  и перейдем к пределу при  $\nu \rightarrow n$ . Получим  $L(Y_n) \equiv 0$ , это и доказывает, что функция  $Y_n(z)$  – решение уравнения (6.12). Решения  $u_1 = J_\nu(z)$  и  $u_3 = Y_\nu(z)$  линейно независимы между собой. Для  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  этот результат является следствием линейной независимости решений  $J_\nu(z)$  и  $J_{-\nu}(z)$ . Линейная независимость для  $\nu = n (n = 0, 1, 2, \dots)$  вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при  $z \rightarrow 0$ . Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любых значениях  $\nu$ , будет  $u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$ . Введем в рассмотрение еще две новые функции  $u_4 = H_\nu^{(1)} = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$ ,  $u_5 = H_\nu^{(2)} = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$ . Это – цилиндрические функции третьего рода (функции Ханкеля). Очевидно, эти функции линейно независимы с функцией первого рода и между собой. Они определены для  $|z| < \infty, |\arg z| < \pi$ . Все цилиндрические функции при фиксированном  $z$  есть целые функции параметра  $\nu$ .

### **§5 Представление функции Вебера в виде ряда**

Ряд для функции Вебера  $Y_\nu(z)$ , где  $\nu$  – не целое, получается непосредственно из формул (6.17), (6.18) и (6.23). Для того чтобы получить разложение в ряд функции  $Y_n(z)$ , достаточно воспользоваться формулой (6.24) и вычислить производные по значку  $\nu$ , исходя из разложения (6.17), причем ввиду соотношения  $Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , являющегося следствием (6.24), можно ограничиться рассмотрением случая целых

положительных  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Так как ряд (6.17) сходится равномерно по отношению к  $\nu$ , мы можем дифференцировать его почленно<sup>3</sup>, получая

$$\left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right], \text{ где } \psi(z) - \text{логарифмическая}$$

производная гамма - функции. Аналогично имеем

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}}{k! \Gamma(k-\nu+1)!} \left[ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right].$$

При  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  и  $\nu \rightarrow n \Gamma(k-\nu+1) \rightarrow \infty, \psi(k-\nu+1) \rightarrow \infty$ , поэтому первые  $n$  членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись формулами (6.4), (6.6), получим для таких  $k$

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(k-\nu+1)} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \frac{1}{(k-n)!}, & k = n, n+1, \dots, \infty. \end{cases}$$

$$\text{Имеем далее } \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(z) \sin(\pi z)}{\pi} \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma^2(1-z)} = \frac{1}{\pi} [\Gamma'(z) \sin(\pi z) + \pi \cos(\pi z) \Gamma(z)] \Rightarrow$$

$$\frac{\psi(1-z)}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} [\Gamma'(z) \sin(\pi z) + \pi \cos(\pi z) \Gamma(z)].$$

Будем здесь предполагать, что  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1, z = n-k$ . Тогда из последней формулы получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} = \frac{1}{\pi} \left[ \Gamma'(n-k) \underbrace{\sin(\pi(n-k))}_{=0} + \pi \cos(\pi(n-k)) \Gamma((n-k)) \right] =$$

$$= (-1)^{n-k} (n-k-1)!$$

$$\text{Таким образом, } \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} = \frac{1}{\pi} \begin{cases} (-1)^{n-k} (n-k-1)!, & k = 0, 1, 2, \dots, n-1; \\ \frac{\psi(k-n+1)}{\Gamma(k-n+1)}, & k = n, n+1, \dots, \infty. \end{cases}$$

<sup>3</sup> Переход к пределу при  $\nu \rightarrow n$  под знаком суммы законен, так как ряд, полученный почленным дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно.

Тогда 
$$\left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} (n-k-1)! (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} -$$

$$- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k-n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(k-n+1) \right]$$

или 
$$\left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} -$$

$$- (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) \right]. \quad \text{Таким образом, можно записать}$$

(согласно (6.24)) 
$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ 2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) - \psi(k-1) \right], \quad (6.25)$$

причем  $|z| < \infty, |\arg z| < \pi, n = 0, 1, 2, \dots$ . Если принять во внимание, что  $\sum_{k=0}^{-1} \equiv 0$ ,

то окончательный результат верен и для  $n = 0$ . Можно также записать

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} + \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} [\psi(k+n+1) + \psi(k+1)].$$

Полученный результат показывает, что функция Вебера есть регулярная функция в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси.

Далее;  $Y_n(z)$  есть решение, линейно независимое от решения  $J_n(z)$ . Из (6.25) вытекает, что при  $z \rightarrow 0$  справедливы асимптотические формулы

$$Y_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2}, \quad Y_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{показывающие, что}$$

$Y_n(z) \rightarrow \infty$ , когда  $z \rightarrow 0$ . Отметим также формулы

$$J_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} 1, \quad J_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, функция  $J_n(z)$  ограничена, когда  $z \rightarrow 0$ . Асимптотическое поведение функций Ханкеля при  $z \rightarrow 0$  имеет вид:

$$H_n^{(1)}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} iY_n(z), \quad H_n^{(2)}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -iY_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, ограниченной при  $z \rightarrow 0$  остается только функция Бесселя первого рода.

### **§6 Рекуррентные формулы для функций Бесселя**

Будем исходить из представления (6.17)

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, |\arg z| < \pi.$$

Умножим это равенство на  $z^\nu$  и продифференцируем по  $z$ , получим

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+\nu) z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu-1} (k+\nu)}{k! 2^{2k+\nu-1} \Gamma(k+\nu+1)} = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu)} = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z). \quad (6.26)$$

Аналогично получаем

$$\frac{d}{dz} z^{-\nu} J_\nu(z) = z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (6.27)$$

Продифференцировав в левых частях (6.26) и (6.27), получим



$$z^{\nu} \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) + \nu z^{-\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu-1}(z), \quad (6.28)$$

$$z^{-\nu} \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) - \nu z^{-\nu-1} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (6.29)$$

Откуда

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) + \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z), \quad (6.30)$$

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = -J_{\nu+1}(z), \quad (6.31)$$

Складывая и вычитая равенства (6.30) и (6.31), получим

$$2 \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \quad (6.32)$$

$$\frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \quad (6.33)$$

Функции Бесселя второго и третьего рода удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, то есть соотношениям (6.26)-(6.33). При  $\nu$ , отличном от целого числа, справедливость этих формул для функций Бесселя второго рода (функций Вебера) вытекает из определения функции Вебера и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого  $\nu$  требуемый результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к индексу  $\nu$ , что позволяет осуществить в соотношениях (6.26)-(6.33) предельный переход при  $\nu \rightarrow n$ . Отметим еще формулы

$$\left( \frac{d}{z dz} \right)^m z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z), \quad (6.34)$$

$$\left( \frac{d}{z dz} \right)^m z^{-\nu} J_{\nu}(z) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z). \quad (6.35)$$

Формулы (6.34) и (6.35) получаются путем повторного применения равенств (6.26) и (6.27). Приняв  $\nu = 0$  из (6.32), (6.33), получим

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = J_{-1}(z); J_{-1}(z) = -J_1(z).$$

### §7 Интегральные представления для цилиндрических функций

Цилиндрические функции допускают простые интегральные представления, которые бывают двух типов: интегралы по некоторому отрезку (определенные интегралы) и контурные интегралы. Контурные интегралы удобнее, требуют меньше ограничений, но они более сложны. Определенные интегралы наиболее часто встречаются в приложениях, поэтому мы ограничимся рассмотрением формул этого типа. Одно из наиболее простых интегральных представлений для функций Бесселя принадлежит Пуассону. Будем исходить из формул (6.1) и (6.5)

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Возьмем в этих формулах

$$x = k + 1/2, y = \nu + 1/2. \text{ Тогда}$$

$$\int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}} (1-s)^{\nu-\frac{1}{2}} ds = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k + \nu + 1)}, k = 0, 1, 2, \dots, \infty; \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Делаем замену  $s = t^2 \Rightarrow 2t dt$ , тогда

$$2 \int_0^1 t^{2k-1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k + \nu + 1)}.$$

Откуда  $\frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)} = \frac{2}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$

Теперь можно записать  $J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{2}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Меняем порядок суммирования и интегрирования, тогда

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{k! \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) 2^{2k}}. \quad (6.36)$$

Воспользуемся формулой (6.8), в которой примем  $z = k + 1/2$ . Тогда

$$2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k+1) = \sqrt{\pi} \Gamma(k+1) \text{ или } 2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi} (2k)!.$$

Тогда из (6.36) находим  $J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos(zt)}$

Окончательно получаем

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, |\arg z| < \pi, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (6.37)$$

Так как подынтегральная функция четная, то формулу (6.37) можно переписать в виде

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-1}} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, |\arg z| < \pi, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (6.38)$$

Применяя к формуле (6.38) подстановку  $t = \cos(\theta), dt = -\sin(\theta) d\theta$ , при которой  $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sin^{2\nu}(\theta)/\sin(\theta)$  и  $\theta = \pi$  при  $t = -1$ ;  $\theta = 0$  при  $t = 1$ , получаем

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^{2\nu}(\theta) \cos(z \cos \theta) dt, |\arg z| < \pi, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (6.39)$$

Формула (6.38) или равносильная ей формула (6.39) – интегральное представление Пуассона.

Отметим еще основные интегральные представления для функций Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izch(t)-\nu t} dt, \operatorname{Im} z > 0, \quad (6.40)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izch(t)-\nu t} dt, \operatorname{Im} z < 0,$$

$\nu$  – любое.

### §8 Примеры использования интегрального представления Пуассона

Примем в (6.37)  $\nu = 0, z = x$  – вещественное число. Тогда

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt, -\infty < x < \infty. \quad (6.41)$$

Отсюда, в частности, следует  $|J_0(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin t \Big|_0^1 = 1$ .

Таким образом, для вещественных значений  $x$   $|J_0(x)| \leq 1$ . Примем теперь  $\nu = n + 1/2, n = 0, 1, 2, \dots$  Тогда

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, |\arg z| < \pi, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что функции Бесселя с положительным половинным индексом выражаются через элементарные функции. Но зная функции Бесселя с положительным половинным индексом, с помощью рекуррентных

соотношений легко получить и функции с отрицательным половинным

индексом. Например,  $J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos(zt) dt = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z)$ .

Таким образом,  $J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z)$ .

Лиувиллем доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

В качестве еще одного примера применения интегрального представления для цилиндрических функций рассмотрим вычисление интеграла

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a > 0, b \geq 0. \quad (6.42)$$

Для этого воспользуемся формулой (6.41) и в интеграле сделаем замену

$t = \sin \varphi$ . Будем иметь  $J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(\varphi)) d\varphi$ .

Тогда интеграл (6.42) примет вид

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(bx \sin(\varphi)) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin(\varphi)) dx.$$

Воспользуемся известной формулой  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$ ,  $a > 0, b \geq 0$ .

$$\text{Тогда } I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2(\varphi)} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{a^2}{\sin^2(\varphi)} + b^2} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi)} =$$

(делаем замену  $\text{ctg} \varphi = t$ )

$$= \frac{2a}{\pi} \int_{\infty}^0 \frac{dt}{a^2 + b^2 + a^2 t^2} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d(at)}{a^2 + b^2 + (at)^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{arctg} \left( \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Итак, } I = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### §9 Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента

Цилиндрические функции обладают простыми асимптотическими представлениями, удобными для аппроксимации этих функций при больших по модулю значениях  $z$  и фиксированном значении индекса  $\nu$ . Главные члены этих формул можно получить, исходя из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. Более точные выражения можно получить исходя из интегральных представлений. В данном параграфе мы не будем рассматривать строгий вывод асимптотических представлений (более подробно об асимптотических оценках см. главу «Асимптотические методы» настоящего пособия), а ограничимся следующими интуитивными соображениями.

Рассмотрим уравнение Бесселя (6.12)

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0.$$

Сделаем подстановку  $u = \frac{\omega}{\sqrt{z}} \Rightarrow u' = \frac{\omega'}{\sqrt{z}} - \frac{\omega}{2\sqrt{z^3}} \Rightarrow u'' = \frac{\omega''}{\sqrt{z}} - \frac{\omega'}{\sqrt{z^3}} + \frac{3\omega}{4\sqrt{z^5}}$ .

Уравнение Бесселя примет вид

$$\omega'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2}\right]\omega = 0. \tag{6.43}$$

Если  $\nu$  ограничено,  $|z| \rightarrow \infty$ , то вместо уравнения (6.43) можно рассматривать уравнение  $\omega'' + \omega \cong 0$ . Откуда  $\omega \cong A \cos(z) + B \sin(z) = Ce^{iz} + De^{-iz} \Rightarrow$

$u \cong \frac{A \cos(z) + B \sin(z)}{\sqrt{z}} = \frac{C e^{iz} + D e^{-iz}}{\sqrt{z}}, |z| \rightarrow \infty$ . Коэффициенты  $A, B, C, D$  зависят

от индекса  $\nu$ , а также от вида рассматриваемой цилиндрической функции.

Можно получить следующие асимптотические формулы:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \quad H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right),$$

при этом  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ,  $\nu$  ограничено. Из определения функций

$$\text{Ханкеля следует } J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2}, \quad Y_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2}.$$

Тогда

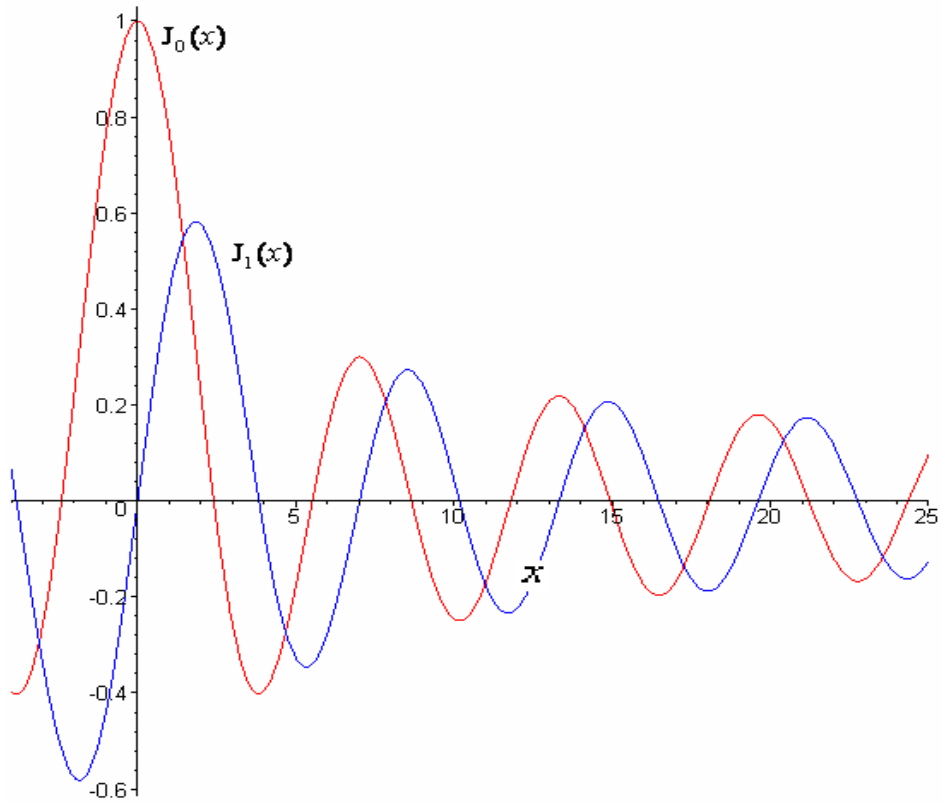
$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \quad (6.44)$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \quad (6.45)$$

Таким образом, если функции Ханкеля на бесконечности имеют экспоненциальный характер, то функции  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$  на бесконечности описываются формулами (6.44) и (6.45). В частности, для вещественных

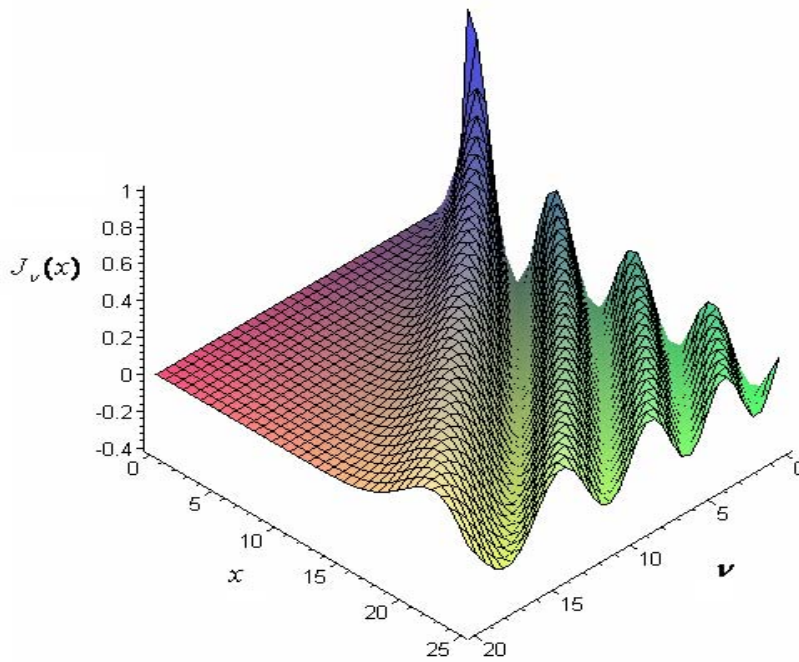
$$z = x \quad \text{и} \quad \nu = 0 \quad J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \quad \text{Далее } J_1(x) = -J_0'(x),$$

следовательно, нули функции  $J_1(x)$  совпадают с экстремумами функции  $J_0(x)$ . Отсюда, в частности, вытекает, что уравнение  $J_0(x) = 0$  имеет бесчисленное множество корней. На рис. 6.3 представлены графики Бесселевых функций, полученные в Maple 10.



**Рис.6.3**

На рис.6.4 представлена поверхность  $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$ , которая показывает, как изменяются функции  $J_\nu(x)$ , если непрерывно изменять переменные  $x, \nu$ .



**Рис.6.4**



## §10 Модифицированные цилиндрические функции

Рассмотрим уравнение

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (6.46)$$

Сделаем замену переменной  $z = ix$ , тогда  $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}i$ ,  $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dz^2}i^2$ , и

уравнение (6.46) примет вид  $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}i$ ,  $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dz^2}i^2$ ,

Таким образом, мы пришли к уравнению Бесселя. Откуда

$$u = AJ_\nu(z) + BH_\nu^{(1)}(z) = AJ_\nu\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right) + BH_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right). \quad (6.47)$$

Таким образом, уравнение (6.46) интегрируется через цилиндрические функции мнимого аргумента. Однако пользоваться решением в форме (6.47) неудобно, так как при вещественном  $\nu$  функция (6.47) является комплексной.

Вводятся в рассмотрение функции

$$I_\nu(x) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right), \quad (6.48)$$

$$K_\nu(x) = \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right), \quad (6.49)$$

которые называются модифицированными цилиндрическими функциями; функция (6.49) называется функцией Макдональда. Общее решение уравнения (6.46) теперь может быть записано в виде  $u(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x)$ .

Рассмотрим вкратце теорию этих функций. Из формул (6.17) и (6.48) следует

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}; \quad 0 < x < \infty. \quad \text{Таким образом, } I_\nu(x) \text{ вещественно, когда}$$

$x > 0$ ,  $\nu$  вещественно. Получим вспомогательную формулу (будем пока считать, что  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = J_\nu(z) + i \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} =$$

$$= ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(z) - e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Следовательно,  $K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} ie^{\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ix) - e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(ix)}{\sin(\nu\pi)} = \frac{-\pi[I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)]}{2\sin(\nu\pi)}.$

Итак,

$$K_\nu(z) = \frac{\pi[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2\sin(\nu\pi)}, \quad (6.50)$$

причем  $0 < x < \infty$ ,  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отсюда следует, что  $K_\nu(x)$  вещественно, если  $\nu$  вещественно. Покажем, что (6.50) приобретает неопределенный вид, если  $\nu$  стремится к целому числу.

Действительно, имеем

$$J_{-n}\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right) = (-1)^n J_n\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right) \Rightarrow \underbrace{e^{\frac{i\pi n}{2}} J_{-n}\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)}_{=I_{-n}(x)} = \underbrace{e^{-\frac{i\pi n}{2}} J_n\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)}_{=I_n(x)}.$$

Таким образом,  $I_{-n}(x) = I_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и следовательно, формула (6.50) обращается в неопределенность при целом индексе  $\nu$ . Доопределим функцию Макдональда для целых индексов по формуле

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[ \frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - \left[ \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 Из формулы

(6.50) следует  $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$ . Таким образом функция Макдональда есть четная функция индекса  $\nu$ . Для модифицированных цилиндрических функций существуют интегральные представления, аналогичные представлениям цилиндрических функций. Так, например, исходя из формулы (6.37)

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad |\arg z| < \pi, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2},$$

находим  $I_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} 2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(ixt) dt$ , или

$$I_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt.$$

Из формулы (6.40)  $H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$  находим

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(t) dt, \quad x > 0,$$

так как  $e^{-\nu t} = \operatorname{ch}(\nu t) - \operatorname{sh}(\nu t)$ . Таким образом:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(\nu t) dt, \quad x > 0, \quad \nu - \text{любое.}$$

Отметим рекуррентные формулы, которые легко получаются из формул

$$(6.32) \text{ и } (6.33), \quad 2 \frac{dI_\nu(x)}{dx} = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x), \quad \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x).$$

$$\text{Аналогично } -2 \frac{dK_\nu(x)}{dx} = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x), \quad -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x).$$

Отметим также асимптотические формулы

$$I_\nu(x) \cong \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, \quad x \rightarrow 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_\nu(x) = \infty, \quad \text{поэтому функция } I_\nu(x) \text{ ограничена при}$$

$$\nu \geq 0; \quad I_\nu(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

**§11 Задача Штурма–Лиувилля, связанная с цилиндрическими функциями**

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r R = 0, \quad 0 < r < a, \quad (6.51)$$

$$R|_{r=0} = O(1), \quad R|_{r=a} = 0, \quad (6.52)$$

либо

$$R|_{r=0} = O(1), \quad \left. \frac{d}{dr} + hR \right|_{r=a} = 0, \quad h \geq 0. \quad (6.53)$$

Чтобы записать общий интеграл уравнения (6.51), сделаем замену

$$\text{переменной } x = \sqrt{\lambda}r \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx} \sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2R}{dx^2} (\sqrt{\lambda})^2.$$

Уравнение (6.51) примет вид:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + R = 0. \quad (6.54)$$

Уравнение (6.54) – уравнение Бесселя нулевого порядка ( $\nu = 0$ ). Общий интеграл этого уравнения имеет вид:  $R = AJ_0(x) + BY_0(x)$ ,  $\lambda \neq 0$ ,

следовательно, общий интеграл уравнения (6.51) будет иметь вид

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad \lambda \neq 0.$$

Мы знаем, что  $\lim_{r \rightarrow 0} J_0(\sqrt{\lambda}r) = 1$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} Y_0(\sqrt{\lambda}r) = \infty$ , следовательно, в силу

ограниченности функции в нуле,  $B = 0$ . Таким образом, для условий первого рода будем иметь

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0 (A \neq 0), \quad (6.55)$$

а для условий третьего рода

$$haJ_0(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a) = 0 (A \neq 0). \quad (6.56)$$

Докажем, что полученные уравнения (6.55) и (6.56) имеют бесчисленное множество решений. Будем считать, что  $\lambda$  вещественное и  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Воспользуемся асимптотическими формулами

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда в случае условий первого рода

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}a^{3/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Видим, что при достаточно больших  $\lambda$  функция  $J_0(\sqrt{\lambda}a)$  имеет колебательный характер, и, следовательно, она бесконечное число раз обращается в нуль, то есть имеет бесконечное число корней.

В случае условий третьего рода будем иметь

$$\begin{aligned} haJ_0(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a) &= 0 = ha\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/4}}\right) - \\ &- \sqrt{\lambda}a\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right) = \\ &- (\sqrt{\lambda}a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{3\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right). \end{aligned}$$

Видим, что и в этом случае при достаточно больших  $\lambda$  рассматриваемая функция имеет колебательный характер, то есть имеет бесконечное число корней. Покажем, что все собственные значения вещественны. Предположим, что  $\lambda = \sigma + i\tau$  – собственное значение и ему отвечает собственная функция  $R = A + iB$ . Тогда вследствие вещественности функций и констант, входящих в дифференциальное уравнение (6.51) и граничные условия (6.52) и (6.53), существует собственное значение  $\bar{\lambda} = \sigma - i\tau$ , которому отвечает собственная функция  $\bar{R} = A - iB$ . Можно записать  $(rR')' + \lambda rR = 0$ ,  $(r\bar{R}')' + \bar{\lambda}r\bar{R} = 0$ . Первое соотношение умножим на  $\bar{R}$ , а второе – на  $R$  и вычтем одно из другого, получим  $\bar{R}(rR')' - R(r\bar{R}')' + (\lambda - \bar{\lambda})rR\bar{R} = 0$ .

Учитывая легко проверяемое соотношение

$$\bar{R}(rR')' - R(r\bar{R}')' = \frac{d}{dr} [r(\bar{R}R' - R\bar{R}')]$$

будем иметь  $\frac{d}{dr} [r(\overline{RR}' - R\overline{R}')] + (\lambda - \overline{\lambda})rR\overline{R} = 0$ . Проинтегрировав последнее соотношение на  $[0, a]$ , получим  $[r(\overline{RR}' - R\overline{R}')]_{r=0}^{r=a} + (\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^a rR\overline{R}dr = 0$ .

Внеинтегральный член равен нулю, следовательно,

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^a rR\overline{R}dr = 0 \Rightarrow 2i\tau \int_0^a r(A^2 + B^2)dr = 0 \Rightarrow \tau = 0. \text{ Следовательно, } \lambda = \sigma -$$

вещественное число.

Докажем теперь, что все собственные значения неотрицательны. Допустим, что  $\lambda = \sigma -$  собственное значение, причем  $\sigma < 0$ . Тогда для условий первого рода будем иметь  $J_0(\sqrt{\lambda}a) = J_0(i\sqrt{|\sigma|}a) = I_0(\sqrt{|\sigma|}a)$ . Последнее

выражение заведомо положительно, так как  $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} > 0$ .

Следовательно,  $J_0(i\sqrt{|\sigma|}a) \neq 0$  и отрицательных собственных значений быть не может. В случае условий третьего рода будем иметь

$$haJ_0(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a) = haI_0(\sqrt{|\sigma|}a) + \sqrt{|\sigma|}aI_1(\sqrt{|\sigma|}a) > 0, \text{ так как}$$

$$I_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} > 0. \text{ Следовательно, отрицательных собственных значений}$$

не существует. Покажем, наконец, что спектр задачи дискретный. Это вытекает из того, что функции, стоящие в левых частях уравнений (6.55) и (6.56), есть целые функции от  $\lambda$ . Эти функции не равны нулю тождественно, следовательно, их нули – изолированные точки. Таким образом, спектр задачи дискретный. Удобно принять в уравнениях (6.55) и (6.56)  $\sqrt{\lambda}a = \gamma$ , тогда будем иметь для условий первого рода

$$J_0(\gamma) = 0, \tag{6.57}$$

а для условий третьего рода

$$haJ_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0. \tag{6.58}$$

Так как  $\lambda \geq 0$ , то  $\gamma$  – вещественные; это позволяет находить корни уравнений

(6.57) и (6.58) графически. Пусть  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, \dots$  – положительные корни уравнений (6.57) или (6.58), тогда собственные значения будут

$$\lambda_1 = \left(\frac{\gamma_1}{a}\right)^2, \lambda_2 = \left(\frac{\gamma_2}{a}\right)^2, \lambda_3 = \left(\frac{\gamma_3}{a}\right)^2, \dots, \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \dots, \quad (6.59)$$

а собственные функции будут иметь вид

$$R_1(r) = J_0\left(\gamma_1 \frac{r}{a}\right), R_2(r) = J_0\left(\gamma_2 \frac{r}{a}\right), \dots, R_n(r) = J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \dots \quad (6.60)$$

Рассмотрим отдельно случай  $\lambda = 0$ . В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) = 0, 0 < r < a. \text{ Откуда } R = A + B \ln r. \text{ В случае условий первого и}$$

третьего рода, как легко видеть, будем иметь  $A = 0, B = 0 (h \neq 0)$ ; таким

образом,  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи. В случае условий

второго рода  $R'(a) = 0 (h = 0)$ , и мы будем иметь  $\lambda = \lambda_0 = 0$  собственное

значение;  $R = R_0(r) = 1$  – соответствующая собственная функция.

## §12 Разложение функции в ряды Фурье–Бесселя и Дини

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \lambda r R = 0, 0 < r < a, \quad (6.61)$$

$$R|_{r=0} = O(1), R|_{r=a} = 0, \quad (6.62)$$

либо

$$R|_{r=0} = O(1), \left. \frac{dR}{dr} + hR \right|_{r=a} = 0, h \geq 0. \quad (6.63)$$

Пусть  $\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, n = 1, 2, \dots$  – собственные значения  $R_n = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right), n = 1, 2, \dots$

– собственные функции задачи (6.61)–(6.63), причем  $\gamma_n$  – положительные

корни уравнений  $J_0(\gamma) = 0$  в случае условий первого рода и

$haJ_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0$  в случае условий третьего рода. Докажем, что собственные функции ортогональны на  $[0, a]$  с весом  $r$ . Имеем  $(rR'_n)' + \lambda_n rR_n = 0$ ,  $(rR'_m)' + \lambda_m rR_m = 0$ . Первое соотношение умножим на  $R_m$ , а второе – на  $R_n$  и вычтем одно из другого, получим

$$R_m(rR'_n)' - R_n(rR'_m)' + (\lambda_n - \lambda_m)rR_nR_m = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr}[r(R_mR'_n - R_nR'_m)] + (\lambda_n - \lambda_m)rR_nR_m = 0.$$

Проинтегрируем последнее соотношение на  $[0, a]$ , получим

$$[r(R_mR'_n - R_nR'_m)]_{r=0}^{r=a} + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^a rR_nR_m dr = 0.$$

Внеинтегральные члены равны нулю, следовательно,  $(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^a rR_nR_m dr = 0$ .

Откуда получаем, если  $m \neq n$ ,  $\int_0^a rR_nR_m dr = 0$ , что и требовалось доказать.

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\int_0^a rJ_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)J_0\left(\frac{\gamma_m r}{a}\right)dr = 0, \quad m \neq n.$$

В дальнейшем нам понадобится норма собственных функций, то есть необходимо уметь вычислять интеграл

$$\int_0^a rR_n^2 dr = \|R_n\|^2. \quad (6.64)$$

Для вывода формулы вычисления интеграла (6.64) удобно ввести обозначения  $R_\lambda(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r)$ ,  $R_\mu(r) = J_0(\sqrt{\mu}r)$ . Тогда можно записать

$$(rR'_\lambda)' + \lambda rR_\lambda = 0, \quad (rR'_\mu)' + \mu rR_\mu = 0.$$

Далее, повторяя все рассуждения, как и при доказательстве ортогональности собственных функций, мы придем к

$$\text{соотношению } [r(R_\mu R'_\lambda - R_\lambda R'_\mu)]_{r=0}^{r=a} + (\lambda - \mu) \int_0^a rR_\lambda R_\mu dr = 0 \Rightarrow$$



$$(\lambda - \mu) \int_0^a r R_\lambda R_\mu dr = -a [R_\mu(a) R'_\lambda(a) - R_\lambda(a) R'_\mu(a)]$$

Имеем далее  $R'_\lambda(r) = -\sqrt{\lambda} J_1(\sqrt{\lambda}r)$ ,  $R'_\mu(r) = -\sqrt{\mu} J_1(\sqrt{\mu}r)$ . Откуда

$$\int_0^a r J_0(\sqrt{\mu}r) J_0(\sqrt{\lambda}r) dr = \frac{a [\sqrt{\lambda} J_0(\sqrt{\mu}a) J_1(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\mu} J_0(\sqrt{\lambda}a) J_1(\sqrt{\mu}a)]}{(\lambda - \mu)}.$$

Перейдем теперь к пределу в последнем равенстве при  $\lambda \rightarrow \mu$ ; неопределенность раскроем по правилу Лопиталья. При этом воспользуемся

формулами  $\frac{d}{dx} x J_1(x) = x J_0(x)$ ,  $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$ . Будем иметь

$$\int_0^a r J_0^2(\sqrt{\mu}r) dr = \left[ J_0(\sqrt{\mu}a) \sqrt{\mu} a J_0(\sqrt{\mu}a) \frac{a}{2\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu} a J_1(\sqrt{\mu}a) J_1(\sqrt{\mu}a) \frac{a}{2\sqrt{\mu}} \right] =$$

$$\frac{a^2}{2} [J_0^2(\sqrt{\mu}a) + J_1^2(\sqrt{\mu}a)]$$

Примем в последнем равенстве  $\sqrt{\mu}a = \gamma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Тогда

$$\int_0^a r J_0^2\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)] \quad (6.65)$$

Здесь  $\gamma_n$  — положительные корни уравнений  $J_0(\gamma) = 0$ , в случае условий первого рода и  $haJ_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0$  в случае условий третьего рода. Таким образом, мы имеем

$$\int_0^a r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) J_0\left(\frac{\gamma_m r}{a}\right) dr = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{a^2}{2} [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)], & m = n. \end{cases}$$

Пусть теперь задана некоторая функция  $f(r)$ , определенная на  $[0, a]$ .

Предположим, что эта функция допускает разложение в ряд следующего

вида  $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)$ ,  $0 < r < a$ . Тогда мы можем записать

$$C_n = \frac{\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr}{\left\| J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) \right\|^2} = \frac{\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr}{\frac{a^2}{2} [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]}.$$

Полученные таким образом ряды называются рядами Дини. Ряды Дини связаны с граничными условиями третьего рода. Частным случаем, отвечающим граничным условиям первого рода, является ряд Фурье–Бесселя. Для этого частного случая будем иметь

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \quad 0 < r < a; \quad C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr.$$

Полученные ряды носят формальный характер. Сформулируем условия, при которых эти ряды справедливы:

1)  $f(r)$  – кусочно-непрерывна на  $(0, a)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (0, a)$ .

2)  $\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr$  существует.

Условие 2 допускает обращение функции  $f(r)$  в бесконечность при  $r \rightarrow 0$ .

При сформулированных условиях функция  $f(r)$  разлагается в ряд Дини при любом  $r \in (0, a)$ . Условия являются достаточными. В точках разрыва будем иметь

$$\frac{f(r+0) + f(r-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right).$$

### **§13 Приложения цилиндрических функций в математической физике**

Как уже упоминалось, цилиндрические функции имеют весьма широкую область применения в математической физике и технике. Настоящий параграф посвящен приложениям цилиндрических функций к некоторым задачам математической физики, причем выбор задач рассчитан главным образом на то, чтобы иллюстрировать различные стороны применения аппарата цилиндрических функций.

#### **Задача о колебаниях круглой мембраны**

Рассмотрим малые колебания круглой мембраны радиуса  $a$ , закрепленной по контуру. Будем предполагать колебания осесимметричными, то есть

$u = u(r, t)$ . Изучение таких колебаний сводится к решению следующей задачи:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < r < a, \quad t > 0;$$

$$u|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u|_{r=a} = 0; \quad (6.66)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(r).$$

Ищем решение в виде  $u = R(r)T(t) \Rightarrow \frac{(rR)'}{rR} = \frac{T''}{\nu^2 T} = -\lambda$ . Таким образом, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(rR)' + \lambda rR = 0, \quad (6.67)$$

$$T'' + \lambda \nu^2 T = 0. \quad (6.68)$$

В силу граничных условий (6.66) будем иметь

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad R|_{r=a} = 0. \quad (6.69)$$

Таким образом, получили задачу Штурма–Лиувилля (6.67), (6.69). Мы знаем, что собственными значениями этой задачи будут числа (6.59)

$$\lambda_1 = \left( \frac{\gamma_1}{a} \right)^2, \quad \lambda_2 = \left( \frac{\gamma_2}{a} \right)^2, \quad \lambda_3 = \left( \frac{\gamma_3}{a} \right)^2, \quad \dots, \quad \lambda_n = \left( \frac{\gamma_n}{a} \right)^2, \quad \dots, \quad \text{а собственные функции}$$

будут иметь вид (6.60)

$$R_1(r) = J_0\left(\gamma_1 \frac{r}{a}\right), \quad R_2(r) = J_0\left(\gamma_2 \frac{r}{a}\right), \quad \dots, \quad R_n(r) = J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \quad \dots,$$

где  $\gamma_n$  – положительные корни уравнения  $J_0(\gamma) = 0$ . Теперь уравнение (6.68)

$$\text{примет вид } T'' + \left( \frac{\gamma_n^2}{a^2} \right)^2 \nu^2 T = 0. \quad \text{Откуда } T = T_n = C_n \cos\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right).$$

Таким образом, мы получили совокупность частных решений

$$u = u_n = \left[ C_n \cos\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, воспользуемся принципом суперпозиции и составим ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right).$$

Будем считать, что ряд сходится так, что его можно дифференцировать, и переходить к пределу под знаком суммы. Тогда будем иметь

$$u|_{t=0} = \varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad 0 < r < a. \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\gamma_n \nu}{a} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad 0 < r < a.$$

Откуда  $C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r \varphi(r) J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) dr = \varphi_n.$

$$D_n \frac{\gamma_n \nu}{a} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r \psi(r) J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) dr = \psi_n.$$

Таким образом, окончательно формальное решение задачи будет иметь вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_n \cos\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) + \frac{a}{\gamma_n \nu} \psi_n \sin\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right). \quad \text{Рассмотрим пример. Пусть}$$

начальные условия имеют вид  $u|_{t=0} = \varphi(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(r) = 0.$

Тогда очевидно  $\psi_n = 0,$

$$\varphi_n = \frac{2u_0}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) dr. \quad (6.70)$$

Для вычисления интеграла в (6.70) удобно воспользоваться уравнением

Бесселя  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) \right) + \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2 r J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) = 0.$

Откуда

$$r J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) dr = -\left(\frac{a}{\gamma_n}\right)^2 d\left(r \frac{d}{dr} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right)\right). \quad (6.71)$$

После подстановки (6.71) в (6.70) интегрирование производим по частям.

Разбивать интеграл на два интеграла не следует:

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2u_0 a^2}{\gamma_n^2 a^2 J_1^2(\gamma_n)} \left\{ \underbrace{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r \frac{d}{dr} J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}_{=0} \Big|_{r=0}^{r=a} + \frac{2}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr \right\} = \\
&= \frac{2u_0}{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n)} \frac{2}{a^2} \left\{ \underbrace{\int_0^a r^2 J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \Big|_{r=0}^{r=a}}_{=0} - 2 \int_0^a r J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr \right\} = \\
&= \frac{8u_0}{\gamma_n^2 a^2 J_1^2(\gamma_n)} \frac{a^2}{\gamma_n^2} r \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \Big|_{r=0}^{r=a} = \\
&= \frac{8u_0}{\gamma_n^4 J_1^2(\gamma_n)} \frac{\gamma_n}{a} r J_1\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \Big|_{r=0}^{r=a} = \frac{8u_0}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,  $\varphi_n = \frac{8u_0}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)}$ . Окончательно решение задачи примет вид

$$u = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} \cos\left(\frac{\gamma_n \nu}{a} t\right).$$

#### **§14 Решение задачи Дирихле для цилиндра**

Важный класс задач математической физики составляют краевые задачи теории потенциала, которые заключаются в определении функции  $u$ , гармонической в некоторой трехмерной области  $\tau$ , удовлетворяющей на ее границе условию одного из трех типов

$$(I) u|_{\sigma} = f, \quad (II) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} = f, \quad (III) \frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_{\sigma} = f,$$

где  $f$  – заданная функция точки на поверхности  $\sigma$ ,  $n$  – внешняя нормаль к поверхности.

В качестве простого примера рассмотрим задачу об отыскании стационарного распределения температуры в теле, которое имеет форму цилиндра, по известному распределению температуры на его поверхности.

Эта задача эквивалентна первой краевой задаче, соответствующей условию вида (I). Такая краевая задача может быть решена при помощи метода разделения переменных, если предположить, что функция равна нулю на боковой поверхности или на торцах цилиндра. Общий случай произвольных граничных условий первого рода может быть сведен к этим частным случаям путем разложения задачи на две вспомогательные, с граничными условиями указанного специального вида.

Введем систему цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра, а начало координат лежит в плоскости одного из торцов. В соответствии с замечанием, сделанным ранее, достаточно ограничиться рассмотрением двух частных случаев, когда граничные условия имеют вид

$$u|_{r=a} = 0, u|_{z=0} = f_0, u|_{z=l} = f_l; \quad (6.72a)$$

$$u|_{r=a} = F, u|_{z=0} = 0, u|_{z=l} = 0. \quad (6.72б)$$

Для упрощения предположим, что граничные условия не содержат переменной  $\varphi$ , то есть  $f_0 = f_0(r), f_l = f_l(r), F = F(z)$ . Искомая функция  $u$  тогда также не будет зависеть от  $\varphi$ , поэтому частные решения уравнения Лапласа могут быть представлены в форме  $u = R(r)Z(z)$ , где множители – интегралы дифференциальных уравнений  $(rR')' + \lambda rR = 0, Z'' - \lambda Z = 0$

Выполнив интегрирование, находим

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) - BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad \lambda \neq 0, \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} Z(z) &= C \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}z) + D \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}z) = \\ &= \tilde{C} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(l-z)) + \tilde{D} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}z), \quad \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Предположим, что граничные условия имеют вид (6.72a). В силу ограниченности решения на оси цилиндра мы должны принять  $B=0$ . А тогда допустимыми значениями параметра  $\lambda$  будут числа

$$\lambda_1 = \left(\frac{\gamma_1}{a}\right)^2, \lambda_2 = \left(\frac{\gamma_2}{a}\right)^2, \lambda_3 = \left(\frac{\gamma_3}{a}\right)^2, \dots, \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \dots,$$

где  $\gamma_n$  – положительные корни уравнения (6.57):  $J_0(\gamma) = 0$ .

Таким образом, получаем следующую совокупность частных решений уравнения Лапласа

$$u = u_n = \left[ M_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}(l-z)\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}z\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.75)$$

из которых путем их суперпозиции может быть построено решение рассматриваемой задачи. Действительно, предположим, что каждая из функций  $f_0(r), f_1(r)$  может быть разложена в ряд Фурье–Бесселя

$$f_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{0,n} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right), \quad f_{0,n} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f_0(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr,$$

$$f_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right), \quad f_{1,n} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f_1(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr,$$

и рассмотрим ряд

$$u = u_n = \left[ M_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}(l-z)\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}z\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.76)$$

составленный из членов вида (6.75). Тогда граничные условия будут удовлетворены, и ряд (6.76) дает формальное решение поставленной задачи.

В случае граничных условий типа (6.72б) для того, чтобы удовлетворить однородным граничным условиям, необходимо принять  $C = 0$  и выбрать  $\lambda < 0$ , то есть  $\sqrt{\lambda}$  будет чисто мнимым числом, равным  $i n \pi / l, n = 1, 2, \dots$

Интегралы уравнений (6.73), (6.74) принимают в этом случае вид

$$R(r) = A I_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right) + B K_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right), \quad Z(z) = D \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right).$$

В силу ограниченности функции в нуле следует принять  $B = 0$ ; следовательно, подходящая система частных решений уравнения Лапласа

будет  $u = u_n = M_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right); n = 1, 2, \dots$ . Искомое решение может быть

построено в форме ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{l} r\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{l} a\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \quad (6.77)$$

где  $F_n$  – коэффициенты Фурье в разложении функции  $F(z)$  в ряд по синусам  $F_n \frac{2}{l} \int_0^l F(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) dz$ . Решение краевых задач с граничными условиями других типов получается аналогичным образом, причем подходящим аппаратом, заменяющим ряды Фурье–Бесселя, являются в этом случае ряды Дини. Несколько слов о сходимости рядов (6.76) и (6.77). В обоих случаях мы имеем разложение по колеблющимся функциям. Сходимость ряда (6.76)

определяется соотношениями  $\frac{\text{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a} (l-z)\right)}{\text{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a} l\right)} \approx e^{\gamma_n \left[\frac{(l-z)}{a} - \frac{l}{a}\right]} = e^{-\gamma_n \frac{z}{a}}, n \rightarrow \infty,$

$\frac{\text{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a} z\right)}{\text{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a} l\right)} \approx e^{\gamma_n \left[\frac{z}{a} - \frac{l}{a}\right]} = e^{-\gamma_n \frac{(l-z)}{a}}, n \rightarrow \infty.$  Таким образом, видим, что множители в

формуле (6.76) убывают по экспоненте, пока  $z$  не слишком близко к 0 и  $l$ .

Для ряда (6.77) будем иметь  $\frac{I_0\left(\frac{n\pi}{l} r\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{l} a\right)} \approx \sqrt{\frac{a}{r}} e^{\frac{n\pi}{l}(r-a)} = \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\frac{n\pi}{l}(a-r)}, n \rightarrow \infty.$

Ряд сходится экспоненциально в области  $0 < r < a$ . Таким образом, ряды (6.76) и (6.77) сходятся плохо около тех участков границы, где условия неоднородные.

### **Общий случай произвольных граничных условий первого рода**

Представим функцию  $u$  в виде  $u = u_1 + u_2$ . Функцию  $u_1$ , будем определять из следующих условий:

$$\Delta u_1 = 0, u_1|_{z=0} = f_0(r), u_1|_{z=l} = f_l(r), u_1|_{r \rightarrow 0} = O(1), u_1|_{r=a} = 0,$$



а функцию  $u_2$  – из условий

$$\Delta u_2 = 0, u_2|_{z=0} = 0, u_2|_{z=l} = 0, u_2|_{r \rightarrow 0} = O(1), u_2|_{r=a} = F(z).$$

Функция  $u_1$  удовлетворяется формулой (6.76), а функция  $u_2$  – формулой (6.77). Таким образом, общая задача сводится к рассмотренным случаям (6.72а) и (6.72б).

### **§15 Сферические функции. Полиномы Лежандра**

Сферическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения

$$\left[ (1 - z^2)u' \right]' + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right] u = 0 \quad (6.78)$$

где  $z$  – комплексное переменное,  $\mu$  и  $\nu$  – параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения. Уравнение (6.78) встречается в математической физике в связи с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат – сферических, сфероидальных, тороидальных и других, которые применяются при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида. Простейшими среди них являются краевые задачи для сферической области, что служит основанием для того, чтобы называть рассматриваемый класс функций сферическими или шаровыми функциями. В этом случае переменная  $z$  принимает вещественные значения из промежутка  $(-1, 1)$ , а параметры  $\mu$  и  $\nu$  имеют целые положительные значения. Простейший класс сферических функций составляют полиномы Лежандра, которые являются решениями уравнения (6.78) при  $\mu = 0$  и целых положительных  $\nu = n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ . Следующий по степени сложности класс сферических функций образуют сферические функции Лежандра, которые представляют собой решения уравнения (6.78) при  $\mu = 0$  и произвольном вещественном или комплексном  $\nu$ . Рассмотрим уравнение

(6.78) в предположении, что  $z = x \in [-1, 1]$ ;  $\mu = 0$ ,  $\nu = n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ), то есть уравнение

$$\left[ (1-x^2)u' \right]' + n(n+1)u = 0. \quad (6.79)$$

Построим интегралы уравнения (6.79). Покажем, что одним из интегралов уравнения (6.79) является функция

$$u = u_1 = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.80)$$

Функции (6.80) называются полиномами Лежандра, а формула (6.80) – формулой Родрига для полиномов Лежандра.

Обозначим  $W = (x^2 - 1)^n$ . Тогда  $W' = n(x^2 - 1)^{n-1} 2x = \frac{2nx}{x^2 - 1} W$ ,

или

$$(1-x^2)W' + 2nxW \equiv 0. \quad (6.81)$$

Продифференцируем равенство (6.81)  $(n+1)$  раз. Получим

$$\left[ (1-x^2)W' \right]^{(n+1)} + 2n(xW)^{(n+1)} = 0.$$

Дифференцирование можно "выполнить по формуле Лейбница

$$(UV)^{(m)} = U^{(m)}V + \frac{m}{1!} U^{(m-1)}V' + \frac{m(m-1)}{2!} U^{(m-2)}V'' + \dots + UV^{(m)}. \quad (6.82)$$

Примем в (6.82) для первого слагаемого  $U = W'$ ,  $V = (1-x^2)$ ,  $m = n+1$ ; для второго слагаемого  $U = W$ ,  $V = x$ ,  $m = n+1$ .

Будем иметь  $(1-x^2)W^{(n+2)} + \frac{(n+1)}{1!} W^{(n+1)}(-2x) + \frac{(n+1)}{2!} W^{(n)}(-2) +$

$$2nW^{(n+1)}x + 2n \frac{(n+1)}{1!} W^{(n)} \equiv 0,$$

или

$$(1-x^2)W^{(n+2)} - 2xW^{(n+1)} + n(n+1)W^{(n)} \equiv 0. \quad (6.83)$$

Умножим (6.83) на  $\frac{1}{2^n n!}$ , получим  $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) \equiv 0$ ,

или, что то же самое,  $[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) \equiv 0$ . Итак, мы показали, что полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению (6.79). Найдем второе решение уравнения (6.79), которое было бы линейно независимо от решения  $u_1 = P_n(x)$ . Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – решения уравнения (6.79). Тогда  $[(1-x^2)u'_1]' + n(n+1)u_1 \equiv 0$ ,  $[(1-x^2)u'_2]' + n(n+1)u_2 \equiv 0$ . Умножим первое уравнение на  $u_2$ , второе – на  $u_1$ , и вычтем одно из другого. Получим

$$u_2[(1-x^2)u'_1]' - u_1[(1-x^2)u'_2]' \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)(u_1u'_2 - u_2u'_1)] \equiv 0.$$

Проинтегрируем полученное тождество:

$$(1-x^2)(u_1u'_2 - u_2u'_1) = C = \text{const} \Rightarrow \frac{(u_1u'_2 - u_2u'_1)}{u_1^2} = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{u_2}{u_1} = C \int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + D, \quad D = \text{const} \Rightarrow$$

$$u_2 = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + Du_1. \quad (6.84)$$

Таким образом, если  $u_1$  и  $u_2$  – решения уравнения (6.79), то они связаны соотношением (6.84), в котором  $C$  и  $D$  могут быть любыми. Если  $C \neq 0$ , то  $u_1$  и  $u_2$  линейно независимы. Возьмем в качестве  $u_1$  полиномы Лежандра:  $u_1 = P_n(x)$ . Тогда на основании (6.84) будем иметь

$$u_2 = C_n P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)} + D_n P_n(x) = Q_n(x).$$

Здесь  $Q_n(x)$  – линейно независимая функция с  $P_n(x)$ . Функция  $Q_n(x)$  называется функцией Лежандра второго рода ( $C_n \neq 0$ ).

Пусть  $n = 0$ . Тогда  $P_0(x) = 1$ ,

$$Q_0(x) = C_0 \int \frac{dx}{1-x^2} + D_0 = \frac{C_0}{2} \int \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx + D_0 =$$

$$\frac{C_0}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + D_0.$$

Возьмем  $C_0 = 1, D_0 = 0$ . Тогда  $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ . Пусть  $n = 1$ . Тогда

$$P_1(x) = x, \quad Q_1(x) = C_1 x \int \frac{dx}{(1-x^2)x^2} + D_1 x = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$$

Здесь константы  $C_1$  и  $D_1$  выбраны надлежащим образом. И вообще,

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} f_{n-1}(x), \quad \text{где} \quad f_{-1}(x) \equiv 0, f_0(x) = 0, f_{n-1}(x) \quad - \quad \text{полином}$$

степени  $(n-1)$ . Выпишем первые несколько функций  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$ :

$$P_0(x) = 1, \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$P_1(x) = x, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x,$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), \quad Q_3(x) = \frac{5x^2 - 3x}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Так как функции  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  линейно независимы, то общее решение уравнения (6.79) может быть записано в виде

$$u(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы.

**Примечание.** Уравнение (6.79) называется уравнением Лежандра; оно имеет особые точки  $x = -1$  и  $x = 1$ . Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  являются собственными функциями для уравнения (6.79) в промежутке  $[-1, 1]$ , ограниченными в особых точках  $x = \pm 1$ , то есть  $P_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1}$  – ограничены.

Очевидно,  $Q_n(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm 1$ .

## §16 Производящая функция для полиномов Лежандра

Функция

$$W(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \quad (6.85)$$

является производящей для полиномов Лежандра, то есть биномы Лежандра – коэффициенты разложения этой функции в ряд по положительным степеням  $z$ :

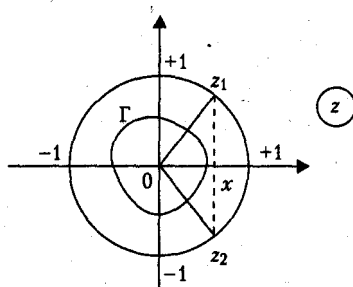
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \quad (6.86)$$

Здесь  $z$  – комплексная переменная,  $x \in [-1, +1]$ ,  $x$  – параметр.

Докажем формулу (6.86). Имеем  $W(x, 0) = 1$ . Особые точки (критические точки или точки разветвления) функции (6.85) – корни уравнения

$$z^2 - 2xz + 1 = 0, \text{ то есть } z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}, |z_{1,2}| = 1.$$

Следовательно, особые точки лежат на круге радиуса 1;  $z_1$  и  $z_2$  – особые точки функции  $W(x, z)$  (рис. 6.5).



**Рис.6.5**

Внутри круга  $|z| < 1$  особых точек нет. Функция  $W(x, z)$  – регулярная функция переменного  $z$ ,  $|z| < 1$ . Следовательно, внутри круга  $|z| < 1$  функция  $W(x, z)$  допускает разложение в ряд Тейлора. Таким образом, можно записать

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, |z| < 1, x \in [-1, 1].$$

Коэффициенты разложения  $C_n$  определяются равенством

$$C_n \frac{W^{(n)}(x, 0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или, в силу интеграла типа Коши,

$$C_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (6.87)$$

Напомним, что коэффициенты разложения функций  $f(z)$  в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \text{ вычисляются по формуле } C_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

а в силу интеграла типа Коши будем иметь

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}. \quad (6.88)$$

В качестве контура  $\Gamma$  в формуле (6.87) можно взять любой замкнутый контур, лежащий целиком в пределах круга  $|z| < 1$  и охватывающий точку  $(0, 0)$ .

Вычислим интеграл (6.87) с помощью подстановки Эйлера. Имеем

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = 1-zu \Rightarrow 1-2xz+z^2 = 1-2zu+z^2u^2 \Rightarrow z(u^2-1) = 2(u-x) \Rightarrow$$

$$z = 2 \frac{u-x}{u^2-1}. \text{ Таким образом, } \sqrt{1-2xz+z^2} = 1-2u \frac{u-x}{u^2-1} = -\frac{u^2-2ux+1}{u^2-1},$$

$$dz = \frac{(u^2-1)-(u-x)2u}{(u^2-1)^2} du = -2 \frac{u^2-2ux+1}{(u^2-1)^2} du. \text{ Откуда}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(u^2-1)2(u^2-2ux+1)(u^2-1)^{n+1}}{(u^2-2ux+1)(u^2-1)^2 2^{n+1}(u-x)^{n+1}} du = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(u^2-1)^n}{(u-x)^{n+1}} du.$$

Здесь  $\Gamma$  – замкнутый контур вокруг точки  $x$  в плоскости  $U$ , соответствующий замкнутому контуру  $\Gamma$  вокруг точки  $O(0, 0)$  в плоскости  $z$  (рис. 6.6).

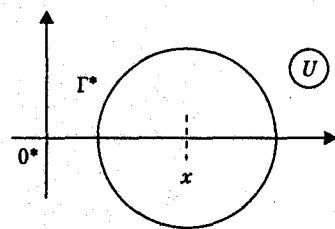


Рис. 6.6

Можно записать в соответствии с формулой (6.88)

$$C_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \Big|_{u=x} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = P_n(x).$$

Окончательно будем иметь  $W(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$ . Рассмотрим некоторые примеры применения производящей функции:

$$W(1, z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1,$$

откуда находим  $P_n(1) = 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ;

$$W(-1, z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1,$$

откуда находим  $P_n(-1) = (-1)^n$ ;

откуда находим  $W(-x, -z) = W(x, z) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x) (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$ ,

Из последней формулы, в частности, следует, что  $P_{2n+1}(0) = 0$ .

### **§17 Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра**

Исходя из производящей функции, легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра.

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad (6.89)$$

Продифференцируем (6.85) по  $z$ , получим

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{1-2xz+z^2} \frac{-2x+2z}{2\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{x-z}{1-2xz+z^2} W$$

или  $(1-2xz+z^2) \frac{\partial W}{\partial z} + (z-x)W = 0$ . Откуда

$$\begin{aligned}
(1 - 2xz + z^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} + (z - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = 0 \Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n+1} + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)z^n = 0 \Rightarrow \\
\sum_{\substack{n=0 \\ (n=1) \\ (n-1 \rightarrow n)}}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{\substack{n=0 \\ (n-1 \rightarrow n)}}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0 \Rightarrow \\
\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n = 0.
\end{aligned}$$

Объединим в одну сумму в последнем соотношении слева, получим

$$\begin{aligned}
[P_1(x) - xP_0(x)]z^0 + \\
\sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]z^n = 0. \tag{6.90}
\end{aligned}$$

Равенство (6.90) возможно лишь тогда, когда коэффициенты при степенях  $z$  равны нулю. Откуда  $P_1(x) - xP_0(x) = 0$ , так как  $P_1(x) = x, P_0(x) = 1$ ,

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6.91}$$

Формула (6.91) – требуемое рекуррентное соотношение. Получим второе рекуррентное соотношение. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial}{\partial z} [(z-x)W] = (z-x) \frac{\partial W}{\partial z} + W = W \left[ 1 - \frac{(x-z)^2}{1-2xz+z^2} \right] = \frac{(1-x^2)W}{1-2xz+z^2}. \tag{6.92}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)} W. \tag{6.93}$$

Сравнивая (6.92) и (6.93), получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial z} [(z-x)W] \Rightarrow \\
(1-x^2) \frac{\partial W}{\partial z} = z \frac{\partial}{\partial z} [(z-x)W] \Rightarrow
\end{aligned}$$



$$(1-x^2)\frac{\partial W}{\partial z} = z(z-x)\frac{\partial W}{\partial z} + zW. \quad (6.94)$$

Подставим (6.89) в (6.94), получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^n &= z(z-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1} + z\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)nz^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ (n+1 \rightarrow n)}}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} nxP_n(x)z^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n - \sum_{\substack{n=0 \\ (n=1)}}^{\infty} nxP_n(x)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]z^n. \end{aligned}$$

Откуда получаем второе рекуррентное соотношение

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

### **§18 Задача Штурма–Лиувилля, связанная с полиномами Лежандра**

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left[ (1-x^2)X'(x) \right]' + \lambda X(x) = 0, \quad (6.95)$$

$$X(x)|_{x \rightarrow \pm 1} = O(1). \quad (6.96)$$

Докажем, что

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.97)$$

– собственные значения;  $X(x) = X_n(x) = P_n(x)$

— собственные функции задачи (6.95), (6.96).

Подставим (6.97) в уравнение (6.95); получим уравнение Лежандра

$$\left[ (1-x^2)X' \right]' + (n+1)nX = 0. \quad (6.98)$$

Общий интеграл (6.98), как было установлено ранее, имеет вид

$$X(x) = X_n(x) = AP_n(x) + BQ_n(x). \quad (6.99)$$

Имеем  $P_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1} = O(1)$ ,  $Q_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1} \rightarrow \infty$ . Следовательно, в (6.99) необходимо принять  $B = 0$ , чтобы удовлетворить (6.96). Таким образом, действительно,

$X(x) = X_n(x) = P_n(x)$  – собственные функции задачи (6.95), (6.96), а  $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  – собственные значения этой задачи. Более полная теория устанавливает, что других собственных функций и собственных значений нет. Докажем, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему функций на отрезке  $[-1, 1]$ . Действительно, имеем

$[(1-x^2)P_n']' + (n+1)nP_n = 0$ ,  $[(1-x^2)P_m']' + (m+1)mP_m = 0$ . Первое соотношение умножаем на  $P_m(x)$ , а второе – на  $P_n(x)$  и вычитаем одно из другого,

получаем  $P_n [(1-x^2)P_m'] - P_m [(1-x^2)P_n'] + [(m+1)m - (n+1)n]P_n P_m = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)[P_n P_m' - P_m P_n'] + [(m+1)m - (n+1)n]P_n P_m = 0.$$

Проинтегрируем последнее соотношение на отрезке  $[-1, 1]$ , получим

$$(1-x^2)[P_n P_m' - P_m P_n'] \Big|_{x=-1}^{x=1} + [(m+1)m - (n+1)n] \int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0.$$

Откуда находим  $\int_{-1}^{+1} P_n P_m dx = 0$ ,  $m \neq n$ . Таким образом, справедлива формула

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|P_n(x)\|^2, & m = n. \end{cases}$$

### §19 Вычисление нормы для полиномов Лежандра

Воспользуемся рекуррентным соотношением (6.91) и заменим в этом соотношении  $n$  на  $(n-1)$ . Будем иметь

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.100)$$

Умножим соотношение (6.91) на  $(2n-1)P_{n-1}$ , а соотношение (6.100) – на  $(2n+1)P_n$  и затем вычтем одно из другого. Получим

$$(2n-1)(n+1)P_{n-1}P_{n+1} + (2n-1)nP_{n-1}^2 - (2n+1)nP_n^2 - (2n+1)(n-1)P_n P_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.101)$$

Проинтегрируем (6.101) на отрезке  $[-1,1]$ ; учитывая ортогональность полиномов, получим  $(2n-1)n \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2 dx - (2n+1)n \int_{-1}^{+1} P_n^2 dx = 0$ ,  $n = 2, 3, \dots$

Откуда находим

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2 dx, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.102)$$

Имеем  $\int_{-1}^{+1} P_0^2 dx = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot dx = 2$ ,  $\int_{-1}^{+1} P_1^2 dx = \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3}$ , далее по формуле (6.102)

$\int_{-1}^{+1} P_2^2 dx = \frac{3}{5} \int_{-1}^{+1} P_1^2 dx = \frac{2}{5}$ ,  $\int_{-1}^{+1} P_3^2 dx = \frac{5}{7} \int_{-1}^{+1} P_2^2 dx = \frac{2}{7}$ , и так далее. Таким образом,

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство завершается переходом по индукции. Итак, можно записать

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вопрос о разложении произвольной функции в ряд по полиномам Лежандра. Пусть задана функция  $f(x), x \in (-1,1)$ . Можно формально предположить, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \quad -1 < x < +1 \quad (6.103)$$

Тогда  $C_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx$ . Справедлива следующая

теорема разложения.

**Теорема.** 6.1 Пусть  $f(x), x \in (-1,1)$  такая, что

1)  $f(x)$  кусочно-непрерывна на  $(-1,1)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (-1,1)$ ;

2) интеграл  $\int_{-1}^{+1} \frac{|f(x)|}{(1-x^2)^{1/4}} dx$  – ограничен.

Тогда ряд (6.103) сходится к функции  $f(x)$  во всех точках, где  $f(x)$  непрерывна. В точках разрыва ряд сходится к полусумме значений функции справа и слева от разрыва, то есть к числу  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

Условия теоремы 1 и 2 являются достаточными.

**Пример.6.1** Разложить функцию  $x^2$  в ряд по полиномам Лежандра.

$$\text{Имеем } f(x) = x^2 = \sum_{n=0}^2 C_n P_n(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x)$$

$$\text{или } x^2 = C_0 + C_1 x + C_2 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим

$$C_0 = \frac{1}{3}, C_1 = 0, C_2 = \frac{2}{3}. \text{ Таким образом, будем иметь } x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x).$$

## §20 Приложение полиномов Лежандра в математической физике

В качестве простого примера рассмотрим задачу об обтекании шара потоком идеальной жидкости. Как известно из гидродинамики, потенциал скоростей  $U$  идеальной жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0, \bar{v} = \nabla U, \text{ где } \bar{v} - \text{ вектор скорости частицы жидкости. Пусть жидкость}$$

движется относительно шара радиуса  $a$  со скоростью  $u$  и в направлении отрицательной оси  $z$ . По определению потенциала скорости  $U$ , нормальная

компонента скорости  $v_n$ , прилегающей к поверхности шара частицы

жидкости есть  $v_n = \frac{\partial U}{\partial n}$ . Введем сферическую систему координат по

формулам  $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), z = r \cos(\theta)$ . Представим

потенциал скоростей в виде суммы  $U = U_1 + U_2$ , где  $U_1$  – потенциал потока

при отсутствии шара,  $U_2$  – потенциал возмущенного потока. Ясно, что

$U_1 = -uz = -ur \cos(\theta)$ , где  $r$  – радиус-вектор точки,  $\theta$  – меридиональный угол.

Для потенциала  $U_2$  будем иметь следующую задачу:

$$\Delta U_2 = 0, r > a, \quad (6.104)$$

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial U_1}{\partial r} \right|_{r=a} = u \cos(\theta), \quad U_2|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \quad (6.105)$$

Уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.106)$$

Задача (6.104), (6.105) является внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа, записанной в сферической системе координат. Из соображений симметрии ясно, что  $U_2$  не зависит от угла  $\varphi$ , то есть  $U_2 = U_2(r, \theta)$ . Поэтому можно отбросить последнее слагаемое в (6.106) слева и искать решение задачи в виде  $U_2(r, \theta) = R(r)V(\theta)$ . Переменные в (6.106) разделяются, и мы получаем два уравнения

$$V'' + \operatorname{ctg} \theta V' + \lambda V = 0, \quad (6.107)$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \quad (6.108)$$

Уравнение (6.108) относится к типу уравнений Эйлера. Ищем его решение в виде  $R(r) = r^k$ ; тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$k(k+1) - \lambda = 0. \quad (6.109)$$

С другой стороны, решениями уравнения (6.107) являются полиномы Лежандра  $V(\theta) = P_n(\cos(\theta))$ , и при этом имеем  $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ .

Действительно, сделаем замену независимой переменной в (6.107) по формуле  $x = \cos(\theta)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , и обозначим  $y(x) = V(\theta)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) \frac{dy}{dx}; \\ \frac{d^2V}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left( -\sin(\theta) \frac{dy}{dx} \right) = -\cos(\theta) \frac{dy}{dx} - \sin(\theta) \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{d\theta} = \\ &= -\cos(\theta) \frac{dy}{dx} + \sin^2(\theta) \frac{d^2y}{dx^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо (6.107) будем иметь

$$\sin^2(\theta) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \cos(\theta) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \text{ или, учитывая, что } \sin^2(\theta) = 1 - x^2, \cos(\theta) = x,$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (6.110)$$

Уравнение (6.110) – уравнение Лежандра; его решениями, ограниченными в точках  $x = \pm 1$ , являются полиномы Лежандра  $P_n(x)$ , причем  $\lambda = n(n+1)$ .

Следовательно, из (6.109) по теореме Виета находим  $k_1 = n, k_2 = -(n+1)$ .

Решение внешней задачи, ограниченное на бесконечности, ищется в виде

ряда  $U_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos(\theta))$ . Подставим этот ряд в (6.105)

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (-n-1) a^{-(n+2)} P_n(\cos(\theta)) = u \cos(\theta).$$

Учитывая, что  $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ , приходим к выводу

$D_1 = -\frac{ua^3}{2}$ ;  $D_n = 0, n \neq 1$ . Поэтому искомое течение определяется

потенциалом скорости  $U_2 = -\frac{ua^3 \cos(\theta)}{2r^2}$ . Таким образом, потенциал

обтекания шара поступательным потоком  $U = -u \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos(\theta)$ . Заметим,

что из вида граничного условия (6.105) и значения первого полинома

Лежандра можно было сразу догадаться, что решение имеет вид

$U_2 = R(r) \cos(\theta)$ . Подробное исследование проведено с целью выработки

навыков решения задач с более сложными граничными условиями в

сферической системе координат.

## ГЛАВА 7. МЕТОД ГРИНБЕРГА ИЛИ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Метод Гринберга является обобщением метода Фурье на случай неоднородного уравнения и неоднородных граничных условий.

Изложим идею метода на примере следующей задачи: найти функцию  $u = u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям.

Функция  $u = u(x, y)$  удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$L_x(u) + M_y(u) = F(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d, \quad (7.1)$$

где  $L_x$  и  $M_y$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_x(u) = \frac{1}{r(x)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \right], \quad M_y(u) = A(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B(y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(y)u.$$

Интервал  $(a, b)$  считаем конечным; функции  $p(x), p'(x), q(x), r(x)$  непрерывны в интервале  $[a, b]$ , причем  $p(x) > 0, r(x) > 0$ . Интервал  $(c, d)$  может быть конечным или бесконечным. Кроме того, функция  $u = u(x, y)$  удовлетворяет по переменной  $x$  условиям одного из следующих типов:

$$u|_{x=a} = f_a(y), \quad u|_{x=b} = f_b(y), \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = f_a(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = f_b(y), \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_0 u \Big|_{x=a} = f_a(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_0 u \Big|_{x=b} = f_b(y). \quad (7.4)$$

Далее выполняются некоторые условия по переменной  $y$  – такие же, как мы рассматривали при изучении метода Фурье. Например, если  $A > 0$ , то уравнение (7.1) – эллиптического типа и ставится одно из условий первого, второго или третьего рода, то есть

$$u|_{y=c} = \varphi_c(x), \quad u|_{x=d} = \varphi_d(x), \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=c} = \varphi_c(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=d} = \varphi_d(x), \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - h_c u|_{x=c} = \varphi_c(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + h_d u|_{x=d} = \varphi_d(y). \quad (7.7)$$

Если  $A < 0$ , то тип уравнения (7.1) – гиперболический; тогда  $y \in (c, +\infty)$  и ставятся условия

$$u|_{y=c} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=c} = \psi(y); \quad (7.8)$$

если  $A = 0$ , то тип уравнения (7.1) – параболический;  $y \in (c, +\infty)$  и ставится условие

$$u|_{y=c} = \varphi(x). \quad (7.9)$$

Рассмотрим следующую задачу Штурма–Лиувилля, связанную с нашей задачей: найти нетривиальные решения уравнения  $L_x(X(x)) + \lambda X(x) = 0$ ,  $a < x < b$ , удовлетворяющие однородным условиям первого, второго или третьего рода. Или, в явном виде, найти нетривиальные решения уравнения

$$(pX')' + (\lambda r - q)X = 0, \quad (7.10)$$

подчиняющиеся граничным условиям  $X|_{x=a} = 0$ ,  $X|_{x=b} = 0$

$$\text{либо } \frac{\partial X}{\partial x}|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x}|_{x=b} = 0,$$

$$\text{либо } \frac{\partial X}{\partial x} - h_a X|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} - h_b X|_{x=b} = 0.$$

При сделанных предположениях эта задача регулярна и имеет дискретный спектр собственных значений  $\lambda = \lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть  $X = X_n(x)$  – собственные функции этой задачи. Ссылаясь на общую теорию регулярной задачи Штурма–Лиувилля, можно заключить, что



$$\int_a^b r(x)X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n(x)\|^2, & m = n; \end{cases}$$

и произвольную функцию можно разложить в ряд по собственным функциям этой задачи. Идея метода Гринберга заключается в том, чтобы искать решение задачи (7.1)–(7.9) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y)X_n(x), \quad C_n(y) = \frac{\int_a^b r(x)u(x,y)X_n(x)dx}{\|X_n(x)\|^2} = \frac{u_n(y)}{\|X_n(x)\|^2}.$$

Покажем, что исходя из первоначальных уравнений задачи, можно получить уравнения для функции  $u_n(y)$  (эта функция иногда называется трансформантой от функции  $u(x,t)$ ). Для того чтобы показать это, умножаем уравнение (7.1) на  $r(x)X_n(x)$  и интегрируем по интервалу  $[a,b]$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_a^b X_n \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu \right] dx + \int_a^b M_y(u)r(x)X_n(x)dx = \\ = \int_a^b F(x,y)r(x)X_n(x)dx. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Первый интеграл слева преобразуем по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b X_n \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx = X_n p \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b p \frac{\partial u}{\partial x} X_n'(x) dx = \\ = X_n p \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}^{x=b} - pX_n' u \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b u (pX_n')' dx. \end{aligned}$$

Теперь вместо формулы (5.29) будем иметь

$$\begin{aligned} p \left[ X_n \frac{\partial u}{\partial x} - X_n' u \right] \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \underbrace{u [(pX_n')' - qX_n]}_{=-\lambda_n r X_n} dx + \\ + M_y \left( \int_a^b r X_n u dx \right) = \underbrace{\int_a^b F(x,y)rX_n dx}_{=F_n(y)}. \end{aligned}$$

С учетом уравнения (7.10)  $(pX_n')' - qX_n = -\lambda_n r X_n$

и обозначения  $\int_a^b F(x, y)r(x)X_n(x)dx = F_n(y)$  получаем уравнение для трансформанты  $u_n(y)$

$$M_y(u_n) - \lambda_n u_n = F_n(y) - p \left[ X_n \frac{\partial u}{\partial x} - X'_n u \right]_{x=a}^{x=b}. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) – обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты  $u_n(y)$ . Здесь  $F_n(y)$  – известная функция.

Покажем, что функция  $g_n(y) = -p \left[ X_n \frac{\partial u}{\partial x} - X'_n u \right]_{x=a}^{x=b}$  – тоже известная функция.

Для условий первого рода будем иметь

$$g_n(y) = p(b)X'_n(b)f_b(y) - p(a)X'_n(a)f_a(y)$$

– известная функция;

для условий второго рода

$$g_n(y) = -p(b)X_n(b)f_b(y) + p(a)X_n(a)f_a(y)$$

– известная функция;

для условий третьего рода

$$\begin{aligned} g_n(y) &= -p(b) \left[ X_n(b) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} - X'_n(b)u \Big|_{x=b} \right] + \\ &+ p(a) \left[ X_n(a) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} - X'_n(a)u \Big|_{x=a} \right] = \\ &= -p(b)X_n(b) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + h_b u \right]_{x=b} + p(a)X_n(a) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - h_a u \right]_{x=a} = \\ &= -p(b)X_n(b)f_b(y) + p(a)X_n(a)f_a(y) \end{aligned}$$

– известная функция.

Условия (7.5), (7.6), (7.7) можно трансформировать аналогичным образом.

Например, для условий (7.5) будем иметь  $u_n|_{y=c} = \int_a^b \varphi_c(x)r(x)X_n(x)dx = \varphi_{cn}$ ,

$$u_n|_{y=d} = \int_a^b \varphi_d(x)r(x)X_n(x)dx = \varphi_{dn}. \quad (7.13)$$

Таким образом, решив задачу (7.12), (7.13), найдем функцию  $u_n(y)$ .

Окончательно получаем решение нашей задачи в виде ряда:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(y)X_n(x)}{\|X_n\|^2}. \quad (7.14)$$

Все сказанное ранее переносится на случай условий четвертого рода, а также на случай сингулярной задачи, если ее спектр дискретный.

### **Краткая схема решения задачи методом Гринберга**

Приведем краткую схему, которой следует придерживаться при решении задач математической физики методом Гринберга.

1. Поставить задачу Штурма–Лиувилля, связанную с рассматриваемой задачей, и найти систему собственных значений и собственных функций.
2. Трансформировать исходное уравнение в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение для трансформанты  $u_n(y)$ .
3. Преобразовать граничные условия по второй переменной в условия для трансформанты  $u_n(y)$ .
4. Найти трансформанту  $u_n(y)$  получить решение исходной задачи в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.
5. Рассмотреть вопрос о сходимости полученного формального ряда и в случае необходимости улучшить ее.

### **Примеры задач математической физики, разрешимых с помощью**

#### **метода Гринберга**

Для начала рассмотрим применение метода приведения сведения неоднородной задачи к однородной. Как известно сущность метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде суммы двух

функций, причем одна из них подбирается так, чтобы уравнение для нее и граничные условия по одной из переменных были однородными.

**Замечание.** В главах 3, 4 настоящего пособия мы рассматривали решения подобных задач.

**Решение задачи Дирихле для прямоугольника путем сведения ее к однородной**

Требуется решить следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u|_{x=0} = f_0(y), \quad u|_{x=a} = f_a(y),$$

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=b} = \varphi_b(x).$$

Ищем решение задачи в виде  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1$  – решение задачи

$$\Delta u_1 = 0, \quad u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=a} = 0, \quad u_1|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u_1|_{y=b} = \varphi_b(x), \quad (7.15)$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad u_2|_{x=0} = f_0(y), \quad u_2|_{x=a} = f_a(y), \quad u_2|_{y=0} = 0, \quad u_2|_{y=b} = 0. \quad (7.16)$$

Задачи (7.15) и (7.16) – однородные. Их решения могут быть найдены методом Фурье.

**Решение задачи Дирихле для прямоугольника с помощью метода Гринберга**

Рассматривается следующая задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (7.17)$$

$$u|_{x=0} = f_0(y), \quad u|_{x=a} = f_a(y), \quad (7.18)$$

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=b} = \varphi_b(x). \quad (7.19)$$

Обозначим  $L_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Сформулируем соответствующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$L_x(X) + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(a) = 0. \quad (7.20)$$

Как известно, собственные значения и собственные функции задачи (7.20)

будут  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$ ,  $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Ищем решение задачи (7.17)–

(7.19) в виде  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(x)$ , причем

$$C_n(y) = \frac{\int_0^a u(x, y) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2} = \frac{u_n(y)}{\|X_n\|^2} \frac{2}{a} u_n(y).$$

Умножаем (7.17) на  $X_n(x)$  интегрируем по отрезку  $[0, a]$ :

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} X_n dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} X_n dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} X_n - u X_n' \right) \Big|_0^a + \int_0^a u X_n'' dx + \frac{d^2}{dy^2} \int_0^a u X_n dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \lambda_n u_n = f_a(y) \frac{n\pi}{a} (-1)^n - f_0(y) \frac{n\pi}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} u_n = \frac{n\pi}{a} [(-1)^n f_a(y) - f_0(y)] \Rightarrow \quad (7.21)$$

Преобразуем граничные условия по  $y$ : умножаем (7.20) на  $X_n(x)$  и интегрируем по отрезку  $[0, a]$ , получаем

$$u_n|_{y=0} = \int_0^a \varphi_0(x) X_n(x) dx = \varphi_{0n}, \quad u_n|_{y=b} = \int_0^a \varphi_b(x) X_n(x) dx = \varphi_{bn}. \quad (7.22)$$

Общее решение уравнения (7.21) имеет вид

$$u_n(y) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + u_n^*(y)$$

где  $u_n^*(y)$  – какое-нибудь частное решение (7.21). Условия (7.22) позволяют найти  $A_n$  и  $B_n$ ; таким образом, будет определена функция  $u_n(y)$ . Тогда

искомое решение задачи имеет вид  $u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)$ .

Рассмотрим специальный случай. Будем считать, что граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} f_0(y) &= 0; & f_a(y) &= ay; \\ \varphi_0(x) &= 0; & \varphi_b(x) &= bx. \end{aligned}$$

Будем иметь вместо уравнения (7.21) следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} u_n = \frac{n\pi}{a} (-1)^n ay. \quad (7.23)$$

Условия (7.22) при этом примут вид

$$u_n|_{y=0} = 0; \quad u_n|_{y=b} = \frac{(-1)^{n-1} a^2 b}{n\pi}. \quad (7.24)$$

Общее решение уравнения (7.23) мы можем записать в виде

$$u_n(y) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} a^2 y.$$

Из условий (7.23) находим  $A_n = 0$  и  $B_n = 0$ . Таким образом,

$u_n(y) = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} a^2 y$ . Следовательно,

$$u(x, y) = \frac{2ay}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (7.25)$$

Ряд, стоящий справа в (7.25), суммируется, а именно, имеет место формула

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7.26)$$

которая легко может быть получена разложением функции  $f(x) = \frac{x}{a}$  в ряд

Фурье по синусам на отрезке  $[0, a]$ . Таким образом, окончательно будем иметь

$$u(x, y) = xy. \quad (7.27)$$

Решение задачи методом приведения в рассматриваемом случае дает формулу

$$u(x, y) = \frac{2ab}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{2ab}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Отметим, что из формулы (7.25) следует  $u(x, y) = y\Phi(x)$ . Подставив это решение в уравнение (7.17), определим  $\Phi(x)$ :

$$\Phi''(x)y = 0 \Rightarrow \Phi''(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = Mx + N.$$

Таким образом,  $u(x, y) = (Mx + N)y$ , где  $M, N$  – константы. Из граничных условий для  $u$  находим  $M = 1, N = 0$ . Таким образом, решение (7.27) может быть получено и без использования формулы (7.26).

### **Решение задачи о вынужденных колебаниях круглой мембраны путем сведения ее к однородной**

Мембрана закреплена по контуру и колеблется под действием осесимметричной нагрузки  $q = q(r)\sin(\omega t)$ . Требуется установить закон вынужденных колебаний мембраны. Математическая постановка задачи: найти функцию  $u(r, t)$ , удовлетворяющую уравнению колебаний

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q(r)}{T_0} \sin(\omega t), \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (7.28)$$

где  $T_0$  – натяжение,  $\rho$  – плотность мембраны; и дополнительным условиям

$$u|_{r \rightarrow 0} \text{ – ограничена, } u|_{r=a} = 0, \quad (7.29)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r), \quad (7.30)$$

где  $\varphi(r), \psi(r)$  – заданные функции (начальное смещение и скорость). Будем искать решение задачи (7.28)–(7.30) в форме  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1 = A(r)\sin(\omega t)$ ,  $u_2 = u_2(r, t)$ . Функция  $u_1$  – установившиеся гармонические колебания.

Требуем, чтобы функция  $u_1$  удовлетворяла уравнению (7.28). Тогда для определения функции  $A(r)$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA(r)}{dr} \right) + \frac{\omega^2}{v^2} A(r) = -\frac{q(r)}{T_0}.$$

Кроме того, в соответствии с условиями (7.29) должны выполняться дополнительные условия  $A|_{r \rightarrow 0} = O(1)$ ,  $A|_{r=a} = 0$ .

Для функции  $u_2 = u_2(r, t)$  однородная задача имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad (7.31)$$

$$u_2|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u_2|_{r=a} = 0, \quad (7.32)$$

$$u_2|_{t=0} = \varphi(r) - A(r) \sin(\omega t)|_{t=0} = \varphi(r), \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(r) - \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(r) - \omega A(r). \quad (7.34)$$

Задача (7.31)–(7.34) может быть решена методом Фурье.

### **Решение задачи о вынужденных колебаниях круглой мембраны** **методом Гринберга**

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию  $u(r, t)$ , удовлетворяющую уравнению колебаний

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q(r)}{T_0} \sin(\omega t), \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (7.35)$$

где  $T_0$  – натяжение,  $\rho$  – плотность мембраны; и дополнительным условиям

$$u|_{r \rightarrow 0} \text{ – ограничена, } u|_{r=a} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(r),$$

где  $\varphi(r), \psi(r)$  – заданные функции (начальное смещение и скорость).

Обозначим оператор  $L_r(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ . Сформулируем соответствующую



задачу Штурма–Лиувилля:  $L_r(R) + \lambda Rr = 0 \Leftrightarrow (rR')' + \lambda Rr = 0$ ,  $0 < r < a$ ,  $R|_{r \rightarrow 0}$  – ограничена,  $R(a) = 0$ . Как мы знаем, собственные значения и собственные функции этой задачи будут иметь вид

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \quad R_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \infty,$$

где  $\gamma_n$  – положительные корни уравнения  $J_0(\gamma) = 0$ . Далее, умножив уравнение (7.35) на  $rR_n(r)$  и проинтегрировав по отрезку  $[0, a]$ ,

$$\text{получим } \int_0^a R_n \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr - \frac{1}{v^2} \int_0^a r R_n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr = -\frac{1}{T_0} \int_0^a q(r, t) r R_n dr \Rightarrow$$

$$\left( R_n r \frac{\partial u}{\partial r} - R_n' r u \right) \Big|_0^a + \int_0^a u (r R_n')' dr - \frac{1}{v^2} \frac{d}{dt^2} \int_0^a r R_n u dr = -\frac{1}{T_0} \int_0^a r R_n q(r, t) dr \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{v^2} \frac{du_n}{dt^2} - \lambda_n u_n = -\frac{1}{T_0} \int_0^a r R_n q(r, t) dr \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \frac{\gamma_n^2 v^2}{a^2} u_n = \frac{v^2 q_n(t)}{T_0}, \quad (7.36)$$

где введены обозначения

$$u_n(t) = \int_0^a r R_n(r) u(r, t) dr,$$

$$q_n(t) = \int_0^a r R_n(r) q(r, t) dr.$$

Преобразованные начальные условия имеют вид

$$u_n|_{t=0} = 0, \quad \frac{du_n}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7.37)$$

Выпишем общее решение уравнения (7.36) в виде

$$u_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\gamma_n v t}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{\gamma_n v t}{a}\right) + u_n^*(t),$$

где  $u_n^*(t)$  – какое-нибудь частное решение уравнения (5.48). Учитывая, что

$$q(r, t) = q(r) \sin(\omega t) \text{ получим } q_n(t) = \int_0^a q(r) r R_n dr = q_n \sin(\omega t).$$

Следовательно, для частного решения уравнения (7.36) можно записать<sup>4</sup>

$$u_n^*(t) = C_n \sin(\omega t). \quad (7.38)$$

Подставив (7.38) в (7.36), находим

$$-C_n \omega^2 + \frac{\gamma_n^2 v^2}{a^2} C_n = \frac{v^2}{T_0} q_n \Rightarrow C_n = \frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{1}{\left[ \left( \frac{\gamma_n v}{a} \right)^2 - \omega^2 \right]}.$$

Тогда, обозначив  $\omega_n = \frac{\gamma_n v}{a}$ , получим

$$u_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{1}{[\omega_n^2 - \omega^2]} \sin(\omega t).$$

Из начальных условий (7.37) находим  $A_n = 0, B_n = -\frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{\omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$ .

Таким образом,  $u_n(t) = \frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2}$ , где

$$q_n = \int_0^a r_n q(r) J_0 \left( \gamma_n \frac{r}{a} \right) dr. \text{ Решение задачи имеет вид}$$

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r), \quad C_n = \frac{2u_n}{a^2 J_1^2(\gamma_n)}, \quad u_n = \int_0^a r R_n u dr.$$

Или явно,

$$u(r, t) = \frac{2v^2}{a^2 T_0} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{J_0 \left( \frac{\gamma_n r}{a} \right)}{J_1^2(\gamma_n)}.$$

---

<sup>4</sup> Здесь мы предполагаем, что  $\omega \neq \omega_n, \forall n$ , то есть случай резонанса не рассматриваем.

## **ГЛАВА 8. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

Многие задачи, с которыми сталкиваются специалисты, применяющие методы прикладной математики, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейность уравнений движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач исследователи вынуждены пользоваться различного рода приближениями, комбинируя аналитические и численные методы. Среди аналитических методов весьма мощными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты.

В настоящем методическом пособии внимание в большей степени уделено выявлению основополагающих идей теории возмущений, чем вопросам математической строгости, при этом использованы самые разнообразные средства. Например, часто приходится обращаться к физическим рассуждениям. Они обычно помогают правильно поставить задачи и найти нужные приближения. Часто при решении задач основным математическим инструментом служат асимптотические разложения по параметру (аппроксимация решения разложением, состоящим из конечного числа членов) с ошибкой, которая мала при достаточно малых значениях параметра. Чтобы выявить все существенные черты задачи и дать хорошее приближение к точному решению, математику-прикладнику нужно лишь несколько членов асимптотического приближения. Часто дело обстоит именно так. Всем используемым асимптотическим разложениям желательно давать обоснование с помощью подходящих предельных процессов.

## §1. Определение асимптотических рядов

Рассмотрим поведение функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  в терминах известной функции  $\varphi(x)$ , где считается  $x$  действительной переменной. На бесконечности  $\varphi(x)$  может стремиться к нулю, к бесконечности или иметь какое-либо другое поведение.

**Определение 8.1.** Функция  $f(x)$  асимптотически приближается к  $\varphi(x)$  (или  $\varphi(x)$  является асимптотическим приближением функции  $f(x)$ ), если выполнено соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

В этом случае вводят обозначение  $f(x) \sim \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

**Определение 8.2.** Говорят, что порядок функции  $f(x)$  меньше, чем порядок функции  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Соответственно обозначают  $f = o(\varphi)$ ,  $(x \rightarrow \infty)$ .

**Определение 8.3.** Функция  $f(x)$  имеет порядок, не превосходящий порядка  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если отношение  $f(x) / \varphi(x)$  ограничено. В этом случае вводят обозначение

$$f(x) = O\{\varphi(x)\} \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{или} \\ f = O(\varphi)$$

В частности соотношение  $f = o(\varphi)$   $(x \rightarrow \infty)$  означает, что функция  $f(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Соотношение  $f(x) = O(1)$   $(x \rightarrow \infty)$  означает, что функция  $f$  ограничена при  $x \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим случай, когда функция зависит от малого параметра  $\varepsilon$ , т.е.  $f = f(\varepsilon)$ . Существует несколько возможных описаний поведения функции, обладающих различной степенью точности. Во-первых, можно просто установить существует ли предел. Например,  $\sin 2\varepsilon$  имеет предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в то время как  $\sin(2/\varepsilon)$  предела не имеет.

Во-вторых, можно описать предельное поведение *качественно*. Имеются три возможности: функция в пределе может

- а) обращаться в нуль  $f(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$ ;
- б) быть ограниченной  $f(\varepsilon) < \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$ ;
- в) бесконечно возрастать  $f(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$ .

Особенность этого способа состоит в том, что случай а) заключается в случае б). Однако, естественно, где это возможно использовать описание а), т.к. оно более точно.

В - третьих, можно описать предельное значение *количественно*. Опять имеются три возможности, из которых только вторая является уточнением качественного описания

$$\text{а) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0; \quad \text{б) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = c = \text{const}; \quad \text{в) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = \infty.$$

В-четвертых, можно качественно описать скорость приближения к пределу. Только случаи а) и б), указанные выше, могут быть уточнены таким образом. Это делается путем сопоставления с некоторым набором функций сравнения (или калибровочных функций). Последние являются функциями столь простыми, что их предельное поведение можно считать интуитивно известным. Сравнения осуществляются использованием символов порядка  $O$  (" $O$ " большое) и  $o$  (" $o$ " малое).

Полагаем, что  $f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A, \quad 0 < |A| < \infty$ .

Если это отношение стремится к нулю, то применяем символ  $o$  взамен  $O$ .  
Итак,

$$f(\varepsilon) = o[g(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ если } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0.$$

**Примеры 8.1.**  $\sin 2\varepsilon = O(\varepsilon)$ ,  $1 - \cos \varepsilon = O(\varepsilon^2) = o(\varepsilon)$ ,  $\exp(-1/\varepsilon) = o(\varepsilon^m)$  для любого  $m > 0$ .

Символы порядка не обязательно описывают действительную скорость приближения к пределу, они дают лишь верхнюю границу.

Математический порядок величины, выраженный символами, теоретически не совпадает с физическим порядком величины, поскольку не принимаются во внимание множители пропорциональности. В физических задачах имеется, однако, по меньшей мере, некоторая надежда, почти неизменно оправдывающаяся, что эти две оценки достаточно близки. Так, если ошибка в физической теории составляет  $O(\varepsilon)$  и  $\varepsilon$  выбрано разумно, то можно ожидать, что численная ошибка не будет превосходить некоторого умеренного кратного  $\varepsilon$ : возможно, она будет  $2\varepsilon$  или  $2\pi\varepsilon$ , но почти определенно не достигает  $10\varepsilon$ .

Пятая схема описывает количественно скорость, с которой функция приближается к своему пределу. Она представляет собой уточнение четвертой схемы (применение символов порядка). Восстановим множитель пропорциональности и запишем  $f(\varepsilon) \sim c\delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = c$  т.е., если  $f(\varepsilon) = c\delta(\varepsilon) + o[\delta(\varepsilon)]$ .

Это есть асимптотическая форма или асимптотическое представление функции, которое составляет первый член в асимптотическом разложении.

**Примеры 8.2.**  $\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon$ ,  $\sqrt{1-\varepsilon^2} \sim 1$ ,  $\operatorname{ctg} \varepsilon \sim 1/\varepsilon$ .

В шестой схеме предыдущее описание уточняется путем добавления дальнейших членов. Будем считать разность между данной функцией и ее асимптотической формой некоторой новой функцией и определим ее асимптотический вид. Результат запишем следующим образом:

$$f(\varepsilon) \sim c_1 \delta_1(\varepsilon) + c_2 \delta_2(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где вторая функция сравнения  $\delta_2(\varepsilon)$  должна быть величиной более высокого порядка малости, чем первая,

$$\delta_2(\varepsilon) = o[\delta_1(\varepsilon)] \quad \text{или} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = 0,$$

а ошибка – величиной еще более высокого порядка малости

$$f(\varepsilon) = c_1 \delta_1(\varepsilon) + c_2 \delta_2(\varepsilon) + o[\delta_2(\varepsilon)].$$

Следующие члены могут быть добавлены повторением этого процесса.

**Определение 8.4.** Последовательность функций  $\{\delta_n(\varepsilon)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

называется асимптотической последовательностью (или шкалой), если для любого  $n$  выполнено соотношение

$$\delta_{n+1}(\varepsilon) = o\{\delta_n(\varepsilon)\} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8.1)$$

Примеры асимптотических последовательностей

$$\varepsilon^n, \quad \varepsilon^{n/3}, \quad (\ln \varepsilon)^{-n}, \quad (\sin \varepsilon)^n, \quad (\operatorname{ctg} \varepsilon)^{-n}.$$

**Определение 8.5.** Сумма вида

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (8.2)$$

где  $a_n$  не зависит от  $\varepsilon$ , а  $\delta_n(\varepsilon)$  – асимптотическая последовательность, называется асимптотическим разложением функции  $f(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если для любого натурального  $n$  выполнено соотношение

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_N(\varepsilon)) \quad (8.3)$$

или, что тоже самое

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta_n(\varepsilon) + O(\delta_N(\varepsilon)) \quad (8.4)$$

Приведем определение асимптотической последовательности и асимптотического разложения для функции, зависящей от координаты  $z = x + iy$  (случай комплексных переменных).

**Определение 8.6.** Последовательность функций  $\{\varphi_n(z)\}; n = 0, 1, 2, \dots$ , определенных на множестве  $\mathbf{R}$ , имеющих точку  $z = c$  в качестве конечной или бесконечной предельной точки, называется асимптотической последовательностью (или шкалой), если для любого натурального  $n$  выполнено соотношение  $\varphi_{n+1}(z) = o\{\varphi_n(z)\} \quad (z \rightarrow c \text{ в } \mathbf{R}).$

**Определение 8.7.** Выражение

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s \varphi_s(z)$$

называется асимптотическим разложением (или асимптотическим рядом) если для каждого целого неотрицательного  $n$  выполнено соотношение

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \varphi_s(z) + O\{\varphi_n(z)\}, \quad (z \rightarrow c \text{ в } \mathbf{R}).$$

Здесь использовано следующее определение  $O\{\varphi(z)\}$ . Функция  $\varphi(z)$  называется асимптотическим приближением к  $f(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ , если для некоторого  $\mathbf{R}$  существует такое число  $k$ , не зависящее от  $\arg z$ , что

$$|f(z)| \leq k \cdot |\varphi(z)| \text{ при } z \in S(\mathbf{R})$$

и обозначают  $f(z) = O\{\varphi(z)\}$  в  $S(\mathbf{R})$ , где через  $S(\mathbf{R})$  обозначен бесконечный сектор  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ . Аналогично вводится "о" – малое. Это определение распространяется на любую область, имеющую бесконечно удаленную точку, или точку  $z = c$  в качестве предельной.

## **§8.2 СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ**

### **Интегрируемость асимптотических разложений**

Асимптотические разложения, как правило, можно интегрировать при условии, что справедливы некоторые очевидные ограничения, касающиеся сходимости интегралов. Рассмотрим случай действительных переменных.



**Теорема 8.1.** Пусть  $f(x) \in L$  интегрируемая функция действительной переменной  $x$  и  $f(x) \sim x^\nu$  при  $x \rightarrow \infty$ , где  $\nu$  – вещественная или комплексная постоянная. Пусть " $a$ " – любое конечное вещественное число. Тогда при  $x \rightarrow \infty$  имеем

$$\int_x^\infty f(t) dt \sim -x^{\nu+1}/(\nu+1), \quad (\operatorname{Re} \nu < -1)$$

$$\int_a^x f(t) dt \sim \begin{cases} c & (\operatorname{Re} \nu < -1) \\ \ln x & (\nu = -1) \\ x^{\nu+1}/(\nu+1) & (\operatorname{Re} \nu > -1) \end{cases},$$

где  $c = \text{const}$ .

Докажем третье соотношение последней формулы. Имеем  $f(x) = x^\nu(1 + \eta(x))$ , где  $|\eta(x)| < \varepsilon$ , если  $x > X > 0$ , причем  $X$  выбирается по произвольно заданному положительному числу  $\varepsilon$ . Следовательно, если  $x > X$ , то

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^X f(t) dt + \frac{1}{\nu+1}(x^{\nu+1} - X^{\nu+1}) + \int_X^x t^\nu \eta(t) dt$$

и поэтому

$$\frac{\nu+1}{x^{\nu+1}} \int_a^x f(t) dt - 1 = \frac{\nu+1}{x^{\nu+1}} \int_a^X f(t) dt - \left(\frac{X}{x}\right)^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x^{\nu+1}} \int_X^x t^\nu \eta(t) dt$$

Первые два члена в правой части последнего равенства стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , а третий член ограничен числом  $\frac{|\nu+1| \cdot \varepsilon}{1 + \operatorname{Re} \nu}$ . Отсюда следует искомое соотношение.

### **Дифференцируемость асимптотических разложений**

Дифференцировать асимптотические соотношения не всегда возможно. Например, если  $f(x) = x + \cos x$ , то  $f(x) \sim x$  при  $x \rightarrow \infty$ , и утверждение, что  $f'(x) \sim 1$  несправедливо. Для того чтобы дифференцирование было возможным необходимы дополнительные условия. Для действительной

переменной эти условия можно сформировать в терминах монотонности производной.

**Теорема 8.2.** Пусть  $f(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция и  $f(x) \sim x^p$  при  $x \rightarrow \infty$ , где  $p \geq 1$ . Тогда если производная  $f'(x)$  – неубывающая функция при всех достаточно больших значениях  $x$ , то  $f'(x) \sim p x^{p-1}$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

Доказательство. Имеем  $f(x) = x^p [1 + \eta(x)]$ , где  $|\eta(x)| \leq \varepsilon$  при  $x > X$ ,  $X$  – некоторое положительное число,  $\varepsilon$  – произвольное число из интервала  $(0, 1)$ .

Если  $h > 0$ , то  $h f'(x) \leq \int_x^{x+h} f'(t) dt = f(x+h) - f(x) =$

$$= \int_x^{x+h} p t^{p-1} dt + (x+h)^p \eta(x+h) - x^p \eta(x) \leq h p (x+h)^{p-1} + 2\varepsilon (x+h)^p$$

Положим  $h = x\sqrt{\varepsilon}$ . Тогда

$$f'(x) \leq p x^{p-1} \left\{ \left(1 + \varepsilon^{1/2}\right)^{p-1} + 2 p^{-1} \varepsilon^{1/2} \left(1 + \varepsilon^{1/2}\right)^p \right\} \quad (\text{при } x > X).$$

Аналогично получим  $f'(x) \geq p x^{p-1} \left\{ \left(1 - \varepsilon^{1/2}\right)^{p-1} - 2 p^{-1} \varepsilon^{1/2} \right\}$  (при  $x > \frac{X}{1 - \sqrt{\varepsilon}}$ ).

Отсюда следует, что  $f'(x) \sim p x^{p-1}$  при достаточно больших значениях  $x$ .

Теорема доказана.

Отметим, что условие монотонности производной  $f'(x)$  часто трудно проверить, поскольку  $f'(x)$  и является той функцией, свойства которой требуется установить.

В комплексной плоскости дифференцирование асимптотических отношений и отношений порядка допустимо в подобластях области, где они справедливы. Важным частным случаем является следующая теорема.

**Теорема 8.3.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области, содержащей замкнутый сектор  $S$  и

$$f(z) = O(z^p) \quad (\text{или } f(z) = o(z^p))$$

при  $z \rightarrow \infty$  в  $S$ , где  $p$  – любое фиксированное действительное число. Тогда

$$f^{(m)}(z) = O(z^{p-m}) \quad (\text{или } f^{(m)}(z) = o(z^{p-m})),$$

при  $z \rightarrow \infty$  в любом замкнутом секторе  $S$ , лежащем строго внутри  $S$  и имеющим ту же вершину.

### **§8.3 Равномерные и неравномерные асимптотические разложения**

При построении приближенных решений алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений предполагается, что асимптотические разложения можно подставлять в уравнения и выполнять над ними простейшие действия: возведение в степень, интегрирование и дифференцирование. Иногда применение этих операций оказывается необоснованным. В этом случае они приводят к неравномерностям. Например, равенство

$$\sqrt{x+\varepsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)^{1/2} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \dots\right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

не обосновано при  $\varepsilon x = O(1)$ , поскольку при этом второй, третий и последующие члены разложения становятся сравнимыми по порядку с первым его членом. Следовательно, ошибка, совершенная в результате усечения ряда после  $N$  членов при  $x = O(\varepsilon)$ , уже не будет иметь порядок  $O(\varepsilon^N)$ , т.е. не будет порядка первого отброшенного члена, и здесь говорят о неравномерном разложении. Аналогично, равенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^3 + \dots \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

не обосновано при  $\varepsilon x = O(1)$ , поскольку по той же причине правая часть его будет неравномерна при больших  $x$ . Таким образом, необходимо всегда проверять, являются ли полученные разложения равномерными или нет - в этом, собственно говоря, и заключается одна из главных целей методов возмущений.

Приведем определение равномерности асимптотических разложений в комплексной области.

**Определение 8.8.** Пусть функция  $f(z, u)$  разлагается в асимптотический ряд

$$f(z, u) \sim \sum_{s=0}^{n-1} a_s \varphi_s(z, u) + O\{\varphi_n(z, u)\} \quad (8.5)$$

где  $\varphi_n(z, u)$  асимптотическая последовательность, причем  $f$  и  $\varphi_n$  зависят от параметра  $u$ . Допустим, что член  $O\{\varphi_n(z, n)\}$  равномерен по параметру  $u$  в некотором множестве  $D$ , то асимптотическое разложение справедливо равномерно относительно параметра  $u$  в  $D$ .

Для определения области неравномерности ряда (8.5) иногда достаточно приравнять порядки  $n$ -го и  $(n+1)$ -го членов ряда, т.е.  $\varphi_n(z, n) = O(\varphi_{n+1}(z, u))$  и из полученного соотношения провести оценку области неравномерности.

#### **§8.4 Пример расходящегося асимптотического ряда**

Асимптотические разложения могут расходиться, но давать значения близкие к истинным. Найдем асимптотическое разложение интеграла.

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt.$$

Одним из способов построения асимптотического разложения для функции  $G(x)$  является метод состоящий в разложении множителя  $1/(1+t)$  в ряд по степеням  $t$  и последующем почленным интегрировании полученного ряда. Действительно,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Этот ряд сходится при  $|t| < 1$ . Теперь вычислим интеграл

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Этот ряд расходится при всех конечных  $x$  (согласно признаку сходимости Даламбера). Однако, полученный ряд является асимптотическим. Чтобы это доказать сделаем оценку остаточного члена. Представим функцию  $G(x)$  в

$$\text{виде } G(x) = g_n(x) + \varepsilon_n(x), \text{ где } g_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Для остаточного члена  $\varepsilon_n(x)$  выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= G(x) - g_n(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt - \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt - \int_0^\infty e^{-xt} (1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}) dt = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{t+1} dt \end{aligned}$$

$$\text{Сделаем оценку } |\varepsilon_n(x)| = \left| \int_0^\infty e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{t+1} dt \right| \leq \int_0^\infty t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$\text{Итак, получаем } \varepsilon_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad (\text{при } x \rightarrow \infty).$$

Согласно определениям ряд  $G(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots$  является асимптотическим. Однако этот ряд расходится. Приведем численные значения при  $\alpha = 10$ .  $G(10) = 0,09156$  – точное значение. Четыре члена ряда дают значение  $G(10) = 0,0914$ . Итак, асимптотическое значение при  $x = 10$  очень близко к точному.

### **§8. 5 Определение и основные свойства асимптотических разложений**

Пусть  $f(z)$  – функция действительной или комплексной переменной  $z$ ,  $\sum a_s z^s$  – формальный степенной ряд (сходящийся или расходящийся), а  $R_n(z)$  – разность между  $f(z)$  и  $n$ -й частичной суммой этой ряда. Итак,

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + R_n(z) \quad (8.6)$$

Предположим, что для каждого фиксированного значения  $n$

$$R_n(z) = O(z^{-n}) \quad (8.7)$$

при  $z \rightarrow \infty$  в некоторой неограниченной области  $D$ . Очевидно ряд  $\sum a_s z^{-s}$  является асимптотическим разложением функции  $f(z)$  и записывается в виде

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } D) \quad (8.8)$$

Можно показать, что если ряд  $\sum a_s z^{-s}$  сходится при всех достаточно больших  $|z|$ , то он является асимптотическим разложением его суммы, определенной обычным образом, без всяких ограничений на  $\arg z$ . Естественно, однако, что наибольший интерес представляет асимптотические разложения, которые расходятся.

**Теорема 8.4.** Для того чтобы функция,  $f(z)$  обладала асимптотическим разложением вида (8.8) необходимо и достаточно, чтобы для каждого неотрицательного целого числа  $n$

$$z^n \left\{ f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} \right\} \rightarrow a_n \quad (8.9)$$

при  $z \rightarrow \infty$  в  $D$  равномерно относительно  $\arg z$ .

**Свойство единственности.** Для заданной функции  $f(z)$  и области  $D$  существует самое большее одно разложение вида (8.8).

**Следствие** – обратное утверждение неверно.

**Пример 8.3.** Рассмотрим асимптотическое разложение функции  $e^{-z}$  в секторе  $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Так как для любого  $n$  имеем  $z^n e^{-z} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  в этой области, соотношение (8.9) дает  $a_n = 0$  при  $n = 0, 1, \dots$ . Таким образом,

$$e^{-z} \sim 0 + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \dots \quad (|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta).$$

Пусть теперь  $a_0, a_1, a_2, \dots$  означает заданную последовательность постоянных. Если существует хотя бы одна такая функция  $f(z)$ , что

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta)$$

то существует и бесконечное число таких функций, так как соотношение  $z^n e^{-z} \rightarrow \infty$  снова показывает, что к функции  $f(x)$  можно добавить функцию  $e^{-z}$ , умноженную на произвольную постоянную, не меняя при этом коэффициентов разложения. Отсутствие единственности для функции, представленной асимптотическим разложением, находится в резком контрасте со свойством единственности суммы сходящегося ряда.

Рассмотрим операции над асимптотическими разложениями. Сформулируем их в виде нескольких свойств

**Свойство 8.1.** Из асимптотических разложений со шкалой  $\varphi_n(z) = 1/z^n$  можно составлять линейные комбинации.

Предположим, что

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^{-s}, \quad g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} g_s z^{-s}$$

Первое соотношение справедливо при  $z \rightarrow \infty$  в области определения  $F$  функции  $f(z)$ , а второе, соответственно, в области  $G$ . Тогда, если  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные, то  $\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha f_s + \beta g_s) z^{-s}$  ( $z \rightarrow \infty$  в  $F \cap G$ ). Это вытекает непосредственно из определения.

**Свойство 8.2.** Асимптотические разложения со шкалой  $\{z^{-n}\}$  можно

перемножать. Это означает, что  $f(z)g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} h_s z^{-s}$  ( $z \rightarrow \infty$  в  $F \cap G$ ), где

$$h_s = f_0 g_s + f_1 g_{s-1} + \dots + f_s g_0.$$

Действительно, если  $F_n(z), G_n(z)$  и  $H_n(z)$  означают остаточные члены, относящиеся к  $n$ -м частичным суммам разложений  $f(z), g(z)$  и  $f(z) \cdot g(z)$ , соответственно, то

$$H_n(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f_s}{z^s} G_{n-s}(z) + g(z) F_n(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

**Замечание.** Умножение асимптотические разложения со шкалой  $\{\varphi_n(z)\}$  не всегда возможно, так как множество функций  $\varphi_r(z)\varphi_s(z)$  с двумя индексами не всегда можно упорядочить, чтобы оно образовало шкалу.

**Свойство 8.3.** Асимптотическое разложение со шкалой  $\{z^{-n}\}$  можно делить друг на друга.

Пусть  $f_0 \neq 0$  и значение  $|z|$  достаточно велико; тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f_0 + F_1(z)} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{f_0^{s+1}} \left\{ \frac{f_1}{z} + \dots + \frac{f_{n-1}}{z^{n-1}} + F_n(z) \right\}^s + \frac{(-1)^n \{F_1(z)\}^n}{f_0^n (f_0 + F_1(z))}$$

Поскольку  $F_1(z) = O(z^{-1})$  и  $F_n(z) = O(z^{-n})$ , то отсюда следует

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{k_s}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F),$$

где  $k_s$  – многочлен относительно  $f_0, f_1, \dots, f_s$ . Так как  $n$  произвольно, это означает, что асимптотическое разложение  $1/f(z)$  существует.

Коэффициенты  $k_s$  можно найти указанным способом, однако в случае сходящегося степенного ряда их удобнее вычислить из рекуррентных соотношений  $f_0 k_s = -(f_1 k_{s-1} + f_2 k_{s-2} + \dots + f_s k_0)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ), полученного с помощью тождества  $f(z) \{1/f(z)\} = 1$ . Первые несколько коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} k_0 &= 1/f_0, & k_1 &= -f_1/f_0^2, & k_2 &= (f_1^2 - f_0 f_2)/f_0^3, \\ k_3 &= (-f_1^3 + 2f_0 f_1 f_2 - f_0^2 f_3)/f_0^4. \end{aligned}$$

Необходимые изменения в случае  $f_0 = 0$  не представляют трудности.

**Свойство 8.4.** Асимптотические разложения можно интегрировать.

Предположим, что для всех достаточно больших значений положительной действительной переменной  $x$  функция  $f(x)$  действительная или комплексная, непрерывна и имеет асимптотическое разложение вида



$$f(x) = f_0 + \frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x^2} + \dots$$

Если не выполняется условие  $f_0 = f_1 = 0$ , то мы не можем интегрировать  $f(t)$  в интервале  $x \leq t < \infty$ , поскольку получающиеся интегралы расходятся.

Однако выражение  $f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t}$  имеет порядок  $O(t^{-2})$  при больших  $t$  и поэтому интегрируемо. Интегрируя остаточный член и используя теорему об интегрируемости асимптотического выражения, находим, что

$$\int_x^\infty \left( f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right) dt \sim \frac{f_2}{x} + \frac{f_3}{2x^2} + \frac{f_4}{3x^3} + \dots \quad (x \rightarrow \infty)$$

Если  $a$  – произвольно выбранное положительное число, то

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \left( \int_a^\infty - \int_x^\infty \right) \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt + f_0(x-a) + f_1 \ln \frac{x}{a} \sim \\ &\sim A + f_0 x + f_1 \ln x - \frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{2x^2} - \frac{f_4}{3x^3} + \dots \end{aligned}$$

при  $x \rightarrow \infty$ , где  $A = \int_a^\infty \left( f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right) dt - f_0 a - f_1 \ln a$ .

Эти результаты можно обобщить на аналитические функции комплексной переменной, голоморфные, например, в секторе.

**Замечание.** Дифференцировать асимптотические разложения возможно не всегда. Дифференцирование допустимо, если известно, что  $f(x)$  – непрерывная функция действительного аргумента и ее асимптотическое разложение существует. Это утверждение можно доказать, интегрируя разложения для  $f(x)$  и используя свойство единственности.

**Свойство 8.5.** Операция обращения возможна для действительных и комплексных переменных.

Рассмотрим случай действительных переменных. Пусть функция  $\xi(x)$  разлагается в асимптотический ряд

$$\xi(x) \sim x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty)$$

Применяя теорему об асимптотике решения трансцендентных уравнений находим

$$x = \xi [1 + O(1)] \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

Начиная с этого приближения и повторно подставляя следующие приближения в правую часть соотношения

$$x = \xi - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + O\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

где  $n$  – произвольное целое число, видим, что существует представление вида

$$x = \xi - b_0 - \frac{b_1}{\xi} - \frac{b_2}{\xi^2} - \dots - \frac{b_{n-1}}{\xi^{n-1}} + O\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где коэффициенты  $b_s$  являются многочленами от  $a_s$  и не зависят от количества сделанных приближений.

### **§8.6 Метод Лапласа асимптотической оценки интеграла**

Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  определены на отрезке  $[a; b] \subset R$ , причем  $f(x) \neq 0$ , а  $S(x) \neq const$ . При больших значениях параметра  $\lambda > 0$ , (т.е. при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (8.10)$$

называются интегралами Лапласа.

**Лемма 8.1** Пусть функция  $S(x)$  ограничена сверху на  $[a; b] \subset R$ , т.е.  $S(x) \leq M, x \in [a; b]$ . Пусть также интеграл (8.10) сходится абсолютно при некотором  $\lambda_0$ . Тогда при  $\lambda \geq \lambda_0$  имеет место оценка

$$|F(\lambda)| \leq C e^{M\lambda}, \quad (8.11)$$

где  $C$  – постоянная.

Доказательство. Так как  $S(x)$  ограничена сверху, то  $e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)} \leq C_0 e^{M\lambda}$ ,  $x \in [a; b]$ , где  $e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)} \leq C_0 = e^{-\lambda_0 M}$ . Следовательно,

$$F(\lambda) = \left| \int_a^b f(x) e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)} dx \right| \leq C_0 e^{M\lambda} \int_a^b |f(x)| e^{\lambda_0 S(x)} dx$$

По условию последний интеграл сходится и оценка (8.11) доказана.

**Теорема 8.5** Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  ограничены и непрерывны на отрезке  $[a; b]$ , дважды непрерывно – дифференцируемы в окрестности точки  $x = a$ , причем функция  $S(x)$  также удовлетворяет условиям:  $S(x) < S(a)$ , при  $x \neq a$  и  $S'(a) \neq 0$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx = \frac{e^{\lambda S(a)}}{-\lambda S'(a)} \left( f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \text{ при } \lambda \rightarrow \infty \quad (8.12)$$

Доказательство. Так как  $S'(a) \neq 0$ , то можно выбрать  $\delta > 0$  такое, что  $S'(a) \neq 0$  при  $a \leq x \leq a + \delta$ . Разобьем интеграл (8.10) на два:

$$F(\lambda) = \int_a^{a+\delta} f(x) e^{\lambda S(x)} dx + \int_{a+\delta}^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx = F_1(\lambda) + F_2(\lambda). \quad (8.13)$$

Оценим интеграл  $F_2(\lambda)$ . Так как  $S(x)$  достигает на  $[a; b]$  наибольшего значения только в точке  $a$ , то  $S(x) < S(a) - c$  при  $a + \delta \leq x \leq b$ , где  $c > 0$  – постоянная. По лемме 8.1 при достаточно большом  $\lambda$  имеем  $|F_2(\lambda)| \leq c_0 e^{\lambda(S(a)-c)}$ , поэтому интеграл  $F_2(\lambda)$  экспоненциально мал по сравнению с  $e^{\lambda S(a)}$ . Интеграл  $F_1(\lambda)$  и проинтегрируем по частям:

$$F_1(\lambda) = \int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} d(e^{\lambda S(x)}) = \frac{f(x) e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} \Big|_a^{a+\delta} - \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\delta} e^{\lambda S(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) dx \quad (8.14)$$

Внеинтегральная подстановка при  $x = a + \delta$  экспоненциально мала по сравнению с  $e^{\lambda S(a)}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так как  $S(a + \delta) - S(a) < 0$ .

Оценим последний интеграл. На отрезке  $[a; a + \delta]$  имеем  $S'(x) < 0$  и потому существует постоянная  $S_1 > 0$ , такая, что  $S'(x) \leq -S_1$  при  $x \in [a; a + \delta]$ . По формуле Лагранжа

$$S(a + \delta) - S(a) = (x - a)S'(\xi), \text{ где } \xi \in (a; a + \delta), \text{ и}$$

$$S(a + \delta) - S(a) \leq -S_1(x - a) \text{ при } x \in [a; a + \delta].$$

В силу непрерывности функции  $f_1(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right)$  имеем:

$|f_1(x)| \leq M_1$  при  $x \in [a; a + \delta]$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{a+\delta} e^{\lambda S(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) dx \right| e^{-\lambda S(a)} \leq \int_a^{a+\delta} |f_1(x)| e^{\lambda(S(x)-S(a))} dx \leq \\ & \leq M_1 \int_a^{a+\delta} e^{-S_1(x-a)\lambda} dx < \frac{M_1}{S_1\lambda} = \frac{c_1}{\lambda} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty \end{aligned}$$

С учетом этой оценки соотношение (8.14) можно записать в виде

$$F_1(\lambda) = e^{\lambda S(a)} \left[ \frac{f(a)}{-\lambda S'(a)} + O(\lambda^{-2}) \right] \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Из оценки для  $F_2(\lambda)$  и тождества (8.13) следует формула (8.12).

**Пример 8.4.** Рассмотрим преобразование Лапласа и найдем для него

асимптотическую оценку при  $p \rightarrow +\infty$ ,  $F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx$ , где  $f(x)$

ограничена, кусочно-непрерывна на  $[0; +\infty]$  и непрерывно-дифференцируема в окрестности точки  $x = 0$ .

Здесь  $S(x) = -x$ , соответственно  $S(0) = 0, S'(x) = -1$ . Учитывая, что интегрирование ведется по отрезку  $[0; 1]$ , из (8.1) получим:

$$\int_0^1 f(x)e^{-px} dx = \frac{1}{-p(-1)} \left( f(0) + O\left(\frac{1}{p}\right) \right) = \frac{f(0)}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Так как  $f(x)$  ограничена, то  $\exists B > 0 : |f(x)| \leq B$ , при  $x \in [0; +\infty]$ . Оценим

$$\left| \int_1^{\infty} f(x)e^{-px} dx \right| \leq \int_1^{\infty} |f(x)|e^{-px} dx \leq B \int_1^{\infty} e^{-px} dx = B \left( \frac{e^{-px}}{p} \Big|_1^{\infty} \right) = \frac{Be^{-p}}{p} = O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Таким образом,  $F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx = \frac{f(0)}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ .

Следующую теорему приведем без доказательства.

**Теорема 8.6.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема, а  $S(x)$  – дважды дифференцируема и монотонна на отрезке  $[a, b]$ . Пусть также  $S(x)$  достигает своего наибольшего значения в точке  $x = a, (S'(x) \leq 0)$ . Тогда, если  $S'(a) = 0$ , а  $S''(a) < 0$ , то имеет место асимптотическая оценка

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)} dx = \frac{e^{\lambda S(a)}}{2} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}} \left( f(a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

**Пример 8.5.** Рассмотрим гамма - функцию  $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$  и найдем ее асимптотическое поведение при  $x \rightarrow +\infty$ . Подынтегральная функция не имеет конечного максимума по  $t$ , сделаем замену переменной  $t = xy$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (xy)^x e^{-xy} d(xy) = x^x \cdot x \int_0^{\infty} y^x e^{-xy} dy = x^x \cdot x \int_0^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy$$

Исследуем функцию  $S(y) = \ln y - y, S'(y) = 1/y - 1, S'(1) = 0;$

$$S(1) = 0, S''(y) = -1/y^2, S''(1) = -1.$$

Таким образом, функция  $S(y) \leq 0$  при  $y > 0$  и убывает при  $y > 1$ .

$$\int_0^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy = \int_0^2 e^{-x(\ln y - y)} dy + \int_2^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy \tag{8.15}$$

При  $y \geq 2$  функция  $\ln y < y/2$ , соответственно,  $\ln y - y/2 \leq 0$ .

$$\int_2^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy \leq \int_2^{\infty} e^{-xy/2} dy = \frac{e^{-xy/2}}{-x/2} \Big|_2^{\infty} = 2e^{-x}.$$

Первый интеграл в правой части из (8.15) представим в виде:

$$\int_0^2 e^{-x(\ln y - y)} dy = \int_0^1 e^{-x(\ln y - y)} dy + \int_1^2 e^{-x(\ln y - y)} dy.$$

Воспользуемся теоремой 8.2:

$$\int_1^2 e^{-x(\ln y - y)} dy = \frac{1}{2} e^{-x} \sqrt{-\frac{2\pi}{x(-1)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right) \quad (8.16)$$

Такая же формула имеет место для первого слагаемого из (8.16).

Окончательно получим формулу Стирлинга.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right)$$

### **§ 8.7 Метод стационарной фазы**

Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  определены на отрезке  $[a; b] \subset R$ , причем  $f(x)$  отлична от тождественного нуля, а  $S(x)$  – от тождественной константы. При больших значениях параметра  $\lambda$ , (т.е. при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ) интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \quad (8.17)$$

называются интегралами Фурье. Функцию  $S(x)$  обычно называют фазовой функцией.

**Лемма 8.2** (Римана - Лебега.) Если функция  $f(x)$  непрерывна и ограничена

на действительной оси, то  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

### **Фазовая функция без стационарных точек**

В случае, когда функции  $f(x)$  и  $S(x)$  являются гладкими, а фазовая функция не имеет стационарных точек, асимптотика интеграла легко вычисляется с помощью интегрирования по частям.

**Теорема 8.7** Пусть  $f(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке  $[a; b]$ , а  $S(x)$  – дважды непрерывно дифференцируема на  $[a; b]$  и  $S'(x) \neq 0$  при  $x \in [a; b]$  Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = (i\lambda)^{-1} \left[ e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{S'(x)} \right]_a^b + O(\lambda^{-1}).$$

Доказательство.

Интегрируя по частям, получим:

$$F(\lambda) = \int_a^b \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} d(e^{i\lambda S(x)}) = (i\lambda)^{-1} \left[ e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{S'(x)} \right]_a^b + (i\lambda)^{-1} \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx$$

Поскольку  $S'(x) \neq 0$ , то функция  $S(x)$  монотонна на отрезке  $[a; b]$ . Деля в последнем интеграле замену переменной  $y = S(x)$ , получим интеграл вида

$$\int_a^{\beta} h(y) e^{i\lambda y} dy, \text{ который, согласно лемме Римана – Лебега стремится к нулю при}$$

$\lambda \rightarrow +\infty$ , что и дает нужную оценку для остаточного члена.

### Вклад невырожденной стационарной точки

В условиях теоремы 8.1 содержится важное ограничение:  $S'(x) \neq 0$  при  $x \in [a; b]$ , то есть фазовая функция не имеет стационарных точек на отрезке интегрирования. При наличии у фазовой функции стационарных точек асимптотика интеграла  $F(\lambda)$  изменяется.

Для упрощения формулировок мы будем далее полагать, что функции являются бесконечно дифференцируемыми.

**Лемма 8.3** (Лемма Эрдейи). Пусть функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на отрезке  $[0; d]$  и  $\alpha > 0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^d f(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}} f(0) e^{\frac{i\pi}{4}} + O(\lambda^{-1}).$$

Доказательство. Предположим вначале, что  $f(x) \equiv 1$ . Деля замену переменной  $\sqrt{\alpha\lambda}x = t$ , получаем

$$\Phi(\lambda) = \int_0^d f(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \int_0^{d\sqrt{\alpha\lambda}} e^{\frac{it^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \left( \int_0^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} dt - \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} dt \right).$$

Первый из интегралов, стоящих в скобках, это интеграл Френеля равный

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}$ . Второй интеграл легко оценить, интегрируя по частям

$$\left| \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} dt \right| = \left| -\frac{e^{\frac{it^2}{2}}}{it} \Big|_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} + \frac{1}{i} \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{d\sqrt{\alpha\lambda}} + \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{d\sqrt{\alpha\lambda}}.$$

Таким образом,  $\frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \int_0^{d\sqrt{\alpha\lambda}} e^{\frac{it^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} + O(\lambda^{-1})$ .

Представим функцию  $f(x)$  в виде

$$f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)] = f(0) + xg(x), \text{ где функция } g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0; d]$ . Таким образом

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}} f(0) e^{\frac{i\pi}{4}} + O(\lambda^{-1}) + \int_0^d xg(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx. \quad (8.18)$$

Оценим оставшийся интеграл при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^d xg(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx \right| &= \left| \frac{1}{i\alpha\lambda} \int_0^d g(x) d \left( e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha\lambda} \left| g(d) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda d^2} - g(0) - \int_0^d g'(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha\lambda} \left( |g(d)| + |g(0)| + \int_0^d |g'(x)| dx \right) = O(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Подстановка этой оценки в равенство (8.18) завершает доказательство леммы.

Теперь мы можем найти главный член асимптотики интеграла Фурье при наличии невырожденной стационарной точки.

**Теорема 8.8** Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  бесконечно дифференцируемы на отрезке  $[a; b]$ , функция  $S(x)$  имеет единственную стационарную точку  $x_0 \in [a; b]$  и  $S''(x_0) > 0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$



$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx = f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1})$$

Доказательство.

Поскольку  $S'(x)$  обращается в нуль лишь в точке  $x_0$  и  $S''(x_0) > 0$ , то при  $a \leq x < x_0$  производная  $S'(x) < 0$  и функция  $S(x)$  монотонно убывает, а при  $x_0 < x \leq b$  производная  $S'(x) > 0$  и  $S(x)$  монотонно возрастает. Существует непрерывно - дифференцируемое отображение  $\varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ , такое, что  $0 \in [\alpha; \beta]$ ,  $\varphi(0) = x_0$  и  $S(\varphi(y)) = S(x_0) + y^2$ . По лемме Морса  $\varphi'(0) = \sqrt{\frac{2}{S''(x_0)}}$ .

Делая замену переменной в интеграле, получаем

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2} dy.$$

Применим лемму Эрдейи

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2} dy &= \frac{1}{2} f(\varphi(0))\varphi'(0)e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-1}) = \\ &= \frac{1}{2} f(x_0)e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Делая замену переменной  $y = -u$ , для интеграла по отрезку  $[\alpha; 0]$  получаем такую же оценку

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^0 f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2} dy &= \int_0^{-\alpha} f(\varphi(-u))\varphi'(-u)e^{i\lambda u^2} du = \\ &= \frac{1}{2} f(x_0)e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Сложение равенств (8.19) и (8.20) завершает доказательство теоремы.

**Замечание.** Если  $S''(x_0) < 0$ , то, используя сопряжение, получаем:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx = \overline{\int_a^b f(x)e^{i\lambda(-S(x))} dx} =$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{f(x_0)e^{-i\lambda S(x_0)} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}} + O(\lambda^{-1}) = \\
&= f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

**Пример 8.6.** Найдем асимптотику функции Бесселя.

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

В этом примере  $f(\varphi) = e^{-n\varphi}$ , а фазовая функция  $S(\varphi) = \sin\varphi$  имеет две стационарные точки  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ . Соответственно, асимптотика функции

Бесселя определяется суммой вкладов обеих стационарных точек.

Поскольку  $S(\varphi_1) = 1, S''(\varphi_1) = -1, S(\varphi_2) = -1, S''(\varphi_2) = 1$ , то получаем

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

### **§ 8.8 Метод перевала**

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z)e^{\lambda S(z)} dz, \quad (8.21)$$

где  $\gamma$  – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости  $C$ , а функции  $f(z)$  и  $S(z)$  являются аналитическими в некоторой области  $D$ , содержащей кривую  $\gamma$ . Будем рассматривать асимптотическое поведение функции  $F(\lambda)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Идея метода основана на том, что согласно интегральной теореме Коши в односвязной области интеграл аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки.

Предположим, что существует контур  $\gamma^* \neq \gamma$  такой, что

$$1. F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z)e^{\lambda S(z)} dz = \int_{\gamma^*} f(z)e^{\lambda S(z)} dz;$$

2. Существует единственная точка  $z_0 \in \gamma^*$ , в которой функция  $\operatorname{Re} S(z)$  имеет строгий максимум и  $f(z_0) \neq 0$ ;

3.  $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$  при  $z \in \gamma^*$  в окрестности точки  $z_0$ .

Пусть  $\gamma_0^*$  – малая дуга контура  $\gamma^*$ , содержащая точку  $z_0$ . Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0) - \delta$  при  $z \in \gamma^* \setminus \gamma_0^*$ . Пусть  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  – регулярная параметризация контура  $\gamma^*$  такая, что  $z(0) = z_0, z: [\alpha; \beta] \rightarrow \gamma_0^*$ .

Используя принцип локализации, получим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma_0^*} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) e^{\lambda S(z(t))} dt = \\ &= e^{\lambda S \operatorname{Im} S(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t) e^{\lambda S_*(t)} dt (1 + O(\lambda^{-\infty})), \end{aligned} \quad (8.22)$$

где  $f_*(t) = f(z(t)) z'(t)$ ,  $S_*(t) = \operatorname{Re} S(z(t))$ .

Поскольку функция  $S_*(t)$  принимает только действительные значения, то асимптотику последнего интеграла можно найти с помощью метода Лапласа. Контур, удовлетворяющий условиям 1, 2, 3 называют перевальным контуром.

### **Принципы нахождения перевального контура**

Пусть  $S(z) = U(z) + iV(z)$  и  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  регулярная параметризация ( $|z'(t)| \neq 0$ ) контура  $\gamma^*$  такая, что  $z(0) = z_0$ . Поскольку  $t=0$  – точка максимума функции  $\operatorname{Re} S(z(t))$ , то

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{Re} S(z(t)) \right|_{t=0} = U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0.$$

А так как  $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$  на  $\gamma^*$ , то

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{Im} S(z(t)) \right|_{t=0} = V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0 \\ V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0 \end{cases}$$

С учетом условий Коши-Римана ( $U'_x = V'_y, U'_y = -V'_x$ ) получаем

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0 \\ U'_x y'_t - U'_y x'_t = 0. \end{cases}$$

Так как определитель системы  $\Delta = -(x'^2_t + y'^2_t) = -|z'_t|^2 \neq 0$ , то система имеет единственное решение

$$U'_x(z_0) = U'_y(z_0) = V'_x(z_0) = V'_y(z_0) = 0.$$

Таким образом, контур  $\gamma^*$  обязательно должен проходить через точку  $z_0$ , в которой  $S'(z_0) = 0$ .

Для изучения метода перевала нам понадобятся три леммы, которые мы приводим без доказательства.

**Лемма 8.4** (Принцип максимума для гармонической функции.) Пусть функция  $U(z)$  является гармонической в ограниченной односвязной области  $D$  и непрерывной в  $\bar{D}$ . Если  $U(z)$  не является постоянной, то она не принимает своего максимального значения во внутренних точках области.

**Лемма 8.5** Пусть  $z_0$  – простая точка перевала функции  $S(z)$ , т.е.  $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$ . Тогда в малой окрестности  $U$  точки  $z_0$  линия уровня  $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$  состоит из двух гладких кривых, которые ортогональны в точке  $z_0$  и разбивают окрестность  $U$  на четыре сектора. Знаки функции  $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$  в соседних секторах различны, и через сектора, в которых  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$  проходит гладкая кривая  $\gamma^*$ , являющаяся перевальным контуром, т.е.  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$  и  $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$  для всех  $z \in \gamma^*$ .

**Лемма 8.6** (О линии наискорейшего спуска.) Пусть функция  $W = U(x; y) + iV(x; y)$  аналитическая в области  $D \subset C$ . Тогда линия наискорейшего спуска функции  $U(x; y)$  задается уравнением  $V(x; y) \equiv const$

### Нахождение главного члена асимптотики

Выведем формулу главного члена асимптотики интеграла (8.21) в предположении существования перевального контура.

**Теорема 8.8** Пусть функции  $f(z)$  и  $S(z)$  являются аналитическими в некоторой области  $D$ , содержащей кривую  $\gamma$ ,  $z_0$  – простая точка перевала ( $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$ ),  $f(z_0) \neq 0$  и  $z = z(t)$  – такая параметризация перевального контура, что  $z(0) = z_0$ . Тогда

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{-\varphi_0} (1 + O(\lambda^{-2})),$$

где  $z(0) = z_0, \theta_0 = \arg z'(0)$

Доказательство.

Применяя к последнему интегралу в формуле (8.21) метод Лапласа, получим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = e^{\lambda S \operatorname{Im} S(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t) e^{\lambda S_*(t)} dt (1 + O(\lambda^{-\infty})) = \\ &= e^{i\lambda S \operatorname{Im} S(z_0)} e^{\lambda S_*(0)} f_*(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(0)|}} \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right), \end{aligned}$$

Поскольку на перевальном контуре  $\operatorname{Im} S(z(t)) \equiv const$  и  $S'(z_0) = 0$ , то

$$\frac{d^2}{dt^2} S_*(t) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} S(z(t)) \Big|_{t=0} = S''(z_0) [z'(0)]^2.$$

Учитывая, что  $S_*(0) = \operatorname{Re} S(z_0)$ ,  $f_*(0) = f(z_0) z'(0)$ , находим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \\ &= f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} z'(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(0)| |z'(0)|^2}} \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(0)|}} \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right).$$

**Пример 8.10.** Асимптотику функции Бесселя

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi \text{ при } \lambda \rightarrow \infty$$

мы уже находили при изучении метода стационарной фазы. Теперь найдем асимптотику методом перевала.

Стандартной заменой переменной  $z = e^{i\varphi}$  функция Бесселя приводится к виду

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Найдем производные для функции  $S(z)$

$$S(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right), S'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{z^2} \right), S''(z) = -\frac{1}{z^3}.$$

Линия уровня  $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_k) x/2 \left( 1 - 1/|z|^2 \right) = 0$ , проходящая через точки перевала  $z_{1,2} = \pm i$ , состоит из окружности  $|z|=1$  и прямой  $x=0$ . Согласно лемме 2, перевальный контур должен быть касательным к биссектрисам соответствующих углов. Учитывая распределение знаков функции  $\operatorname{Re} S(z)$ ,

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом  $J_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right).$

**Замечание.** Основные сложности при использовании метода перевала обычно бывают связаны с доказательством возможности деформации исходного контура в перевальный (с сохранением значения интеграла) и нахождением направления входа перевального контура в точку перевала. В примере, при нахождении асимптотики функции Бесселя, удается в явном виде найти линии уровня, проходящие через точки перевала, соответственно направления перевального контура в точках перевала легко находятся. В

более общей ситуации для нахождения соответствующего угла могут быть использованы иные соображения.

## **ГЛАВА 9. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

В настоящей главе рассматривается метод конечных разностей, который является одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений с частными производными (уравнений математической физики).

### **§9.1.1 Численное решение уравнений параболического типа. Понятие о методе конечных разностей. Основные определения и конечно- разностные схемы. Постановка задач для уравнений параболического типа**

Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности (диффузии). В одномерном по пространству случае однородное (без источников энергии) уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (9.1)$$

Если на границах  $x = 0$  и  $x = l$  заданы значения искомой функции  $u(x, t)$  в виде

$$u(0, t) = \varphi_0(x), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (9.2)$$

$$u(0,t) = \varphi_1(x), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (9.3)$$

т.е. граничные условия первого рода, и, кроме того, заданы начальные условия

$$u(x,t) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (9.4)$$

то задачу (9.1)-(9.4) называют первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (9.1).

В терминах теории теплообмена  $u(x,t)$  – распределение температуры в пространственно-временной области  $\Omega \times T = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq t \leq T\}$ ,  $a^2$  – коэффициент температуропроводности, а (9.2), (9.3) с помощью функций  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  задают температуру на границах  $x = 0$  и  $x = l$ .

Если на границах  $x = 0$  и  $x = l$  заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_0(x), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_1(x), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (9.6)$$

т.е. граничные условия второго рода, то задачу (9.1), (9.5), (9.6), (9.4) называют второй начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (9.1). В терминах теории теплообмена на границах в этом случае заданы тепловые потоки. Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной

$$\alpha \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta u(0,t) = \varphi_0(x), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (9.7)$$

$$\gamma \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta u(l,t) = \varphi_1(x), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (9.8)$$

т.е. граничные условия третьего рода, то задачу (9.1), (9.7), (9.8), (9.4) называют третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (9.1). В терминах теории теплообмена граничные условия (9.7), (9.8) задают теплообмен между газообразной или жидкой средой и границами расчетной области с неизвестными температурами  $u(0,t)$ ,  $u(l,t)$ .



Для пространственных задач теплопроводности в области  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  первая начально-краевая задача имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad M(x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0; \\ u(M, t) = \varphi(M, t), \quad M(x, y, z) \in \Gamma, \quad t > 0; \\ u(M, 0) = \psi(M), \quad M(x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (9.9)$$

$$(9.10)$$

$$(9.11)$$

Аналогично ставится вторая и третья начально-краевые задачи для пространственного уравнения задачи (9.9) – (9.11).

На практике часто ставятся начально-краевые задачи теплопроводности со смешанными краевыми условиями, когда на границах задаются граничные условия различных родов.

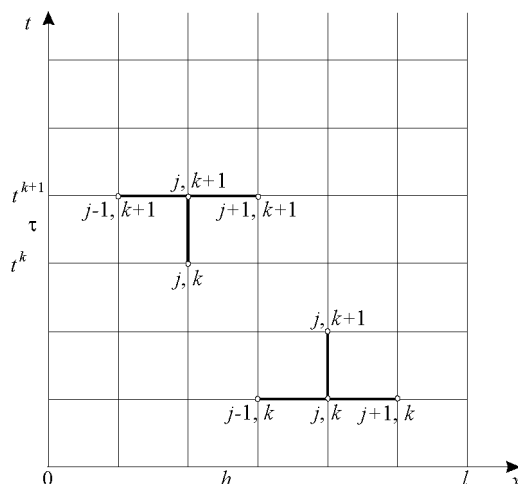
### §9.1.2. Понятие о методе конечных разностей. Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа

Основные определения, связанные с методом конечных разностей, рассмотрим на примере конечно-разностного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (9.1)-(9.4).

Нанесем на пространственно-временную область  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$  конечно-разностную сетку  $\omega_{h\tau}$

$$\omega_{h\tau} = \{x_j = jh, j = \overline{0, N}; t^k = k\tau, k = \overline{0, K}\} \quad (9.12)$$

с пространственным шагом  $h = l/N$  и шагом по времени  $\tau = T/K$  (рис 9.1).



**Рис. 9.1**

Введем два временных слоя: нижний  $t^k = k\tau$ , на котором распределение искомой функции  $u(x_j, t^k)$ ,  $j = \overline{0, N}$  известно (при  $k=0$  распределение определяется начальным условием (9.4)  $u(x_j, t^0) = \psi(x_j)$ ) и верхний временной слой  $t^{k+1} = (k+1)\tau$ , на котором распределение искомой функции  $u(x_j, t^{k+1})$ ,  $j = \overline{0, N}$  подлежит определению.

Сеточной функцией задачи (9.1)-(9.4) (обозначение  $u_j^k$ ) назовем однозначное отображение целых аргументов  $j, k$  в значения функции  $u_j^k = u(x_j, t^k)$ .

На введенной сетке (9.12) введем сеточные функции  $u_j^k, u_j^{k+1}$ , первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для ее определения в задаче (9.1)-(9.4) заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы отношением конечных разностей, получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau), \quad (9.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2). \quad (9.14)$$

Подставляя (9.13), (9.14) в задачу (9.1)-(9.4), получим явную конечно-разностную схему для этой задачи в форме

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$u_0^k = \varphi_0(t^k), \quad u_N^k = \varphi_1(t^k), \quad k = \overline{0, K}; \quad u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \quad (9.15)$$

где для каждого  $j$ -го уравнения все значения сеточной функции известны, за исключением одного  $-u_{j+1}^k$ , которое может быть определено явно из

соотношений (9.15). В соотношения (9.15) краевые условия ( $j=0, j=N$ ) входят при значениях  $j=1$  и  $j=N-1$ , а начальное условие – при  $k=0$ .

Если в (9.14) дифференциальный оператор по пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (9.16)$$

то после подстановки (9.13), (9.16) в задачу (9.1)-(9.4), получим неявную конечно-разностную схему для этой задачи

$$\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), \quad k = \overline{0, K-1}; \quad u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}. \quad (9.17)$$

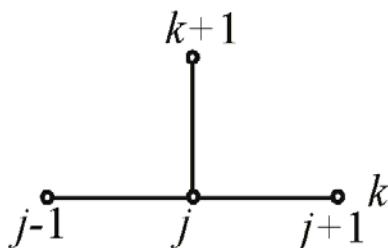
Теперь сеточную функцию  $u_j^{k+1}$  на верхнем временном слое можно получить из решения СЛАУ (9.17) с трехдиагональной матрицей. Эта СЛАУ в форме, пригодной для использования метода прогонки, имеет вид

$$a_1 = 0; \quad \begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, & j = 1 \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, & j = \overline{2, N-2} \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, & j = N-1, \end{cases}$$

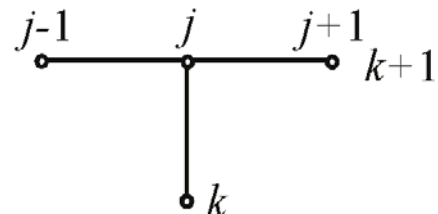
где  $a_j = \sigma, j = \overline{2, N-1}; b_j = -(1 + 2\sigma), j = \overline{1, N-1}; c_j = \sigma, j = \overline{1, N-2};$

$d_j = -u_j^k, j = \overline{2, N-2}; d_1 = -(u_1^k + \sigma\varphi_0(t^{k+1})); d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\varphi_1(t^{k+1})); \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}.$

Шаблон конечно-разностной схемы называют ее геометрическую



шаблон явной схемы



шаблон неявной схемы

интерпретацию на конечно-разностной сетке.

### Рис.9.2

На рисунке 9.2 приведены шаблоны для явной (9.15) и неявной (9.17) конечно-разностных схем при аппроксимации задачи (9.1)-(9.4). Явная конечно-разностная схема (9.15), записанная в форме

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.18)$$

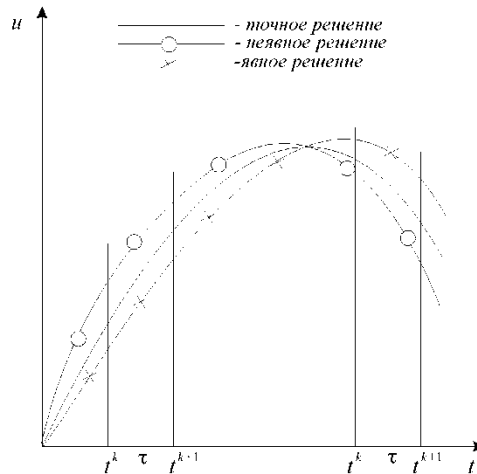
обладает тем достоинством, что решение на верхнем временном слое  $t^{k+1}$  получается сразу (без решения СЛАУ) по значениям сеточных функций на нижнем временном слое  $t^k$ , где решение известно (при  $k=0$  значения сеточной функции формируются из начального условия (9.6.)). Но эта же схема обладает существенным недостатком, поскольку она является условно

устойчивой с условием  $\sigma = \frac{a^2\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ , накладываем на сеточные

характеристики  $\tau$  и  $h$ . С другой стороны, неявная конечно-разностная схема (9.17), записанная форме

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.19)$$

приводит к необходимости решать СЛАУ, но зато эта схема абсолютно устойчива. Проанализируем схемы (9.18), (9.19). Пусть точное решение, которое не известно, возрастает по времени, т.е.  $u_j^{k+1} > u_j^k$ . Тогда, в соответствии с явной схемой (9.18) разностное решение будет заниженным по сравнению с точным, т.к.  $u_j^{k+1}$  определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени. Для неявной схемы (9.19) на возрастающем решении, наоборот, решение завышено по сравнению с точным, поскольку оно определяется по значениям сеточной функции на верхнем временном слое. На убывающем решении картина изменяется противоположным образом: явная конечно-разностная схема завышает решения, а неявная – занижает (см. рис. 9.3)



**Рис.9.3**

На основе этого анализа возникла идея о построении более точной неявно-явной конечно-разностной схемы с весами при пространственных конечно-разностных операторах, причем при измельчении шагов  $\tau$  и  $h$  точное (неизвестное) решение может быть взято в «вилку» сколь угодно узкую, т.к. если явная и неявная схемы аппроксимируют дифференциальную задачу и эти схемы устойчивы, то при стремлении сеточных характеристик  $\tau$  и  $h$  к нулю, решения по явной и неявной схемам стремятся к точному решению с разных сторон.

Рассмотрим неявно-явную схему с весами для простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1 - \theta) a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (9.20)$$

где  $\theta$  – вес неявной части конечно-разностной схемы,  $1 - \theta$  – вес для явной части, причем  $0 \leq \theta \leq 1$ . При  $\theta = 1$  имеем полностью неявную схему, при  $\theta = 0$  – полностью явную схему, и при  $\theta = 1/2$  – схему Кранка-Николсона.

Для схемы Кранка-Николсона ( $\theta = 1/2$ ) порядок аппроксимации составляет  $O(\tau^2 + h^2)$ , т.е. на один порядок по времени выше, чем обычные явная или неявная схемы. Неявно-явная схема с весами (9.20) абсолютно устойчива при

$1/2 \leq \theta \leq 1$  и условно устойчива с условием  $\sigma \leq \frac{1}{2}$  при  $0 \leq \theta < 1/2$ . Таким образом, схема Кранка-Николсона (9.20) при  $\theta = 1/2$  абсолютно устойчива и

имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственной переменной  $x$ .

### **§9.1.3. Аппроксимация граничных условий, содержащих производные**

В задачах математической физики вообще, и в задачах теплопроводности в частности, граничные условия 1-го рода аппроксимируются точно в узлах на границе расчетной области. Граничные условия 2-го и 3-го рода отличаются тем, что в них присутствует производная первого порядка искомой функции по пространственной переменной. Поэтому для замыкания конечно-разностной схемы необходима их аппроксимация. Простейшим вариантом является аппроксимация производных направленными разностями первого порядка:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h),$$

Тогда в общем случае граничных условий 3-го рода (9.7), (9.8) уравнения, связывающие значения искомой функции в двух крайних узлах разностной сетки, выглядят следующим образом:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}) + O(h), \quad \gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}) + O(h).$$

Дополняя полученными уравнениями явную конечно-разностную аппроксимацию во внутренних узлах, получим явную разностную схему для третьей начально-краевой задачи (9.1), (9.4), (9.7), (9.8).

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}).$$

В результате алгоритм перехода на новый временной слой  $t^{k+1}$  с использованием явной схемы можно представить в следующем виде:

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta - \alpha/h}u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h}, \quad u_N^{k+1} = -\frac{\gamma/h}{\delta + \gamma/h}u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}.$$

Т.е. сначала рассчитываются значения искомой функции во всех внутренних узлах на новом временном слое, а затем определяются значения на границах.

При использовании неявной конечно-разностной схемы получаем следующий разностный аналог дифференциальной задачи:

$$b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0, \quad a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} = d_N, \quad \text{где } b_0 = \beta - \alpha/h, \quad c_0 = \alpha/h, \quad d_0 = \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h},$$

$$a_N = -\gamma/h, \quad b_N = \delta + \gamma/h, \quad d_N = \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h},$$

$$a_j = \sigma, \quad b_j = -(1 + 2\sigma), \quad c_j = \sigma, \quad d_j = -u_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}.$$

В результате для получения решения на новом временном слое  $t^{k+1}$  решается система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Аналогичная картина имеет место и при использовании неявно-явной схемы с весами.

Принципиальной особенностью рассмотренного выше подхода является первый порядок аппроксимации граничных условий. Т.е. порядок аппроксимации в граничных узлах ниже порядка аппроксимации во внутренних узлах расчетной области. При этом глобальный порядок аппроксимации (во всей расчетной области) равен наименьшему относительно всех узлов сетки порядку аппроксимации.

Одним из способов повышения порядка аппроксимации граничных условий является использование формул численного дифференцирования второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t^{k+1}) = \frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} + u_2^{k+1}}{2h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t^{k+1}) = \frac{u_{N-2}^{k+1} - 4u_{N-1}^{k+1} + 3u_N^{k+1}}{2h} + O(h^2).$$

В случае явной схемы алгоритм вычисления решения на новом временном слое при такой аппроксимации граничных условий не приобретает принципиальных изменений. Если же используется неявная схема, то получающаяся при этом СЛАУ теряет трехдиагональный вид (первое и последнее уравнение содержат три неизвестных). Этот недостаток легко устраним, т.к. путем линейной комбинации первого уравнения со вторым (последнего с предпоследним) можно добиться исключения третьего неизвестного из соответствующего уравнения. Однако при этом возможно нарушение диагонального преобладания матрицы и, следовательно, нарушение условий применимости метода прогонки.

Более эффективным является подход, позволяющий повысить порядок аппроксимации граничных условий без увеличения числа узлов в аппроксимационных соотношениях. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим следующий пример.

**Пример 9.1.** Решить третью начально-краевую задачу для параболического уравнения, содержащего как конвективные члены (пропорциональные производной  $\partial u/\partial x$ ), так и источниковые члены, содержащие искомую функцию  $u(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + gu, & 0 < x < l, t > 0; \end{cases} \quad (9.21)$$

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), & x = 0, t > 0; \end{cases} \quad (9.22)$$

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_1(t), & x = l, t > 0; \end{cases} \quad (9.23)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, t = 0. \end{cases} \quad (9.24)$$



**Решение.** Во внутренних узлах конечно-разностной сетки неявная конечно-разностная схема для уравнения (9.21) имеет вид:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a^2}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + \frac{b}{2h} (u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}) + gu_{j+1}^k + O(\tau + h^2),$$

$$j = \overline{1, N-1}. \quad (9.25)$$

Если производные первого порядка в граничных условиях (9.22) и (9.23) аппроксимировать по следующей схеме (с помощью отношения конечных разностей справа и слева)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h),$$

то граничные условия аппроксимируются с первым порядком, и глобальный порядок будет равен первому порядку несмотря на то, что во всех остальных узлах порядок аппроксимации по пространственным переменным равен двум. Для сохранения порядка аппроксимации, равного двум, в граничных узлах разложим на точном решении значение  $u_1^{k+1}$  в окрестности точки  $x = 0$  в ряд Тейлора по переменной  $x$  до третьей производной включительно, а  $u_{N-1}^{k+1}$  – в аналогичный ряд в окрестности точки  $x = l$ , получим (в предположении что функция  $u(x, t)$  в граничных узлах имеет первые производные по времени и вторые – по  $x$ ):

$$u_1^{k+1} = u(0 + h, t^{k+1}) = u_0^{k+1} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} h + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3) \quad (9.26)$$

$$u_{N-1}^{k+1} = u(l + h, t^{k+1}) = u_N^{k+1} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} h + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (9.27)$$

Далее, подставим сюда значения второй производной в граничных узлах, полученные из дифференциального уравнения (9.21):

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{j=0, N}^{k+1} = \left( \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{a^2} u \right)_{j=0, N}^{k+1},$$

и найдем из полученных выражений (9.26), (9.27) значения первой

производной  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0, N}^{k+1}$  в граничных узлах с порядком  $O(\tau + h^2)$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 - bh)} \cdot (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) - \frac{h}{2a^2 - bh} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0^{k+1} + \frac{gh}{2a^2 - bh} \cdot u_0^{k+1} + O_1(h^2),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)} \cdot (u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) + \frac{h}{2a^2 + bh} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_N^{k+1} - \frac{gh}{2a^2 + bh} \cdot u_N^{k+1} + O_2(h^2).$$

Подставляя  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1}$  в (9.22), а  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1}$  в (9.23) и аппроксимируя полученные

соотношения в соответствующих граничных узлах (при этом

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0^{k+1} = (u_0^{k+1} - u_0^k)/\tau + O(\tau), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_N^{k+1} = (u_N^{k+1} - u_N^k)/\tau + O(\tau), \quad \text{получим}$$

алгебраические уравнения для граничных узлов, в каждом из которых два неизвестных:

$$b_0 \cdot u_0^{k+1} + c_0 \cdot u_1^{k+1} = d_0, \quad j = 0; \quad (9.28)$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh - \frac{\beta}{\alpha}(2a^2 - bh); \quad c_0 = -\frac{2a^2}{h};$$

$$d_0 = \frac{h}{\tau} \cdot u_0^k - \varphi_0(t^{k+1}) \cdot \frac{2a^2 - bh}{\alpha};$$

$$a_N \cdot u_{N-1}^{k+1} + b_N \cdot u_N^{k+1} = d_N, \quad j = N; \quad (9.29)$$

$$a_N = -\frac{2a^2}{h}; \quad b_N = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh + \frac{\beta}{\alpha}(2a^2 + bh); \quad c_n = 0;$$

$$d_N = \frac{h}{\tau} \cdot u_N^k - \varphi_1(t^{k+1}) \cdot \frac{2a^2 + bh}{\gamma}.$$

Таким образом, (9.28) – конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (9.22) на левой границе  $x = 0$ , а (9.29) – конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (9.23) на правой границе  $x = l$ , которые сохраняют тот же порядок аппроксимации, что и в

конечно-разностной аппроксимации (9.25) дифференциального уравнения (9.21).

Приписывая к граничным конечно-разностным уравнениям (9.28), (9.29), каждое из которых содержит два значения сеточной функции, алгебраические уравнения (9.25), записанные в виде

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad (9.30)$$

$$a_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h}\right); \quad b_j = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{\tau} - g; \quad c_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b}{2h}\right); \quad d_j = \frac{1}{\tau} \cdot u_j^k,$$

получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемую методом прогонки ( $a_0 = 0; c_N = 0$ )

$$A_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}}; \quad B_j = \frac{d_j + a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}}, \quad j = \overline{0, N}; \quad (9.31)$$

$$A_0 = -\frac{c_0}{b_0}; \quad B_0 = \frac{d_0}{b_0}; \quad A_N = 0$$

$$u_j^{k+1} = A_j u_{j+1}^{k+1} + B_j \quad (u_N^{k+1} = B_N), \quad j = N, N-1, \dots, 0. \quad (9.32)$$

Изложенный метод аппроксимации краевых условий, содержащих производные по пространственным переменным, повышает не только порядок аппроксимации, но и сохраняет консервативность конечно-разностной схемы, т.е. в конечно-разностной аппроксимации соблюдаются законы сохранения, на основе которых выведены дифференциальные соотношения задачи (9.21)-(9.24).

Аналогичный подход можно осуществить в краевых задачах для дифференциальных уравнений любых типов.

## **§9.2. Метод конечных разностей для решения уравнений**

### **гиперболического типа**

#### **§9.2.1. Постановка задач для уравнений гиперболического типа**

Классическим примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение, которое в области  $0 < x < l, t > 0$  имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0$$

Данное уравнение описывает, в частности, процесс малых поперечных колебаний струны. В этом случае  $u(x, t)$  – поперечные перемещения (колебания) струны,  $a$  – скорость распространения малых возмущений в материале, из которого изготовлена струна.

Если концы струны движутся по заданным законам, то есть на концах заданы перемещения (или значения искомой функции), то первая начально-краевая задача для волнового уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0; & 9.33) \\ u(0, t) = \varphi_0(t), x = 0, t > 0; & (9.34) \\ u(l, t) = \varphi_1(t), x = l, t > 0; & (9.35) \\ u(x, 0) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq l, t = 0; & (9.36) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), 0 \leq x \leq l, t = 0, & (9.37) \end{cases}$$

причем, если концы струны жестко закреплены, то  $\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = 0$ .

Как видно, в задачах для волнового уравнения, кроме начального распределения искомой функции, задается еще распределение начальной скорости перемещения. Если на концах струны заданы значения силы, которая по закону Гука пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной (то есть на концах заданы значения первых производных по переменной  $x$ ), то ставится вторая начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0; \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varphi_0(t), \quad x = 0, t > 0; \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad x = l, t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, t = 0. \end{array} \right.$$

В условиях, когда концы струны свободны, функции  $\varphi_0(t) = \varphi_1(t) = 0$ .

Наконец в условиях, когда концы закреплены упруго, т.е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, ставится третья начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_1(t), \quad x = l, t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, t = 0. \end{array} \right.$$

Аналогично ставятся двумерные и трехмерные начально-краевые задачи для двумерного и трехмерного волнового уравнения.

### **§9.2.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа**

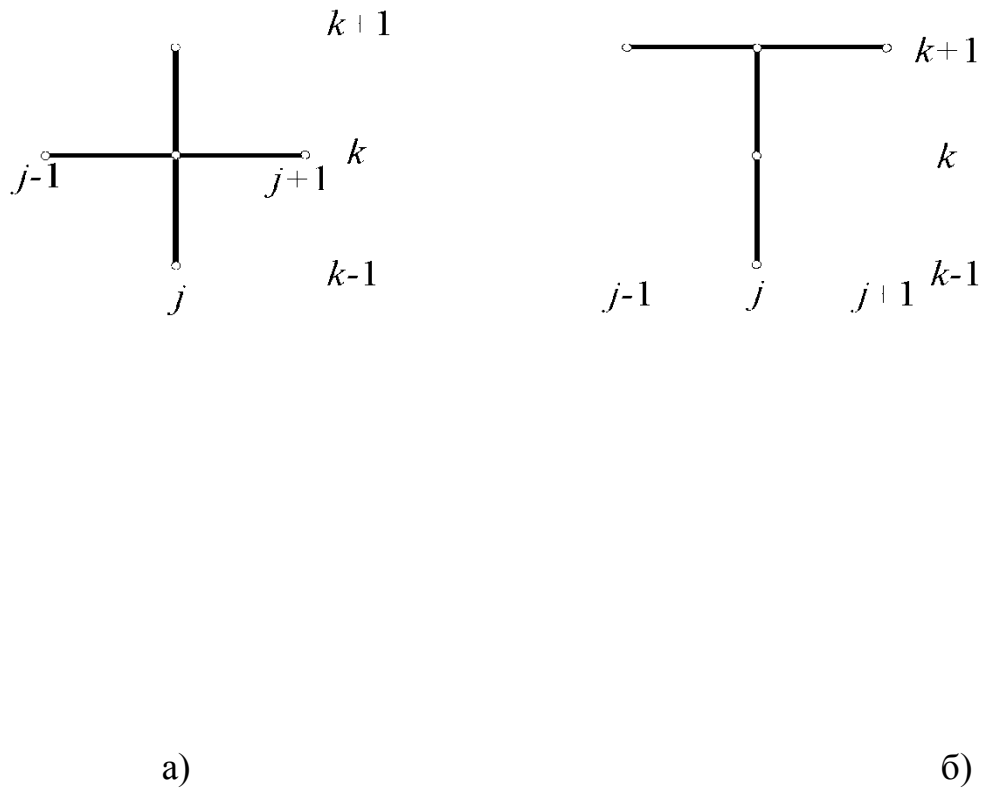
Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения (9.33)-(9.37). На пространственно-временной сетке (9.12) будем аппроксимировать дифференциальное уравнение (9.33) одной из следующих конечно-разностных схем:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; k = 1, 2, \dots \quad (9.38)$$

с шаблоном на рисунке 9.4а и

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), j = \overline{1, N-1}; k = 1, 2, \dots \quad (9.39)$$

с шаблоном на рисунке 9.4б



**Рис.9.4**

При этом схема (9.38) является явной. С ее помощью решение  $u_j^{k+1}, j = \overline{1, N-1}; k = 1, 2, \dots$  определяется сразу, поскольку значения сеточных функции  $u_j^{k-1}, u_j^k$ , на нижних временных слоях должны быть известны. В соответствии с шаблоном для этой схемы порядок аппроксимации равен двум, как по пространственной, так и по временной переменной. При этом явная конечно-разностная схема (9.38) для волнового уравнения условно устойчива с условием  $\sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} < 1$ , накладываемым на сеточные характеристики  $\tau$  и  $h$ . Схема (9.39) является неявной схемой и обладает абсолютной устойчивостью. Ее можно свести к СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемой методом прогонки.

В обеих схемах необходимо знать значения  $u_j^{k-1}, u_j^k, j = \overline{1, N-1}; k = 1, 2, \dots$  на нижних временных слоях. Для  $k = 1$  это делается следующим образом:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j), j = \overline{0, N}, \quad (9.40)$$

где  $\psi_1(x)$  – функция из начального условия (9.36).

Для определения  $u_j^1$  можно воспользоваться простейшей аппроксимацией

второго начального условия (9.37):  $\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_2(x_j)$ . Откуда для искомых

значений  $u_j^1$  получаем следующее выражение:  $u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau$ .

Недостатком такого подхода является первый порядок аппроксимации второго начального условия. Для повышения порядка аппроксимации воспользуемся следующей процедурой.

Разложим  $u_j^1$  в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности  $t = 0$ :

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^0 \tau + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3). \quad (9.41)$$

Для определения второй производной в выражении (9.41) воспользуемся

исходным дифференциальным уравнением  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^0 = a^2 \psi_1''(x_j)$ .

В результате получаем искомую сеточную функцию со вторым порядком

точности:  $u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2 \psi_1''(x_j) \frac{\tau^2}{2}$ . После определения из

начальных условий значений сеточных функций  $u_j^0, u_j^1$  на двух первых

временных слоях вычислительный процесс продолжается согласно схемам

(9.38) или (9.39). При этом аппроксимация краевых условий (9.34) и (9.35)

производится аналогично тому, как это описывалось выше для уравнений

параболического типа. Для иллюстрации этого этапа рассмотрим следующий

пример.

**Пример 9.2.** Выписать явную конечно-разностную схему для третьей начально-краевой задачи.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_1(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

**Решение.** Аппроксимация дифференциального уравнения на шаблоне (9.4б) выглядит следующим образом:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + b \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} + cu_j^k + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

где  $f_j^k = f(x_j, t^k)$ .

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}), \quad \gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}).$$

В результате переход на новый временной слой представляется следующим алгоритмом:

$$u_j^{k+1} = u_{j+1}^k \left( \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + b \frac{\tau^2}{2h} \right) + u_j^k \left( -2 \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + 2 + c \tau^2 \right) + u_{j-1}^k \left( \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + b \frac{\tau^2}{2h} \right) - u_j^{k-1} + \tau^2 f_j^k,$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta - \alpha/h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h},$$

$$u_N^{k+1} = -\frac{\gamma/h}{\delta + \gamma/h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}.$$

Таким образом, сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних узлах на новом временном слое, после чего из аппроксимации граничных условий находятся значения функции в крайних узлах. Для окончательного замыкания вычислительного процесса определим, исходя из



начальных условий, значения искомой функции на двух первых временных слоях  $t^0, t^1$ . В начальный момент времени значения определяются точно:

$u_j^0 = \psi_1(x_j)$ . Если воспользоваться аппроксимацией первого порядка по времени, то как было показано выше, получим  $u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau$ . Для повышения порядка аппроксимации разложим  $u_j^1$  в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности  $t = 0$ :

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^0 \tau + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3),$$

где, согласно исходному уравнению

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^0 + b \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^0 + cu_j^k + f_j^k = a^2 \psi_1''(x_j) + b \psi_1'(x_j) + c \psi_1(x_j) + f_j^k.$$

Окончательно получаем

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + (a^2 \psi_1''(x_j) + b \psi_1'(x_j) + c \psi_1(x_j) + f_j^k) \frac{\tau^2}{2}.$$

### **§9.3. Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа**

#### **§9.3.1. Постановка задач для уравнений эллиптического типа**

Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

или уравнение Лапласа при  $f(x, y) \equiv 0$ . Здесь функция  $u(x, y)$  имеет различный физический смысл, а именно: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т.п. Если на границе  $\Gamma$

расчетной области  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  задана искомая функция, то соответствующая первая краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона называется задачей Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (9.42)$$

Если на границе  $\Gamma$  задается нормальная производная искомой функции, то соответствующая вторая краевая задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа или Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (9.44)$$

При этом  $n$  – направление внешней к границе  $\Gamma$  нормали.

Более приемлемой является координатная форма краевого условия (9.45)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, i) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{n}, j) = \varphi(x, y), \text{ где } \cos(\hat{n}, i), \cos(\hat{n}, j) - \text{ направляющие}$$

косинусы внешнего вектора единичной нормали к границе  $\Gamma$ ,  $i$  и  $j$  орты базисных векторов. Наконец третья краевая задача для уравнения Пуассона (Лапласа) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \alpha u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

### **§9.3.2. Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений**

#### **эллиптического типа**

Рассмотрим краевую задачу для уравнений Лапласа или Пуассона (9.42), (9.43) в прямоугольнике  $x \in [0, l_1], y \in [0, l_2]$ , на который наложим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, N_1}; \quad y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\} \quad (9.46)$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме (вводится сеточная функция  $u_{ij}, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$ ):

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = f(x_i, y_j), \quad (9.47)$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}$$

которая на шаблоне (9.5) имеет второй порядок по переменным  $x$  и  $y$ , поскольку шаблон центрально симметричен.

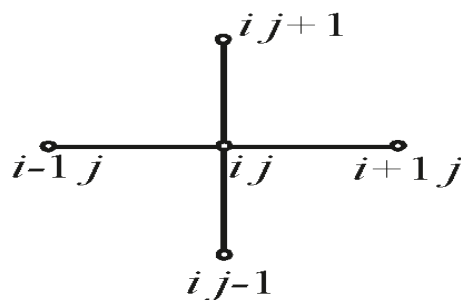
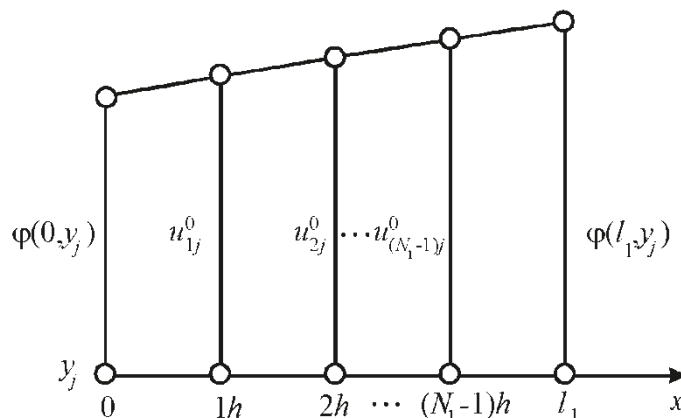


Рис.9.5

СЛАУ (9.47) имеет пяти-диагональный вид (каждое уравнение содержит пять неизвестных и при соответствующей нумерации переменных матрица имеет ленточную структуру). Решать ее можно различными методами линейной алгебры, например, итерационными методами, методом матричной прогонки и т.п. Рассмотрим разностно-итерационный метод Либмана численного решения задачи Дирихле (9.42), (9.43). Для простоты изложения этого метода примем  $h_1 = h_2 = h$ , тогда из схемы (9.47) получим (к-номер итерации)

$$(9.48)$$



**Рис.9.6**

На каждой координатной линии (например,  $y_j = \text{const}, j = \overline{1, N_2 - 1}$ ) с помощью линейной интерполяции (см. рис.9.6) граничных значений  $\varphi(x, y)$  определим  $u_{i,j}^{(0)}$  на нулевой итерации, подставив которые в (9.48), получим распределение  $u_{i,j}^{(1)}$  на первой итерации

$$u_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)} + u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)} - h^2 \cdot f_{i,j}], \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Это распределение  $u_{i,j}^{(1)}$  снова подставляются в (9.48), получаем распределение  $u_{i,j}^{(2)}$  и т.д. Процесс Либмана прекращается, когда  $\|u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ,  $\|u_{i,j}^{(k)}\| = \max_{i,j} |u_{i,j}^{(k)}|$ , где  $\varepsilon$  – наперед заданная точность.

При решении задач с граничными условиями 2-го и 3-го родов наряду с аппроксимацией дифференциального уравнения производится также аппроксимация граничных условий. Этот вопрос подробно рассмотрен в разделе 9.1.3. Здесь в качестве примера приведем разностную схему, аппроксимирующую третью краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

### **Пример 9.3.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad x \in (0, l_1), y \in (0, l_2); \\ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \beta_1 u(0, y) = \varphi_1(y), \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l_1, y) + \beta_2 u(l_1, y) = \varphi_2(y), \\ \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + \beta_3 u(x, 0) = \varphi_3(x), \\ \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, l_2) + \beta_4 u(x, l_2) = \varphi_4(x). \end{array} \right.$$

Как и ранее в прямоугольнике  $x \in [0, l_1], y \in [0, l_2]$  построим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, N_1}; \quad y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\}$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах по рассмотренной выше центрально-разностной схеме

$$\frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h_1^2} + \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком с помощью направленных разностей:

$$\alpha_1 \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h_1} + \beta_1 u_{0j} = \varphi_1(y_j), j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\alpha_2 \frac{u_{N_1 j} - u_{N_1 j}}{h_1} + \beta_2 u_{N_1 j} = \varphi_2(y_j), j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\alpha_3 \frac{u_{i1} - u_{i0}}{h_2} + \beta_3 u_{i0} = \varphi_3(x_i), i = \overline{1, N_1 - 1},$$

$$\alpha_4 \frac{u_{iN_2} - u_{iN_2-1}}{h_2} + \beta_4 u_{iN_2} = \varphi_4(x_i), i = \overline{1, N_1 - 1}.$$

В результате получена СЛАУ, содержащая  $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1) - 4$  уравнений относительно неизвестных  $u_{ij} (i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2})$ , при этом угловые узлы с координатами  $(i, j)$ , равными  $(0, 0), (0, N_2), (N_1, 0), (N_1, N_2)$ , в вычислениях не участвуют). Как и в случае граничных условий первого рода, она имеет

пятидиагональный вид и может быть решена, например, итерационным методом Либмана.

**Замечание.** Метод простых итераций для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим.

#### **§9.4. Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач**

К основным понятиям, связанным с методом конечных разностей относятся следующие понятия: аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости (или точность). Определим каждое из этих понятий.

##### **Аппроксимация и порядок аппроксимации**

Запишем дифференциальную задачу в операторной форме  $LU = f$ , где  $L$  – один из дифференциальных операторов

$$L = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{– диффузионный;} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{– волновой;} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{– лапласиан.} \end{cases}$$

$U(x, y)$ -искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче;  $f$ -входные данные (т.е. начальные и краевые условия, правые части и т.п.). Операторная форма  $(LU)_h = f_h$  описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма  $L_h U_h = f_h$  описывает конечно-разностную схему на точном решении  $U(x, t)$ , т.е. в конечно-разностной схеме вместо сеточных значений сеточной функции подставлены точные (неизвестные) значения

искомой функции. Для перечисленных дифференциальных операторов  $L$  конечно-разностные операторы  $L_h$  имеют вид

$$L = \begin{cases} \frac{\Delta}{\tau} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2}; \\ \frac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2}; \\ \frac{\Delta^2}{h_1^2} + \frac{\Delta^2}{h_2^2}; \end{cases}$$

Наконец, операторная форма конечно-разностной схемы имеет вид

$$L_h u_h = f_h \quad (9.49)$$

Введём норму сеточной функции, например, с помощью выражения

$$\|u^k\| = \max_j |u_j^k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.50)$$

**Определение.** Конечно-разностная схема (9.49) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении, если какая-либо норма разности  $\|(LU)_h - L_h U_h\|$  стремится к нулю при  $\tau, h \rightarrow 0$

$$\|(LU)_h - L_h U_h\|_{\tau, h \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (9.51)$$

**Определение.** Конечно-разностная схема (9.49) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении с порядком  $p$  по времени и порядком  $q$  по пространственной переменной, если какая-либо норма разности  $\|(LU)_h - L_h U_h\|$  удовлетворяет равенству

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| = O(\tau^p + h^q). \quad (9.52)$$

Таким образом, если конечно-разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу, то речь идёт о близости дифференциального и конечно-разностного операторов в узлах сетки.

### **Устойчивость**

Пусть в конечно-разностной схеме (9.49) входные данные  $f_h$  получили возмущения и стали  $\tilde{f}_h$ . Тогда сеточная функция также получит возмущение и станет  $\tilde{u}_h$ .

**Определение.** Конечно-разностная схема (9.49) устойчива по входным данным, если найдется такая ограниченная константа  $K$ , не зависящая от сеточных характеристик  $\tau, h$  и входных данных  $f_h$ , что выполняется неравенство

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|. \quad (9.53)$$

Таким образом, понятие устойчивости интерпретируется следующим образом: конечно-разностная схема устойчива, если для малых возмущений входных данных (начально-краевых условий и правых частей) конечно-разностная схема обеспечивает малые возмущения сеточной функции  $u_h$ , т.е. решение с помощью конечно-разностной схемы находится под контролем входных данных.

Если во входные данные  $f_h$  входят только начальные условия или только краевые условия, или только правые части, то говорят об устойчивости соответственно по начальным условиям, по краевым условиям или по правым частям.

**Определение.** Конечно-разностная схема (9.49) **абсолютно** устойчива, если неравенство (9.53) выполняется при любых значениях сеточных характеристик  $\tau$  и  $h$ , т.е. на шаги сетки не накладывается никаких ограничений.

**Определение.** Конечно-разностная схема (9.49) **условно устойчива**, если неравенство (9.53) выполняется для сеточных характеристик  $\tau$  и  $h$ , на которые накладываются определённые ограничения.

### Сходимость и порядок сходимости

**Определение.** Решение  $u_h$ , полученное с помощью конечно-разностной схемы (9.49), сходится к точному решению  $U$ , если какая-либо норма разности  $\|U - u_h\|$  стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик  $\tau, h$



$$\|U - u_h\|_{\tau, h \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (9.54)$$

**Определение.** Конечно-разностная схема (9.49) имеет  $p$ -й порядок сходимости (порядок точности) по времени и  $q$ -й порядок сходимости по пространственной переменной, если какая-либо норма разности  $\|U - u_h\|$  удовлетворяет равенству

$$\|U - u_h\| = O(\tau^p + h^q). \quad (9.55)$$

Таким образом, порядок сходимости (порядок точности) характеризует близость конечно-разностного и точного (неизвестного) решения.

При численном решении задач математической физики в общем случае необходимо исследовать и аппроксимацию, и устойчивость, и сходимость. Однако следующая теорема утверждает, что достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость и, в случае положительного ответа, сходимость будет обеспечена.

**Теорема эквивалентности.** Если конечно-разностная схема (9.49) аппроксимирует на точном решении дифференциальную задачу с  $p$ -м порядком по времени и  $q$ -м порядком по пространственной переменной и эта схема **устойчива**, то решение с помощью этой конечно-разностной схемы **сходится** к решению дифференциальной задачи с  $p$ -м порядком по времени и  $q$ -м порядком по пространственной переменной.

### **ДОПОЛНЕНИЕ. МЕТОД ВКБ**

Во многих задачах механики, а также в приложениях часто возникает большой параметр в дифференциальных уравнениях и краевых условиях. Численные методы при больших значениях параметров плохо аппроксимируют решение краевой задачи, поэтому появляется необходимость построения асимптотических разложений. Приведем пример из гидродинамики. Пусть термокапиллярное осесимметричное течение жидкости с примесью в горизонтальном слое вызвано радиальным градиентом температуры, действующим вдоль свободной плоской поверхности. Уравнения движения жидкости содержат малые диссипативные коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии. Если градиент температуры направлен от оси симметрии вдоль свободной границы, то возникают динамический, тепловой и диффузный пограничные слои. В этом

случае задача решается асимптотическим методом пограничного слоя. Если же градиент температуры имеет обратное направление, то пограничные слои не возникают. Теперь задачу можно решать методом ВКБ. В методическом пособии рассматриваются краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой параметр

$$y'' + k^2 q(x)y = 0 \quad (1)$$

Здесь  $q(x) \in C^\infty([a, b])$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $k \rightarrow \infty$ . К этому уравнению приводятся многие уравнения математической физики. Например, поперечные колебание струны описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

здесь  $u(x, t)$  - отклонения точки  $x$  струны от положения равновесия в момент времени  $t$ ,  $a(x) > 0$  - скорость распространения колебаний, функция  $F(x, t)$  пропорциональна линейной плотности внешних сил. Пусть внешние силы периодичны по времени  $F(x, t) = f(x) \exp(ikt)$ , а решение выходит на периодический режим, т.е.  $u(x, t) = y(x) \exp(ikt)$ , тогда для амплитуды колебаний  $y(x)$  выводим уравнение

$$a(x)y'' + k^2 y = -f(x)$$

Последнее уравнение отличается от уравнения (1) только наличием функции  $f(x)$  в правой части. Известно, что неоднородное уравнение можно решить методом вариации произвольных постоянных, решив соответствующее однородное уравнение вида (1).

Асимптотическое разложение при  $k \rightarrow \infty$  решений уравнение (1) называют ВКБ-асимптотикой. Это название представляет собой первые буквы фамилий авторов, впервые применивших этот метод в задачах квантовой механики: Вентцель, Крамерс и Бриллюэн. Иногда эту асимптотику называют коротковолновой или высокочастотной, а также квазиклассической.

## 1. ФОРМАЛЬНАЯ СХЕМА МЕТОДА

При больших значениях параметра  $k$  решение задачи (1) строим в виде асимптотического ряда

$$y \sim e^{ikS(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(x)}{(ik)^j}, \quad (a_0(x) \neq 0) \quad (2)$$

Дифференцируя функцию  $y(x)$ , подставляя ее в уравнение (1) и сократив на экспоненту  $\exp(ikS)$ , выводим соотношение

$$(ik)^2 (S'^2 - q) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{(ik)^j} + (2S'a' + S''a_0)(ik) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^j} (2S'a'_{j+1} + S''a_{j+1} + a''_j) = 0 \quad (3)$$

Соотношение (3) справедливо только в том случае, когда сумма коэффициентов при степени  $ik$  равна нулю. Коэффициентом при старшей степени  $(ik)^2$  является  $(S'^2(x) - q(x))a_0(x)$ . Так как  $a_0 \neq 0$ , то полагаем

$$S'^2(x) - q(x) = 0 \quad (4)$$

Теперь отбрасываем в левой части соотношения (3) первую треть слагаемых. Приравнявая нулю последовательно коэффициенты при  $(ik)^n, n = 1, 0, -1, -2, \dots$  в левой части (3), получаем уравнения

$$2S'a'_0 + S''a_0 = 0 \quad (5)$$

$$2S'a'_{j+1} + S''a_{j+1} = -a''_j \quad (j \geq 0) \quad (6)$$

Уравнение (4) в оптических задачах называется уравнением эйконала, а в квантомеханических – уравнением Гамильтона-Якоби. Уравнения (5)-(6) называются уравнениями переноса.

На функцию  $q(x)$  наложим следующие условия:

1)  $q(x) \neq 0$  при всех  $x \in [a, b]$ .

2) Если  $q(x) > 0$  при  $x \in [a, b]$ , то через  $\sqrt{q(x)}$  обозначим

арифметическое значение корня. Если  $q(x) < 0$ , то через  $\sqrt{q(x)}$  обозначим то

значение корня, для которого  $\text{Im} \sqrt{q(x)} \geq 0$ . В дальнейшем эту ветвь фиксируем.

Из уравнения (4) находим

$$S(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt, \quad x_0 \in [a, b] \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (5), выводим уравнение для коэффициента  $a_0(x)$

$$2a_0' \sqrt{q} + \frac{q'}{2\sqrt{q}} a_0 = 0$$

Отсюда получаем  $a_0 = C q^{\frac{1}{4}}$ . После этого, последовательно из уравнения (6) находим все коэффициенты  $a_j (j > 0)$ . Итак, доказано следующее утверждение

**Теорема 1.** Формальный асимптотический ряд (2) удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда функция  $S(x)$  имеет вид (7), а функции  $a_j(x)$  являются решениями уравнений переноса (5), (6). В частности,  $a_0 = C q^{\frac{1}{4}}$  и, значит ряд (2) имеет вид

$$y = C q^{\frac{1}{4}}(x) e^{\pm ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad (k \rightarrow \infty) \quad (8)$$

Заметим, что формулы (2), (7) дают два существенно разных ряда, удовлетворяющих уравнению (1). Они отличаются знаком функции  $S(x)$ . Тот факт, что функция  $S(x)$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, зависящей от выбора  $x_0$ , несущественен.

## 2. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Теорема 1 дает решение уравнения (1) в классе формальных асимптотических рядов. Существование классического решения с указанной асимптотикой дает следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть функции  $a_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , удовлетворяют уравнениям переноса (5), (6). Тогда для некоторого  $k_0 > 0$  существуют бесконечно дифференцируемые функции  $y_{\pm} = y_{\pm}(x, k) \in C^{\infty}([a, b] * [k_0, \infty))$ , удовлетворяющие уравнению (1), и такие, что при  $k \rightarrow \infty$

$$y_{\pm} \sim \exp(\pm ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt) * \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(x)}{(ik)^j} \quad (9)$$

Эти асимптотические ряды можно любое число раз дифференцировать по  $x$  и  $k$ . Главный член этих асимптотических разложений имеет вид (8).

**Замечание.** При вещественной функции  $q(x)$  решения  $y_{\pm}$  быстро осциллируют, если  $q > 0$ . В случае  $q < 0$  формулу (9) можно переписать в виде

$$y_{\pm} \sim \exp(\mp k \int_{x_0}^x \sqrt{|q(t)|} dt) * \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(x)}{(ik)^j} \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Доказательство.** Построим какую-нибудь функцию  $h(x, k)$ , удовлетворяющую условию  $h \in C^{\infty}([a, b] * [1, \infty))$  и такую, что

$$h(x, k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) (ik)^{-j} \quad (k \rightarrow \infty) \quad (10)$$

причем это разложение можно дифференцировать по  $x, k$  любое число раз. В качестве такой функции можно взять

$$h(x, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(k/t_j) a_j(x) (ik)^{-j} \quad (11)$$

где  $\varphi(t)$  - произвольная фиксированная бесконечно дифференцируемая функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 1, \\ 0, & \text{при } t < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$t_j$  - некоторая числовая последовательность, достаточно быстро стремящаяся к бесконечности при  $j \rightarrow \infty$ . Так как при каждом  $k$  только конечное число членов ряда (11) отлично от нуля, то ряд (11) сходится. Константы  $t_j$  выберем так, чтобы при всех  $\alpha + \beta \leq j$  и  $k \geq 1$  была справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial k^\beta} (\varphi(k/t_j) a_j(x) k^{-j}) \right| \leq k^{1-j-\beta}$$

Очевидно, что такие  $t_j$  существуют. Тогда при  $k \rightarrow \infty$ , любых  $\alpha$  и  $\beta$ , и  $N \geq \alpha + \beta$

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial k^\beta} \sum_{j=N+2}^{\infty} (\varphi(k/t_j) a_j(x) (ik)^{-j}) \right| \leq \sum_{j=N+2}^{\infty} k^{1-j-\beta} = O(k^{-N-1-\beta})$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial k^\beta} h(x, k) &= \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial k^\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(k/t_j) a_j(x) (ik)^{-j} + O(k^{-N-1-\beta}) = \\ &= \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial k^\beta} \sum_{j=0}^N \frac{a_j(x)}{(ik)^j} + O(k^{-N-1-\beta}). \end{aligned}$$

Это доказывает справедливость разложения (10).

Обозначим через  $\hat{y}_\pm$  функцию

$$\hat{y}_\pm = h(x, k) \exp(\pm ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt) \quad (12)$$

Из теоремы 1 и формулы (10) следует, что

$$\gamma_\pm \equiv \hat{y}_\pm'' + k^2 q(x) \hat{y}_\pm = O(k^{-\infty}) \exp(\pm ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (13)$$

Будем искать точное решение уравнения (1) в виде

$$y(x, k) = y_\pm(x, k) = \hat{y}_\pm(x, k) u_\pm(x, k) \quad (14)$$

при начальных условиях  $u_\pm(x, k) = 1$ ,  $\frac{d}{dx} u_\pm(x, k) = 0$ ,  $(x = \alpha)$ .

Точку  $\alpha \in [a, b]$  выберем позже. В тех случаях, когда это не вызывает путаницы, индексы  $\pm$  у функций  $y, \hat{y}, u, \gamma$  будем опускать. Подставив функцию (14) в уравнение (1), получим для  $u$  задачу

$$\begin{aligned} \hat{y} u'' + 2\hat{y}' u' + \gamma u &= 0 \\ u = 1, u' = 0 \quad (x = \alpha), \end{aligned} \quad (15)$$

которую можно переписать в следующем виде

$$u'' + 2 \frac{\widehat{y}'}{\widehat{y}} u' = f$$

$$u = 1, u' = 0 \quad (x = \alpha), \quad f = -\gamma u / \widehat{y}.$$

Считая функцию  $f$  известной, решим последнюю задачу

$$u(x, k) = 1 + \int_{\alpha}^x \widehat{y}^2(\eta, k) \int_{\alpha}^{\eta} \widehat{y}^2(\xi, k) f(\xi) d\xi d\eta$$

Переставив пределы интегрирования, получим эквивалентное задаче (15) интегральное уравнение

$$u(x, k) + \int_{\alpha}^x P(x, \xi, k) u(\xi, k) d\xi = 1 \quad (16)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} P(x, \xi, k) &= P_{\pm}(x, \xi, k) = \widehat{y}_{\pm}(\xi, k) \gamma_{\pm}(\xi, k) \int_{\xi}^x \widehat{y}_{\pm}^{-2}(\eta, k) d\eta = \\ &= h(\xi, k) O(k^{-\infty}) \int_{\xi}^x h^{-2}(\eta, k) \exp(\pm 2ik \int_{\eta}^{\xi} \sqrt{q(t)} dt) d\eta \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее равенство получено после использования формул (12), (13).

В формуле (16) положим  $\alpha = b$ , если  $u = u_+$ ,  $P = P_+$  и  $\alpha = a$ , если  $u = u_-$ ,  $P = P_-$ .

В первом случае  $\xi > x$ , и поскольку в формуле (17)  $\eta \in [\xi, x]$ , то  $\eta < \xi$ . Во

втором случае  $\eta > \xi$ . Так как  $\text{Im} \sqrt{q(x)} \geq 0$ , то в обоих случаях модуль экспоненты, стоящей под знаком интеграла в (17) не превосходит единицы.

Далее, так как  $a_0 = Cq^{-\frac{1}{4}} \neq 0$  при  $x \in [a, b]$ , то из формулы (10) следует существование таких  $k', C_1 > 0, C_2 > 0$ , что  $C_1 > |h(x, k)| > C_2$  при всех  $k > k'$  и

$x \in [a, b]$ . Значит  $P(x, \xi, k) = O(k^{-\infty})$  при  $k \rightarrow \infty$ , причем это соотношение равномерно по  $x, \xi \in [a, b]$ . Но тогда уравнение (16) при достаточно больших

$k$  однозначно разрешимо, причем  $u(x, k) = 1 + O(k^{-\infty})$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Последнее

равенство можно дифференцировать по  $x, k$  любое число раз, что

доказывается дифференцированием уравнения (16). Вместе с равенством

(14) это доказывает теорему 2.



### 3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\begin{aligned}y'' - \lambda q(x)y &= 0 \\ y(0) = A, y(1) &= B\end{aligned}\tag{18}$$

Здесь  $x \in [0, 1]$ ,  $q(x)$  - вещественная функция,  $q(x) \in C^\infty(R^1)$  и  $q(x) \neq 0$ .

Считаем, что функция  $q(x) > 0$ . Число  $\lambda$  будем называть собственным значением краевой задачи (18), если соответствующая однородная задача ( $A = B = 0$ ) имеет нетривиальное решение. Обозначим через  $L_{2,q}$

пространство  $L_2([0, 1])$  с весом  $q(x)$ , т. е.  $\|u\|_{L_{2,q}} = \|u\sqrt{q}\|_{L_2}$ .

**Лемма.** Краевая задача (18) имеет счетное множество собственных значений  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , причем  $\lambda_n < 0$  при всех  $n$ ,  $\lambda_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а соответствующие собственные функции  $y = y_n(x)$  образуют полную ортогональную систему в пространстве  $L_{2,q}$ .

Доказательство. После замены  $z = \sqrt{q}y$  однородная задача (18) переходит в задачу на собственные значения для самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля.

$$\left(\frac{z'}{q(x)}\right)' + \left(\frac{3}{4} \frac{q'^2}{q^3} - \frac{1}{2} \frac{q''}{q^2}\right)z = \lambda z, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

Эта задача Штурма-Лиувилля обладает всеми свойствами, высказанными в лемме, кроме знака  $\lambda_n$ . Последнее утверждение получается так. Запишем (18) для  $y_n(x)$ , умножим это уравнение на сопряженное значение  $y_n^*(x)$  и интегрируем по отрезку  $[0, 1]$ . Взяв действительную часть от всех слагаемых и проинтегрировав по частям, получаем

$$-\int_0^1 ((y_n')^2 + \lambda_n q(x)|y_n|^2) dx = 0.$$

Отсюда  $\lambda_n = -\|y_n'\|_{L_2}^2 / \|y_n\|_{L_{2,q}}^2$ . Значит  $\lambda_n < 0$ . Лемма доказана.

Далее обозначим через  $O(\frac{1}{k})$ ,  $k \rightarrow \infty$  функции параметра  $k$ , имеющие порядок  $1/k$  при  $k \rightarrow \infty$ . Если же эти функции зависят от переменной  $x$  и при  $k \rightarrow \infty$  убывают равномерно по  $x$ , то будем использовать обозначение  $O_x(\frac{1}{k})$ .

**Теорема 3.** Существует такое целое  $n_0$ , что при  $n \rightarrow \infty$  справедлива формула

$$k_n = \sqrt{|\lambda_n|} = (n - n_0) \pi \left( \int_0^1 \sqrt{q(x)} dx \right)^{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (19)$$

соответствующие собственные функции  $y_n(x)$  равны

$$y_n(x) = C_n [q^{-\frac{1}{4}}(x) \sin(k_n \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) + O_x(\frac{1}{n})], \quad C_n = const \quad (20)$$

При  $\lambda \neq \lambda_n$  задача (18) однозначно разрешима, и при  $\lambda \rightarrow -\infty$ ,  $\lambda \neq \lambda_n$  решение имеет вид

$$y(x) = 2iw^{-1}(k)q^{-\frac{1}{4}}(x) \{ A[q^{\frac{1}{4}}(0) \sin(k \int_1^x \sqrt{q(t)} dt + O_x(\frac{1}{k}))] - B[q^{\frac{1}{4}}(1) \sin(k \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) + O_x(\frac{1}{k})] \} \quad (21)$$

где  $k = \sqrt{|\lambda|}$ ,  $w$  – некоторая бесконечно дифференцируемая функция  $k$ , обращающаяся в нуль только при  $k = k_n$  и равная

$$-2i \sin(k \int_0^1 \sqrt{q(x)} dx + O(\frac{1}{k})) \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Замечание.** Если формулу (20) заменить на следующую эквивалентную ей формулу

$$y_n(x) = C_n q^{-\frac{1}{4}}(x) [\exp(ik_n \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) (1 + O_x(\frac{1}{n})) - \exp(-ik_n \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) (1 + O_x(\frac{1}{n}))] / 2 \quad (22)$$

то она допускает дифференцирование любое число раз по  $x$ . Соответствующий аналог формулы (21) можно дифференцировать любое число раз по  $x$  и  $k$ .

Доказательство. При больших  $k$  общее решение уравнения (18) можно записать в виде

$$y(x, k) = C_1 y_+(x, k) + C_2 y_-(x, k) \quad (23)$$

где функции  $y_{\pm}(x, k)$  определены в теореме 2. Из этой же теоремы следует, что при  $k \rightarrow \infty$

$$y(x, k) = C_1 q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp(ik \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) (1 + O_x(\frac{1}{k})) + \\ C_2 q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp(-ik \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) (1 + O_x(\frac{1}{k})) \quad (24)$$

Подставляя функцию (24) в краевые условия задачи (18), выводим для неизвестных  $C_1, C_2$  линейную систему

$$\begin{aligned} C_1 y_+(0, k) + C_2 y_-(0, k) &= A \\ C_1 y_+(1, k) + C_2 y_-(1, k) &= B \end{aligned} \quad (25)$$

Эта система в силу теоремы 2 при  $k \rightarrow \infty$  принимает вид

$$C_1 (1 + O(\frac{1}{k})) + C_2 (1 + O(\frac{1}{k})) = A q^{\frac{1}{4}}(0) \quad (26)$$

$$C_1 \exp(ik \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt) (1 + O(\frac{1}{k})) + C_2 \exp(-ik \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt) (1 + O(\frac{1}{k})) = B q^{\frac{1}{4}}(1)$$

Определитель системы (26) обозначим через  $w(k)$ . Так как  $y_{\pm}(x, k) \in C^{\infty}([0, 1] * [k_0, \infty))$ , то  $w \in C^{\infty}([k_0, \infty))$ . Из (25) следует, что

$$w(k) = -2i \sin(k \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt) + O(\frac{1}{k}), \quad k \rightarrow \infty \quad (27)$$

При тех значениях  $k$ , для которых  $w(k) = 0$ , однородная система (25) имеет нетривиальное решение  $(C_1, C_2)$ , и соответствующая функция  $y(x, k)$  будет собственной функцией задачи (18). При остальных  $k$  система (25) а, значит, и задача (18) однозначно разрешимы. Таким образом, собственные значения  $\lambda_n$  задачи (18) при  $|\lambda_n| \gg 1$  находятся путем приравнивания нулю правой

части равенства (27). Решения полученного уравнения имеют вид (19). Если  $w(k_n) = 0$ , то решения однородной системы (26) имеют вид  $C_2 = -C_1(1 + O(k^{-1}))$ . Подставляя эти значения в формулу (24) получим выражение (20) для собственных функций. Решив систему (26) при  $k \neq k_n$  и подставив решение в (24), получим формулу (21).

**Теорема 4.** При  $\lambda \rightarrow +\infty$  решение задачи (18) имеет вид

$$y(x) = A \left( \frac{q(x)}{q(0)} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp(-k \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) (1 + O_x(\frac{1}{k})) +$$

$$B \left( \frac{q(x)}{q(1)} \right)^{-\frac{1}{4}} \exp(k \int_1^x \sqrt{q(t)} dt) (1 + O_x(\frac{1}{k})).$$

Это асимптотическое разложение допускает дифференцирование по  $x, k$  любое число раз.

Для уравнения  $y'' + \lambda^2 q(x)y = 0$ , ( $q > 0$ ) рассмотрим задачу на собственные значения при краевых условиях  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ . Приведем формулу для вычисления решения этой задачи

$$y \approx [C_1 \cos(\lambda \int_0^x \sqrt{q(t)} dt) + C_2 \sin(\lambda \int_0^x \sqrt{q(t)} dt)] / \sqrt[4]{q(x)}$$

Дифференцируя последнюю формулу, пренебрегая малыми высшего порядка и удовлетворяя краевому условию  $y'(0) = 0$ , получаем выражение для собственных функций

$$y \approx q^{-\frac{1}{4}} \cos(\lambda \int_0^x \sqrt{q(t)} dt)$$

Теперь, выполняя краевое условие  $y(1) = 0$ , находим асимптотику собственных чисел в первом приближении

$$\lambda_n = \pi(n + \frac{1}{2}) (\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt)^{-1}$$

В случае  $q = \sqrt{1+x}$ , получаем

$$\lambda_n = \frac{2}{3} \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

Сравнение собственных чисел, полученных методом ВКБ с точными численными значениями приведено в таблице

Номер собственного числа	1	2	3	4	5	6
Метод ВКБ	1,0472	3,1416	5,2360	7,3304	9,4248	11,5192
Точное значение	1,1879	3,2089	5,2793	7,3621	9,4497	11,5397
Ошибка (%)	11,84	2,1	0,82	0,43	0,26	0,18

Из таблицы следует, что точность приближенного решения быстро возрастает с ростом номера собственных чисел. При этом уже для третьего собственного числа относительная погрешность не превышает одного процента. Итак, асимптотические формулы дают хорошие результаты для собственных чисел с большими номерами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М., 1962
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.
3. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по уравнениям математической физики.- М.: Наука, 1978.
4. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М., 1989.
5. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., 1979.
6. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (ТР). М., 1983.
7. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики, тт. 2 и 4. – М.: Физматгиз, 1958.
9. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – М.: Наука, 1961.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
11. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976.
12. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая

- школа, 1977.
13. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
  14. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.
  15. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1976.
  16. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964.
  17. Лебедев Н.Н., Скольская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. – М.: Гостехиздат, 1955.
  18. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968.
  19. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1983.
  20. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.3. – М.: Высшая школа, 1971.
  21. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. Москва: Мир. 1972. 274 с.
  22. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва: Мир. 1986. 535 с.
  23. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. Москва: Наука. 1971. 375 с.
  24. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. Москва: Мир. 1961. 310 с.
  25. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.
  26. Федорюк М.В. Метод перевала.- М.: Наука, 1977
  27. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). Т.1. М.: Наука, 1973а.
  28. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973б.
  29. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. М.: Физматгиз, 1962.
  30. Вагер Б.Г. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Санкт- Петербург, 2003.
  31. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. Изд. 2. М.: Высшая школа, 1990.
  32. Демидович Б.П., Марон И.А. Численные методы вычислительной математики. М.: Высшая школа, 1962
  33. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966
  34. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. с англ. под ред. И.Г. Арамановича. М.: Наука, 1978.
  35. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1962 .
  36. Мэтьюс Д.Г. , Финк Д.К. Численные методы. Использование MATLAB

- Изд.3. Пер. с англ. М.: Вильямс, 2001
37. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
  38. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
  39. Богданов Ю.С. и др. Курс дифференциальных уравнений. Минск, 1996.