

На правах рукописи

Белов Дмитрий Александрович

**ГОМОГЕНИЗАЦИЯ И ГЕТЕРОГЕНИЗАЦИЯ
ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ УПРУГИХ
ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2009

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА НА КАФЕДРЕ «МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ» ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ».

Научный руководитель: кандидат технических наук
Боровков Алексей Иванович

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
профессор Мельников Борис Евгеньевич
кандидат технических наук
Шевченко Денис Владимирович

Ведущая организация: Институт проблем машиноведения РАН

Защита диссертации состоится 16 декабря 2009 года в _____ на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 при Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая д. 29, _____ учебный корпус, аудитория _____.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан «___» _____ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.229.13,
доктор технических наук, профессор

Б.С. Григорьев

Общая характеристика работы

Представленная диссертационная работа посвящена изучению и решению актуального вопроса корректного определения микронапряженного состояния однонаправленных упругих волокнистых композитов с высокой объемной плотностью, как периодических, так и хаотически армированных волокнами.

Актуальность темы исследования. Применение композитных материалов, обладающих высокой удельной прочностью и жесткостью, позволяет в современных машинах и конструкциях снизить материалоемкость и повысить коррозионную стойкость, открывает принципиально новые возможности по оптимальному проектированию и созданию новых конструкций. Современные инженерные подходы к расчету композитов позволяют найти приближенные результаты, аналитические подходы дают точные результаты лишь для периодических структур с достаточно простой геометрией. С развитием вычислительной техники и численных методов, прежде всего, метода конечных элементов (МКЭ), появилась возможность получать решения с высокой степенью точности как в случае макронапряженного состояния, так и в случае микронапряжений в компонентах композитов, которые играют определяющую роль для оценки прочности.

Фундаментальным вопросом механики композитов является вычисление эффективных упругих характеристик. Разработка моделей и методов для определения эффективных упругих характеристик периодических и, особенно, хаотически армированных композитов с высокой объемной концентрацией волокон, по-прежнему остается актуальной задачей механики композитов, которую эффективно можно решить лишь с помощью конечно-элементного (КЭ) моделирования.

За предыдущие десятилетия предложен и апробирован ряд подходов к нахождению эффективных характеристик композитов с регулярной периодической структурой (Ж.-П. Лионс, Н.С. Бахвалов, Г.А. Ванин, Э.И. Григолюк, Б.Е. Победра и др.), а также полей макронапряжений и макродеформаций, возникающих при эксплуатации в элементах конструкций, содержащих такие композитные материалы (Н.А. Алфутов, В.В. Васильев, В.Д. Протасов, Р.Б. Рикардс и др.). Влияние же случайной микроструктуры реальных композитов, а, именно, произвольного расположения волокон на их эффективные характеристики, изучено еще недостаточно полно. Для исследования хаотически армированных (стохастических) композитов наиболее рациональным является совместное применение метода конечных элементов и метода Монте-Карло.

Актуальной проблемой механики композитов является разработка методов гомогенизации и гетерогенизации, которые позволяют проводить анализ механического поведения композитов на микроуровне (характерные размеры – диаметры волокон, расстояния между волокнами и др.) и на макроуровне (характерными размерами являются размеры конструкции), осуществляя переходы с микроуровня на макроуровень (гомогенизация), а также с макроуровня на микроуровень (гетерогени-

низация). В работе под гомогенизацией понимается замена реальной микроструктуры композита на эквивалентный материал с эффективными упругими характеристиками.

Объект исследования диссертационной работы – упругий однонаправленный волокнистый композитный материал (ОВКМ), применяемый для изготовления различных слоисто-волокнистых конструкций (рис. 1). Определение напряженно-деформированного состояния в поперечной плоскости такого композита является весьма сложной проблемой. В работе рассмотрены представительные элементы объемов (ПЭО) композитных материалов. Проведено прямое КЭ моделирование микроструктуры стохастических ОВКМ (“эталонная” задача, в результате решения которой получается “эталонное” решение). Помимо геометрических моделей ПЭО с реальным хаотическим расположением волокон, использованы регуляризованные геометрические модели (хаотическая микроструктура заменена на периодическую при условии сохранения объемной концентрации волокон). Расчетные исследования выполнены для широкого спектра упругих ОВКМ со значениями отношения модулей Юнга волокна и матрицы $E_f/E_m = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10, 10^2, 10^3\}$ и переменной для каждого из этих отношений объемной концентрацией волокон в матрице $v_f = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$.

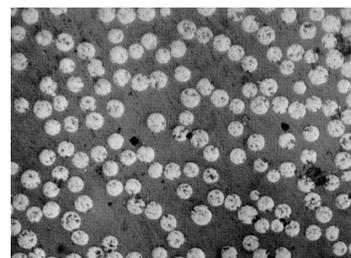


Рис. 1. Увеличенное сечение стохастического ОВКМ с борными волокнами ($v_f = 0.4$)

Цели исследования:

- разработка конечно-элементных моделей периодических и стохастических упругих ОВКМ, позволяющих корректно определять микронапряжения и микродеформации в компонентах этих композитов;
- исследование зависимости эффективных упругих характеристик стохастических ОВКМ от геометрических размеров и упругих свойств компонентов;
- обоснованный выбор регуляризованной геометрической модели для анализа упругих стохастических ОВКМ;
- разработка новых и численная верификация уже существующих методов нахождения “точных” значений микронапряжений в компонентах упругих ОВКМ при гетерогенизации, их сравнение.

Задачи исследования:

- ♦ разработка математических и конечно-элементных моделей упругих ОВКМ, учитывающих все основные элементы их микроструктуры;
- ♦ разработка алгоритма определения эффективных упругих характеристик периодических и стохастических упругих ОВКМ; программная реализация алгоритма, выбор рациональных параметров (размера минимально необходимого ПЭО, числа случайных реализаций произвольного расположения волокон в ПЭО при определении эффективных характеристик композитов с применением метода Монте-Карло)

и исследование практической сходимости получаемых результатов;

- ♦ исследование зависимости значений эффективных упругих характеристик композитов, хаотически армированных волокнами, от геометрических размеров и упругих свойств их компонентов;

- ♦ многовариантное исследование (рассматриваются композиты с $E_f/E_m = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10, 10^2, 10^3\}$ и $\nu_f = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$) возможности использования регуляризованных моделей стохастических упругих ОБКМ для нахождения их эффективных упругих характеристик и оценки микронапряженного состояния, оценка погрешностей при сравнении с эталонными решениями;

- ♦ разработка и применение метода “локальных гетерогенизаций” для нахождения полей микронапряжений в однонаправленных волокнистых композитных материалах на основе принципа локальности в механике композитов (Боровков А.И., Пальмов В.А., 1999 г.) и концепции гибридной (одновременно содержащей эквивалентный эффективный материал и фрагмент реальной микроструктуры) модели композита, оценка погрешности по сравнению с эталонными значениями;

- ♦ реализация алгоритма нахождения микронапряженного состояния периодического упругого ОБКМ на основе метода “базовых решений” (решение трех задач на растяжение и трех задач на сдвиг для двоякосимметричной ячейки периодичности композита) и “регулярных разложений” (комбинация получаемых базовых решений), оценка погрешности при сравнении с эталонными значениями;

- ♦ разработка и программная реализация метода “итерирования условий сопряжения” для устранения разрыва микронапряжений на границе раздела гетерогенной и гомогенизированной сред гибридной математической модели упругого периодического ОБКМ.

Методы исследования. В диссертационной работе применены математический аппарат теории упругости гетерогенной анизотропной среды, метод Монте-Карло. Численное моделирование выполнено с помощью метода конечных элементов, который позволяет учитывать случайное и плотное расположение волокон в матрице композита, изменение их диаметра и относительной жесткости E_f/E_m . Для решения задач использована лицензионная версия программной системы конечно-элементного анализа ANSYS, прошедшей тщательную верификацию и валидацию.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

- на основе объединения МКЭ и метода Монте-Карло разработан алгоритм определения эффективных упругих характеристик стохастических ОБКМ; получены точные выражения для вычисления 13 эффективных упругих характеристик стохастических ОБКМ, обладающих свойством моноклинной симметрии; установлен минимально необходимый размер ПЭО композитов и число реализаций произвольного расположения в них волокон при статистическом определении этих характеристик; выявлен характер зависимости значений эффективных упругих характеристик от геометрических размеров и упругих свойств компонентов стохас-

тических ОВКМ;

- предложен и обоснован метод “локальных гетерогенизаций” нахождения полей микронапряжений периодических упругих ОВКМ на основе применения принципа локальности в механике композитных материалов и концепции гибридной математической модели композита, проведена верификация и продемонстрирована его эффективность;

- реализован метод “базовых решений” и “регулярных разложений” нахождения микронапряженного состояния периодического упругого ОВКМ, проведено сравнение получаемых значений микронапряжений со значениями эталонных решений;

- на основе метода “базовых решений” и “регулярных разложений” разработан и реализован алгоритм устранения разрыва микронапряжений на границе раздела гетерогенных и гомогенизированных сред гибридных математических моделей упругих композитов с использованием специально сконструированного функционала (метод “итерирования условий сопряжения”).

Достоверность результатов, выводов и рекомендаций определяется адекватностью разработанных математических и КЭ моделей реальной микроструктуре композитов в рамках теории упругости; строгостью используемого в работе математического аппарата теории упругости гетерогенных анизотропных сред; обоснованным применением современного численного метода (МКЭ); обязательным исследованием практической сходимости КЭ результатов и результатов применения метода Монте-Карло; сравнительным анализом результатов, полученных в диссертационной работе, с экспериментальными данными, аналитическими оценками и результатами, приведенными в публикациях других авторов.

Практическая ценность работы связана с применением разработанных методов для анализа микро- и макро- напряженно-деформированного состояния композитов и элементов конструкций, содержащих однонаправленные волокнистые композитные материалы. Результаты работы широко используются в качестве методов проектирования и оптимизации конструкций в научно-исследовательской деятельности кафедры “Механика и процессы управления” СПбГПУ в рамках выполнения НИР по заказам различных организаций.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Разработанная конечно-элементная модель и алгоритм, позволяющий определять эффективные упругие характеристики хаотически армированных ОВКМ. Методика определения минимально необходимого размера представительного элемента объема композитов и числа реализаций произвольного расположения волокон в ПЭО при статистическом поиске этих характеристик;

2. Результаты многовариантного исследования зависимости эффективных упругих характеристик от параметров стохастического композита;

3. Результаты многовариантного исследования возможности использования

регуляризованных геометрических моделей стохастических ОВКМ для нахождения их эффективных упругих характеристик и оценки микронапряженного состояния;

4. Метод “локальных гетерогенизаций” нахождения полей микронапряжений в ОВКМ, разработанный на основе принципа локальности в механике композитов и концепции гибридной математической модели композита;

5. Результаты решения задач с помощью реализованного алгоритма метода “базовых решений” и “регулярных разложений” нахождения микронапряженного состояния периодического упругого ОВКМ;

6. Метод “итерирования условий сопряжения” для устранения разрыва микронапряжений на границе раздела гетерогенной и гомогенизированной сред гибридной математической модели периодического упругого ОВКМ.

Апробация. Основные результаты работы были представлены автором на XXXIV-XXXV Всероссийских межвуз. научно-техн. конф. “Неделя науки СПбГПУ” (С.-Петербург, 2005-2006 гг.); 38-й Межд. научной конф. аспирантов и студентов (С.-Петербург, СПбГУ, 2007); XI Всероссийской конф. “Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах” (С.-Петербург, 2007); научных семинарах кафедры “Механика и процессы управления” СПбГПУ (С.-Петербург, 2006-2009 гг.); научных семинарах в научно-исследовательском центре компании Schlumberger (Москва, 2008-2009 гг.).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 184 машинописных страницах, содержит 60 рисунков, 13 таблиц. Библиографический список использованных источников имеет 96 наименований. К диссертации прилагается два приложения общим объемом 11 страниц, содержащих 15 рисунков и 3 таблицы.

Основное содержание работы

В первой главе работы изложены общие сведения о композитных материалах и дана классификация однонаправленных волокнистых композитов. Определены цели исследования и основной круг задач, требующий подробного рассмотрения. Показана актуальность выбранной темы и практическая ценность результатов решения поставленных задач.

Дан краткий обзор существующих способов решения фундаментальных задач механики композитов (в данной работе рассматриваются две – определение эффективных упругих характеристик композитов и их микронапряженного состояния). Рассмотрены такие методы нахождения эффективных упругих характеристик, как классические подходы Фойгта и Рейса, Хилла, Хашина и Розена, инженерный подход Лапина - Болотина, метод асимптотического осреднения Бахвалова - Победри и ряд других. Приведено сравнение кинематических и статических граничных условий Хашина - Розена для представительных элементов объема композита при вычислении полей микронапряжений и микродеформаций в процессе поиска эффек-

тивных упругих характеристик. Обоснован выбор метода прямой гомогенизации (А.И. Боровков, 1985 г.) нахождения этих характеристик для периодических упругих ОВКМ. Описаны существующие подходы к регуляризации структуры стохастических композитов, статистическому определению их эффективных упругих характеристик и поиску полей микронапряжений в компонентах однонаправленных волокнистых композитов.

Во второй главе выбраны и описаны методы исследования. Изложен метод прямой гомогенизации, используемый для определения эффективных упругих характеристик периодических ОВКМ. Приведены допущения, которые положены в основу созданных математических и КЭ моделей упругих ОВКМ с учетом их микроструктуры: материал матрицы и включений – линейно-упругий однородный и изотропный, связь между напряжениями и деформациями в компонентах композита описывается законом Гука; отдельные компоненты композита идеально связаны между собой – на поверхностях сопряжения реализуются условия непрерывности вектора перемещения и вектора напряжений; композит представляет собой линейно-упругий макроскопически однородный материал без начальных напряжений (считаем, что остаточные напряжения, возникающие в волокнистом композите в процессе производства, самоуравновешены и малы по сравнению с напряжениями, появление которых обусловлено внешней нагрузкой); волокна в матрице для случая стохастических ОВКМ имеют минимальный гарантированный зазор между собой, равный 1% от их диаметра (либо среднего диаметра при переменных значениях).

Представлены принцип построения расчетных КЭ моделей композита, а также алгоритм КЭ решения задач, способ исследования практической сходимости получаемых решений. Даны краткие сведения об используемых в работе элементах теории вероятностей и математической статистики (метод Монте-Карло, типы распределений параметров и т.д.) при статистическом нахождении эффективных упругих характеристик или значений микронапряжений стохастических однонаправленных волокнистых композитов.

В третьей главе рассмотрена задача определения эффективных упругих характеристик хаотически армированного ОВКМ (рис. 1). Тензор модулей упругости эквивалентного эффективного материала для такого композита определяется 13-ю независимыми упругими характеристиками, так как стохастический ОВКМ обладает свойством моноклинной симметрии (микроструктура композита имеет всего одну плоскость симметрии).

На основе метода прямой гомогенизации разработан алгоритм нахождения эффективных упругих характеристик стохастического композита – для ПЭО решаем ряд краевых задач (в постановке “плоское деформированное состояние”) и ищем усредненные по ПЭО тензоры микродеформаций $\langle \epsilon \rangle$ и микронапряжений $\langle \sigma \rangle$:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV, \quad \langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (1)$$

Далее, используя эффективные определяющие соотношения $\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}^* \cdot \langle \varepsilon \rangle$ (\mathbf{C}^* – тензор эффективных модулей упругости, тензор 4-го ранга), а также соотношения связи между упругими характеристиками, формируем систему уравнений и непосредственно ищем значения эффективных констант. В работе впервые получены точные выражения для всех 20-ти эффективных упругих характеристик, между которыми существует 7 соотношений связи (т.е. независимыми являются 13 характеристик), – эффективных модулей Юнга E_1^* , E_2^* , E_3^* ; эффективных коэффициентов Пуассона ν_{12}^* , ν_{23}^* , ν_{31}^* , ν_{21}^* , ν_{32}^* , ν_{13}^* ; эффективных модулей сдвига G_{12}^* , G_{23}^* , G_{31}^* ; эффективных коэффициентов взаимного влияния первого рода $\eta_{12,1}^*$, $\eta_{12,2}^*$, $\eta_{12,3}^*$ и второго рода $\eta_{1,12}^*$, $\eta_{2,12}^*$, $\eta_{3,12}^*$; эффективных коэффициентов Ченцова $\mu_{31,23}^*$, $\mu_{23,31}^*$.

На языке APDL (язык программирования в системе конечно-элементного анализа ANSYS) разработан программный модуль нахождения эффективных упругих характеристик, используемый в дальнейшем при проведении статистических исследований. Он включает вышеупомянутый алгоритм, а также разработанный алгоритм создания геометрии ПЭО стохастического ОВКМ (в качестве исходных данных задаются объемная концентрация волокон, тип случайного распределения (равномерное, Гауссовское) диаметров и упругих характеристик волокон) с учетом возможности попадания волокон на его границу (рис. 2, а).

Изучены вопросы о минимально допустимом размере ПЭО композита, который нужно принять при статистическом определении эффективных упругих характеристик, а также вопрос о необходимом числе случайных реализаций. Предложен оригинальный метод поиска минимального ПЭО, заключающийся в следующем: создаем КЭ модель большого ПЭО композита, содержащего примерно 200 волокон, решаем ряд краевых задач, находим осредненные значения микронапряжений для вложенного множества областей этой модели (соответственно, с увеличивающимся числом волокон) и для каждого случая вычисляем эффективные характеристики, наблюдая практическую сходимость их значений. В результате проведенных многовариантных исследований установлено, что ПЭО, содержащего 50 волокон, вполне достаточно для корректного статистического определения искомых характеристик при учете результатов рассмотрения 50-ти его реализаций (рис. 2 б и в).

Изучены ПЭО стохастических упругих ОВКМ с одной и той же объемной концентрацией волокон, постоянным и переменным диаметром волокон (в пределах $\pm 25\%$ и $\pm 50\%$ от среднего диаметра; плотность распределения вероятностей значений описывается равномерным распределением), а также отклонением значения их модуля Юнга от номинального на 15% (по распределению Гаусса). Эквивалентная гомогенизированная среда имеет 6 независимых упругих характеристик, которые слабо зависят от вносимых изменений и определяются, в основном, значе-

нием объемной концентрации волокон.

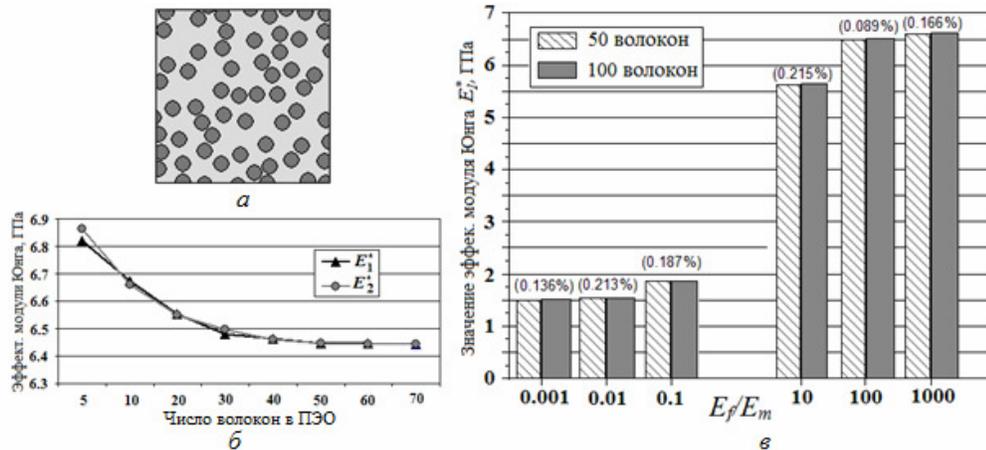


Рис. 2. Типичный ПЭО композита (а); типичная зависимость значений эффективных модулей Юнга E_1^* , E_2^* от числа волокон, содержащихся в ПЭО (б); типичная зависимость значений эффективного модуля Юнга E_1^* для ПЭО с 50 и 100 волокнами от величины E_f/E_m при $\nu_f = 0.3$ (в) (в скобках на рисунке указаны значения относительных отличий между значениями)

Рассмотрена возможность определения эффективных упругих характеристик стохастических композитов без решения статистической задачи, а лишь на основе рассмотрения одной ячейки периодичности (ЯП) регуляризованной модели с квадратной укладкой волокон. В результате многовариантных расчетов установлено, что максимальная относительная “погрешность” между значениями наблюдается для модулей сдвига, но она не превышает 11.5%. Для остальных же эффективных упругих характеристик “погрешность” менее 7.5%. При этом существует явный максимум в величине “погрешности” при средней концентрации волокон ($\nu_f = 0.3 - 0.5$), которая снижается как в случае ее уменьшения, так и при увеличении (рис. 3).

Установлено, что для определения эффективных упругих характеристик можно использовать регуляризованные модели стохастических ОВКМ с квадратной укладкой волокон.

В четвертой главе рассмотрена проблема нахождения микронапряжений в упругом однонаправленном волокнистом композите.

При анализе механического поведения композитных материалов методы гетерогенизации позволяют перейти с макроуровня исследования на микроуровень и, например, найти значения микронапряжений в зонах с повышенным уровнем этих значений. Для проведения анализа на макроуровне часто используются КЭ модели, где “реальная” микроструктура заменена на эквивалентный гомогенизированный материал, имеющий эффективные упругие свойства композита (“Ното”-модель). При переходе же к анализу на микроуровне одним из самых очевидных способов является прямое моделирование исходной микроструктуры композитного материала (“эталонная” задача), что не всегда рационально из-за сложности построения КЭ моделей с учетом сотен включений. Для решения таких задач А.И. Боровковым и В.А. Пальмовым в середине 1990-х годов было предложено использовать гибрид-

ные КЭ модели композитов (“Номо-Нет”-модели), где в области, содержащей эквивалентный эффективный материал (“гомогенизированная” область), локально восстановлен реальный гетерогенный материал композита (“гетерогенная” область). Восстановленная гетерогенная область располагается в зонах с повышенными значениями микронапряжений (как правило, на границе, в области действия локальной нагрузки, около отверстий, в зонах сопряжения композитов с разной микроструктурой и т.д.). Такой подход имеет недостаток – на границе сопряжения гетерогенной и гомотенизированной сред возникает разрыв (“скачок”) напряжений, оказывающий влияние на искомые значения в приграничной зоне. Одним из способов устранения этого влияния является использование концепции граничного слоя. Она подразумевает окружение восстановленной области некоторым “буферным” слоем, содержащим реальный материал композита (тот же, что и гетерогенная область). Этот дополнительный слой позволяет свести упомянутое влияние к минимуму, так как оно распространяется лишь на некоторое расстояние от границы раздела сред (принцип локальности в механике композитов). Главный же вопрос заключается в необходимом размере этого дополнительного слоя.

В работе проведено исследование влияния относительной жесткости E_f/E_m , а также объемной концентрации волокон ν_f на размер дополнительного слоя для упругого периодического ОВКМ. Целью являлось определение такого минимального размера этого слоя, при котором получаемые значения микронапряжений отличались бы от эталонных не более чем на 5%.

Установлено, что максимальная относительная погрешность укладывается в 5%-интервал при наличии двух дополнительных слоев ЯП. Сформулирован принцип локальности для периодических упругих ОВКМ: гомотенизированная область периодического упругого однонаправленного волокнистого композита влияет на микронапряжения в гетерогенной области не далее, чем на два характерных размера ячеек периодичности от границы раздела гетерогенной и гомотенизированной сред.

На практике возникает потребность восстановить значения микронапряжений не только в отдельной зоне гомотенизированной области, но и получить картину полного распределения микронапряжений для любого выбранного направления. В этом случае во всей интересующей области можно восстановить исходный гетеро-

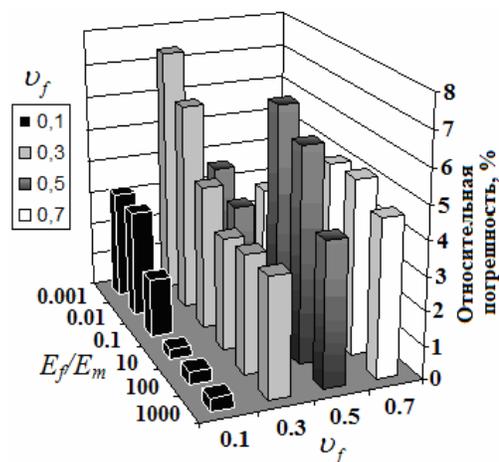


Рис. 3. Относительные “погрешности” для модуля Юнга E_1^* при его вычислении на основе ЯП регуляризованной модели композита и решения статистической задачи для стохастического ОВКМ с одинаковой объемной концентрацией волокон ν_f

генный материал, а затем решить задачу с использованием полученной Номо-Нет-модели (“Номо-Нет”–задача). Естественно, реализация такого подхода затруднительна при больших размерах этой области.

В работе предложен метод “локальных гетерогенизаций”, в основе которого лежит принцип локальности для ОВКМ (использование граничного слоя толщиной в две ЯП) и концепция гибридной Номо-Нет-модели композита. Для восстановления распределения микронапряжений решаем серию Номо-Нет-задач и составляем комбинацию финитных решений (рис. 4). В результате численной верификации метода установлено, что максимальная относительная погрешность между получаемыми с его помощью и значениями из эталонного решения не превышает 6% для всех возможных вариантов периодических упругих ОВКМ с различными значениями относительной жесткости E_f/E_m и объемной концентрации волокон ν_f .

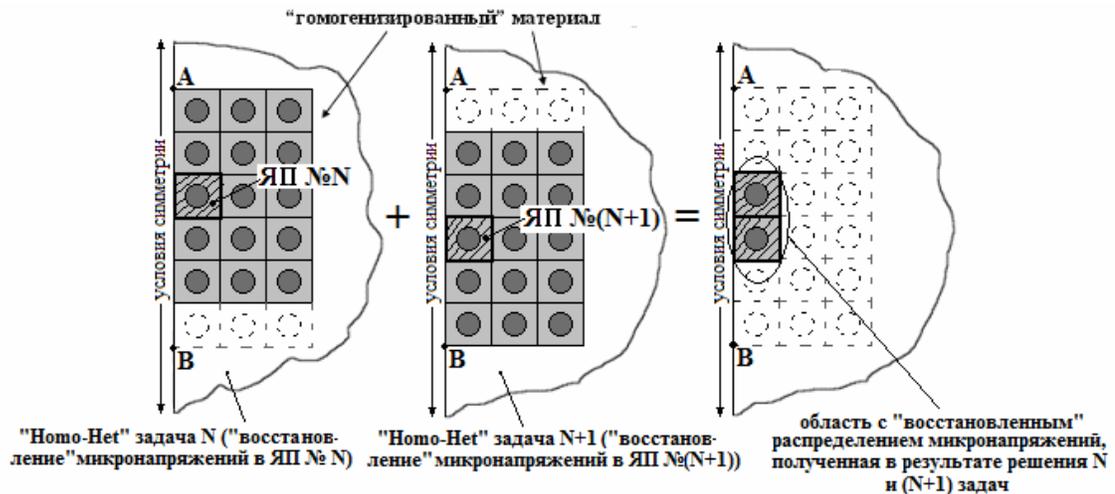


Рис. 4. Реализация метода “локальных гетерогенизаций” при восстановлении полей микронапряжений в интересующей зоне

Описанный метод, очевидно, применим для периодического ОВКМ. Изучен вопрос о возможности его использования для хаотически армированного композита (рис. 5, а) и оценки микронапряженного состояния такого композита на основе его регуляризованной модели (рис. 5, б). Решена серия задач по статистическому определению максимальных значений микронапряжений в стохастических ОВКМ (с разными значениями E_f/E_m и ν_f) под действием различных типов нагрузки. Вычислены отношения средних максимальных (минимальных) значений компонентов тензора напряжений для стохастических моделей ОВКМ (статистическая задача) к величине соответствующих компонентов, полученных при рассмотрении регуляризованных моделей, – своеобразные коэффициенты концентрации максимальных микронапряжений при переходе от периодической структуры к стохастической. Установлено значительное повышение уровня максимальных значений микронапряжений в стохастических композитах по сравнению с их регуляризованными моделями, различия особенно существенны при сдвиговой нагрузке. Установлено, что вычисляемые значения коэффициентов концентрации зависят как от относи-

тельной жесткости компонентов композита (рис. 5, в), так и от объемной концентрации волокон v_f . С увеличением v_f наблюдается рост этих значений и достижение максимума при концентрации волокон в 30-40%, а затем происходит небольшое снижение. Данный эффект можно объяснить принятым допущением о наличие минимального зазора между волокнами (1% от диаметра).

На основе многовариантных расчетов сделан вывод о возможности оценки максимальных микронапряжений в стохастических ОВКМ с помощью введения поправочных коэффициентов для результатов, полученных при рассмотрении их регуляризованных моделей. Показано, что “точные” значения максимальных микронапряжений может дать только рассмотрение реальной стохастической микро-структуры композитов.

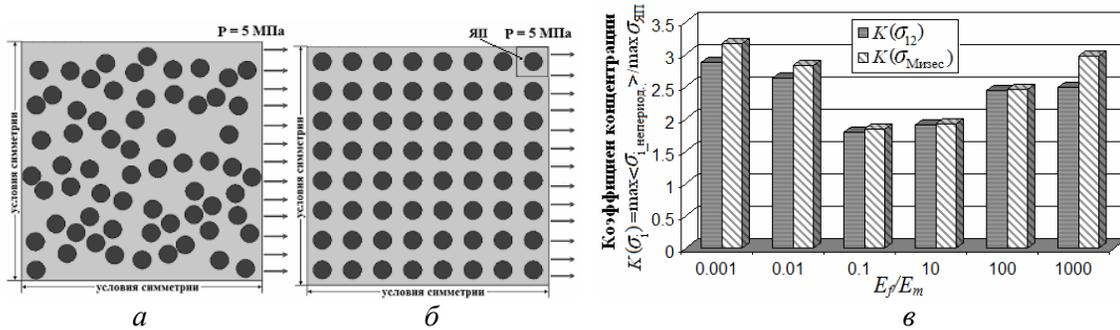


Рис. 5. Схема одного из вычислительных экспериментов с использованием стохастической (а) и регуляризованной (б) моделей ОВКМ; значения коэффициентов концентрации максимальных средних микронапряжений при рассмотрении ОВКМ с фиксированной $v_f = 0.2$ и переменным отношением E_f/E_m под действием сдвигового нагружения – (в). Приведены вычисленные коэффициенты для компонента σ_{12} тензора напряжений и эквивалентных по Мизесу напряжений $\sigma_{\text{Мизес}}$.

Пятая глава содержит результаты численной верификации разработанного алгоритма нахождения микронапряженного состояния периодического упругого ОВКМ с помощью метода “базовых решений” и “регулярных разложений” для уединенной ЯП композита. Этот метод предлагает отказаться от Номо-Net-модели композита и искать значения микронапряжений как сумму эффективных микронапряжений (из решения Номо-задачи) и суперпозиции “базовых решений” с определенными весовыми коэффициентами, вычисляемыми на основе получаемых из решения Номо-задачи значений эффективных деформаций. Он справедлив для любых периодических структур, ЯП которых обладают симметрией относительно трех плоскостей, проходящих через геометрический центр.

Упомянутый алгоритм разработан и применен для периодических упругих ОВКМ, находящихся в плоском деформированном состоянии. Основные его этапы:

1) Решение трех базовых задач (2) – (4) для ЯП (рис. 6) и нахождение флуктуаций $\tilde{\sigma} = \sigma - \langle \sigma \rangle$ компонентов тензора микронапряжений для ЯП в плоском деформированном состоянии :

Базовые задачи 1 и 2. Растяжение ЯП вдоль оси $O\xi_1$ (2) и $O\xi_2$ (3), где $O\xi_1\xi_2\xi_3$ - система координат ЯП:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \pm h_1/2: \quad \mathbf{u}_1 = \pm \Delta, \quad \sigma_{12} = 0; & \quad (2) & \quad \xi_1 = \pm h_1/2: \quad \mathbf{u}_1 = 0, \quad \sigma_{12} = 0; & \quad (3) \\ \xi_2 = \pm h_2/2: \quad \mathbf{u}_2 = 0, \quad \sigma_{21} = 0. & & \quad \xi_2 = \pm h_2/2: \quad \mathbf{u}_2 = \pm \Delta, \quad \sigma_{21} = 0. & \end{aligned}$$

Базовая задача 3. Сдвиг в плоскости $\theta \xi_1 \xi_2$:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \pm h_1/2: \quad \mathbf{u}_2 = 0, \quad \sigma_{11} = 0; & \quad (4) \\ \xi_2 = \pm h_2/2: \quad \mathbf{u}_1 = \pm \Delta, \quad \sigma_{22} = 0. & \end{aligned}$$

Здесь h_1, h_2 – размеры ЯП в поперечной плоскости (рис. 6, а); $\Delta = \text{const}$ – задаваемое перемещение.

Из первой задачи растяжения ищем $\tilde{\sigma}_{11}^{(1)}(\xi_1, \xi_2)$ и $\tilde{\sigma}_{22}^{(1)}(\xi_1, \xi_2)$, из второй – $\tilde{\sigma}_{11}^{(2)}(\xi_1, \xi_2)$ и $\tilde{\sigma}_{22}^{(2)}(\xi_1, \xi_2)$, а из задачи сдвига – $\tilde{\sigma}_{12}^{(3)}(\xi_1, \xi_2)$. Индексы 1, 2 и 3 обозначают номера соответствующих базовых задач.

2) Решение Номо-задачи (рис. 6, в) для всего композита, нахождение эффективно-го тензора микродеформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Homo}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Homo}}(x_1, x_2) = (\nabla \mathbf{u}^*(x_1, x_2))^S, \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Homo}}(x_1, x_2) = \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (5)$$

3) Определение флуктуаций компонентов тензора микронапряжений для выбранной интересующей области композита, где необходимо найти микронапряжения:

$$\tilde{\sigma}_{11}(x_1, x_2) = \frac{h_1}{2\Delta} \varepsilon_{11}^{\text{Homo}} \tilde{\sigma}_{11}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \frac{h_2}{2\Delta} \varepsilon_{22}^{\text{Homo}} \tilde{\sigma}_{11}^{(2)}(\xi_1, \xi_2); \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}_{22}(x_1, x_2) = \frac{h_1}{2\Delta} \varepsilon_{11}^{\text{Homo}} \tilde{\sigma}_{22}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \frac{h_2}{2\Delta} \varepsilon_{22}^{\text{Homo}} \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}(\xi_1, \xi_2); \quad (7)$$

$$\tilde{\sigma}_{12}(x_1, x_2) = \frac{h_2}{\Delta} \varepsilon_{12}^{\text{Homo}} \tilde{\sigma}_{12}^{(3)}(\xi_1, \xi_2). \quad (8)$$

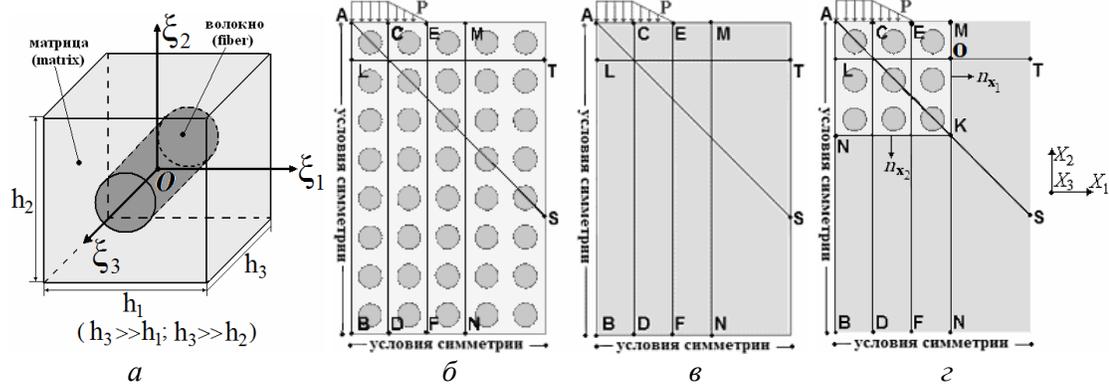


Рис. 6. Ячейка периодичности ОВКМ (а); схемы вычислительного эксперимента: для нахождения эталонного решения (б); для нахождения “эффективного” решения (Номо-задача) (в); при рассмотрении гибридной модели (Номо-Нет-задача) (z)

4) Вычисление микронапряжений рассматриваемого ОВКМ в виде суммы эффективных микронапряжений из решения Номо-задачи и найденных флуктуаций микронапряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (9)$$

Результаты применения метода продемонстрировали хорошее совпадение получаемых с его помощью значений компонентов тензора микронапряжений с соответствующими эталонными значениями (на рис. 7 представлен пример восстановленных распределений микронапряжений по направлению CD – см. рис. 6, в). Установлено, что точность получаемых значений микронапряжений зависит от точ-

ности решения базовых задач для ЯП. Точность тем выше (относительная погрешность порядка 0.1 - 0.4 %), чем дальше от места приложения нагрузки расположена область, где восстанавливаются микронапряжения, т.е. чем меньше изменяются макродеформации (Номо-задача). Этим объясняется плохое совпадения восстановленных и эталонных распределений микронапряжений на участке прямой CD (рис. 7), примыкающем к месту приложения внешней нагрузки (рис. 6).

Для численной верификации метода решен ряд задач по восстановлению микронапряжений в упругих ОВКМ с различными условиями нагружения и типами укладки волокон (прямоугольной, пентагональной). Полученные результаты полностью согласуются с приведенными выше. Установлена работоспособность данного метода и даны рекомендации по его применению.

Помимо поиска микронапряжений, метод “базовых решений” и “регулярных разложений” применен для получения эффективных упругих характеристик периодических ОВКМ. Подтверждено ожидаемое полное совпадение найденных значений со значениями, вычисленными ранее с помощью метода прямой гомогенизации.

Шестая глава посвящена изучению и решению проблемы восстановления микронапряжений в области приложения нагрузки, где существует максимальное различие между эталонными и восстановленными с помощью метода “базовых решений” распределениями микронапряжений (наблюдаются максимальные изменения макродеформаций (Номо-задача) и, соответственно, в данной зоне нет регулярных решений). Для решения данной проблемы предложено восстановить в такой зоне Номо-модели исходный гетерогенный материал, т.е. сделать локальную гетерогенизацию и рассматривать уже Номо-Нет-модель композита (рис. 6, з). При этом на границе раздела сред возникает “скачок” микронапряжений, влияющий на искомые распределения.

В работе рассмотрен новый подход к минимизации существующего разрыва напряжений на границе раздела сред. Предложен и реализован метод “итерирования условий сопряжения” его устранения путем приложения специальных силовых условий сопряжения на границу раздела сред, которые могут компенсировать существующий “скачок”. Сконструировать подобные условия сопряжения позволяет применение метода “базовых решений” и “регулярных разложений” в силу того,

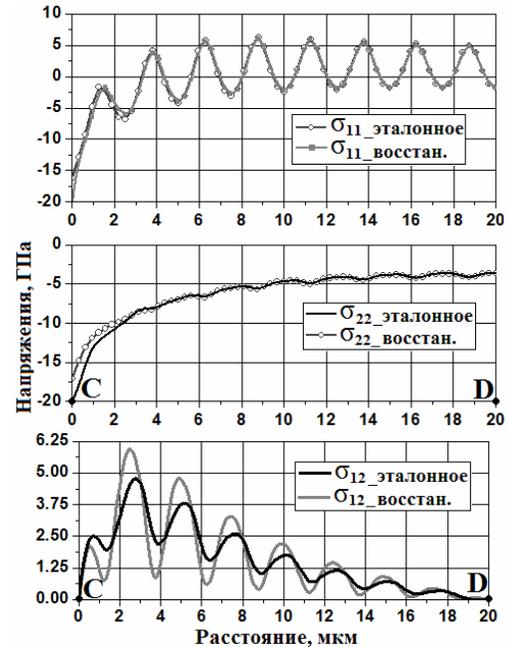


Рис. 7. Распределения компонентов тензора напряжений (по линии CD – рис. 6) из решения эталонной задачи и восстановленных с помощью рассмотренного метода

что в рассматриваемом случае устранять разрыв напряжений нужно на границе раздела гомогенизированной и гетерогенной сред Номо-Нет-модели.

Разработан алгоритм реализации предложенного метода для ОВКМ, включающий в себя нахождение специальных силовых условий сопряжения, прикладываемых на границе раздела сред в Номо-Нет-модели композита (граница МКН на рис. 6, з). Метод заключается в решении вариационной задачи о минимизации специально сконструированного функционала с дополнительно заданным условием для флуктуации микроперемещений в гомогенизированной зоне и итерационно вычисляемым (посредством решения последовательности задач) для флуктуации тензора напряжений $\sigma = \sigma^* + \tilde{\sigma}$ на границе раздела гетерогенной и гомогенизированной сред.

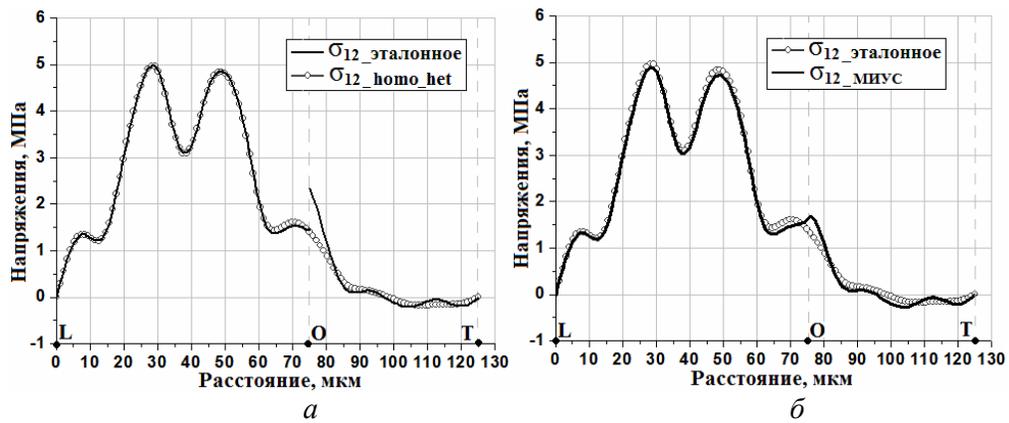


Рис. 8. Распределения компонентов тензора напряжений по линии LT (рис. 6, з), восстановленных с помощью: метода “базовых решений” и “регулярных разложений” на основе решения Номо-Нет-задачи (а); итерационного решения Номо-Нет-задачи с применением метода “итерирования условий сопряжения” (МИУС) (б)

Для практического применения метода написан программный модуль на языке программирования APDL, использованный для конкретных созданных моделей ОВКМ (например, приведенной на рис. 6, з). В результате применения метода “итерирования условий сопряжения” к решению поставленной задачи для упругого периодического ОВКМ выяснено, что упомянутый “скачок” компонентов тензора напряжений уменьшается практически до нулевого значения по сравнению с решением без его использования (рис. 8). Полная практическая сходимость итерационного процесса достигается на 12-м шаге. Следует заметить, что сходимость с “инженерной” точностью (то есть с точностью до 5%) имеет место уже на 5-м шаге алгоритма.

В общем случае численная реализация метода сопряжена с некоторыми трудностями, так как на каждой итерации необходимо вычислять новые условия сопряжения, которые прикладываются на границе раздела сред. Начальные параметры алгоритма для каждого из рассмотренных типов упругих ОВКМ индивидуальны, их нахождение довольно длительно по времени.

На основе полученных результатов даны рекомендации использования рассмотренных методов для нахождения микронапряженного состояния упругих

ОВКМ. Следует заметить, что в большинстве случаев более рациональным является применение метода “локальных гетерогенизаций”.

Основные выводы и результаты

- реализован метод “базовых решений” и “регулярных разложений” нахождения микронапряженного состояния периодического упругого ОВКМ, проведено численное сравнение получаемых значений со значениями эталонных решений, сделан вывод о возможности его использования для решения практических задач;
- разработан и реализован метод “итерирования условий сопряжения” устранения разрыва микронапряжений на границе раздела гетерогенных и гомогенизированных сред гибридных математических моделей упругих композитов, проведена его численная верификация;
- предложен и обоснован метод “локальных гетерогенизаций” нахождения полей микронапряжений периодических упругих ОВКМ, проведено сравнение получаемых с его помощью значений с эталонными решениями (максимальная относительная погрешность не превышает 5-6%), продемонстрирована его эффективность;
- на основе объединения метода конечных элементов и метода Монте-Карло разработан алгоритм определения эффективных упругих характеристик хаотически армированных ОВКМ, установлен минимально необходимый размер ПЭО композитов и число реализаций произвольного расположения волокон при статистическом определении этих характеристик;
- установлен характер зависимости значений эффективных упругих характеристик стохастических ОВКМ от геометрических размеров и упругих свойств их компонентов, показана возможность оценки значений эффективных упругих характеристик стохастических ОВКМ с достаточно высокой точностью на основе их регуляризованных моделей.

Основные положения работы отражены в публикациях:

- 1. Белов, Д.А. Принцип локальности в механике волокнистых композитов. 1. Применение принципа локальности [Текст] / Д.А. Белов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков // XXXIV Неделя науки СПбГПУ: Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – Часть IV. – С. 45-46.**
- 2. Белов, Д.А. Принцип локальности в механике волокнистых композитов. 2. Влияние относительной жёсткости и объёмной концентрации волокон композита на микронапряжения [Текст] / Д.А. Белов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков // XXXIV Неделя науки СПбГПУ: Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – Часть IV. – С. 47-48.**
- 3. Белов, Д.А. Исследование методов конечно-элементного восстановления микронапряжений в гомогенизированных волокнистых композитах [Текст] /**

Д.А. Белов, А.И. Боровков // Труды 38-й международной научной конференции аспирантов и студентов – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2007. - С. 113-119.

4. **Боровков, А.И. Конечно-элементная реализация метода устранения разрыва микронапряжений на границе раздела гетерогенного и гомогенизированного материалов периодического композита** [Текст] / А.И. Боровков, Д.А. Белов // Материалы XI Всероссийской конференции “Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах”. – СПб, 2007. – С. 215.

5. **Боровков, А.И. Конечно-элементное исследование влияния разрыва значений напряжений на границе раздела гетерогенного и гомогенизированного материала периодического композита** [Текст] / А.И. Боровков, Д.А. Белов // Материалы XI Всероссийской конференции “Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах”. – СПб, 2007. – С. 216.

6. **Боровков, А.И. Конечно-элементные методы получения точных значений микронапряжений на основе гомогенизированных математических моделей периодических композитных материалов** [Текст] / А.И. Боровков, Д.А. Белов // Материалы XI Всероссийской конференции “Фундаментальные исследования и инновации в технических университетах”. – СПб, 2007. – С. 217.

7. **Белов, Д.А. Методы конечно-элементного вычисления микронапряжений в композитных структурах. 1. Метод локальных гетерогенизаций** [Текст] / Д.А. Белов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков // XXXV Неделя науки СПбГПУ: Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – Часть IV. - С. 90-92.

8. **Белов, Д.А. Методы конечно-элементного вычисления микронапряжений в композитных структурах. 2. Метод итерирования условий сопряжения** [Текст] / Д.А. Белов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков // XXXV Неделя науки СПбГПУ: Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – Часть IV. - С. 92-94.

9. **Белов, Д.А. Методы конечно-элементного вычисления микронапряжений в композитных структурах. 3. Сравнение метода итерирования условий сопряжения и метода локальных гетерогенизаций** [Текст] / Д.А. Белов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков // XXXV Неделя науки СПбГПУ: Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – Часть IV. – С. 94-96.

10. **Белов, Д.А. Метод “локальных гетерогенизаций” для восстановления микронапряжений в композитах** [Текст] / Д.А. Белов, А.И. Боровков // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2008. – №6. – С. 44–50.

11. **Белов, Д.А. Новый метод восстановления микронапряжений в гомогенизированных композитах** [Текст] / Д.А. Белов, А.И. Боровков, В.А. Пальмов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2008. – №6. – С. 50–57.