Федеральное агентство Российской федерации по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

Л.А.Бабенко

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Курсовая работа. Часть 1.

С.-Петербург
Фундаментальная библиотека СПбГПУ
Отдел электронных публикаций

2010

Курсовая работа предназначена для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 223200 «Техническая физика», 210400 «Радиотехника» и соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины ОПД.Ф.04 «Электротехника и электроника» «Теория электрических цепей».

Целью курсовой работы является развитие навыков расчета линейных электрических цепей, в том числе с возможностью получения численных результатов при работе на компьютере.
Курсовая работа содержит два раздела. 1. Метод комплексных амплитуд, расчет простых электрических цепей. 2. Резонансные явления в электрических цепях. Одиночный колебательный контур.
Традиционная организация учебного плана предполагает, что начало выполнения курсовой работы совпадает с началом прослушивания лекций. В связи с этим пособие, наряду с заданиями, содержит краткое изложение материала отдельных разделов курса, а также решение некоторых задач. Предполагается, что это послужит необходимой основой для выполнения курсовой работы. В пособии приведен список источников, которые помогут преодолеть возможные затруднения.

Требования общего характера:
- титульный лист
- наличие текста задания и схема
- обязательное наименование пунктов
- анализ полученных результатов

Содержание

***Гармонические токи и напряжения в электрической цепи*.**

Если значение изменяющейся во времени величины повторяется через равные промежутки времени *T,* то говорят о периодическом процессе, частным видом которого является *гармоническое колебание*:

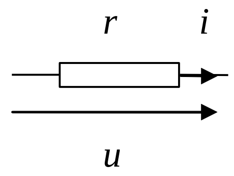
$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \sin(\omega t + \psi_1)$$

A_m – амплитуда, аргумент тригонометрической функции $(\omega t+\psi)$ – фаза колебания в момент времени t, ψ - начальная фаза (при $t = 0$), ω – угловая (круговая) частота. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$. $A_\partial = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_{(T)} a^2(t)dt}$ - действующее (среднеквадратичное) значение для гармонического колебания $A_\partial = \dfrac{A_m}{\sqrt{2}}$.

$a_{cp} = \dfrac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{T+t_1} a(t)dt = \dfrac{1}{T}\int\limits_{(T)} a(t)dt$ - среднее значение, или постоянная составляющая.

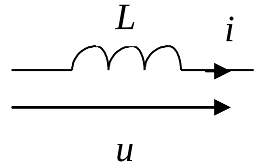
Предположим, что через идеальные пассивные элементы цепи протекает гармонический ток.

1). Резистивный элемент (сопротивление)



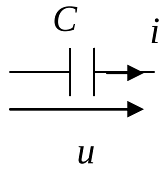
$i(t) = I_m \cos\omega t, \quad u(t) = ri = rI_m \cos\omega t$, амплитуда тока и напряжения связаны между собой $U_m = rI_m$, фазы тока и напряжения одинаковые. Мгновенная мощность $p = ui = U_m I_m \cos^2 \omega t, \quad p \ge 0$, средняя за период мощность $P = p_{cp} = \dfrac{U_m I_m}{2} = U_\partial I_\partial = I_\partial^2 r = U_\partial^2 g$

2). Индуктивный элемент (индуктивность)



$i(t) = I_m \cos\omega t, \quad u(t) = L\dfrac{di}{dt} = (\omega L)I_m \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$ - напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на $(\pi/2)$. Амплитуды тока и напряжения подчинены соотношению $U_m = (\omega L) I_m$, $x_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление. Мгновенная мощность $p = ui = -\dfrac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t$, средняя за период мощность $p_{cp} = 0$.

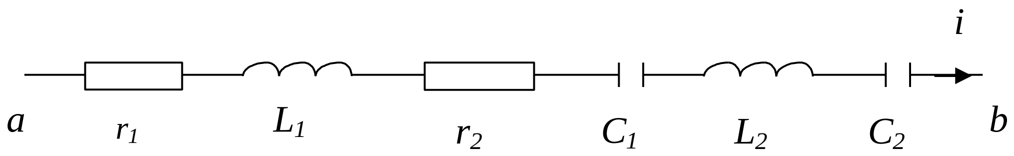
3). Емкостной элемент (емкость)



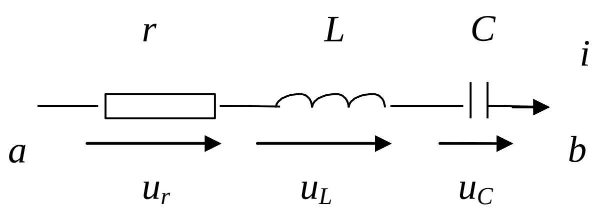
Пусть $u(t) = U_m \cos\omega t$, $i(t) = C\dfrac{du}{dt} = (\omega C)U_m \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$ - напряжение на емкости отстает по фазе от тока на ($\pi/2$). Амплитуды связаны соотношением $U_m = \dfrac{1}{\omega C} I_m$, $\dfrac{1}{\omega C}$ - модуль емкостного сопротивления $x_C = -\dfrac{1}{\omega \cdot C}$.

Мгновенная мощность $p = ui = \dfrac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t$, $p_{cp} = 0$ - средняя за период мощность.

Если пассивные элементы соединены так, что образуют ветвь, говорят о *последовательном соединении* элементов. При таком соединении через каждый элемент протекает один и тот же ток.



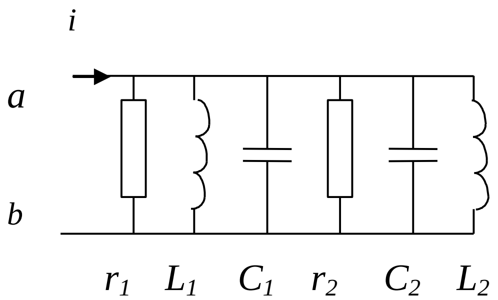
Напряжение u_{ab}, создаваемое при протекании тока i через такой двухполюсник, равно сумме напряжений, создаваемых на каждом элементе: $u_{ab} = u_{r1} + u_{L1} + u_{r2} + u_{C1} + u_{L2} + u_{C2}$. Эквивалентной представленной схеме является электрическая цепь



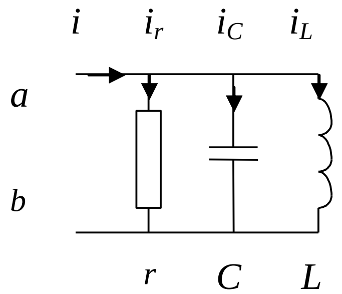
где $r = r_1 + r_2$, $\quad L = L_1 + L_2$, $\quad \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$, $\quad C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Если через такой двухполюсник протекает ток $i = I_m \cos\omega t$, то для определения напряжения на всем двухполюснике необходимо сложить три косинусоидальные функции, имеющие разные амплитуды и разные начальные фазы. $u_{ab} = rI_m \cos\omega t + (\omega L)I_m \cos(\omega t + \pi/2) + \dfrac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t - \pi/2)$.

Если пассивные элементы подключены к одной паре узлов, т.е. напряжение на каждом элементе одинаковое $u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$, где φ_a, φ_b - потенциалы узлов, то такое соединение элементов называется *параллельным*.



Такое соединение эквивалентно следующей электрической цепи



Здесь $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$, $\quad r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, $\quad C = C_1 + C_2$, $\quad \dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$, $\quad L = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.

Ток i для такого соединения в соответствии с первым законом Кирхгофа, равен сумме токов, протекающих через каждый из элементов: $i = i_r + i_L + i_C$.

Если считать, что $u_{ab} = U_m \cos\omega t$, то $i_r = \dfrac{1}{r} U_m \cos\omega t$, $\quad \dfrac{1}{r} = g$ - проводимость резистивного элемента, $i_C = (\omega C)U_m \cos(\omega t + \pi/2)$, $\quad \omega C = b_C$ - проводимость емкостного элемента, $i_L = \dfrac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t - \pi/2)$, $\quad \dfrac{1}{\omega L}$ - модуль проводимости индуктивного элемента. $b_L = -\frac{1}{\omega \cdot L}$. Расчет тока, протекающего через такой двухполюсник, требует вычисления суммы трех гармонических функций, имеющих разные амплитуды и разные начальные фазы.

При протекании тока $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ через двухполюсник, содержащий электрическое соединение резистивного и реактивного элемента, на его зажимах возникает напряжение u (t). $u(t) = U_m \cos\omega t$. φ - фазовый угол, определяющий на сколько фаза тока в двухполюснике отстает от фазы напряжения на его зажимах. При этом выделяется мощность, среднее значение которой за период $p_{\text{ср}} = P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi = U_\partial I_\partial \cos\varphi$ [Вт] - это активная мощность. Можно также записать $P = rI_{r\partial}^2$, либо $P = gU_{g\partial}^2$.

r – активное сопротивление двухполюсника, $I_{r\partial}$ - действующее значение тока, протекающего через этот элемент, g – активная проводимость двухполюсника, $U_{g\partial}$- действующее значение напряжения на этом элементе.

Кроме того, вводят в рассмотрение величину $Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin\varphi = U_\partial I_\partial \sin\varphi$ [ВАР], Q - реактивная мощность. $Q = xI_{x\partial}^2$, либо $Q = bU_{b\partial}^2$. Здесь $I_{x\partial}$ - действующее значение тока, протекающего через реактивное сопротивление x, $U_{b\partial}$- действующее значение напряжения на реактивном элементе с проводимостью b.

Величина $S = \frac{U_m I_m}{2} = U_\partial I_\partial = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [ВА]- полная (кажущаяся) мощность.

Метод комплексных амплитуд (символический метод)

Расчет электрических цепей, находящихся под воздействием тока или напряжения, изменяющегося во времени по гармоническому закону, значительно упрощается, если воспользоваться методом комплексных амплитуд. Метод комплексных амплитуд разработан в конце XIX века американскими инженерами Ч.Штейнмерцем и А.Кеннели.

Комплексная амплитуда гармонического колебания – это комплексное число, модуль которого равен амплитуде колебания, а аргумент – начальной фазе.

Если в цепи действует источник гармонических колебаний $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$, то $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$ - комплексная амплитуда ЭДС. Можно пользоваться комплексным действующим значением $\dot{E}_\partial = E_\partial e^{j\psi}$, $E_\partial = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$.

При использовании метода комплексных амплитуд реальным функциям времени (мгновенным значениям) ставят в соответствие комплексные амплитуды этих величин (их символы). Если определена комплексная амплитуда искомой величины, ее мгновенное значение вычисляется следующим образом:
$i(t) = Re\left(\dot{I}_m e^{j\omega t}\right) = Re\left(I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}\right) = Re\left[I_m e^{j(\omega t+\varphi_i)}\right] = \quad Re\left[I_m[\cos(\omega t + \varphi_i) + j\sin(\omega t + \varphi_i)]\right] = \mathrm{I_m}\cos(\omega t + \varphi_i)$, либо сразу записывают $i\ (t)$, помня, что комплексная амплитуда содержит информацию об амплитуде колебания и его начальной фазе.

Если гармонические колебания тока (или любой другой электрической величины) описаны функцией $i(t) = \sin(\omega t + \psi_1)$, то комплексная амплитуда тока может быть записана как $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_1}$, а переход к мгновенному значению тока следует осуществлять, вычисляя мнимую часть комплексного числа $\dot{I}_m e^{j\omega t}$. $i(t) = \mathrm{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t})$.

Следует подчеркнуть, что при переходе к комплексным амплитудам все переменные, изменяющиеся во времени по гармоническому закону, следует описать одной тригонометрической функцией – либо $\cos(\omega\, t + \psi)$, либо $\sin(\omega t + \psi_1)$.

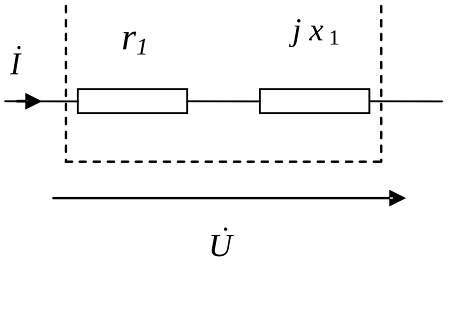
Основные законы электрических цепей в комплексной форме

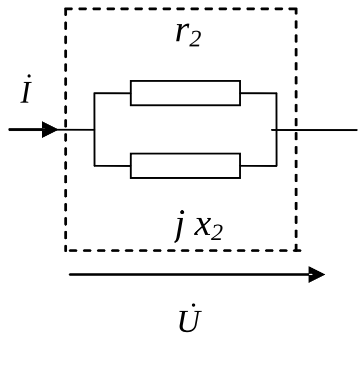
Предположим, что через двухполюсник протекает ток $i = I_m \cos(\omega t + \psi)$ и создает на зажимах двухполюсника напряжение $u = U_m \cos[\omega t + (\psi + \varphi)]$. Переходя к символам, определяют комплексное сопротивление двухполюсника $Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dfrac{U_m e^{j(\psi+\varphi)}}{I_m e^{j\psi}} = \dfrac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = ze^{j\varphi}$. $z = |Z|$ - полное сопротивление цепи, φ – фазовый угол между напряжением и током. $Z = ze^{j\varphi} = r + jx = r + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$, $r = \operatorname{Re} Z$ - активное сопротивление цепи, $x = \operatorname{Im} Z$ - реактивное сопротивление цепи. Комплексное сопротивление индуктивного элемента $Z_L = jx_L = j\omega L$, комплексное сопротивление емкостного элемента $Z_C = jx_C = -\dfrac{j}{\omega C} = \dfrac{1}{j\omega C}$.

Комплексная проводимость двухполюсника $Y = \dfrac{1}{Z} = g + jb$. $g = \operatorname{Re} Y$ - активная проводимость двухполюсника, $b = \operatorname{Im} Y$ - реактивная проводимость. Комплексная проводимость индуктивного элемента $Y_L = \dfrac{1}{j\omega L} = -\dfrac{j}{\omega L}$, комплексная проводимость емкостного элемента $Y_c = j\omega C$.

Комплексная форма записи закона Ома $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{Z}$.

Двухполюсник, через который протекает гармонический ток $i(t)$ при напряжении на его зажимах $u(t)$, можно представить разными эквивалентными схемами: либо элемент с активным сопротивлением и элемент с реактивным сопротивлением соединены последовательно, либо параллельно.





Комплексные сопротивления обоих двухполюсников должны быть одинаковыми, а именно $r_1 + jx_1 = \dfrac{jx_2 r_2}{r_2 + jx_2}$.

Очевидно, что значения активного и реактивного сопротивлений в двух схемах различные, однако характер реактивности при переходе сохраняется.

При переходе от параллельного соединения элементов к последовательному соединению сопротивления элементов равны

$$r_1 = \frac{x_2^2}{r_2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x_2}{r_2}\right)^2}, \quad x_1 = x_2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x_2}{r_2}\right)^2}$$

Если необходимо заменить схему последовательного соединения активного и реактивного сопротивлений параллельным соединением, то сопротивления элементов в параллельном соединении равны

$$r_2 = \frac{x_1^2}{r_1}\left(1 + \left(\frac{r_1}{x_1}\right)^2\right), \; x_2 = x_1\left(1 + \left(\frac{r_1}{x_1}\right)^2\right).$$

Следует заметить, что значения сопротивлений элементов при переходе от одной схемы к другой, ей эквивалентной, зависят от частоты колебаний.

В зависимости от соотношения величин активного и реактивного сопротивлений можно получить упрощенные соотношения для перехода от одной эквивалентной схемы к другой.

Если *в параллельном соединении* $|x_2| << r_2$, то $x_1 \approx x_2$, $r_1 \approx \dfrac{x_2^2}{r_2}$ - в последовательном соединении активное сопротивление при этом мало, а реактивное практически не изменяется. Если соотношение сопротивлений обратное, т.е. $r_2 << |x_2|$, то $r_1 \approx r_2$, $x_1 \approx \dfrac{r_2^2}{x_2}$ - при переходе к схеме последовательного соединения активное сопротивление практически не меняется, а реактивное сопротивление мало.

Если *в последовательном соединении* $r_1 << |x_1|$, то $x_2 \approx x_1$, $r_2 \approx \frac{x_1^2}{r_1}$ - при переходе к эквивалентной схеме с параллельным соединением сопротивление реактивного элемента остается практически таким же, сопротивление резистивного элемента становится значительным.

Для обратного соотношения величин сопротивлений, когда $|x_1| << r_1$, $r_2 \approx r_1$, $x_2 \approx \frac{r_1^2}{x_1}$ - активное сопротивление остается практически неизменным, а реактивное сопротивление становится большим.

Законы Кирхгофа в комплексной форме:

1. $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$ - алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов в ветвях, подключенных к узлу, равна 0. При сложении токи, направленные в узел, записываем с одним знаком, вытекающие из узла – с противоположным знаком.

2. $\sum_{k=1}^{m} \dot{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k$ - в замкнутом контуре алгебраическая сумма комплексных амплитуд напряжений на участках контура равна алгебраической сумме комплексных амплитуд источников ЭДС, включенных в контур. Если направление напряжений на участках контура совпадает с направлением обхода контура, такие слагаемые записывают с одним знаком. С тем же знаком записывают комплексные амплитуды ЭДС источников, которые совпадают с направлением обхода контура. У остальных слагаемых знаки противоположные.

Энергетические характеристики электрической цепи в комплексной форме: $\tilde{S} = \dot{U}_\partial I_\partial^* = U_\partial I_\partial \cos\varphi + jU_\partial I_\partial \sin\varphi = P + jQ = Se^{j\varphi}$ - полная комплексная мощность (знак * обозначает комплексное сопряжение).

Уравнение баланса комплексной мощности $\sum_{(n)}\dot{U}_n I_n^* = 0$, n – номер ветви, $\dot{U}_n$- комплексная амплитуда напряжения на ветви, $\dot{I}_n$- комплексная амплитуда тока, протекающего через ветвь. Сумма комплексных мощностей, определенных для всех ветвей цепи, равна 0.

Уравнение баланса мощности можно записать иначе. Активные элементы цепи – идеальные источники – отдают энергию в цепь, пассивные элементы ее поглощают. $\sum_{k=1}^{m}(\dot{E}_k I_k^* + \dot{U}_k \mathfrak{I}_k^*) = \sum_{k=1}^{n}[I_k^2 r_k + jI_k^2(x_{Lk} + x_{Ck})]$

В левой части равенства $\dot{I}_k$- комплексная амплитуда тока, протекающего через источник ЭДС, знак первого слагаемого положительный, если направление тока I_k и ЭДС E_k совпадают, $\dot{\mathfrak{I}}_k$- комплексная амплитуда тока источника тока, $\dot{U}_k$- комплексная амплитуда напряжения на зажимах этого источника. Знак второго слагаемого положительный, если направления тока источника $\mathfrak{I}_k$ и напряжения U_k на этом источнике, не совпадают.

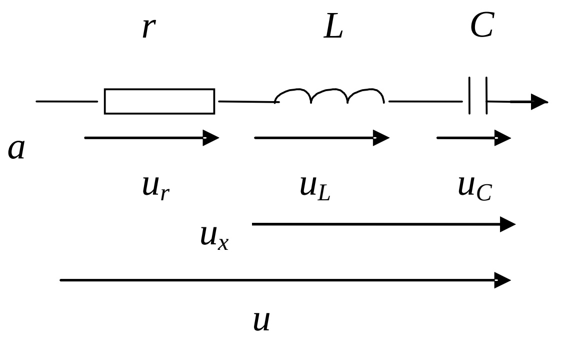
В правой части равенства I_k – амплитуды токов, протекающих через пассивные элементы цепи.

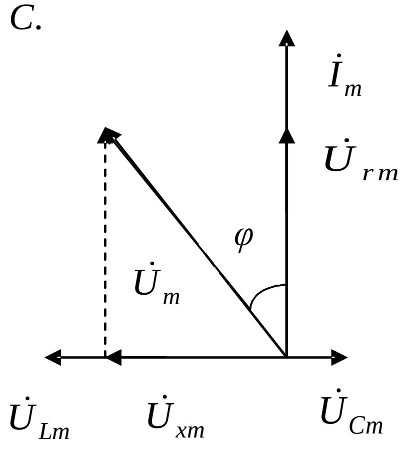
Применение векторных диаграмм для расчета электрических цепей.

В ряде случаев расчет упрощается и имеет большую наглядность, если воспользоваться изображением гармонических функций с помощью векторов, т.е. так называемой векторной диаграммой. Введение комплексных токов и напряжений сопоставляет гармоническому колебанию комплексное число. В свою очередь каждому комплексному числу можно сопоставить определенный вектор, лежащий в плоскости комплексных чисел и идущий из начала координат в точку, соответствующую этому комплексному числу. Длина вектора в определенном масштабе равна амплитуде A_m соответствующей гармонической функции, а угол с положительным направлением вещественной полуоси изменяется во времени по такому же закону, как и фаза гармонической функции $\alpha(t) = \omega \cdot t + \psi$. Вектор вращается в комплексной плоскости против хода часовой стрелки с угловой скоростью ω. Проекция этого вектора на вещественную ось в выбранном масштабе равна мгновенному значению исходной гармонической функции времени $a(t) = \mathrm{Re}(\dot{A}_m \cdot e^{j\omega \cdot t})$. Совокупность векторов, изображающих гармонически изменяющиеся величины, называется *векторной диаграммой*. Углы между векторами в случае колебаний одной частоты определяются разностью начальных фаз колебаний и не зависят от времени. Заметим, что векторы, представляющие на комплексной плоскости гармонические колебания разных частот, будут вращаться вокруг начала координат с разными угловыми скоростями. Поэтому для случая гармонических воздействий разных частот задачу следует решать, используя принцип суперпозиции. Обычно при расчете цепей гармонического тока интересуются только амплитудными значениями и сдвигами по фазе колебаний друг относительно друга. В этих случаях при построении векторной диаграммы точно соблюдают углы сдвига фаз между векторами, а положение их относительно вещественной и мнимой осей может быть произвольным и поэтому обычно оси не указывают.

Первоначально строят некий опорный вектор, длина которого в выбранном масштабе равна амплитуде опорного гармонического колебания. Этот вектор ориентируют произвольно. Векторы, соответствующие остальным гармоническим функциям, изображают с учетом выбранного масштаба длины и с учетом соотношения начальных фаз этих функций и функции, выбранной за опорную. При использовании правил сложения векторов векторная диаграмма позволяет определить искомые амплитуды и начальные фазы для рассматриваемых гармонических колебаний.

Построим векторную диаграмму для электрической цепи, содержащей *последовательное соединение* элементов *r*, *L*, *C*.





Через эти элементы протекает один и тот же ток $i = I_m \cos \omega t$, поэтому за опорный вектор примем вектор, соответствующий комплексной амплитуде тока. Строим произвольно ориентированный вектор, длина которого в выбранном масштабе тока равна амплитуде тока I_m. Векторы, соответствующие напряжению на отдельных элементах цепи, изображаем с учетом выбранного масштаба длины и с учетом соотношения начальных фаз.

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m Z = \dot{I}_m (r + j\omega L - \frac{j}{\omega C}) = \dot{I}_m (r + jx) = \dot{U}_{rm} + \dot{U}_{xm}.$$

$$\dot{U}_{rm} = \dot{I}_m r, \ \ \dot{U}_{xm} = \dot{I}_m x e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad x = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Напряжение на резистивном элементе имеет начальную фазу, совпадающую с начальной фазой тока, следовательно, вектор $\dot{U}_{rm}$ направлен так же, как вектор $\dot{I}_m$. Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток, протекающий через этот элемент, на $\pi / 2$, напряжение на емкости отстает по фазе от тока, протекающего через этот элемент, на $\pi / 2$. Следовательно, векторы $\dot{U}_{Lm}$ и $\dot{U}_{Cm}$ сдвинуты между собой на угол π, напряжения на индуктивном и емкостном элементах при последовательном соединении находятся в противофазе.

Вектор суммарного напряжение $\dot{U}_{mx}$ на этих двух элементах (вектор напряжения на реактивности) – результат сложения этих двух векторов (вычитания – с учетом их направлений). Рисунок сделан в предположении, что индуктивное сопротивление больше емкостного $U_{L\,m}$ > $U_{C\,m}$. , поэтому вектор $\dot{U}_{x\,m} = \dot{U}_{Lm} - \dot{U}_{Cm}$ опережает вектор тока на π / 2. Комплексную амплитуду напряжения $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ на участке с последовательным соединением всех элементов при протекании тока $i = I_m \cos \omega t$ можно определить, сложив векторы $\dot{U}_{rm}$ и $\dot{U}_{xm}$. Амплитуда суммарного напряжения $U_m = \sqrt{U^2_{r\,m} + U^2_{x\,m}}$, начальная фаза напряжения превосходит начальную фазу тока на угол $\varphi = arctg \dfrac{U_{x\,m}}{U_{r\,m}}$. $\varphi = \arg \dot{U}_m - \arg \dot{I}_m$.

На рисунке изображена диаграмма напряжений. Так как значения амплитуды напряжения на отдельных участках исследуемой цепи пропорциональны амплитуде тока (это общий множитель для всех векторов) и сопротивлениям r - резистивного элемента, $x_L = \omega L$ - индуктивного элемента и x_C = - 1/ (ωC) - емкостного элемента, построенную диаграмму также называют диаграммой сопротивлений. Реактивное сопротивление цепи $x = x_L + x_C = \omega L - 1/(\omega C)$. Модуль комплексного сопротивления цепи $|Z|$ определяется как отношение амплитуды полного напряжения к амплитуде тока в цепи $|Z| = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_\partial}{I_\partial} = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + (\omega L - {}^{1}\!/_{(\omega C)})^2}$.

Угол φ определяют как угол, на который начальная фаза тока отстает от начальной фазы напряжения на двухполюснике, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Для угла φ справедливы соотношения $\cos\varphi = \dfrac{U_{r\,m}}{U_m} = \dfrac{r}{z}$, $\sin\varphi = \dfrac{U_{x\,m}}{U_m} = \dfrac{x}{z}$, $tg\varphi = \dfrac{x}{r}$.

В рассмотренном примере предположено, что индуктивное сопротивление больше, чем емкостное, угол φ > 0, ток отстает по фазе от напряжения на этот угол.

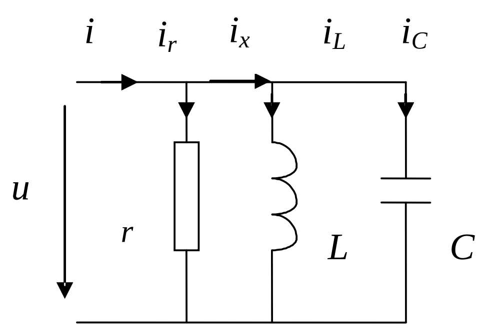
Если изменить частоту колебаний так, чтобы сопротивление индуктивного элемента и модуль сопротивления емкостного элемента стали одинаковыми, т.е. $\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$, то длины векторов, соответствующих напряжению на каждом из реактивных элементов, станут равными $\left|\dot{U}_{Lm}\right| = \left|\dot{U}_{Cm}\right|$, общее напряжение на двух реактивных элементах окажется равным 0. $\dot{U}_{xm} = 0$. В этом случае напряжение на двухполюснике и ток, протекающий через него, имеют одинаковую фазу (угол φ = 0).

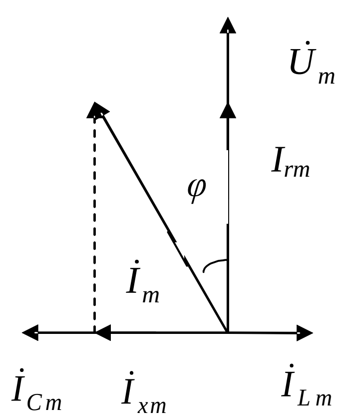
Для параллельного соединения элементов построение векторной диаграммы начинают с изображения вектора $\dot{U}_m$, соответствующего комплексной амплитуде напряжения, приложенного к цепи.

$$\dot{I}_m = \dot{U}_m Y = \dot{U}_m \left(\frac{1}{r} + j\omega C - \frac{j}{\omega L} \right) = \dot{U}_m (g + jb) = \dot{I}_{rm} + \dot{I}_{xm},$$

$$\dot{I}_{rm} = \dot{U}_m g = \dot{U}_m \frac{1}{r},\ \dot{I}_{xm} = \dot{U}_m b e^{j\frac{\pi}{2}},\ \ b = \omega\, C - \frac{1}{\omega L}.$$

Вектор $\dot{I}_{rm}$ комплексной амплитуды тока, протекающего через резистивный элемент, совпадает с направлением вектора $\dot{U}_m$. Вектор $\dot{I}_{Cm}$ комплексной амплитуды тока, протекающего через емкостной элемент, опережает вектор напряжения на этом элементе на $\pi/2$, а вектор $\dot{I}_{Lm}$ комплексной амплитуды тока, протекающего через индуктивный элемент, отстает на угол $\pi/2$ от вектора напряжения на этом элементе. Вектор $\dot{I}_{xm}$ комплексной амплитуды тока, протекающего через два параллельно соединенных реактивных элемента, равен разности векторов $\dot{I}_{Cm}$ и $\dot{I}_{Lm}$ (эти векторы направлены в противоположные стороны).





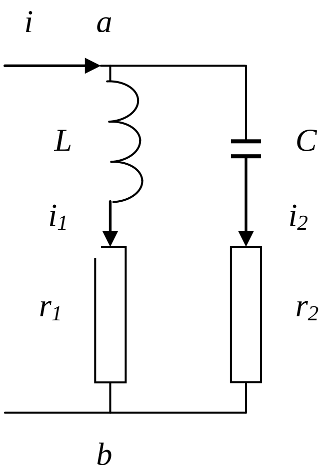
В примере предположено, что емкостное сопротивление меньше индуктивного, следовательно, $I_{Cm} > I_{Lm}$. Вектор $\dot{I}_{xm}$ совпадает в этом случае с направлением вектора $\dot{I}_{Cm}$. Ток, протекающий через двухполюсник, образованный параллельным соединением элементов, определяется вектором, полученным в результате сложения векторов $\dot{I}_{rm}$ и $\dot{I}_{xm}$. Амплитуда этого тока (длина вектора $\dot{I}_m$) $I_m = \sqrt{I^2_{r\,m} + I^2_{x\,m}}$. Ток опережает напряжение на зажимах двухполюсника на угол φ, в данном примере $\varphi < 0$. Построенная векторная диаграмма – диаграмма токов. Значения амплитуд токов, протекающих через отдельные ветви параллельного соединения, пропорциональны амплитуде напряжения, приложенного к двухполюснику (множитель, общий для всех токов) и проводимости различных элементов: $g = \frac{1}{r}$ - реактивного элемента, $b_C = \omega C$ - емкостного элемента, $b_L = -\frac{1}{\omega L}$ - индуктивного элемента. Поэтому построенную векторную диаграмму можно рассматривать как диаграмму проводимостей. Модуль комплексной проводимости цепи

$$|Y| = \left|\frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m}\right| = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L + b_C)^2} = \sqrt{g^2 + (-1/(\omega L) + \omega C)^2},$$

$b = b_L + b_C$ - реактивная проводимость, может быть величиной и положительной, и отрицательной. Величина угла φ может быть определена из соотношений: $\cos\varphi = \frac{g}{y}$, $\sin\varphi = \frac{b}{y}$, $tg\varphi = \frac{b}{g}$. В рассмотренном примере угол $\varphi < 0$, ток в двухполюснике опережает по фазе напряжение на его зажимах.

Если изменить частоту колебаний так, чтобы $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, ток $\dot{I}_{xm}$, текущий через параллельное соединение индуктивного и емкостного элементов, станет равным 0, а полный ток $\dot{I}_m$, протекающий через двухполюсник, и напряжение $\dot{U}_m$ на нем будут иметь одинаковую фазу.

Рассмотрим пример.



Для электрической цепи заданы: напряжение на зажимах ab $u_{ab} = 10\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$ В,

ток в ветви с емкостным элементом

$i_2 = 38\cos(\omega t + 0.39\pi)$ мА,

амплитуда напряжения на сопротивлении r_1

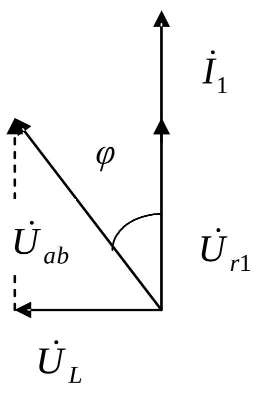
U_{r1} = 4.47 В, r_1 = 100 Ом, ω = 0.8 10 ^{5} сек$^{-1}$

Требуется определить ток $i_1(t)$, протекающий в ветви с индуктивным элементом, общий ток i (t) и элементы электрической цепи L, C, r_2. Построить векторную диаграмму.

При решении задачи для гармонических колебаний тока и напряжения в цепи воспользуемся методом комплексных амплитуд. Предварительно гармонические колебания заданных величин должны быть описаны одинаковыми функциями времени: либо cos(ωt+α), либо sin(ωt+β). Положим эту зависимость в виде cos (ωt+α).

Комплексные амплитуды заданных величин $\dot{U}_{ab} = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$ В, $\dot{I}_2 = 0.038 \cdot e^{j0.39\pi}$ А. Это позволяет определить комплексное сопротивление ветви, содержащей емкостной элемент. $Z_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}_2} = (200 - j167)$Ом.

Следовательно r_2 = 200 Ом, C = 75 нФ ($\frac{1}{\omega C}$ = 167 Ом).



Рассмотрим ветвь с индуктивным элементом. Построим векторную диаграмму, Через резистивный и индуктивный элементы протекает ток, комплексная амплитуда которого $\dot{I}_1$. Комплексная амплитуда напряжения на сопротивлении r_1 равна $\dot{U}_{r1} = \dot{I}_1 r_1$, а комплексная амплитуда напряжения на индуктивности

$\dot{U}_L = \dot{I}_1(j\omega L) = x_L \dot{I}_1 e^{j\frac{\pi}{2}}$. Следовательно, векторы, соответствующие току в ветви с индуктивным элементом и напряжению на резистивном элементе имеют одинаковое направление, а вектор, соответствующий напряжению на индуктивности, опережает вектор тока на угол $\frac{\pi}{2}$. Вектор, соответствующий комплексной амплитуде напряжения на рассматриваемой ветви $\dot{U}_{ab}$, является результатом сложения двух векторов для комплексных амплитуд напряжений на элементах ветви. Длины указанных векторов определяются амплитудами соответствующих напряжений. Следовательно, данные задачи позволяют определить амплитуду напряжения на индуктивности $U_L = \sqrt{U_{ab}^2 - U_{r1}^2} = 8.95$ В.

Амплитуда тока в ветви I_1 может быть определена из соотношения $I_1 = \frac{U_{r1}}{r_1} = 0.045A$, а индуктивность $L = \frac{1}{\omega}\frac{U_L}{I_1} = 2.5$ мГн.

Угол φ является разностью аргументов комплексных чисел $\dot{U}_{ab}$ и $\dot{I}_1$. Это угол, на который фаза тока в ветви с индуктивностью отстает от фазы напряжения на узлах ветви. Угол φ можно определить из векторной диаграммы, что позволит написать выражение для тока в ветви.

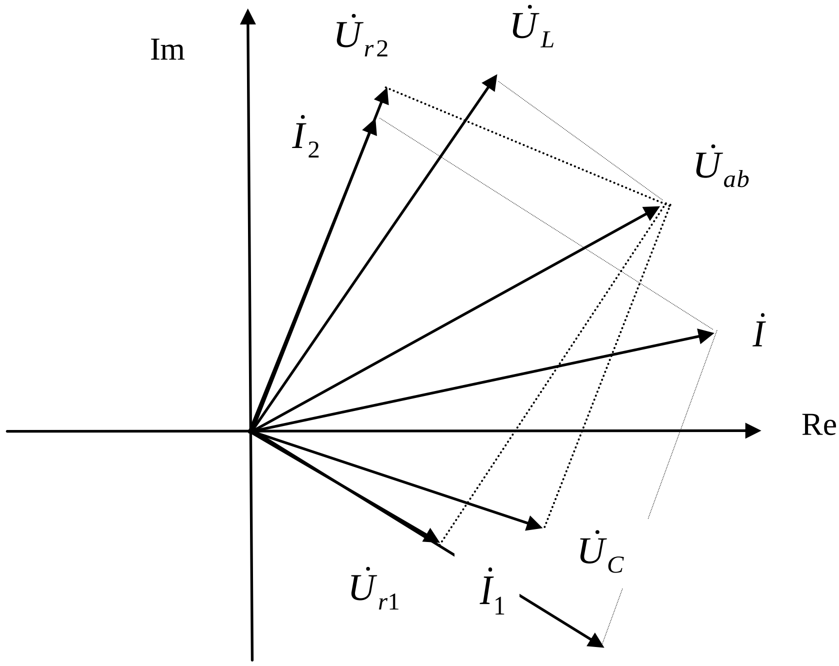
Можно поступить иначе. Комплексная амплитуда тока в ветви с индуктивным элементом $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_1}$. $Z_1 = r_1 + j\omega L$ - комплексное сопротивление ветви. Следовательно, $\dot{I}_1 = 0.045e^{-j0.186\pi}$ А.

Комплексная амплитуда общего тока $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. $\dot{I} = 0.052e^{j0.07\pi}$ А.

Мгновенное значение общего тока $i(t) = 0{,}052\cos(\omega t + 0.07\pi)$ А,

Мгновенное значение тока в ветви с индуктивностью $i_1 = 0.045\cos(\omega t - 0.186\pi)$ А.

Построим векторную диаграмму с участием векторов, соответствующих комплексным амплитудам рассмотренных величин, на комплексной плоскости.

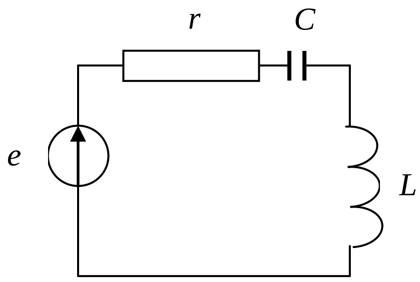


Резонанс в электрической цепи.

Электрическая цепь, содержащая реактивные элементы различных типов *(L* и *C*) является простейшей колебательной системой. При приближении частоты внешнего воздействия к некоторому определенному значению, амплитуда отклика таких цепей может резко изменяться. Это явление называют резонансом. В общем случае различные величины, характеризующие процессы в электрической цепи, достигают максимальных значений при разных, хотя достаточно близких частотах. Для того чтобы определить, какую частоту считать резонансной, в теории цепей, как правило, применяют не амплитудный, а фазовый критерий резонанса. Резонансной называют частоту, при которой в цепи, содержащей реактивные сопротивления, ток совпадает по фазе с напряжением на зажимах цепи.

Последовательный колебательный контур.

Последовательный колебательный контур – это электрическая цепь, в которой источник энергии включен последовательно с индуктивным и емкостным элементами контура.



Анализ режима установившихся вынужденных колебаний в последовательном контуре позволяет определить частоту гармонических колебаний $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, при которой в контуре резко возрастает ток – наблюдается явление резонанса. ω_0 – *резонансная частота* контура. На резонансной частоте контур обладает чисто активным сопротивлением r, а реактивное сопротивление равно нулю $x = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$. Сопротивление $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ называют *характеристическим, или волновым сопротивлением* контура.

Добротность колебательного контура определяют соотношением $Q = 2\pi \frac{W_\rho}{W_r}$, где W_ρ – энергия, запасенная в реактивных элементах контура, W_r – потери энергии за период колебаний. Для последовательного контура *добротность контура* $Q = \frac{\rho}{r} = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Обратная величина $d = \frac{1}{Q}$ - *затухание* контура. Сопротивление r включает в себя сопротивление потерь реальных элементов контура, а также сопротивление источника сигнала и сопротивление нагрузки (если они есть). Для контура с малыми потерями добротность $Q >> 1$, затухание $d << 1$. Для высокодобротных контуров $Q > 200$.

При резонансе в последовательном контуре амплитуда тока максимальна, амплитуда напряжения на емкостном элементе U_{Cm} равна амплитуде напряжения на индуктивном элементе U_{Lm} и превышает амплитуду напряжения, создаваемого источником в Q раз: $U_{Cm} = U_{Lm} = Q\ U_m$. Поэтому резонанс в последовательном колебательном контуре называют *резонансом напряжений*. Это обстоятельство позволяет использовать последовательный контур для усиления напряжения.

Указанные значения напряжения на реактивных элементах не являются максимально возможными. Частота, соответствующая максимуму напряжения на емкости, $\omega_C = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Максимуму напряжения на индуктивности соответствует частота $\omega_L = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. В контуре высокой добротности максимальные значения $U_{C\max}$ и $U_{L\max}$ мало отличаются от напряжения на тех же элементах контура при резонансной частоте. Частоты ω_C и ω_L с увеличением добротности приближаются к резонансной частоте ω_0.

Добротность контура определяет его частотно-избирательные свойства. Под избирательностью контура понимают степень, с которой контур способен выделить колебания одной частоты из группы колебаний разных частот, подведенных к контуру. Для ее оценки рассматривают амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) колебательного контура, которые показывают изменение амплитуды тока в контуре и амплитуды напряжения на реактивных элементах в зависимости от изменения частоты гармонических колебаний. Эти зависимости называют *резонансными кривыми* контура.

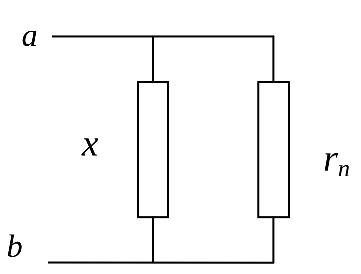
Полосой пропускания (или шириной резонансной характеристики) контура называют область частот, в пределах которой ток в контуре не менее некоторого заданного уровня. Обычно полосу пропускания определяют по уровню $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 0.707 от максимума АЧХ. При этом относительная полоса пропускания частот определяется добротностью контура $\frac{\omega_в - \omega_н}{\omega_0} = d = \frac{1}{Q}$, где $\omega_в$ – верхняя, а $\omega_н$ – нижняя частоты полосы пропускания. Чем выше добротность, тем острее резонансные кривые, тем выше избирательность контура.

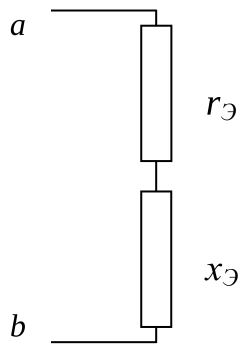
Если предположить, что источником колебаний в последовательном контуре является идеальный источник напряжения, т.е. источник с нулевым внутренним сопротивлением, сопротивление контура r можно считать малым. Здесь r – сопротивление потерь элементов контура. При этом добротность контура $Q = \frac{\rho}{r}$ - *собственная добротность* контура. Однако для возбуждения колебаний может быть использован источник, внутреннее сопротивление которого отлично от нуля. Если ограничиться случаем, когда внутреннее сопротивление источника вещественно (равно R_i), его необходимо суммировать с сопротивлением потерь контура. В этом случае *эквивалентная добротность* (или просто добротность) контура $Q_{экв} = \frac{\rho}{r + R_i} = \frac{Q}{1 + R_i/r}$. Чем больше внутреннее сопротивление источника R_i, тем менее острыми будут резонансные кривые последовательного колебательного контура, определяемые при постоянной амплитуде ЭДС источника, и тем шире полоса пропускания контура.

Подобным образом на частотные свойства контура влияет нагрузка. Обычно нагрузка, обладающая сопротивлением r_n, подключается параллельно емкостному или индуктивному элементу контура. Параллельное соединение r_n и x можно заменить эквивалентным двухполюсником, в котором активное и реактивное сопротивления включены последовательно. Эквивалентность таких двухполюсников рассмотрена на стр.10.

Для эквивалентной схемы

$$r_{Э} = \frac{r_n}{1+\left(\frac{r_n}{x}\right)^2}, \; x_{Э} = \frac{x}{1+\left(\frac{x}{r_n}\right)^2}.$$





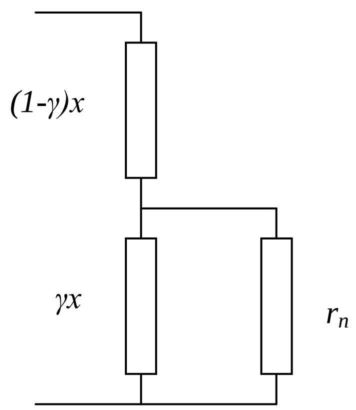
Таким образом, подсоединение нагрузки вносит в контур дополнительное активное сопротивление $r_{Э}$ и изменяет реактивное сопротивление, следовательно, увеличивает активное сопротивление контура и изменяет резонансную частоту,

В этом случае частота колебаний, при которой реактивное сопротивление контура с учетом вносимого сопротивления $x_{Э}$ становится равным нулю, равна $\omega_{C\,p} = \omega_0 \sqrt{1-\left(\frac{x}{r_n}\right)^2}$ для случая включения нагрузки параллельно емкостному элементу и $\omega_{L\,p} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r_n}\right)^2}}$ при включении нагрузки параллельно индуктивному элементу.

Очевидно, что подключаемая нагрузка не должна существенно изменять основные характеристики колебательного контура. Для этого, как следует из приведенных на стр.10 соотношений, необходимо, чтобы сопротивление нагрузки r_n для частот, близких к ω_0, значительно превышало реактивное сопротивление x емкостного и индуктивного элементов, которое близко к характеристическому сопротивлению ρ. Если $\left(\frac{x}{r_n}\right)^2 << 1$, можно считать, что *вносимое* в контур *сопротивление* $r_Э \approx \dfrac{x^2}{r_n} \approx \dfrac{\rho^2}{r_n}$, а реактивное сопротивление элемента, параллельно которому подключена такая нагрузка практически не меняется ($x_Э \approx x$). Остается неизменной при этом и резонансная частота последовательного контура $\omega_{C\,p} \approx \omega_{L\,p} \approx \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Влияние вносимого сопротивления $r_Э$ на избирательные свойства контура аналогично влиянию внутреннего сопротивления источника. И в этом случае необходимо говорить о *нагруженной добротности* $Q_Э = \dfrac{\rho}{r + r_Э} = \dfrac{Q}{1 + \dfrac{Q\rho}{r_n}}$, которая меньше собственной добротности контура.

Если сопротивление нагрузки r_n невелико, для уменьшения влияния подключения такой нагрузки на резонансные свойства контура, можно использовать *частичное* (неполное) включение, образуя делитель на реактивном сопротивлении.



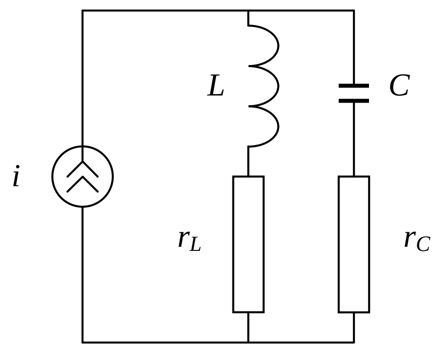
На рисунке γ – коэффициент деления. $\gamma \le 1$.

Если коэффициент деления γ выбран таким образом, что для частот ω, близких к резонансной частоте контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $r_n >> \gamma|x|$, то можно считать, что $r_{Э\gamma} = \dfrac{r_n}{1+\left(\frac{r_n}{\gamma x}\right)^2} \approx \dfrac{(\gamma x)^2}{r_n}$, $x_{Э\gamma} = \dfrac{\gamma x}{1+\left(\dfrac{\gamma x}{r_n}\right)^2} \approx \gamma x$.

И в этом случае резонансная частота контура остается практически неизменной, вносимое активное $r_{Э\gamma}$ ослаблено коэффициентом γ^2. Однако при частичном подключении нагрузки в γ раз уменьшается модуль коэффициента передачи напряжения, т.к. выходное напряжение снимается с делителя.

Простой параллельный колебательный контур

Параллельный колебательный контур отличается тем, что источник колебаний подключен к параллельному соединению двух ветвей, содержащих емкостной и индуктивный элементы. В простейшей из разновидностей таких контуров одна ветвь состоит из индуктивного и резистивного элементов, другая – из емкостного и резистивного элементов. Это простой параллельный контур, или контур I вида.



Как и в последовательном колебательном контуре, точной частотой резонанса в таком контуре считается частота, при которой сдвиг фаз между напряжением и током на входе контура равен нулю. Это означает, что при этом равна нулю реактивная проводимость контура. $\omega_P = \omega_0 \sqrt{\dfrac{1-\left(\dfrac{r_L}{\rho}\right)^2}{1+\left(\dfrac{r_C}{\rho}\right)^2}}$, где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Если предположить, что активное сопротивление в контуре невелико (сопротивления потерь элементов r_L, $r_C << \rho$), то, как и для последовательного колебательного контура, резонансная частота параллельного колебательного контура, находящегося под воздействием источника гармонических колебаний, $\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Комплексная проводимость параллельного контура для частот, близких к резонансной частоте, $Y = g + jb$, где $g \approx \frac{r_L}{(\omega L)^2} + r_C(\omega C)^2$, $b \approx \omega C - \frac{1}{\omega L}$.

Выражения получены в предположении, что сопротивления потерь в ветвях контура малы: $\left(\frac{r_L}{\rho}\right)^2 << 1$, $\left(\frac{r_C}{\rho}\right)^2 << 1$ (см. стр. 10).

При частоте колебаний, совпадающей с резонансной частотой контура, суммарная реактивная проводимость контура равна нулю.

В интервале частот, близких к резонансной частоте контура, можно считать $g \approx g_0 = \frac{r_L + r_C}{\rho^2} = \frac{r}{\rho^2}$, $r = r_L + r_C$ – *суммарное сопротивление* потерь контура. Следовательно, при сделанных предположениях сопротивление параллельного контура на частоте резонанса чисто активное и равно $R_0 = \frac{1}{g} = \frac{\rho^2}{r}$ - *эквивалентное сопротивление* контура. Сопротивление параллельного колебательного контура высокой добротности в режиме резонанса очень велико.

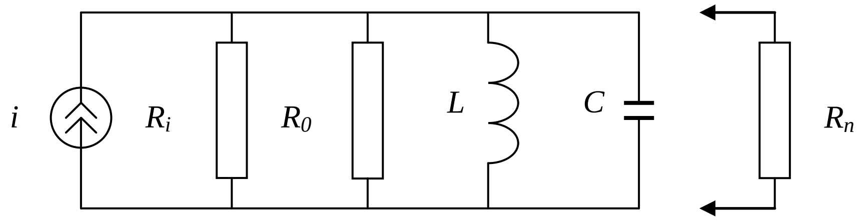
Добротность параллельного контура $Q = \frac{\omega_0 C}{g_0} = \frac{1/\omega_0 L}{g_0} = \frac{\rho}{r}$.

Эквивалентное сопротивление контура (сопротивление контура в момент резонанса) $R_0 = Q\rho = Q^2 r$ - в Q раз больше характеристического сопротивления контура ρ, в то время как для последовательного контура оно в Q раз меньше.

Если считать, что через зажимы параллельного контура протекает гармонический ток $i(t) = I_m \cos\omega_0 t$, а активное сопротивление в ветвях мало (r_L, r_C << ρ), то амплитуда напряжения на зажимах контура $U_m = \rho I_{mL} = \rho I_{mC}$, где I_{mL} – амплитуда тока в ветви с индуктивным элементом, I_{mC} – амплитуда тока в ветви с емкостным элементом. С другой стороны амплитуду напряжения можно определить как $U_m = R_0 I_m = Q\rho I_m$. Следовательно, амплитуды тока в ветвях параллельного контура в момент резонанса равны между собой и в Q раз больше амплитуды тока, протекающего через зажимы контура. Поэтому резонанс в параллельном колебательном контуре называют *резонансом токов*.

Зависимость амплитуды напряжения на зажимах простого параллельного контура и тока через его зажимы от частоты носит резонансный характер. Если гармонический ток, возбуждающий контур, не зависит от нагрузки, т.е. в цепь включен идеальный источник тока, напряжение на контуре меняется в зависимости от частоты подобно изменению полного сопротивления контура.

В том случае, если параллельный колебательный контур возбуждается источником конечной мощности, внутреннее сопротивление источника будет влиять на ширину полосы пропускания контура, которая связана с добротностью контура. Источник конечной мощности можно представить параллельным соединением идеального источника тока и внутреннего сопротивления генератора R_i , а контур заменить параллельной эквивалентной схемой



Для частот, близких к резонансной частоте контура, *эквивалентное* резонансное *сопротивление* контура $R_0' = \dfrac{R_0 R_i}{R_0 + R_i}$. Ширина полосы пропускания контура $\dfrac{\omega_в - \omega_н}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q'}$, где $\omega_в$ и $\omega_н$ – верхняя и нижняя частоты полосы пропускания, а $Q' = \dfrac{R_0'}{\rho}$ - *нагруженная добротность* контура, определенная с учетом включения внутреннего сопротивления генератора R_i в контур.

Таким образом, чем больше внутреннее сопротивление источника, тем меньше его шунтирующее действие на параллельный колебательный контур, тем уже полоса пропускания контура по напряжению. Подключение к простому параллельному колебательному контуру нагрузки R_n также снижает добротность контура. В этом случае эквивалентное сопротивление контура на резонансной частоте будет определяться параллельным соединением трех сопротивлений R_0, R_i и R_n.

Для уменьшения влияния внутреннего сопротивления источника питания R_i на частотно - избирательные свойства контура, возможно неполное включение контура в цепь источника, т.е. использование сложного колебательного контура.

Сложный параллельный колебательный контур.

Сложный параллельный колебательный контур – это контур, у которого хотя бы одна ветвь содержит реактивные сопротивления обоих знаков. На рис. *a* изображен сложный колебательный контур 2 – ого вида (без магнитной связи), в котором источник колебаний подключен к индуктивному элементу L_1 – к части γ индуктивного сопротивления контура. $L_1 = \gamma L, L_2 = (1-\gamma)L$. Это параллельный *колебательный контур с неполным* (частичным) *включением*. $\gamma = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L}$ - *коэффициент включения*. $\gamma \leq 1$.

На рис. *b* изображен сложный колебательный контур 3-го вида. В этом случае источник подключен к емкостному элементу C_1 контура – к части γ емкостного сопротивления контура. $C_1 = \frac{C}{\gamma}$, $C_2 = \frac{C}{1-\gamma}$. Здесь *коэффициент включения* $\gamma = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{C_1}$.

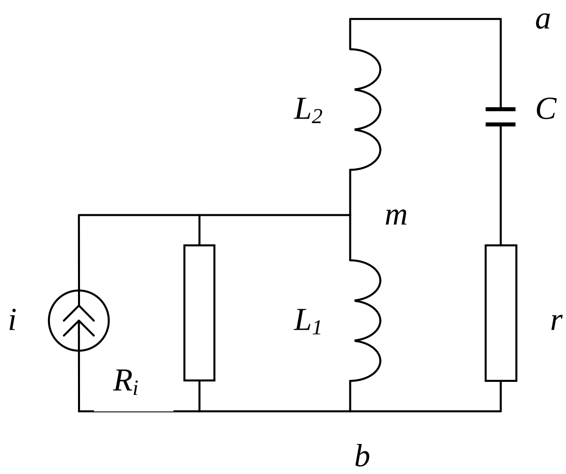


Рис. a

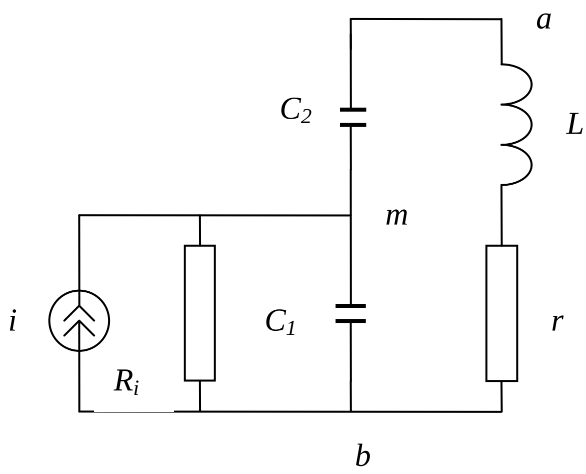


Рис.b

Важнейшие параметры сложного параллельного колебательного контура с разделенным емкостным или индуктивным элементами, а именно, частота резонанса токов (частота параллельного резонанса) ω_P, характеристическое сопротивление ρ и добротность контура Q, не зависят от коэффициента включения γ. Резонансное сопротивление контура является функцией γ. На частоте параллельного резонанса ω_P входное сопротивление контура между точками подключения источника mb $R_{0\gamma} = \gamma^2 R_0 = \gamma^2 \dfrac{\rho^2}{r}$. Следовательно, можно в довольно широких пределах менять эквивалентное сопротивление сложного параллельного контура, изменяя коэффициент включения. Это обстоятельство может быть использовано для согласования сопротивления контура с внутренним сопротивлением источника для передачи в контур максимальной активной мощности. Внутреннее сопротивление источника влияет на частотные характеристики сложного параллельного контура через изменение нагруженной добротности, которая должна рассчитываться с учетом трансформации подключаемого сопротивления. *Нагруженная добротность* при частичном включении источника увеличивается. $Q'_\gamma = \dfrac{Q}{1+\gamma^2 \dfrac{R_0}{R_i}}$. Следует заметить, что отношение амплитуд напряжения на контуре (U_{mb}) и между точками ab U_{ab} (рис. a,b) равно $\frac{U_{mb}}{U_{ab}} = \gamma < 1$. Это означает, что если выходное напряжение снимать между точками ab (как для простого параллельного контура), то будет осуществляться трансформация напряжения в $\frac{1}{\gamma}$ раз.

Необходимо подчеркнуть, что приведенные формулы для резонанса в колебательных контурах достаточно точны с точки зрения инженерной практики в том случае, если добротность контуров не очень мала ($Q > 10$). При расчете контуров малой добротности и при расчетах, связанных с большими отклонениями частоты от резонансной следует, пользоваться общими методами расчета сложных электрических цепей.

Литература.

1. Зайцев Э.Ф., Черепанов А.С., Ферсман Г.А. Электротехника и электроника. Теория электрических цепей. Ч1. - СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2005.
2. Мартынов Б.А. Колебательные контуры. Учебное пособие по курсу «Основы теории цепей».- Л.: Изд-во ЛПИ.1976
3. Новиков Ю.Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, процессы в сложных электрических цепях.- СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2008
4. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа. 2000
5. Афанасьев Б.П. и др. Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа. 1973

Задание 1 - 1

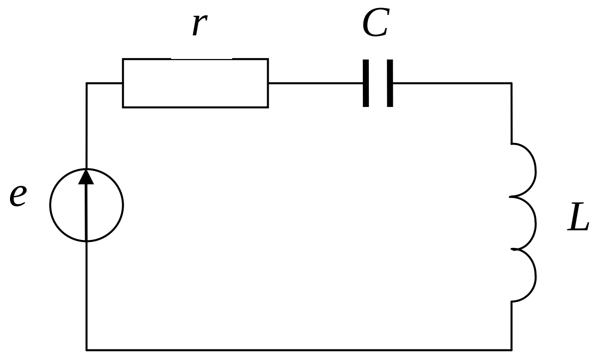


Рис. 1

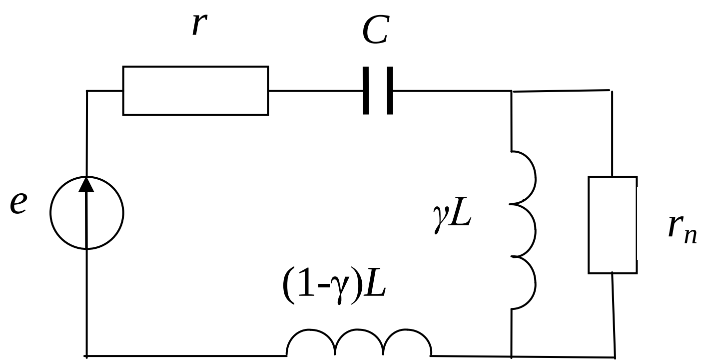


Рис. 2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1). При протекании в цепи тока $i(t) = 0.5 \cos(10^6\, t)$А активная мощность, выделившаяся в цепи $P = 12.5$ Вт. Амплитуда напряжения на индуктивном элементе $U_{L\,m} = 50$ В. Амплитуда э.д.с. источника $E_m = 70.7$ В. Угол $\varphi < 0$.
Определите значения r, L, C. Напишите выражения для мгновенных значений напряжений $u_L(t)$, $u_C(t)$, $u_r(t)$ и напряжения источника $u(t)$. Постройте векторную диаграмму.

2. Для колебательного контура (рис.1) определите резонансную частоту контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, характеристическое («волновое») сопротивление $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ и добротность контура $Q = \dfrac{\rho}{r_k}$. r_k - активное сопротивление контура.
Значения L и C определены в п.1. $r = 2$ Ом.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0$ рассмотрите два способа подключения нагрузки: нагрузка подключена параллельно индуктивному элементу L ($\gamma = 1$) и нагрузка подключена параллельно части γL индуктивного элемента ($\gamma = 0.25$) (рис. 2).
Значения L и C определены в п.1. $r = 2$ Ом. $r_n = 3$ кОм.
Определите влияние подключения нагрузки на добротность контура и вычислите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{r\,n}}{\dot{E}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 2

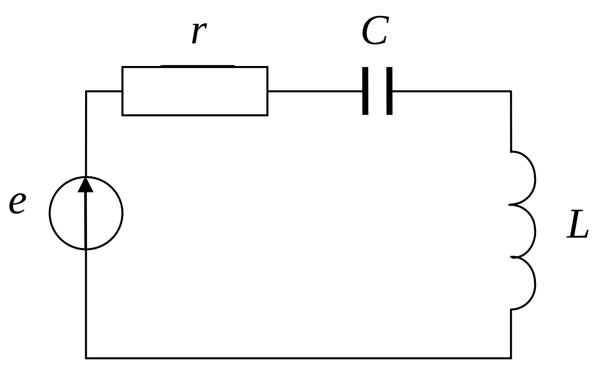


Рис. 1

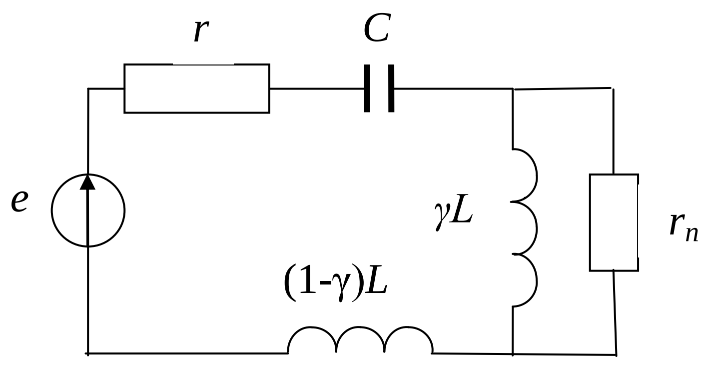


Рис. 2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1). Напряжение на резистивном элементе $u_r(t) = 50\cos(10^6 \cdot t)$ В. Сопротивление резистора r = 100 Ом. Реактивное сопротивление цепи x = - 100 Ом. Амплитуда напряжения на индуктивном элементе U_{Lm}= 50 В. Определите значения L, C. Напишите выражения для мгновенных значений тока в цепи $i(t)$, напряжений $u_L(t)$, $u_C(t)$, и напряжения источника $u(t)$. Постройте векторную диаграмму.

2. Для колебательного контура (рис.1) определите резонансную частоту контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, характеристическое («волновое») сопротивление $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ и добротность контура $Q = \dfrac{\rho}{r_k}$. r_k - активное сопротивление контура. Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0$ рассмотрите два способа подключения нагрузки: нагрузка подключена параллельно индуктивному элементу L (γ = 1) и нагрузка подключена параллельно части γL индуктивного элемента (γ = 0.2) (рис. 2).
Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом. r_n = 4 кОм.
Определите влияние подключения нагрузки на добротность контура и вычислите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{r\,n}}{\dot{E}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 3

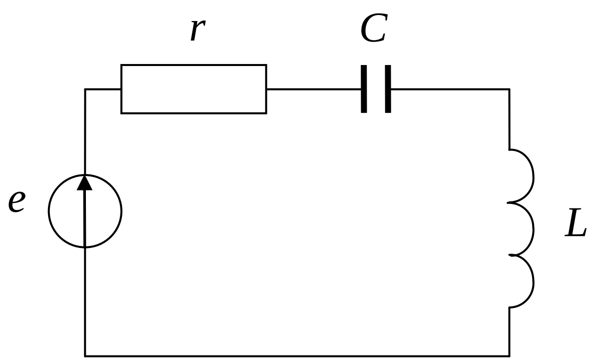


Рис. 1

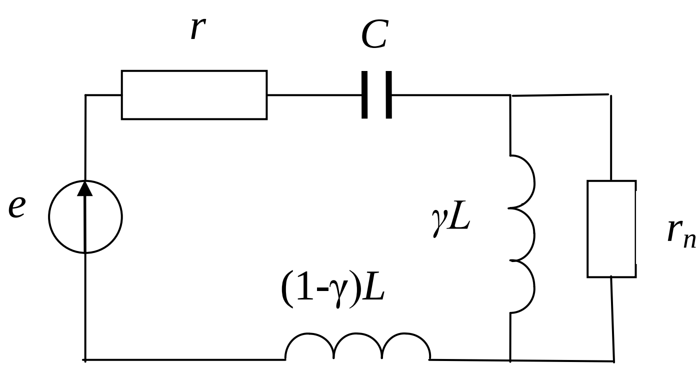


Рис. 2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1). Амплитуда напряжения на индуктивном элементе $U_{L\ m}$ = 50 В. Напряжение на емкостном элементе $u_C(t) = 100\cos(10^6\, t)$ В. Амплитуда напряжения источника U_m = 70.7 В. Сопротивление r = 100 Ом.
Определите значения L, C. Напишите выражения для мгновенных значений тока в цепи $i(t)$, напряжений $u_L(t)$, $u_r(t)$ и напряжения источника $u(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Для колебательного контура (рис.1) определите резонансную частоту контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, характеристическое («волновое») сопротивление $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ и добротность контура $Q = \dfrac{\rho}{r_k}$. r_k - активное сопротивление контура. Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0$ рассмотрите два способа подключения нагрузки: нагрузка подключена параллельно индуктивному элементу L (γ = 1) и нагрузка подключена параллельно части γL индуктивного элемента (γ = 0.3) (рис.2).
Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом. r_n = 4 кОм.
Определите влияние подключения нагрузки на добротность контура и вычислите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{r\,n}}{\dot{E}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 4

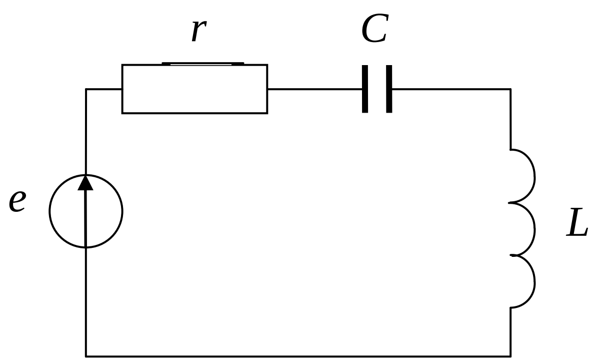


Рис. 1

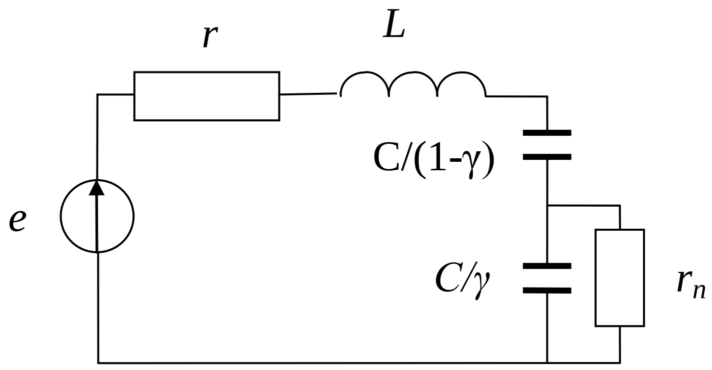


Рис. 2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1). Мгновенное значение напряжения на индуктивном элементе $u_L = 50\cos(10^6 t)$ В. Индуктивность $L = 0.1$ мГн. Реактивная мощность в цепи $Q_x = -12.5$ ВАр. Сопротивление $r = 100$ Ом.
Определите значение С. Напишите выражения для мгновенных значений тока в цепи $i(t)$, напряжений $u_r(t)$, $u_C(t)$, и напряжения источника $u(t)$. Постройте векторную диаграмму.

2. Для колебательного контура (рис.1) определите резонансную частоту контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, характеристическое («волновое») сопротивление $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и добротность контура $Q = \frac{\rho}{r_k}$. r_k - активное сопротивление контура. Значения L и C определены в п.1. $r = 2$ Ом.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0$ рассмотрите два способа подключения нагрузки: нагрузка подключена параллельно емкостному элементу C (γ = 1) и нагрузка подключена параллельно части $\frac{C}{\gamma}$ емкостного элемента (γ = 0.2) (рис.2).
Значения L и C определены в п.1. $r = 2$ Ом. $r_n = 3$ кОм.
Определите влияние подключения нагрузки на добротность контура и вычислите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\frac{\dot{U}_{r\,n}}{\dot{E}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 5

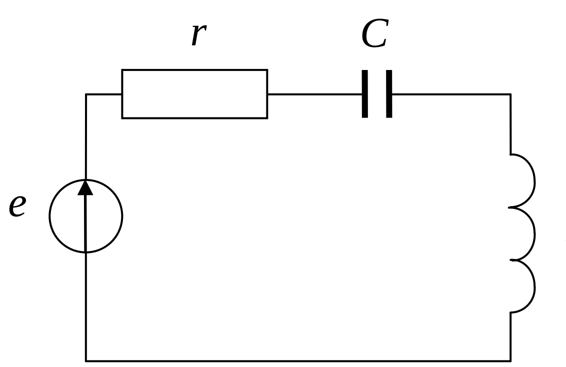


Рис. 1

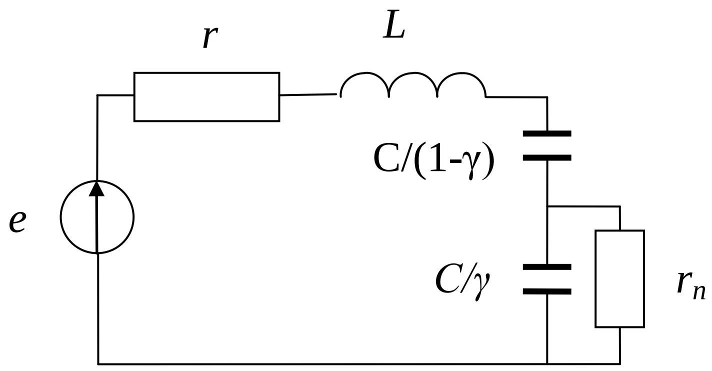


Рис. 2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1). При протекании в цепи тока i = 0.5 cos (10^6 t) А амплитуда напряжения на индуктивном элементе U_{Lm}= 50 В. Амплитуда напряжения источника U_m = 70.7В. Емкость С = 5 нФ.
Определите значения r, L. Напишите выражения для мгновенных значений напряжений $u_r(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$ и напряжения источника $u(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Для колебательного контура (рис.1) определите резонансную частоту контура $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, характеристическое («волновое») сопротивление $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ и добротность контура $Q = \dfrac{\rho}{r_k}$. r_k- активное сопротивление контура. Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0$ рассмотрите два способа подключения нагрузки: нагрузка подключена параллельно емкостному элементу C (γ = 1) и нагрузка подключена параллельно части $\dfrac{C}{\gamma}$ емкостного элемента (γ = 0.3) (рис.2).
Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом. r_n = 4 кОм.
Определите влияние подключения нагрузки на добротность контура и вычислите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{r\,n}}{\dot{E}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 6

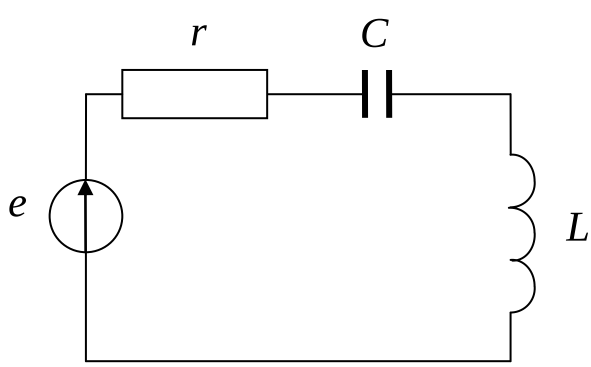


Рис. 1

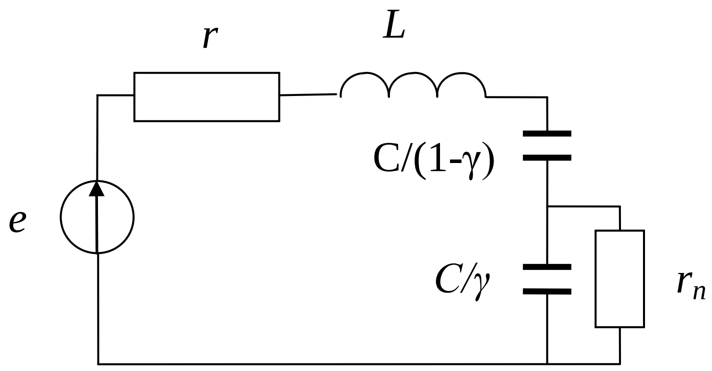


Рис. 2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1). Напряжение на индуктивном элементе $u_L(t) = 50\cos(10^6 t)$ В. Амплитуда напряжения на емкостном элементе U_{Cm}= 100 В. Амплитуда напряжения источника U_m=70.7 В. C = 5 нФ
Определите значения r, L. Напишите выражения для мгновенных значений напряжений $u_r(t)$, $u_C(t)$, $u(t)$ и тока в цепи $i(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Для колебательного контура (рис.1) определите резонансную частоту контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, характеристическое («волновое») сопротивление $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и добротность контура $Q = \frac{\rho}{r_k}$. r_k- активное сопротивление контура. Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0$ рассмотрите два способа подключения нагрузки: нагрузка подключена параллельно емкостному элементу C (γ = 1) и нагрузка подключена параллельно части $\frac{C}{\gamma}$ емкостного элемента (γ = 0.25) (рис.2).
Значения L и C определены в п.1. r = 2 Ом. r_n = 3 кОм.
Определите влияние подключения нагрузки на добротность контура и вычислите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\frac{\dot{U}_{r\,n}}{\dot{E}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 7

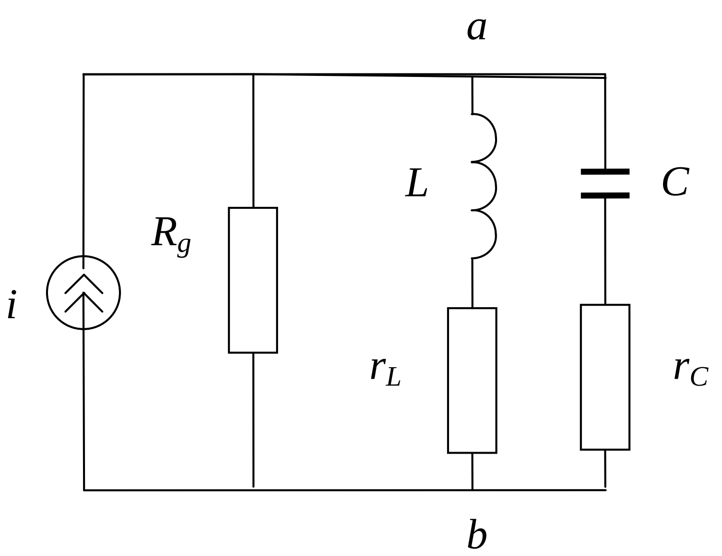


Рис. 1

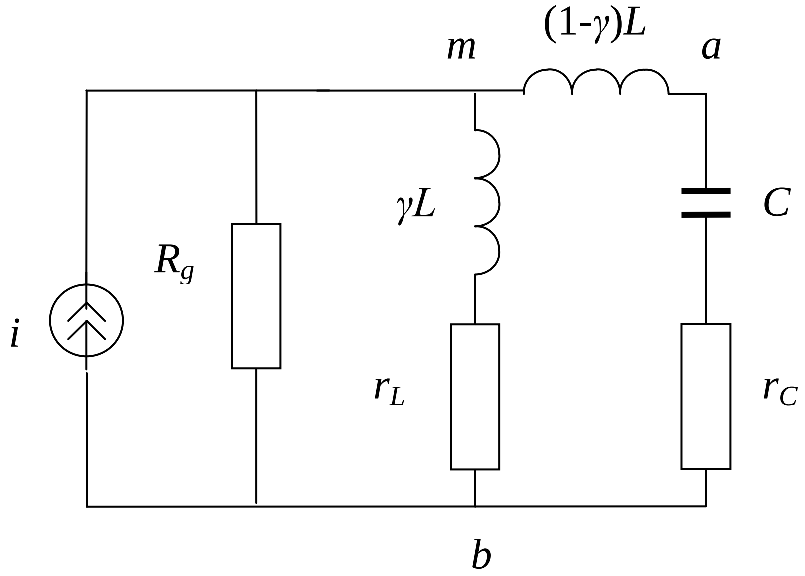


Рис.2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1) Через ветвь с индуктивным элементом L протекает ток i_L= 8.94 cos(10^7 t - 1.107) мА. Сопротивление резистивного элемента этой ветви r_L = 500 Ом. Амплитуда напряжения $U_{ab\ m}$= 10 В. Амплитуда напряжения на емкостном элементе U_{Cm} = 8 В, сопротивление r_C = 75 Ом.
Определите значения L, C. Напишите выражения для мгновенных значений тока в ветви, содержащей емкостной элемент $i_C(t)$, и напряжения на зажимах $u_{ab}(t)$. Постройте векторную диаграмму.

2. Определите собственную добротность контура, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом (рис.1). Значения L и C определены в п.1. Считая, что сопротивление источника R_g =50 кОм, для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, найдите нагруженную добротность контура.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом, найдите сопротивление z_{ab} (рис.1) и, считая γ = 0.25, сопротивление z_{mb} (рис.2). Значения L и C для контуров, изображенных на рис. 1, 2, определены в п. 1.

Определите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_{mb}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 8

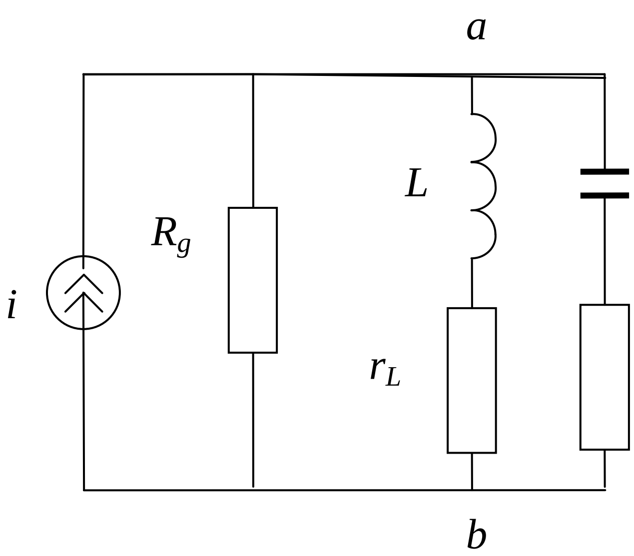


Рис. 1

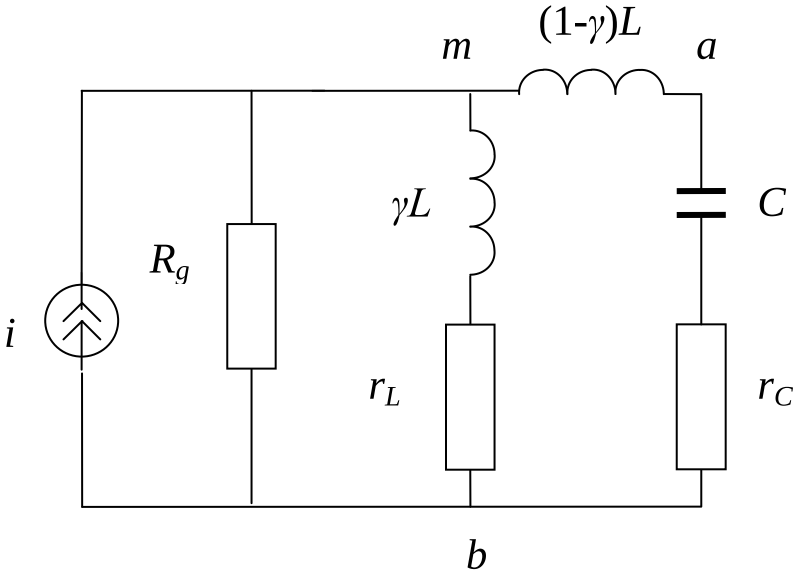


Рис.2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1) Напряжение на зажимах *a*-*b* $u_{ab} = 10\cos(10^7 t)$ В. Амплитуда тока, протекающего в ветви с индуктивным элементом, $I_{Lm} = 8.95$ мА, сопротивление $r_L = 500$ Ом. Амплитуда напряжения на емкостном элементе $U_{Cm} = 8$ В, емкость С = 1 нФ.
Определите значения L и r_C. Напишите выражения для мгновенных значений тока в ветви, содержащей емкостной элемент, $i_C(t)$ и тока в ветви, содержащей индуктивный элемент, $i_L(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Определите собственную добротность контура, полагая, что $r_L = 2$ Ом, $r_C = 2$ Ом (рис.1). Значения L и C определены в п.1. Считая, что сопротивление источника R_g =50 кОм, для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, найдите нагруженную добротность контура.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, полагая, что $r_L = 2$ Ом, $r_C = 2$ Ом, найдите сопротивление z_{ab} (рис.1) и, считая $\gamma = 0.2$, сопротивление z_{mb} (рис.2). Значения L и C для контуров, изображенных на рис. 1, 2, определены в п. 1. Определите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_{mb}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 9

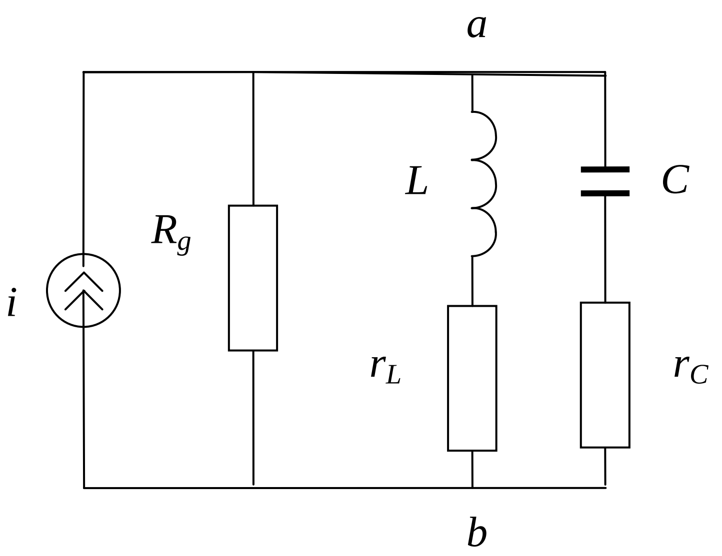


Рис. 1

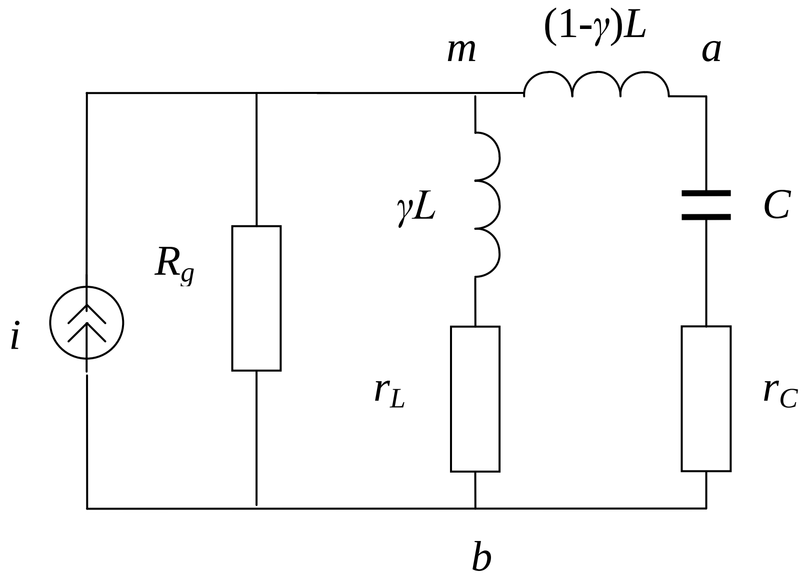


Рис.2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1) В ветви с индуктивным элементом протекает ток i_L =8.95 cos ($10^7 t$-1.107) мА. Индуктивность L = 0.1 мГн. Сопротивление r_L = 500 Ом. Ток в ветви с емкостным элементом i_C = 80 cos ($10^7 t$ +0.927) мА.
Определите значения C, r_C. Напишите выражение для мгновенного значения напряжения на узлах *a b* u_{ab} (t).
Постройте векторную диаграмму.

2. Определите собственную добротность контура, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом (рис.1). Значения L и C определены в п.1. Считая, что сопротивление источника R_g =50 кОм, для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, найдите нагруженную добротность контура.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом, найдите сопротивление z_{ab} (рис.1) и, считая γ = 0.3, сопротивление z_{mb} (рис.2). Значения L и C для контуров, изображенных на рис. 1, 2, определены в п. 1. Определите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_{mb}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 10

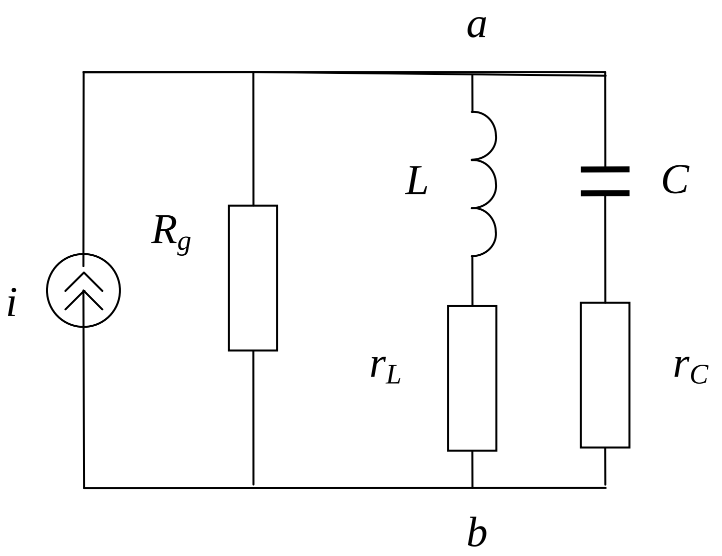


Рис. 1

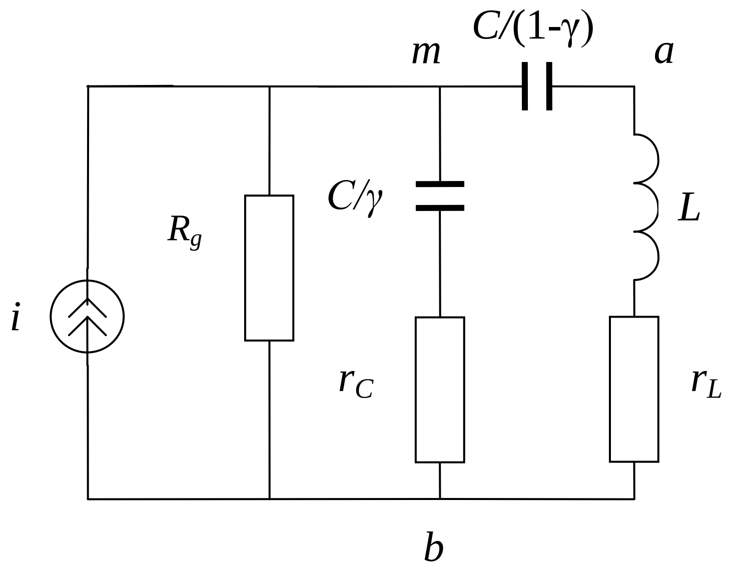


Рис.2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1) Напряжение на зажимах *ab* $u_{ab} = 10 \cos (10^7 t)$ В, ток в ветви, содержащей индуктивный элемент, $i_L = 8.95 \cos(10^7 t - 1.107)$ мА, ток в ветви с емкостным элементом $i_C = 80 \cos (10^7 t + 0.927)$мА.
Определить значения L, r_L, C, r_C. Напишите выражения для мгновенных значений напряжения $u_{rL}(t)$ и $u_C(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Определите собственную добротность контура, полагая, что $r_L = 2$ Ом, $r_C = 2$ Ом (рис.1). Значения L и C определены в п.1. Считая, что сопротивление источника $R_g = 50$ кОм, для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, найдите нагруженную добротность контура.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, полагая, что $r_L = 2$ Ом, $r_C = 2$ Ом, найдите сопротивление z_{ab} (рис.1) и, считая $\gamma = 0.2$, сопротивление z_{mb} (рис.2). Значения L и C для контуров, изображенных на рис. 1, 2, определены в п. 1. Определите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_{mb}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 11

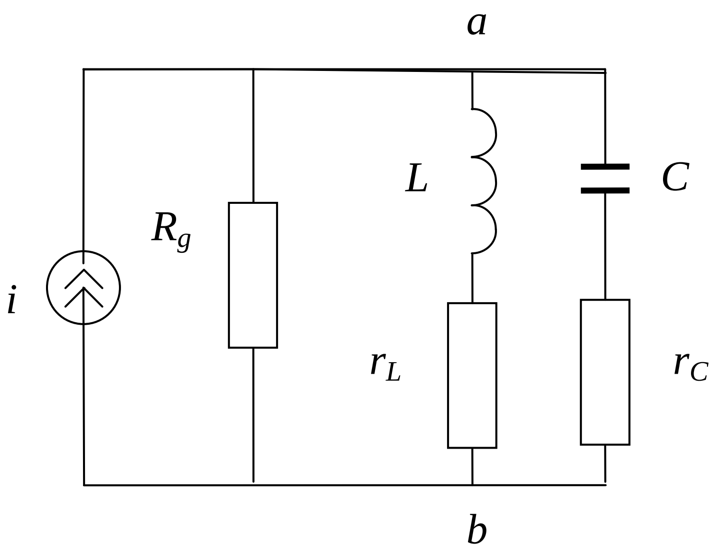


Рис. 1

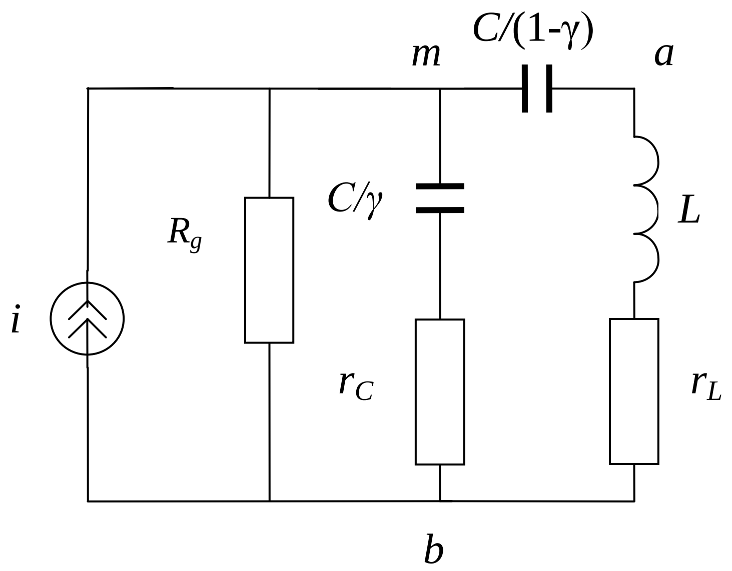


Рис.2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1) Напряжение на зажимах *ab* u_{ab} = 10 cos (10^7 *t*) В. Амплитуда тока в ветви, содержащей индуктивный элемент, I_{Lm} = 8.95мА, сопротивление r_L = 500Ом. Ток в ветви, содержащей емкостной элемент, i_C =80 cos (10^7 *t* + 0.927)мА.
Определите значения *L, C,* r_C. Напишите выражения для мгновенного значения тока, протекающего в ветви, содержащей индуктивный элемент, $i_L(t)$ и напряжения $u_C(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Определите собственную добротность контура, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом (рис.1). Значения *L* и *C* определены в п.1. Считая, что сопротивление источника R_g =50 кОм, для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, найдите нагруженную добротность контура.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом, найдите сопротивление z_{ab} (рис.1) и, считая γ = 0.25, сопротивление z_{mb} (рис.2). Значения *L* и *C* для контуров, изображенных на рис. 1, 2, определены в п. 1. Определите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_{mb}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.

Задание 1 - 12

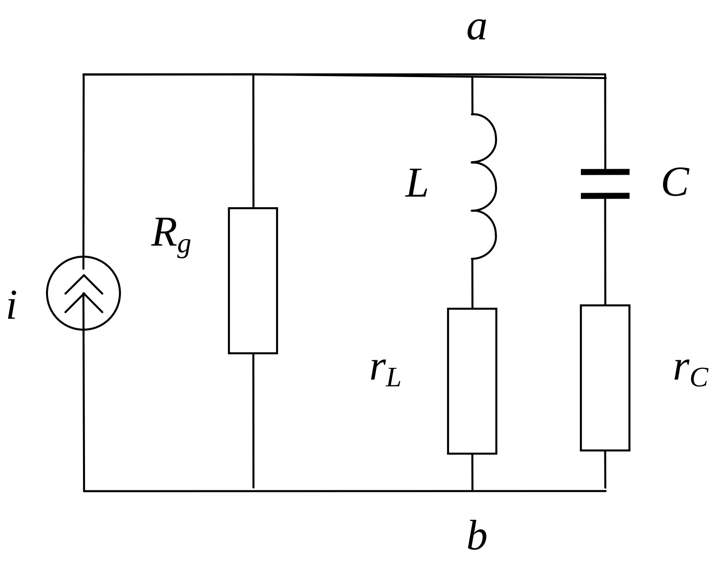


Рис. 1

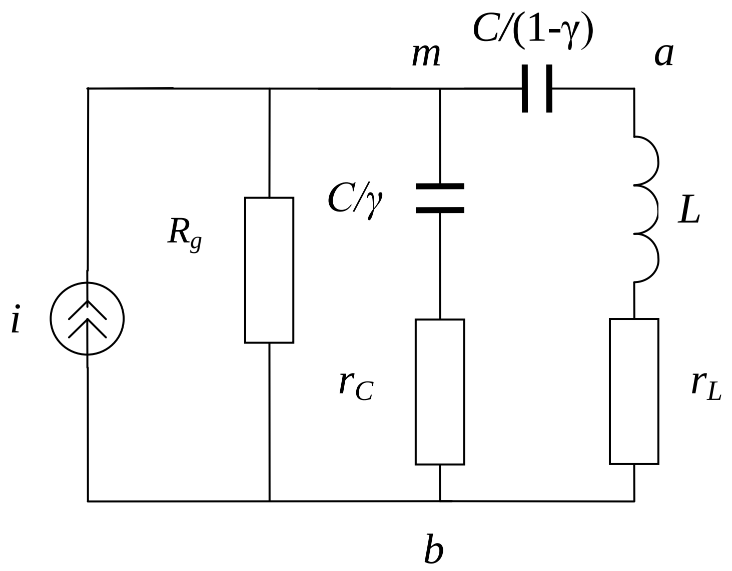


Рис.2

1. В электрическую цепь включен источник гармонических колебаний (рис.1) Напряжение на зажимах *ab* u_{ab} = 10 cos (10^7 t) В. Амплитуда тока в ветви, содержащей емкостной элемент, I_{Cm} = 80 мА, емкость С = 1 нФ. Ток в ветви, содержащей индуктивный элемент, i_L =8.95 cos (10^7 t – 1.107)мА. Определите значения L, r_L, r_C. Напишите выражения для мгновенного значения тока, протекающего в ветви, содержащей емкостной элемент, $i_C(t)$ и напряжения $u_{rL}(t)$.
Постройте векторную диаграмму.

2. Определите собственную добротность контура, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом (рис.1). Значения L и C определены в п.1. Считая, что сопротивление источника R_g =50 кОм, для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, найдите нагруженную добротность контура.

3. Для частоты колебаний $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, полагая, что r_L = 2 Ом, r_C = 2 Ом, найдите сопротивление z_{ab} (рис.1) и, считая γ = 0.3, сопротивление z_{mb} (рис.2). Значения L и C для контуров, изображенных на рис. 1, 2, определены в п. 1. Определите модуль коэффициента передачи напряжения $K = \left|\dfrac{\dot{U}_{ab}}{\dot{U}_{mb}}\right|$.

Проанализируйте полученные результаты.