

Министерство образования Российской Федерации  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

*В. А. Барилевич, Ю. А. Смирнов*

**ОСНОВЫ**  
**ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ**  
**И**  
**ТЕОРИИ ТЕПЛО - И МАССООБМЕНА**  
**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Под редакцией Заслуженного энергетика  
России д.т.н., проф. Барилевича В.А.

Санкт-Петербург  
2010

Основы технической термодинамики и теории тепло- и массообмена: курс лекций, / В.А. Барилевич, Ю.А. Смирнов. СПбГПУ, 2010.

Курс лекций содержит основные законы и положения технической термодинамики и теории тепло- и массообмена в природе применительно к задачам энергомашиностроения и теплоэнергетики. Он соответствует программе дисциплин в плане бакалаврской и инженерной подготовки студентов энергомашиностроительного факультета. Ряд разделов курса могут быть использованы студентами электромеханического, механико-машиностроительного факультетов и факультета экономики и менеджмента.

Илл. 289, табл.3, библиограф. 36 назв.

Рецензенты: зав. кафедрой " Промышленная теплоэнергетика" СПбГПУ академик ИАСПб д.т.н., проф. Боровков В.М.; зав. кафедрой " Промышленная теплоэнергетика" СПбГТУРП д.т.н., проф. Бельский А.П.

## Введение

Дисциплины техническая термодинамика и теория тепло- и массообмена формируют теоретическую базу для освоения дисциплин специального цикла по направлениям "Энергомашиностроение" и "Теплоэнергетика".

Предлагаемый курс лекций читается авторами студентам Энергомашиностроительного факультета СПбГПУ в объеме 128 часов и соответствует утвержденной программе в плане бакалаврской и инженерной подготовки студентов.

В первой части рассматриваются основные понятия термодинамики, приложение первого закона термодинамики к закрытым, открытым термодинамическим системам и системам с переменной массой. Изучаются равновесные состояния и квазиравновесные процессы в макроскопических системах. Значительное внимание уделяется второму закону термодинамики и его применению к необратимым процессам, вскрываются причины необратимости и ее влияние на потерю работоспособности (эксергии) системы. Подробно рассматриваются газовые циклы и реактивные двигатели. Уделяется внимание условиям равновесия в однородной и двухфазной системах, фазовым переходам при плоской и искривленной границах раздела фаз. Приводятся основные положения теории образования новой фазы. Рассматриваются свойства реальных газов и паров, вопросы дросселирования реальных газов и паров, процессы, протекающие в паре и влажном воздухе. Представлен достаточно подробный материал по паровым и комбинированным циклам теплоэнергетических установок, рассматриваются способы повышения их эффективности, проведен анализ циклов паротурбинной и газотурбинной установок с учетом необратимых потерь с помощью энтропийного и эксергетического методов. Вопросы непосредственного преобразования теплоты в электрическую энергию изложены в конспективной форме на основе упрощенных тепловых схем без рассмотрения состояния плазмы и процессов в ней. Даются основы термоэлектрического генератора и топливного элемента. Рассматриваются идеальные циклы холодильных машин, тепловых насосов и методы ожижения газов. В разделе "Основы химической термодинамики" излагаются законы и положения, касающиеся процессов превращения одних веществ в другие. Даны основные понятия неравновесной термодинамики. В приложении I приводятся программы расчета на ЭВМ газотурбинной установки с регенерацией теплоты и паротурбинной установки с оптимизацией параметров рабочего тела на примере геотермальной тепловой электрической станции. Приводится список литературы для более подробного изучения законов, методов и истории развития термодинамики.

Вторая часть курса содержит основные законы и положения теории тепло- и массообмена в природе и включает такие разделы как стационарная и нестационарная теплопроводность, конвективный теплообмен в однородных средах, теплоотдача при изменении агрегатного состояния вещества, массоперенос в двухкомпонентных средах, лучистый теплообмен, основы расчета теплообменных аппаратов рекуперативного типа.

Основные явления тепло- и массопереноса, имеющие место в природе, рассмотрены достаточно подробно на основе упрощенных физических моделей с получением расчетных формул. Такой академический подход, на наш взгляд, способствует развитию у студента творческого мышления: он видит, как создается физическая модель, как она упрощается путем введения обоснованных допущений для получения аналитического решения.

Так как в настоящее время трудно представить решение научных и инженерных задач без использования ЭВМ, то в разделе "Численные методы решения задач теплопроводности" показывается, как создаются уравнения в конечно-разностной форме для различных "узлов" изучаемого тела. Рассматриваются вопросы устойчивости разностных схем. В приложении II приводятся программы расчета двумерного температурного поля итерационным и матричным методами, а также текст

программы расчета теплообменного аппарата для выполнения курсовой работы по методике [27].

Список литературы, приведенный в конце лекций, позволяет студенту более глубоко изучить интересующие его вопросы, которые в ряде случаев изложены в конспективной форме.

## Часть I. Техническая термодинамика

### 1. Основные понятия термодинамики

Термодинамика - это наука, изучающая законы превращения энергии в различных процессах, сопровождающихся тепловыми эффектами. Термодинамика - дедуктивная наука: она базируется на основных законах природы (первом и втором началах термодинамики) и носит феноменологический характер, привлекая для своих исследований опытные данные.

#### Краткий исторический очерк развития термодинамики

Термодинамика как наука возникла в начале XIX века. Основные задачи, которые она должна была решать - это установление количественной связи между теплотой и работой и повышение тепловой эффективности паровых машин, которые стали широко использоваться в промышленности. В 1824 году французский инженер Сади Карно опубликовал трактат "Размышления о движущей силе огня и машинах, способных развивать эту силу" [11]. В этом научном труде он впервые доказывает, что "движущая сила огня" (работа) зависит от величины температуры "горячего" и "холодного" источников теплоты, и что более эффективными являются паровые машины высокого давления, в которых по его словам "...большее падение "теплорода" (под теплородом понимали все проникающее вещество)". Еще тогда он пишет о причинах потери движущей силы: "...от бесполезного восстановления равновесия теплорода". Таким образом, в работе Карно были заложены основные положения первого и второго законов термодинамики.

В 1842 году Роберт Майер устанавливает связь между теплотой и работой, определив механический эквивалент теплоты  $I = \frac{R}{c_p - c_v} = 423,8 \frac{\text{кгм}}{\text{ккал}}$ . Джеймс Джоуль в 1843 году,

проведя уникальный эксперимент, находит тепловой эквивалент работы  $A = \frac{Q}{L} = \frac{1}{427} \frac{\text{ккал}}{\text{кгм}}$  величина которого до настоящего времени остается практически неизменной. Работы Майера и Джоуля устанавливают частный случай первого начала термодинамики - закона отражающего количественную сторону сохранения и превращения энергии.

Рудольф Клаузиус в 1854 году, рассматривая обратимый круговой процесс, вводит в термодинамику новую функцию состояния - энтропию  $S$  и тем самым устанавливает второй закон термодинамики для обратимых процессов  $dS = \frac{dQ}{T}$ . Позднее Макс Планк в своей докторской диссертации показывает, что энтропия может быть использована при анализе необратимых процессов (с чем был не согласен Роберт Кирхгоф) [14]. В общем случае второе начало имеет вид  $dS \geq \frac{dQ}{T}$  и характеризует качественную сторону в процессах превращения энергии.

Виллиам Томсон (лорд Кельвин) вводит понятие абсолютной (термодинамической) температуры, которая является термодинамическим потенциалом.

Джозайя Виллард Гиббс создает новый метод термодинамических исследований - метод термодинамических потенциалов, устанавливает условия термодинамического равновесия. Развивает теорию фазовых переходов (правило фаз Гиббса).

В 1906 году Вальтер Герман Нернст (1864-1941) на основании опытных данных открывает третий закон термодинамики (теорема Нернста). Согласно этой теореме при температурах, стремящихся к абсолютному нулю, равновесные изотермические процессы протекают без изменения энтропии, то есть  $\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S_T = 0$ . В этом случае энтропия перестает быть функцией состояния и стремится к некоторой постоянной величине, не зависящей от параметров состояния.

В работах Д.И. Менделеева впервые используется “критическая температура”, при которой коэффициент поверхностного натяжения равен нулю.

В.А. Михельсон и Б.Б. Голицын внесли значительный вклад в термодинамику излучения.

Большой вклад в развитие термодинамики внесли также русские ученые: Д.П. Коновалов и Н.С. Курнаков (термодинамические методы в физической химии), Н.Н. Боголюбов и М.А. Леонтович (статистическая термодинамика, неравновесные состояния), Л.Д. Ландау (теория сверхтекучести), В.К. Семенченко (термодинамическая теория растворов).

#### Термодинамическая система

Под термодинамической системой понимают совокупность макротел, находящихся между собой и окружающей средой в тепловом и механическом взаимодействии. Термодинамическая система (ТС) может быть закрытой (с подвижной или неподвижной границами) и открытой, когда через нее проходит поток массы. Если ТС не обменивается теплотой с окружающей средой, то такая система называется адиабатической. ТС может быть гомогенной и гетерогенной. В гомогенной системе свойства вещества остаются неизменными во всех точках или плавно изменяются, например, в поле гравитационных или иных массовых сил. Если ТС состоит из подсистем с различными физическими свойствами, то такая система называется гетерогенной. В этом случае считают, что физические свойства на границе подсистем изменяются скачком. В действительности изменение свойств происходит на длине свободного пробега молекулы.

#### Термодинамический метод исследования

Термодинамика рассматривает системы, состоящие из большого, но конечного числа частиц, она не изучает процессы на молекулярном уровне и оперирует макровеличинами - термодинамическими параметрами.

#### Термодинамический процесс

Совокупность последовательных состояний, проходящих термодинамической системой, называется термодинамическим процессом. Если ТС проходит практически равновесные состояния, то такой процесс называется квазистатическим. В пределе, когда процесс протекает бесконечно медленно, то имеем равновесный или обратимый процесс. Вообще под обратимым понимают такой процесс, когда при совершении прямого и обратного процесса ТС приходит в исходное состояние, а в окружающей среде не происходит ни каких изменений. В диаграммах состояния можно изобразить только квазистатические или равновесные процессы. Под квазистатическим процессом понимают такой процесс, когда скорость процесса намного меньше скорости релаксации

$$\frac{da}{d\tau} \ll \frac{\Delta a}{\tau_r}, \quad (1.1)$$

где  $a$  - любой термодинамический параметр ( $p, T, v$ );  $\tau$  - время;  $\tau_r$  - время релаксации - время, за которое во всех точках ТС установится термодинамическое равновесие, то есть будем иметь одинаковые физические свойства (для газов  $\tau_r \approx 10^{-16}$  секунд).

#### Параметры термодинамической системы

- это макровеличины, характеризующие физическое состояние термодинамической системы. К ним относятся температура  $T$ , давление -  $p$ , объем -  $V$  (термические параметры).

Температура является одним из основных термических параметров. Температура есть мера нагретости тела. Температура тела, измеренная термометром, называется эмпирической ( $t$ ). К понятию абсолютной температуры ( $T$ ) приводит кинетическая теория газов. Между средней кинетической энергией поступательного движения молекул и температурой существует связь

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{m\bar{w}^2}{2} = kT, \quad (1.2)$$

где  $m$  - масса молекулы;  $\bar{w} = \frac{\sum w_i N_i}{\sum N_i}$  - средняя скорость поступательного движения молекул;  $k = \frac{R_0}{N_0} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  - постоянная Больцмана (универсальная

газовая постоянная на одну молекулу газа);  $R_0 = 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль К}}$  - универсальная газовая

постоянная;  $N_0 = 6,0228 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{кмоль}}$  - число Авогадро (число молекул в одном

киломоле). Из (1.2) следует, что  $T$  является статистической величиной, характеризующей состояние большого числа молекул. Между абсолютной и эмпирической температурой, измеренной в градусах Цельсия, существует зависимость

$$T = t + 273,16, \text{ К} \quad (1.3)$$

Давление, как и температура, - статистическая величина. Из курса молекулярной физики известно, что давление газа на стенки сосуда можно рассчитать по формуле

$$p = \alpha n \frac{m\bar{w}^2}{3}, \text{ Н/м}^2 \quad (1.4)$$

где  $n = N_0/V_\mu$  - число молекул, заключенных в объеме одного киломоля;  $V_\mu = 22,4 \text{ м}^3/\text{кмоль}$  - объем одного киломоля при нормальных условиях ( $p_n = 760 \text{ мм. рт. ст.} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $t_n = 0 \text{ С}$ );  $\alpha$  - коэффициент сжимаемости.

С учетом (1.2) перепишем (1.4) в виде

$$p = \alpha \frac{N_0}{V_\mu} \cdot \frac{R_0}{N_0} \cdot T = \frac{\alpha R_0 T}{V_\mu}. \quad (1.5)$$

Для идеального газа, молекулы которого представляются в виде материальных точек, имеющих массу и не имеющих объема, а взаимодействие осуществляется только за счет упругих соударений ( $\alpha = 1$ ), можно написать

$$pV_\mu = R_0 T. \quad (1.6)$$

Выражение (1.6) является термическим уравнением состояния идеального газа для одного киломоля. Для  $M$  киломолей

$$pV = MR_0 T. \quad (1.7)$$

Уравнение состояния в форме (1.7) носит название Клапейрона-Менделеева.

Так как масса газа

$$G = M\mu, \quad (1.8)$$

где  $\mu$  - молекулярная масса газа, кг/кмоль, а  $R = R_0/\mu$ , то (1.7) можно переписать в форме Клапейрона

$$pV = GRT. \quad (1.9)$$

Разделив уравнение (1.9) на массу газа, получим

$$pv = RT,$$

где  $v = V/G$  - удельный объем газа, м<sup>3</sup>/кг. Удельный объем газа связан с плотностью соотношением  $\rho = 1/v$ , тогда

$$p = \rho RT. \quad (1.10)$$

Таким образом, чем выше плотность и температура идеального газа, тем больше давление. Давление, входящее в уравнение состояния, называется абсолютным и измеряется в Паскалях (Па=Н/м<sup>2</sup>). Если давление газа в сосуде выше давления окружающей среды  $p_{ос}$  (барометрического давления), то абсолютное давление

$$p = p_{ман} + p_{ос}, \quad (1.11)$$

где  $p_{ман} = p_{изб}$  - давление измеренное манометром (манометр измеряет избыточное давление между давлением в сосуде и окружающей средой).

В случае, когда давление газа в сосуде меньше давления окружающей среды, то используется вакуумметр, тогда

$$p = p_{ос} - p_{вак}. \quad (1.12)$$

Сказанное может быть представлено в графическом виде (см. рис.1.1).

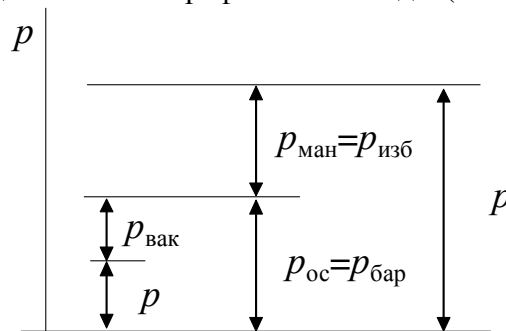


Рис. 1.1

Удельный объем так же как  $T$  и  $p$ , характеризует физическое состояние тела

$$v = \frac{\alpha N_0 kT}{p\mu} = \frac{\alpha RT}{p}. \quad (1.13)$$

Термодинамические параметры (ТП) могут быть экстенсивными и интенсивными. К экстенсивным параметрам относятся внутренняя энергия газа  $U$ , энтальпия  $I = U + pV$ , энтропия  $S$ . Эти параметры обладают свойствами аддитивности (их можно складывать). Интенсивными параметрами являются  $p$ ,  $T$ , удельный объем  $v$  - они не обладают свойствами аддитивности.

### **Теплота и работа и их изображение в диаграммах состояния**

Теплота и работа - это две формы энергообмена, которые проявляют себя на границе раздела ТС при передаче энергии от одной системы к другой. Теплота и работа являются функциями процесса, то есть чтобы их определить необходимо знать уравнение процесса, дифференциалы от этих функций являются неполными.

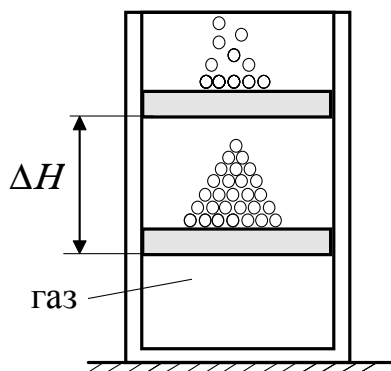


Рис.1.2

В технической термодинамике используют такие понятия, как работа изменения объема и работа изменения давления (техническая работа). Рассмотрим работу изменения объема. На рис. 1.2 показан вертикальный цилиндр с невесомым поршнем. Будем считать, что боковые стенки поршня плотно прилегают к цилиндру, но трение между поршнем и цилиндром отсутствует, а газ невязкий. Будем считать, что в начальный момент времени давление газа в сосуде и температура равны давлению и температуре окружающей среды. В этом случае говорят, что такая ТС находится в механическом и тепловом равновесии с

окружающей средой и не способна совершить работу. Если теперь насыпать дробь на поршень, то внешняя среда в поле гравитационных сил начнет совершать работу над ТС. При перемещении поршня на  $\Delta H$  будем иметь

$$L_{1-2} = g \int_0^{\tau} \int_{H_1}^{H_2} \dot{G}_{\text{гр}}(\tau) d\tau dH = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \text{ где } \dot{G}_{\text{гр}}(\tau), \text{ кг/с.} \quad (1.14)$$

Для элементарной работы изменения объема можно написать

$$dL = p dV. \quad (1.15)$$

Принято считать, что если  $dV > 0$ , то и  $dL > 0$ , то есть ТС совершает работу над окружающей средой. При  $dV < 0$   $dL < 0$ : в этом случае ОС совершает работу над ТС. Так как масса газа неизменна, то, разделив (1.15) на  $G$ , получим удельную работу изменения объема  $dl = p dv$ , Дж / кг. (1.16)

Интуитивно можно прийти к выводу, что работа изменения объема будет зависеть от скорости загрузки дроби на поршень. Действительно, если дробь насыпать очень медленно, то возможна ситуация, когда за счет теплообмена с ОС текущая температура будет практически совпадать с температурой ОС и мы будем иметь изотермический процесс. Если загрузку поршня дробью осуществить очень быстро, то ТС не успеет обменяться теплотой с ОС и такой процесс можно считать идеальным адиабатическим процессом. Промежуточный случай, когда имеет место теплообмен с ОС, назовем политропическим процессом. Однако во всех случаях предполагается, что выполняется условие (1.1). Таким образом, мы показали, что работа изменения объема есть функция процесса. Отметим, что при равновесном процессе давление внешней среды на поршень равно по величине и противоположно по направлению

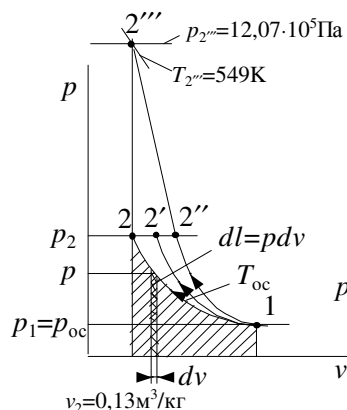


Рис.1.3

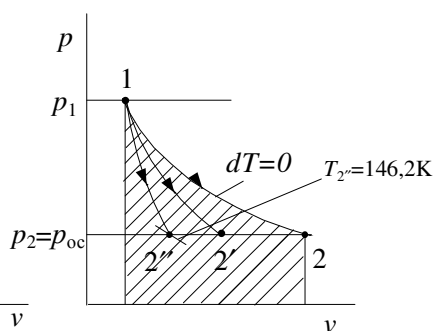


Рис.1.4

- 1-2 -изотермический процесс,
- 1-2' -политропический процесс,
- 1-2'' -идеальный адиабатический процесс



давлению газа в цилиндре.

Процессы, удовлетворяющие условию (1.1), можно изображать в диаграммах состояния. На рис.1.3 показана работа сжатия ( $dv < 0$ ) для различных процессов. Из рисунка видно, что работа изотермического сжатия (заштрихованная площадь под кривой процесса) больше двух других работ, когда конечное давление для всех процессов одинаковое. Так, для случая:  $p_{oc} = 1,013 \cdot 10^5$  Па,  $T_{oc} = 273$  и  $p_2 = 6 \cdot 10^5$  Па работа изотермического сжатия воздуха в 1,146 раза больше работы сжатия идеального адиабатического процесса. Однако если сжимать воздух до того же удельного объема  $v_2$ , то  $l_{(1-2)T} / l_{(1-2'')ад} = 0,751$ . В процессе расширения (см. рис.1.4) работа изотермического расширения при тех же условиях больше идеальной адиабатической работы в 1,91 раза.

При рассмотрении поточных процессов, которые имеют место в открытых ТС, используется понятие технической работы (работа изменения давления). На рис.1.5 в  $p - v$  диаграмме показаны процессы расширения и техническая работа (заштрихованная площадь). Получим выражение технической работы при  $ds=0$ .

$$l_{(1-2')тех} = p_1 v_1 + \int_{v_1}^{v_2'} p dv - p_2 v_2' = -(p_2 v_2' - p_1 v_1) + \int_{v_1}^{v_2'} p dv. \quad (1.17)$$

В дифференциальной форме будем иметь

$$dl_{тех} = p dv - d(pv) = -v dp. \quad (1.18)$$

Произведение  $pv$  называется работой "проталкивания". Работа проталкивания - это работа, которую нужно совершить в среде с давлением  $p$ , чтобы освободить объем  $V$ .

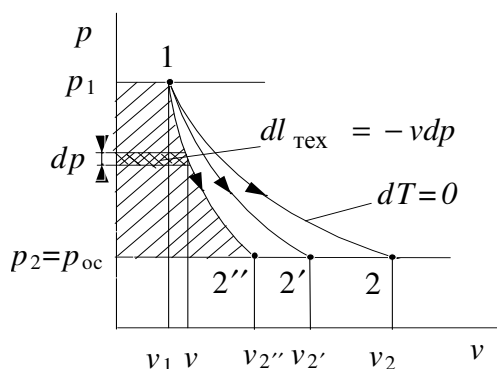


Рис. 1.5

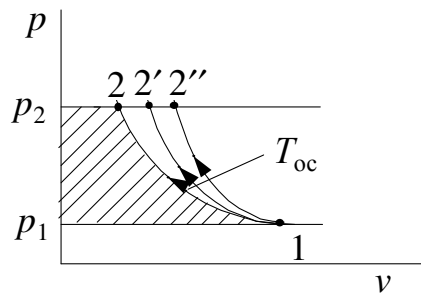


Рис.1.6

Таким образом, мы приходим к выводу, что техническая работа больше работы изменения объема на величину работы проталкивания. Из рис.1.5 видно, что работа изотермического расширения больше идеальной технической работы при изоэнтропийном расширении. В нашем случае  $l_{(1-2)T} / l_{(1-2')тех.ид} = 1,361$ . В процессе сжатия (см. рис.1.6)  $l_{(1-2)T} / l_{(1-2'')тех.ид} = 0,819$ . В связи с этим в поршневых компрессорах с целью уменьшения технической работы сжатия применяют охлаждение цилиндров (процесс 1-2'). Как отмечалось выше, теплота, как и работа, является функцией процесса. Теплоту, подведенную или отведенную в каком-либо квазистатическом

процессе, удобно изображать в  $T-s$  диаграмме, так как  $dq = T ds$  (см. рис.1.7). Так как  $T$  всегда больше нуля, то если  $ds > 0$ , то и  $dq > 0$ . В случае  $ds < 0$ , будет  $dq < 0$ . Для процесса, изображенного на рис.1.7, можно написать

$$q_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} T ds, \quad (1.19)$$

где  $s$ , Дж/(кг·К) - удельная энтропия, функция состояния, о которой будет сказано позже. Так как  $ds > 0$ , то теплота (изображаемая заштрихованной площадью) в процессе 1-2 подводится к ТС.

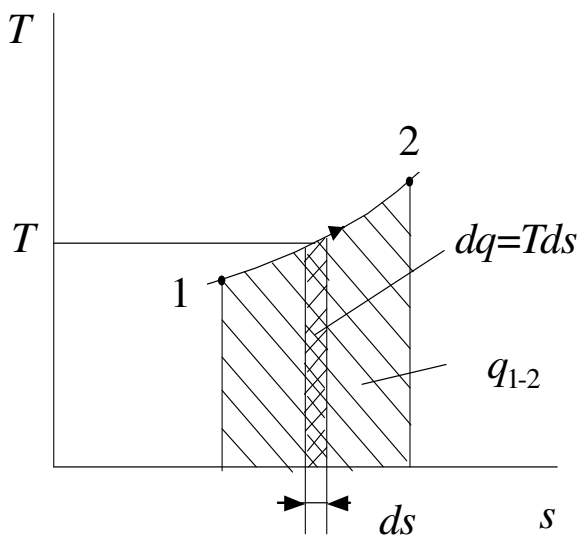


Рис.1.7

### Уравнение состояния

Для простых термодинамических систем, которые имеют две степени свободы (можно произвольно изменять два термодинамических параметра), можно написать

$$f(p, V, T) = 0, \quad (1.20)$$

$$U = U(V, T), \quad (1.21)$$

где  $U$  - внутренняя энергия газа, Дж,

$$I = I(p, T), \quad (1.22)$$

где  $I = U + pV$  - энтальпия газа, Дж.

Уравнение (1.20) называется термическим уравнением состояния, т.к. связывает между собой термические параметры. Для реальных газов в настоящее время получено более 150 эмпирических уравнений состояния.

Наиболее простым из них является уравнение Ван-дер-Ваальса, которое качественно удовлетворительно описывает поведение реальных газов вплоть до перехода их в жидкое состояние. В геометрической интерпретации уравнение состояния представляет собой поверхность в трехмерной  $(p, V, T)$  системе координат. Любая точка этой поверхности соответствует равновесному состоянию газа, а термодинамический процесс изображается кривой на этой поверхности. Уравнения (1.21) и (1.22) называются калорическими уравнениями состояния (устанавливают зависимости  $U$  и  $I$  от термических параметров).

## 2. Первый закон термодинамики

Принцип эквивалентности теплоты и работы, опыт Джоуля

Принцип эквивалентности теплоты и работы является частным случаем первого закона термодинамики - закона сохранения и превращения энергии.

Еще М.В.Ломоносов считал, что "живая сила механического движения превращается в живую силу частиц нагретого тела". Румфорд в результате проведенных опытов (он изучал выделение теплоты при сверлении стволов пушек, 1798 г.) приходит к выводу, что теплота не является веществом [14]. Позднее Майер (1842 г.) устанавливает связь между теплотой и механической работой, определив механический эквивалент теплоты  $J=423,8$  кгм/ккал. В 1843 г. Джоуль, проведя уникальный эксперимент, находит, что  $J=427$  кгм/ккал. Последние исследования показывают, что  $J=426,939$  кгм/ккал. На рис.2.1 показана принципиальная схема установки Джоуля.

При движении груза  $G_r$  в поле гравитационных сил совершается механическая работа  $L$  над адиабатической системой массой  $G_{ж}$ , представляющей собой теплоизолированный сосуд с водой. Балансовое уравнение в этом случае имеет вид

$$L = G_r \Delta H g = G_{ж} \bar{c}_{ж} \Delta t. \quad (2.1)$$

В ходе опытов было обнаружено, что при совершении над системой механической работы, равной 427 кгм, температура воды массой в 1 кг увеличивалась с 14,5С до 15,5С, что соответствовало подводу к ТС одной килокалории теплоты

$$Q = AL \Rightarrow A = \frac{Q}{L} = \frac{1}{427} \frac{\text{ккал}}{\text{кгм}}, \quad (2.2)$$

где  $A$  - тепловой эквивалент работы.

Таким образом, Джоулем было доказано, что определенной затраченной механической работе всегда соответствует выделение определенного количества теплоты.

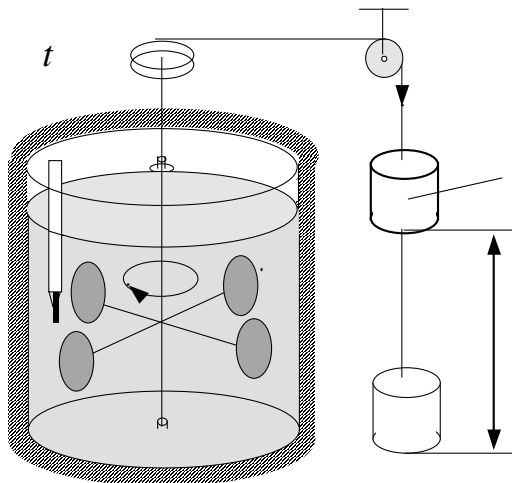


Рис.2.1

### Внутренняя энергия и энтальпия

Энергия движущегося тела  $E$  складывается из кинетической  $E_{\text{кин}}$ , потенциальной  $E_{\text{пот}}$  и внутренней энергии  $U$  (см. рис.2.2), т.е.

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} + U = \frac{Gw^2}{2} + gGH + U. \quad (2.3)$$

В дальнейшем в большинстве случаев будем полагать  $E_{\text{кин}} = E_{\text{пот}} = 0$ , тогда  $E = U$ . В свою очередь, внутренняя энергия  $U$  может быть представлена в виде суммы

$$U = U_{\text{кин}} + U_{\text{пот}} + U_0, \quad (2.4)$$

где  $U_{\text{кин}} = U_{\text{п.д}} + U_{\text{вр.д}} + U_{\text{кол}}$  - кинетическая энергия молекул;

$U_{\text{п.д}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \bar{w}_i^2}{2}$  - кинетическая энергия поступательного движения молекул;

$U_{\text{вр.д}} = \sum_{i=1}^n \frac{I_i \bar{\omega}_i^2}{2}$  - энергия вращательного движения молекул;  $I_i$ ,  $\bar{\omega}_i$  - момент инерции и угловая скорость молекулы;  $U_{\text{кол}}$  - энергия колебательного движения

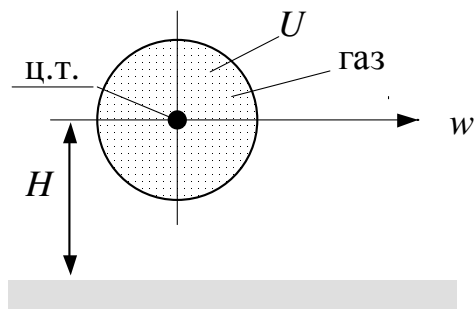


Рис.2.2

ядер атомов;

$U_{\text{пот}}$  - потенциальная энергия взаимодействия всех молекул между собой;  $U_0$  - внутренняя энергия тела при температуре абсолютного нуля.

Внутренняя энергия реального газа  $U = f(T, V)$  является функцией состояния, а дифференциал от этой функции - полным:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV. \quad (2.5)$$

Для идеального газа, в котором молекула рассматривается как материальная точка (имеет только три степени свободы поступательного движения)

$$U_{\text{ид.г}} = N \frac{m_i \bar{w}_i^2}{2} = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} N_0 M \frac{R_0}{N_0} T = \frac{3}{2} MR_0 T = \frac{3}{2} \frac{G}{\mu} R_0 T = \frac{3}{2} GRT, \quad (2.6)$$

где  $N$  - число молекул.

В общем случае

$$U_{\text{ид.г}} = \frac{3 + \delta_{\text{вр}}}{2} GRT, \text{ Дж}, \quad (2.7)$$

где  $\delta_{\text{вр}}$  - число степеней свободы вращательного движения молекулы.

Разделив (2.7) на массу газа, получим удельную внутреннюю энергию

$$u_{ид.г} = \frac{3 + \delta_{вр}}{2} RT, \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} . \quad (2.8)$$

Энтальпия, как и внутренняя энергия, является функцией состояния. По определению энтальпия равна сумме внутренней энергии тела и потенциальной энергии давления

$$I = U + pV . \quad (2.9)$$

Действительно, если рассмотреть систему, состоящую из газа в цилиндре и поршня площадью  $F$  с грузом, то  $GgH = pFH = pV$ . Таким образом, энтальпия характеризует энергию расширенной системы. Рассмотрим открытую ТС. Сила статического давления, действующая на элементарную массу  $dG$ , совершает работу проталкивания  $pFdx$ , перемещая этот элемент на расстояние  $dx$ , но  $dx = wd\tau$ , а  $w = \dot{G}/(\rho F)$ , кроме того,  $\dot{G} = dG/d\tau$ , тогда  $pFdx = pFwd\tau = pF \frac{\dot{G}}{\rho F} d\tau = \frac{pdG}{\rho d\phi} d\tau = pvdG$ . Следовательно,

для открытой системы энергия потока элементарной массы равна

$$dE = \left( u + pv + \frac{w^2}{2} + gh \right) dG = \left( i + \frac{w^2}{2} + gh \right) dG = (i^* + gh) dG . \quad (2.10)$$

Аналогично внутренней энергии, можно записать

$$I = f(p, T), \quad dI = \left( \frac{\partial I}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_p dT . \quad (2.11)$$

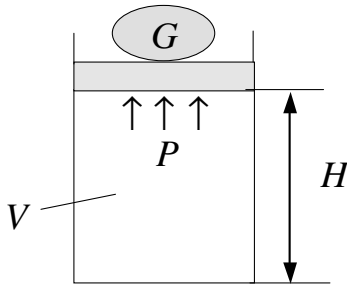


Рис.2.3

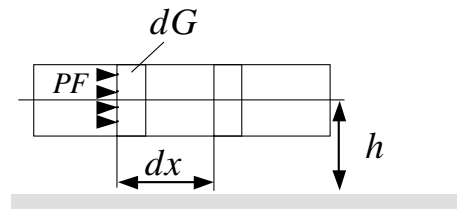


Рис.2.4

Внутренняя энергия  $U$  и энтальпия  $I$  обладают свойством аддитивности если можно пренебречь поверхностной энергией на границах подсистем, что справедливо для макротел, т.е.  $U = \sum_{i=1}^n U_i, I = \sum_{i=1}^n I_i$ .

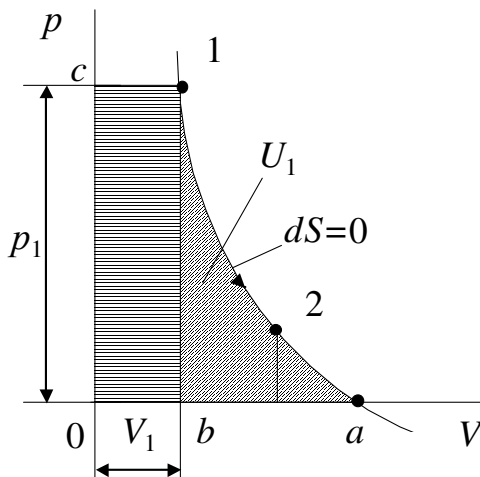


Рис. 2.5

Внутреннюю энергию и энтальпию можно показать в  $p$ - $V$  диаграмме (см. рис.2.5). При  $dS=0$  работа изменения объема  $L_{1-2} = U_1 - U_2$ . Предположим, что процесс расширения осуществляется до  $p_2=0$ , тогда внутренняя энергия газа в точке 1  $U_1$  в  $p$ - $V$  диаграмме изобразится площадью 1- $a$ - $b$ -1. Так как  $I_1 = U_1 + p_1V_1$ , то в  $p$ - $V$  диаграмме энтальпия определится площадью 0- $c$ -1- $a$ -0.

Аналитическое выражение первого закона термодинамики

для закрытой и открытой систем

Рассмотрим закрытую термодинамическую систему с подвижной

границей и начальными параметрами  $V_1, U_1$ . Если внешняя среда совершит работу над ТС и отдаст ей теплоту, то внутренняя энергия в новом состоянии равна

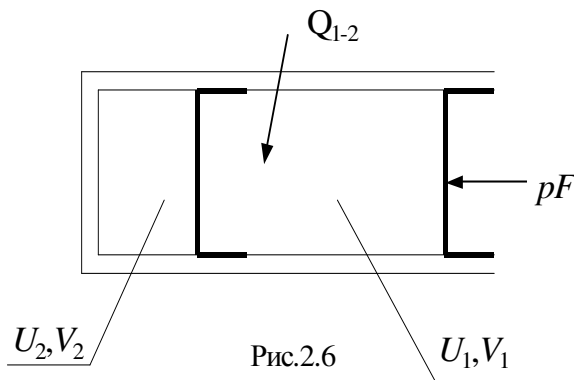
$$U_2 = U_1 - \int_{V_1}^{V_2} pdV + Q_{1-2}, \quad (2.12)$$

$$\text{или } Q_{1-2} = U_2 - U_1 + \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) является записью первого закона термодинамики для закрытой ТС в интегральной форме. В дифференциальном виде будем иметь:

$$dQ = dU + pdV, \quad (2.14)$$

т.е. теплота, подведенная к термодинамической системе, в общем случае идет на увеличение внутренней энергии ТС и



совершение работы изменения объема.

Для более сложных закрытых ТС первый закон термодинамики в дифференциальной форме записывается с учетом суммы работ  $\sum_{i=1}^n dL_{vi}$ , не связанных с изменением объема (например, работа против сил поверхностного натяжения, работа в гравитационных, электрических и магнитных полях):

$$dQ = dU + pdV + \sum_{i=1}^n dL_{vi}.$$

Разделив (2.14) на массу газа, получим

$$dq = du + pdv, \quad \text{Дж/кг.} \quad (2.15)$$

В дальнейшем, как правило, мы будем использовать первый закон термодинамики в виде (2.13)- (2.15).

Выполнив преобразование Лежандра (преобразование меняет местами зависимые и независимые переменные) над (2.15), т.е. прибавляя и вычитая  $d(pv)$ , получим другое полезное выражение первого закона термодинамики

$$dq = du + d(pv) - d(pv) + pdv = d(u + pv) - pdv - vdp + pdv = di - vdp. \quad (2.16)$$

Рассмотрим открытую ТС (см. рис.2.7). На входе в канал, расположенный под углом к горизонту, поток имеет энергию  $\dot{E}_1 = \dot{I}_1^* + \dot{G}gH_1$ , а на выходе:  $\dot{E}_2 = \dot{I}_2^* + \dot{G}gH_2$ . В результате подвода к ТС потока теплоты и совершения ею технической работы в единицу времени произойдет изменение энергии потока  $\dot{E}_2 - \dot{E}_1 = \dot{Q}_{1-2} - \dot{L}_{\text{тех}1-2}$  или  $\dot{I}_2^* + \dot{G}gH_2 - \dot{I}_1^* - \dot{G}gH_1 = \dot{Q}_{1-2} + \dot{L}_{\text{тех}1-2}$ . Разрешая уравнение относительно потока теплоты, получим выражение первого закона термодинамики для открытой системы в интегральном виде

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{I}_2^* - \dot{I}_1^* + \dot{L}_{\text{тех}1-2} + \dot{G}g(H_2 - H_1). \quad (2.17)$$

В дифференциальной форме будем иметь

$$d\dot{Q} = d\dot{I}^* + d\dot{L}_{\text{тех}} + \dot{G}gdH, \quad \text{Вт.} \quad (2.18)$$

В большинстве случаев, когда в качестве рабочего тела используются газы или пары, можно положить  $dH = 0$ , тогда

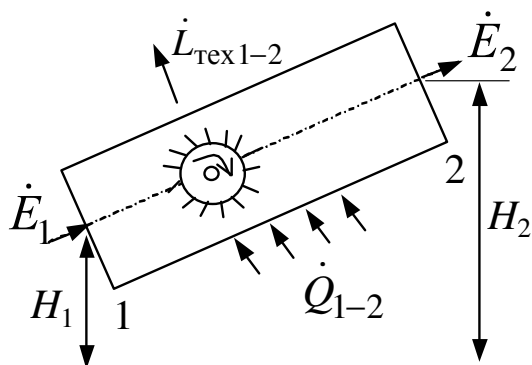


Рис.2.7

$$d\dot{Q} = d\dot{i}^* + d\dot{L}_{\text{тех}}. \quad (2.19)$$

Рассмотрим частные случаи. Для паровой или газовой турбины, имеющей тепловую изоляцию, из (2.19) получим  $d\dot{L}_{\text{тех}} = -d\dot{i}^*$  или  $\dot{L}_{\text{тех}1-2} = -(\dot{i}_2^* - \dot{i}_1^*) = \dot{i}_1^* - \dot{i}_2^*$ , т.е. работа турбины (техническая работа) осуществляется за счет убыли полной энтальпии  $\dot{i}^* = \dot{G}i^* = \dot{G}\left(i + \frac{c^2}{2}\right)$ , где  $c$  - скорость потока в абсолютном движении.

Для газа, движущегося в адиабатическом канале, уравнение энергии примет вид  $d\dot{i}^* = 0$ ,

или  $\dot{i}^* = \text{const}$ . Таким образом, для любых двух сечений при постоянном расходе  $\dot{G}$  можно написать  $i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2}$ . Такая запись справедлива как для идеального, так и для реального потока с трением. Действительно, работа сил трения приводит к росту удельной энтальпии и уменьшению скорости, но всегда  $\dot{i}^* = i + \frac{c^2}{2} = \text{const}$ . Первый закон термодинамики для открытой ТС справедлив и для систем, в которых отсутствуют тепловые эффекты. Так, мощность гидравлической турбины, где можно считать температуру жидкости практически постоянной, равна  $\dot{L}_{\text{тех}1-2} = -\dot{G}g(H_2 - H_1)$ . Из приведенных примеров видно, что первый закон термодинамики является универсальным законом природы.

#### Первый закон термодинамики с учетом переменной массы

Примерами термодинамической системы с переменной массой могут служить процесс закачки газа в емкость, процесс расширения газа в двигателе внутреннего сгорания при наличии утечек газа из цилиндра в окружающую среду, и т.п. В первом случае (рис.2.8а) будем иметь

$$U_2 = U_1 - Q_{1-2} + \int_0^G idG. \quad (2.20)$$

Для второго случая можно написать

$$d\dot{Q} + id\dot{G} = d\dot{U} + pd\dot{V}, \quad (2.21)$$

здесь  $d\dot{G} < 0$ , в общем случае  $d\dot{G}$  может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

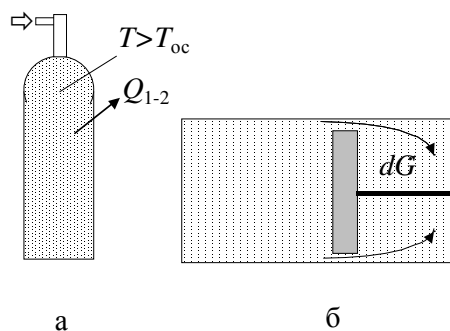


Рис. 2.8

### Применение первого закона термодинамики к круговому процессу

Под круговым процессом, или циклом, понимают совокупность последовательных процессов, в результате совершения которых ТС возвращается в исходное состояние. В технике используют как прямые циклы, когда в  $p$ - $v$  диаграмме кривая расширения  $A$ - $a$ - $B$  лежит выше кривой сжатия  $B$ - $b$ - $A$  (рис.2.9), так и обратные, где процесс расширения лежит ниже процесса сжатия. Все тепловые машины работают по прямому циклу, а холодильные - по обратному. Проведя идеальные адиабаты (изоэнтропы  $ds=0$ ) через точки  $A$  и  $B$  цикла, разобьем его на две части: процесс  $A$ - $a$ - $B$ , где к рабочему телу подводится теплота  $q_I$  и процесс  $B$ - $b$ - $A$ , где осуществляется отвод теплоты  $q_{II}$ . Проинтегрируем уравнение, описывающее первый закон термодинамики, по замкнутому контуру

$$\oint dq = \oint du + \oint dl . \quad (2.22)$$

Так как при возвращении рабочего тела в круговом процессе в исходное состояние  $\oint du = 0$ , то  $q_{II} = l_{II}$ , т.е. работа цикла равна теплоте цикла. Так как  $q_{II} = q_I - q_{II}$ , то

$$l_{II} = q_I - q_{II} . \quad (2.23)$$

Количественную сторону превращения в работу подведенной в идеальном цикле теплоты характеризует термический КПД цикла

$$\eta_t = \frac{l_{II}}{q_I} = \frac{q_I - q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} , \quad (2.24)$$

который представляет собой отношение идеальной работы цикла к теплоте, подведенной в этом цикле. Так как согласно второму закону термодинамики невозможно достичь абсолютного нуля температуры, то  $q_{II}$  всегда больше нуля и, следовательно,  $\eta_t$  всегда меньше единицы.

### **3. Приложение первого закона термодинамики к идеальным газам**

#### Свойства идеального газа. Опыты Гей-Люссака, Бойля и Мариотта.

##### Термическое уравнение состояния

Под идеальным газом (ИГ), как отмечалось выше, понимают такой газ, молекулы которого рассматриваются как материальные точки, имеющие массу, но не имеющие объема. Взаимодействие между молекулами ИГ осуществляется только за счет упругих соударений, силы взаимного притяжения и отталкивания между молекулами отсутствуют.

В 1806 г. Гей-Люссак проводит опыт с целью определения зависимости внутренней энергии газа от объема. В сосуде 1 (рис.3.1) находился газ под небольшим давлением  $p_1$ , чтобы ослабить силы взаимного притяжения между молекулами, в сосуде 2 -  $p_2 \approx 0$ . Вся система была теплоизолирована, работа внешних сил отсутствовала, т.е. внутренняя энергия не могла измениться,

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = 0 . \quad (3.1)$$

После открытия крана  $K$  газ заполнял емкость 2, при этом в первый момент термометр 1 показал некоторое понижение температуры, а второй - повышение, однако через

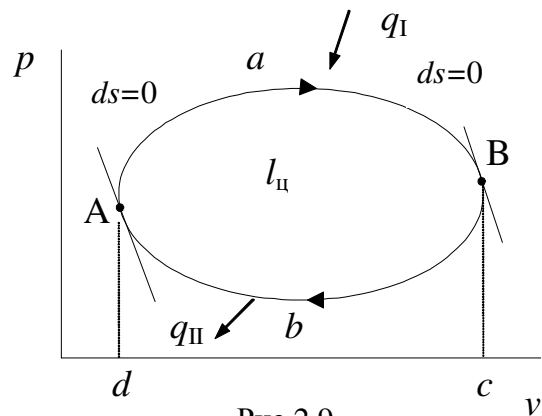


Рис.2.9

некоторое время, после установления теплового равновесия в термостате, термометры стали показывать первоначальное значение.

Таким образом,  $dT=0$ , но теперь газ занимал две емкости, т.е.  $dV \neq 0$ . Выполнение условия (3.1) требует, чтобы  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ . На основании этого опыта Гей-Люссак показал, что внутренняя энергия разряженных реальных газов ( $p \leq 3$  МПа) не зависит от объема и такие газы могут рассматриваться как идеальные (см. ф-лу 1.9).

Для энтальпии будем иметь  $di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp = 0$ , но  $dT=0$ , а  $dp \neq 0$ ,

откуда для идеального газа получаем  $\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = 0$ .

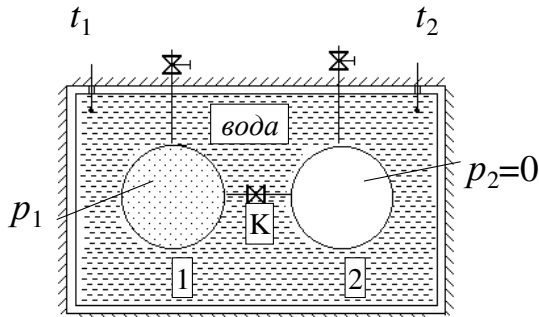


Рис.3.1

Бойль и Мариотт независимо друг от друга установили, что при  $T = \text{const}$  произведение  $pv = \text{const}$ , т.е.

$$pv = f(T). \quad (a)$$

Разделив (a) на  $T$ , получим новую функцию, также зависящую от температуры:

$$\frac{pv}{T} = \varphi(T). \quad (b)$$

Гей-Люссак установил, что при  $p = \text{const}$

$$\frac{v}{T} = \psi(p). \quad (c)$$

Умножим (c) на  $p$  и получим функцию

$$\frac{pv}{T} = F(p). \quad (d)$$

Сравнивая (b) и (d), приходим к выводу, что в правой части уравнений должна быть константа, независимая от  $T$  и  $p$ . Эта константа называется газовой постоянной  $R$ , так что можно написать

$$pv = RT. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является термическим уравнением состояния идеального газа в форме Клапейрона. Умножая (3.2) на массу газа, получим

$$pV = GRT, \quad (3.3)$$

где  $R = R_0/\mu$ . Так как  $G = M\mu$ , то (3.3) можно представить в форме Клапейрона-Менделеева

$$pV = MR_0T. \quad (3.4)$$

#### Внутренняя энергия и энтальпия идеального газа

Для реального газа  $u = f(T, v)$ , а  $i = \varphi(T, p)$ , тогда

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv, \quad di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp, \quad \text{но } \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = 0,$$

$$\text{следовательно, } du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT, \quad di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT.$$

Ниже будет показано, что  $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v$ , а  $\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = c_p$  (см. ф-лы 3.14 и 3.15). Таким образом,

для идеального газа справедливы выражения



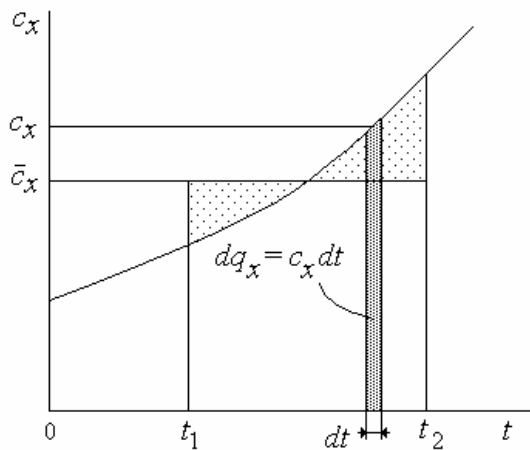


Рис. 3.2

$$du = c_v dT, \quad (3.5)$$

$$di = c_p dT, \quad (3.6)$$

где  $c_v$  и  $c_p$  - удельные изохорная и изобарная теплоемкости, Дж/(кг·К). В интегральной форме будем иметь

$$\Delta u_{1-2} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1), \quad (3.7)$$

$$\Delta i_{1-2} = i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1). \quad (3.8)$$

### Теплоемкость

Под истинной теплоемкостью понимают предел отношения бесконечно малого количества теплоты, подведенного к телу, к вызванному этим подводом изменению температуры тела при  $\Delta T \rightarrow 0$

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}, \text{ Дж/К.} \quad (3.9)$$

Так как  $dQ$  зависит от характера процесса, то и теплоемкость является функцией процесса. Теплоемкость может изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Разделив (3.9) на массу тела, получим удельную истинную теплоемкость

$$c_x = \frac{dq_x}{dT}, \text{ Дж/(кг·К).} \quad (3.10)$$

Теплоемкость реальных газов зависит от температуры и может быть аппроксимирована полиномом

$$c = a + bt + dt^2 + \dots \quad (3.11)$$

Кроме истинной теплоемкости используют понятие средней теплоемкости в заданном интервале температур (см. рис.3.2)

$$\bar{c}_x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c_x(t) dt. \quad (3.12)$$

Если в термодинамических таблицах приводятся средние значения теплоемкости  $\bar{c}_x|_0^t$  в интервале от 0 до  $t$ , то значение средней теплоемкости в заданном интервале находится из формулы

$$\bar{c}_x|_{t_1}^{t_2} = \frac{\bar{c}_x|_0^{t_2} \cdot t_2 - \bar{c}_x|_0^{t_1} \cdot t_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.13)$$

Чаще всего в термодинамических расчетах используют удельные изохорную и изобарную теплоемкости.

Первый закон термодинамики  $dq = du + pdv$  для изохорного процесса ( $dv=0$ ) принимает вид  $dq_v = du$ , тогда

$$c_v = \frac{dq_v}{dT} = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v. \quad (3.14)$$

Для изобарного процесса ( $dp=0$ ) будем иметь  $dq_p = di = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT$ , следовательно,

$$c_p = \frac{dq_p}{dT} = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p. \quad (3.15)$$

Найдем связь между изохорной и изобарной теплоемкостями. Продифференцируем выражение энтальпии  $i=u+pv$ :  $di = du + d(pv)$ , но для идеального газа  $d(pv) = RdT$ , тогда

$$c_p dT = c_v dT + RdT, \text{ или } c_p - c_v = R. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) называется формулой Майера. Так как  $R$  - величина положительная, то изобарная удельная теплоемкость газа всегда больше изохорной.

### Смеси газов

В большинстве энергетических систем и машин в качестве рабочего тела применяются механические смеси газов. Поэтому необходимо рассмотреть основные свойства газовых смесей. Составляющие газовой смеси называются компонентами. Так как масса обладает свойством аддитивности, то можно написать  $G_{\text{см}} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ . Разделив левую и правую части на массу смеси, получим

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1, \quad (3.17)$$

где  $g_i = \frac{G_i}{G_{\text{см}}}$  - массовая доля  $i$ -го компонента.

Согласно закону Дальтона, давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений ее компонентов

$$p_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (3.18)$$

Под парциальным давлением  $p_i$  понимают давление, которое имел бы  $i$ -й газ, занимая весь объем смеси при температуре смеси. Отметим, что закон Дальтона справедлив только для смеси идеальных газов, так как только в этом случае можно написать (см. модель идеального газа)

$$p_{\text{см}} = \frac{2}{3} c_1 \frac{m_1 \bar{w}_1^2}{2} + \frac{2}{3} c_2 \frac{m_2 \bar{w}_2^2}{2} + \dots = \frac{2}{3} c_{\text{см}} \frac{m \bar{w}^2}{2},$$

где  $c_{\text{см}} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$  - концентрация смеси (количество молекул в единице объема смеси), равная сумме концентраций всех ее компонентов;  $p_i = \frac{2}{3} c_i \frac{m_i \bar{w}_i^2}{2}$ ;

$$\frac{m_1 \bar{w}_1^2}{2} = \frac{m_2 \bar{w}_2^2}{2} \dots = \frac{m \bar{w}^2}{2} \text{ при } T = \text{const.}$$

Получим выражение для газовой постоянной смеси. Запишем уравнения состояния для компонентов смеси через парциальные давления и сложим их:

$$\begin{aligned} & p_1 V_{\text{см}} = G_1 R_1 T_{\text{см}} \\ & + p_2 V_{\text{см}} = G_2 R_2 T_{\text{см}} \\ & + \dots \\ & + p_n V_{\text{см}} = G_n R_n T_{\text{см}} \\ \hline & V_{\text{см}} \sum_{i=1}^n p_i = T_{\text{см}} \sum_{i=1}^n G_i R_i. \end{aligned} \quad (a)$$

С учетом (3.18) получим

$$V_{\text{см}} p_{\text{см}} = T_{\text{см}} \sum_{i=1}^n G_i R_i. \quad (b)$$

Для всей смеси можно записать

$$V_{\text{см}} p_{\text{см}} = T_{\text{см}} G_{\text{см}} R_{\text{см}}. \quad (c)$$

Сравнивая (b) и (c), приходим к выводу, что

$$T_{\text{см}} G_{\text{см}} R_{\text{см}} = T_{\text{см}} \sum_{i=1}^n G_i R_i. \quad (d)$$

Разделив (d) на массу смеси, получим

$$R_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n g_i R_i. \quad (3.19)$$

Представим уравнение состояния для  $i$ -го компонента через парциальное давление  $p_i$  и приведенный (парциальный) объем  $V_i$ :

$$p_i V_{\text{см}} = G_i R_i T_{\text{см}}, \quad (e)$$

$$p_{\text{см}} V_i = G_i R_i T_{\text{см}}, \quad (f)$$

откуда следует, что

$$p_i V_{\text{см}} = p_{\text{см}} V_i. \quad (g)$$

Суммирование (g) по индексу  $i$  дает

$$V_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n V_i, \quad (3.20)$$

под приведенным (парциальным) объемом  $i$ -ого компонента понимают объем, который занимал бы  $i$ -й газ при температуре и давлении смеси. Отношение  $r_i = V_i / V_{\text{см}}$  называется объемной долей  $i$ -ого компонента. Разделив (3.20) на объем смеси, получим

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1. \quad (3.21)$$

Используя (g), можно написать

$$\frac{p_{\text{см}} V_i}{p_i V_{\text{см}}} = \frac{p_{\text{см}}}{p_i} r_i = 1, \quad \text{откуда } p_i = p_{\text{см}} r_i. \quad (3.22)$$

Разделив (f) на (c), найдем связь между объемными и массовыми долями компонентов

$$r_i = g_i \frac{R_i}{R_{\text{см}}} = g_i \frac{\mu_{\text{см}}}{\mu_i}, \quad (3.23)$$

так как  $R_i = R_0 / \mu_i$ , где  $\mu_i$  - молекулярная масса.

Записав (3.23) в виде  $g_i \mu_{\text{см}} = r_i \mu_i$ , после суммирования по  $i$  определим кажущуюся молекулярную массу смеси

$$\mu_{\text{см}} \sum_{i=1}^n g_i = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i, \quad \text{но } \sum_{i=1}^n g_i = 1, \quad \text{тогда}$$

$$\mu_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i. \quad (3.24)$$

Так как  $G = M \mu$ , где  $M$  - число киломолей, то

$$\mu_{\text{см}} = \frac{G_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} = \frac{G_{\text{см}}}{\sum_i \frac{G_i}{\mu_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{g_i}{\mu_i}}. \quad (3.25)$$

С другой стороны,

$$\mu_{\text{см}} = \frac{G_{\text{см}}}{M_{\text{см}}} = \frac{\sum_i M_i \mu_i}{M_{\text{см}}} = \sum_i N_i \mu_i, \quad (3.26)$$

где  $N_i = M_i / M_{\text{см}}$  - мольная доля  $i$ -го компонента.

Из сравнения (3.24) и (3.26) следует, что  $r_i = N_i$ , (3.27)

т.е. объемные и мольные доли численно равны.

Определим плотность смеси

$$\rho_{\text{см}} = \frac{G_{\text{см}}}{V_{\text{см}}} = \frac{1}{V_{\text{см}}} \sum_i \rho_i V_i = \sum_i \rho_i r_i, \quad (3.28)$$

где  $\rho_i = \frac{G_i}{V_i} = \frac{p_{\text{см}}}{R_i T_{\text{см}}}$ . Введем понятие парциальной плотности  $\rho'_i = \frac{G_i}{V_{\text{см}}}$ . Суммирование по  $i$

дает  $\sum_i \rho'_i = \frac{1}{V_{\text{см}}} \sum_i G_i = \rho_{\text{см}}$ , т.е. плотность смеси равна сумме парциальных

плотностей компонентов

$$\rho_{\text{см}} = \sum_i \rho'_i,$$

(3.29)

где  $\rho'_i = \frac{p_i}{R_i T_{\text{см}}}$ .

### Теплоемкость смеси

Если пренебречь поверхностной энергией на границах раздела компонентов, то можно написать

$$\Delta U_{\text{см}} = c_{v\text{см}} G_{\text{см}} \Delta T_{\text{см}} = \sum_i \Delta U_i = \Delta T_{\text{см}} \sum_i c_{vi} G_i. \quad (3.30)$$

Разделив (3.30) на  $G_{\text{см}}$ , получим

$$c_{v\text{см}} = \sum_i c_{vi} g_i. \quad (3.31)$$

Аналогичные преобразования с выражением для энтальпии

$$\Delta I_{\text{см}} = \sum_i \Delta I_i \quad (3.32)$$

приводят к формуле

$$c_{p\text{см}} = \sum_i c_{pi} g_i. \quad (3.33)$$

Отметим, что при определении массовой теплоемкости смеси (Дж/(кгК)) теплоемкости компонентов умножаются на их массовые доли. При расчете теплоемкости с размерностью Дж/(м<sup>3</sup> К) применяются формулы с объемными или мольными долями:

$$c'_{v\text{см}} = \sum_i c'_{vi} r_i = \sum_i c'_{vi} N_i, \quad (3.34)$$

$$c'_{p\text{см}} = \sum_i c'_{pi} r_i = \sum_i c'_{pi} N_i. \quad (3.35)$$

Для мольных теплоемкостей (Дж/(кмольК)) имеем, соответственно

$$c_{v\mu\text{см}} = \sum_i c_{v\mu i} r_i = \sum_i c_{v\mu i} N_i, \quad (3.36)$$

$$c_{p\mu\text{см}} = \sum_i c_{p\mu i} r_i = \sum_i c_{p\mu i} N_i. \quad (3.37)$$

Переход от теплоемкостей с одной размерности на другую осуществляется делением или умножением на  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $v$ , например,  $c'_v = c_v \rho_H$ .

Приведенные формулы справедливы как для истинных, так и для средних теплоемкостей в заданном интервале температур.

### Основные виды процессов

Любой цикл тепловой или холодильной машины состоит из совокупности отдельных последовательных термодинамических процессов. Рассмотрим их.

Изохорический процесс,  $dv=0$  - процесс, протекающий при постоянном объеме. Полагая  $v=const$  в уравнении состояния  $pV=RT$ , получим уравнение процесса

$$\frac{p}{T} = const. \quad (3.38)$$

Используя (3.38), найдем связь между параметрами на кривой процесса в точках 1 и 2

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (3.39)$$

Изображение процесса в  $p-v$  диаграмме представлено на рис.3.3. Из первого закона термодинамики  $dq=du+pdv$  получим

$$dq = du, \quad (3.40)$$

или в интегральной форме

$$q_{1-2} = u_2 - u_1, \quad (3.41)$$

т.е. в изохорном процессе подведенная (процесс 1-2) или отведенная

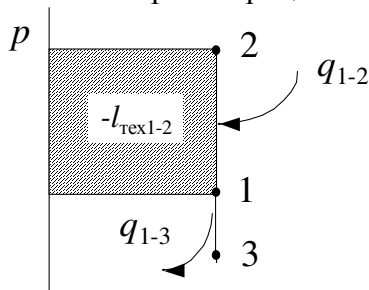


Рис.3.3

(процесс 1-3) теплота идет на изменение внутренней энергии газа. Так как  $dv=0$ , то работа изменения объема равна нулю  $dl=pdv=0$ , а техническая - нет:

$$dl_{\text{tex}} = -vdp \neq 0, \quad l_{\text{tex1-2}} = -v(p_2 - p_1).$$

Изотермический процесс,  $dT=0$

Используя уравнение состояния идеального газа  $pV=RT$ , получим уравнение процесса (равнобокая гиперболоа в  $p-v$  координатах)

$$pV = const. \quad (3.42)$$

Из (3.42) найдем связь между параметрами

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (3.43)$$

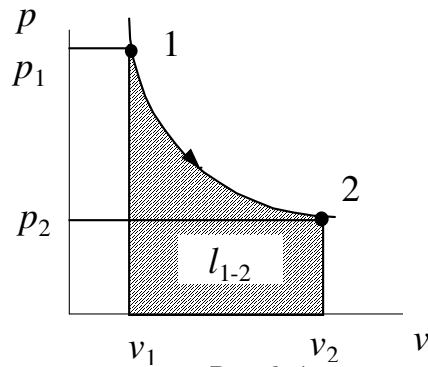


Рис.3.4

Так как  $dT=0$ , то  $du = c_v dT = 0$ , тогда из  $dq=du+pdv$  следует, что в изотермическом процессе подведенная или отведенная теплота численно равна работе изменения объема, т.е.

$$dq = pdv. \quad (3.44)$$

Работа изменения объема в изотермическом процессе равна технической работе

$$l_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} pdv = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = RT \ln \frac{v_2}{v_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

$$l_{\text{tex1-2}} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp = -p_1 v_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -RT \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (3.45)$$

Изобарический процесс,  $dp=0$ . При  $p=const$  из уравнения состояния  $pV=RT$  получим уравнение процесса

$$\frac{v}{T} = const, \quad (3.46)$$

Откуда следует

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (3.47)$$

Из первого закона термодинамики  $dq = di - vdp$  при  $p = \text{const}$  будем иметь

$$dq = di, \quad (3.48)$$

или  $q_{1-2} = i_2 - i_1. \quad (3.49)$

Работа изменения объема равна

$$l_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p(v_2 - v_1). \quad (3.50)$$

Так как  $dp=0$ , то техническая работа изобарического процесса равна нулю.

Изоэнтروпийный процесс,  $ds=0$  (идеальный адиабатический процесс). Из объединенного закона термодинамики (первого и второго) для обратимого изоэнтропийного процесса можно

$$dq = Tds = du + pdv = 0.$$

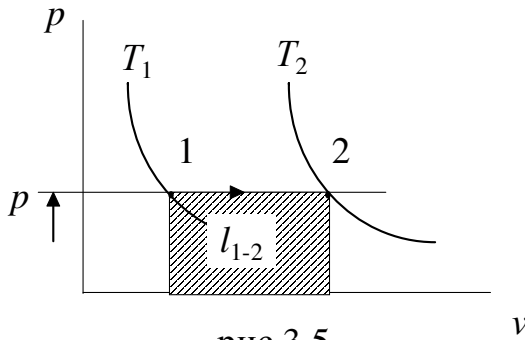


рис.3.5

написать

$$(3.51)$$

Так как  $dl = pdv$ , то

$$dl = -du = -c_v dT, \quad (3.52)$$

или в интегральной форме

$$l_{1-2} = -(u_2 - u_1) = -c_v(T_2 - T_1), \quad (3.53)$$

т.е. работа изменения объема осуществляется за счет убыли внутренней энергии.

Для технической работы из первого закона термодинамики

$$dq = di - vdp = 0 \quad \text{получим}$$

$$dl_{\text{тех}} = -di = -c_p dT. \quad (3.54)$$

В интегральной форме будем иметь

$$l_{\text{тех}1-2} = -(i_2 - i_1) = -c_p(T_2 - T_1). \quad (3.55)$$

Получим уравнение процесса. Имеем:

$$du + pdv = 0, \quad \text{или} \quad c_v dT + pdv = 0. \quad (a)$$

Продифференцируем уравнение состояния  $pdv + vdp = RdT$  и подставим  $dT$  в (a):

$$c_v pdv + c_v vdp + Rpdv = 0 \quad \text{или} \quad (c_v + R)pdv + c_v vdp = 0. \quad (b)$$

После деления (b) на  $c_v$  с учетом, что  $c_v + R = c_p$  получим уравнение идеальной адиабаты (изоэнтропы) в дифференциальной форме

$$k \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0, \quad (3.56)$$

где  $k = c_p/c_v$  - показатель изоэнтропы для идеального газа. В интегральной форме будем

$$\text{иметь} \quad pv^k = \text{const} \quad (3.57)$$

(формула получена Пуассоном в 1823 г).

В общем случае для изоэнтропийного процесса реального газа, разделив (2.16) на (2.15), можно получить выражение

$$\text{показателя изоэнтропы} \quad k = \left( \frac{\partial i}{\partial u} \right)_s = -\frac{v}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s. \quad (3.56)$$

$$\text{найдем, что} \quad \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = -k \frac{p}{v}, \quad (3.58)$$

а из (3.42) после дифференцирования получим

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = -\frac{p}{v}, \quad (3.59)$$

так как  $k > 1$ , то  $\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s > \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T$ , то есть в  $p-v$  диаграмме

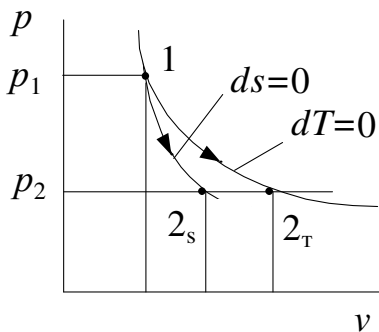


Рис. 3.6

изоэнтропа идет круче изотермы (см. рис.3.6). Деление (3.54) на (3.52) показывает, что техническая работа в изоэнтропном процессе больше работы изменения объема в  $k$  раз

$$dl_{\text{тех}} = kdl. \quad (3.60)$$

Найдем связь между термодинамическими параметрами изоэнтропийного процесса. Используя уравнение (3.57), можно написать

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^k. \quad (3.61)$$

Подставив выражение для давления  $p=RT/v$  из уравнения состояния в (3.61), получим

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1}. \quad (3.62)$$

Подставляя в (3.62)  $(v_2/v_1) = (p_1/p_2)^{1/k}$ , можно также получить

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (3.63)$$

Таким образом, справедливы равенства

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (3.64)$$

Если в качестве рабочего тела используется запыленный поток (поток идеального газа, содержащий примесь в виде твердых микрочастиц или капель), то значение показателя изоэнтропы изменяется и зависит от массового содержания частиц или влаги в потоке. С увеличением загрузки потока твердыми частицами или каплями  $u = \dot{G}_k/\dot{G}_r$  показатель изоэнтропы смеси  $k_{\text{см}} \rightarrow 1$ , т.е. процесс приближается к изотермическому, если  $u \rightarrow 0$ , то  $k_{\text{см}} \rightarrow k = c_{p\Gamma}/c_{v\Gamma}$ . Получим выражение для  $k_{\text{см}}$ .

Будем считать, что процесс теплообмена между потоками газа и капель (или частиц) обратимый, тогда приращение энтропии системы (газ-капли) равно нулю

$$d\dot{S}_c = d\dot{S}_r + d\dot{S}_k = 0 \quad (\text{a}), \quad d\dot{S}_k = \dot{G}_k c_{p\Gamma} \frac{dT}{T} \quad (\text{b}), \quad d\dot{S}_r = \dot{G}_r \left( c_{v\Gamma} \frac{dT}{T} + R_\Gamma \frac{dv}{v} \right). \quad (\text{c})$$

Так как процесс обратимый, то  $T_r = T_k = T$ . Подставляя (b) и (c) в (a), после интегрирования получим

$$c_{v\Gamma} \ln \frac{T_2}{T_1} + R_\Gamma \ln \frac{v_2}{v_1} - u c_{p\Gamma} \ln \frac{T_2}{T_1} = 0. \quad (\text{d})$$

Разделив (d) на  $R_\Gamma$ , можно написать

$$\ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{c_{v\Gamma} - u c_{p\Gamma}}{R_\Gamma}} \cdot \frac{v_2}{v_1} \right] = 0, \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\frac{R_\Gamma}{c_{v\Gamma} - u c_{p\Gamma}}}, \quad (\text{e})$$

но при изоэнтропийном процессе для чистого газа связь между параметрами имеет вид

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}. \quad (\text{f})$$

Сравнивая (e) и (f), приходим к выводу, что  $\frac{R_\Gamma}{c_{v\Gamma} - u c_{p\Gamma}} = k_{\text{см}} - 1$ , откуда с учетом того, что

$R_\Gamma = c_{p\Gamma} - c_{v\Gamma}$  найдем выражение показателя изоэнтропы запыленного потока

$$k_{\text{см}} = \frac{c_{p\Gamma} - u c_{p\Gamma}}{c_{v\Gamma} - u c_{p\Gamma}}. \quad (3.65)$$

### Политропический процесс

Процессы, протекающие в реальных энергетических машинах, как правило, отличаются от рассмотренных выше, занимают некоторое промежуточное положение и называются политропическими. Например, в двигателе внутреннего сгорания (ДВС) во время рабочего хода отводится теплота и линия процесса в  $p$ - $v$  диаграмме располагается между изотермой и изэнтропой. Процессы при  $dT=0$ ,  $dp=0$ ,  $dv=0$ ,  $ds=0$  являются частными случаями более общего понятия “политропический процесс”.

Выведем уравнение политропического процесса. Подставим в уравнение первого закона термодинамики  $dq=du+pdv$  значения  $dq = c_n dT$ , где  $c_n$  - удельная теплоемкость

политропического процесса, и  $du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$ :

$$(c_v - c_n)dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]dv = 0. \quad (a)$$

Записывая первый закон термодинамики в двух формах

$$dq = c_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]dv, \quad dq = c_p dT + \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - v\right]dp$$

и приравнявая правые части, полагая  $dp=0$ , получим

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right] = (c_p - c_v)\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p. \quad (b)$$

Подставляя (b) в (a), приходим к уравнению политропического процесса в дифференциальной форме в переменных  $v$  и  $T$ :

$$\frac{(c_p - c_v)}{(c_v - c_n)}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + dT = 0. \quad (3.66)$$

Подставляя выражение дифференциала температуры как функции двух переменных  $v$  и  $p$

$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp$  в (3.66), получим

$$\frac{(c_p - c_n)}{(c_v - c_n)}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp = 0, \quad (3.67)$$

где  $\frac{(c_p - c_n)}{(c_v - c_n)} = n$  - показатель политропы.

Для идеального газа  $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \frac{p}{R}$ , а  $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = \frac{v}{R}$ , тогда (3.67) примет вид

$$n \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0, \quad (3.68)$$

или в интегральной форме

$$pv^n = \text{const}. \quad (3.69)$$

### Теплота и работа политропического процесса

Выразим  $c_n$  из равенства  $n = \frac{(c_p - c_n)}{(c_v - c_n)}$ :

$$c_n = \frac{c_p - nc_v}{1 - n} = \frac{nc_v - c_p}{n - 1} = c_v \frac{n - k}{n - 1}. \quad (3.70)$$

Теперь элементарную теплоту политропического процесса можно представить в виде



$$dq = c_v \left( \frac{n-k}{n-1} \right) dT. \quad (3.71)$$

Интегрируя (3.71), получим 
$$q_{1-2} = c_v \left( \frac{n-k}{n-1} \right) (T_2 - T_1). \quad (3.72)$$

Для элементарной работы изменения объема можно написать

$$dl = dq - du = \left( \frac{c_v n - c_v k}{n-1} - c_v \right) dT = \frac{c_v - c_v k}{n-1} dT = \frac{c_v - c_p}{n-1} dT = -\frac{R}{n-1} dT = -\frac{1}{n-1} d(pv). \quad (3.73)$$

В интегральном виде

$$l_{1-2} = -\frac{R}{n-1} (T_2 - T_1) = -\frac{1}{n-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1). \quad (3.74)$$

Элементарная техническая работа

$$dl_{\text{тех}} = dq - di = \left[ c_v \left( \frac{n-k}{n-1} \right) - c_p \right] dT = -\frac{n}{n-1} R dT = -\frac{n}{n-1} d(pv). \quad (3.75)$$

В интегральной форме

$$l_{\text{тех}1-2} = -\frac{n}{n-1} R (T_2 - T_1) = -\frac{n}{n-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1). \quad (3.76)$$

Сравнивая (3.74) и (3.76), получаем

$$l_{\text{тех}1-2} = n l_{1-2}. \quad (3.77)$$

Связь между параметрами в политропическом процессе определяется выражениями

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{n-1} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{n-1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

### Связь теплоемкости политропического процесса с показателем политропы

Используя выражение для теплоемкости политропического процесса  $c_n = c_v \frac{n-k}{n-1}$  и задаваясь различными значениями  $n$ , найдем вид функции  $c_n = f(n)$ . При  $n = \pm\infty$

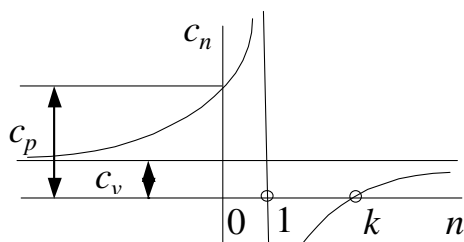


Рис.3.7

$c_n = c_v$ , при  $n=k$   $c_n = 0$ , при  $n=1$   $c_n = \pm\infty$ , при  $n=0$   $c_n = c_p$ . Определив характерные точки, можно построить график, показанный на рис.3. Таким образом, теплоемкость политропного процесса  $c_n$  может изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ , причем отрицательные значения она принимает в интервале  $1 < n < k$ . Это объясняется тем, что в процессе расширения произведенная газом работа может превышать количество подведенной теплоты, т.е. в этом случае работа совершается не только за счет подводимой теплоты, но и за счет убыли внутренней энергии газа, что и приводит к уменьшению

температуры. В таких процессах  $dq > 0$ , а  $dT < 0$  и, следовательно,  $c_n = \frac{dq_n}{dT} < 0$ . Если в

процессе сжатия количества отводимой теплоты ( $dq < 0$ ) недостаточно, чтобы процесс был изотермическим, внутренняя энергия газа будет расти ( $du > 0$ ,  $dT > 0$ ), т.е. снова теплоемкость процесса отрицательна.

Три группы политропических процессов. Способы определения показателя политроты

Все политропические процессы принято делить на три группы. Первая группа процессов (рис.3.8) лежит между изохорой и изотермой ( $-\infty < n < 1$ ). В этой группе в процессе расширения  $dv > 0$ ,  $dl > 0$  и  $dT > 0$ , следовательно, и  $du > 0$ . Рассматривая ту же группу в  $T$ - $s$  диаграмме, видим, что  $ds > 0$  (рис.3.9). Таким образом, и  $dq > 0$ , т.к.  $dq = Tds$ . Тогда  $c_n = dq/dT > 0$ . При сжатии ( $I_c$ )  $dv < 0$ ,  $dl < 0$ ,  $dT < 0$ ,  $du < 0$ ,  $ds < 0$ ,  $dq < 0$ ,  $c_n > 0$ .

Для остальных групп процессов можно написать

$$\text{II}_p (1 < n < k): dv > 0, dl > 0, dT < 0, du < 0, ds > 0, dq > 0, c_n < 0;$$

$$\text{II}_c: dv < 0, dl < 0, dT > 0, du > 0, ds < 0, dq < 0, c_n < 0;$$

$$\text{III}_p (k < n < \infty): dv > 0, dl > 0, dT < 0, du < 0, ds < 0, dq < 0, c_n > 0;$$

$$\text{III}_c: dv < 0, dl < 0, dT > 0, du > 0, ds > 0, dq > 0, c_n > 0.$$

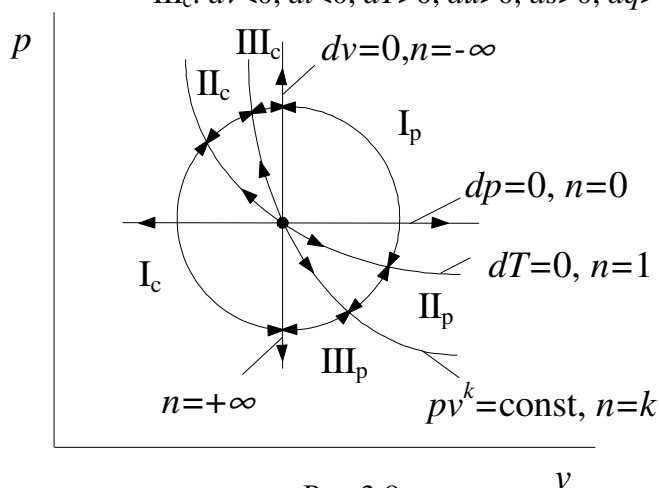


Рис.3.8

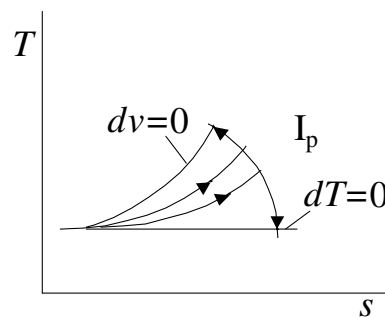


Рис.3.9

Если при проведении какого-либо политропического процесса возможно определение начальных и конечных значений  $p$  и  $v$ , то логарифмируя уравнение процесса  $p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$ , можно найти значение показателя политроты

$$n = \frac{\ln p_1 - \ln p_2}{\ln v_2 - \ln v_1} = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{v_2}{v_1}} = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.78)$$

Кроме того, на основании формулы (3.77), зная величины площадей между кривой процесса и осями координат в  $p$ - $v$  диаграмме, показатель политроты можно определить

$$\text{как отношение работ } n = \frac{l_{\text{тех1-2}}}{l_{1-2}}.$$

Процессы в одноступенчатом поршневом компрессоре

Компрессоры - это машины, предназначенные для сжатия газа и подачи его потребителю. По своему конструктивному исполнению они делятся на объемные - статического сжатия (поршневые и ротационные) и лопаточные - динамического сжатия (осевые и центробежные).

Несмотря на это, термодинамические процессы в них описываются одинаковыми уравнениями, если при анализе лопаточных машин пренебрегать кинетической энергией газа (см. ф-лу 2.19).

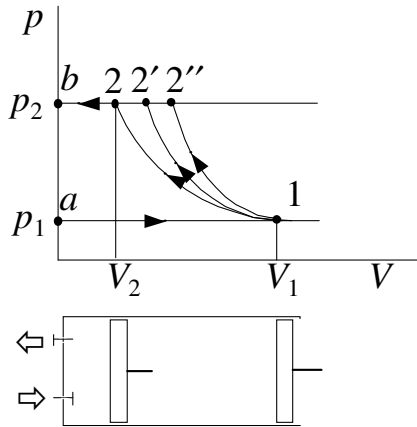


Рис.3.10

Рассмотрим одноступенчатый компрессор, основными элементами которого являются цилиндр, поршень, впускной и выпускной клапаны (рис.3.10). Будем считать компрессор идеальным, т.е. процессы в нем протекают обратимо, вредное пространство отсутствует (объем, заключенный между днищем цилиндра и поршнем, когда последний находится в верхней мертвой точке),  $p_1 = p_{oc}$ . Если бы удалось в процессе сжатия отвести от газа количество теплоты, равное затраченной работе, то мы получили бы изотермический процесс 1-2 с минимально возможной работой сжатия (площадь  $a-1-2-b-a$ ). При отсутствии теплообмена с ОС имели бы идеальный адиабатический процесс 1-2'' (площадь  $a-1-2''-b-a$ ). Если же в процессе сжатия отводить теплоту, но в меньшем количестве, чем

при изотермическом процессе, то получим политропический процесс 1-2', у которого техническая работа сжатия (площадь  $a-1-2'-b-a$ ) больше чем в изотермическом, но меньше чем в идеальном адиабатическом процессе. Поэтому реальные поршневые компрессоры, как правило, охлаждаются водой, омывающей цилиндры.

В процессе  $a-1$  (поршень движется слева направо) через впускной клапан газ поступает в цилиндр при давлении  $p_1 = p_{oc}$  (в действительности  $p_1 < p_{oc}$ ). В положении 1 оба клапана закрыты, а поршень находится в нижней мертвой точке. При движении поршня справа налево газ сжимается. Пружина выпускного клапана отрегулирована так, чтобы на выходе из компрессора получить требуемое давление  $p_2$ . В процессе  $2-b$  газ выталкивается из цилиндра и подается потребителю.

Получим выражение для идеальной работы компрессора, полагая процесс сжатия политропическим:

$$L_k = L_{a-1} + L_{1-2'} + L_{2'-b} = p_1 V_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV - p_2 V_2 = -(p_2 V_2 - p_1 V_1) + \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (3.79)$$

В дифференциальной форме будем иметь

$$dL_k = -d(pV) + p dV = -V dp, \quad (3.80)$$

или для удельной работы

$$dl_k = -v dp. \quad (3.81)$$

Преобразуем (3.79) используя уравнение политропического процесса

$$\begin{aligned} L_k &= L_{a-1} + L_{1-2'} + L_{2'-b} = p_1 V_1 - p_2 V_2 + p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \\ p v^n &= \text{const} := p_1 V_1 - p_2 V_2 + p_1 V_1^n \frac{1}{1-n} V^{1-n} \Big|_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1 - p_2 V_2 + \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n} = \\ &= -\frac{n}{n-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = -\frac{nR}{n-1} G(T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Аналогичное выражение было получено нами при рассмотрении технической работы политропического процесса (ф-ла 3.76). Формуле (3.82), используя связь между параметрами, можно придать более удобный для расчетов вид введя степень повышения давления в компрессоре  $\pi = p_2/p_1$ :

$$L_k = -\frac{nG}{n-1} RT_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) = -\frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right). \quad (3.83)$$

Мощность идеального компрессора найдем по формуле

$$N_k = -\frac{n\dot{G}}{n-1} RT_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right), \text{ Вт}, \quad (3.84)$$

где  $\dot{G}$ , кг/с - производительность компрессора. Потребляемую реальным компрессором мощность определим с учетом его внутреннего относительного и механического КПД

$$N_{\text{кд}} = \frac{N_k}{\eta_{oi,k} \eta_{\text{мех}}}. \quad (3.85)$$

### Влияние вредного пространства на эффективность поршневого компрессора

Наличие клапанного механизма в поршневом компрессоре не позволяет поршню вплотную подойти к днищу цилиндра. Объем в зазоре между днищем цилиндра и рабочей поверхностью поршня называется “вредным пространством”. Вредное пространство снижает производительность компрессора тем сильнее, чем выше степень повышения давления  $\pi$ . Существует такое значение  $\pi$ , при котором производительность компрессора становится равной нулю. Эффективность компрессора оценивается объемным КПД

$$\eta_v = \frac{V_1 - V_4}{V_1 - V_3}. \quad (3.86)$$

Рассмотрим процессы в компрессоре при наличии вредного пространства. Сжатие газа происходит в процессе 1-2. Когда поршень доходит до положения, соответствующего объему  $V_2$  и давлению  $p_2$ , открывается выпускной клапан. В процессе 2-3 происходит удаление газа из полости цилиндра в резервуар высокого давления (совершается работа проталкивания).. В процессе 3-4 расширяется газ, оставшийся во вредном пространстве с падением давления от  $p_2$  до  $p_4 = p_1 = p_{oc}$ , после чего открывается впускной клапан и начинается процесс 4-1 всасывания новой порции газа. Из рис.3.11 видно, что чем выше конечное давление за компрессором, тем меньше объем газа, поступающего в цилиндр (сравните процессы 4-1, 4'-1, и 4''-1). Определим работу и мощность компрессора при наличии вредного пространства. Техническая работа сжатия, изображаемая площадью  $a-1-2-b-a$ , равна

$$L_{(1-2)_{\text{тех.}}} = -\frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right), \quad (a)$$

техническая работа расширения (пл. 3-4-a-b-3)

$$L_{(3-4)_{\text{тех.}}} = \frac{n}{n-1} p_1 V_4 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right). \quad (b)$$

Алгебраически складывая (a) и (b), получим работу идеального компрессора при наличии вредного пространства

$$L_k = -\frac{n}{n-1} p_1 (V_1 - V_4) \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right), \quad (3.87)$$

но  $p_1 (V_1 - V_4) = G_d RT_1$ , тогда вместо (3.87) можно написать

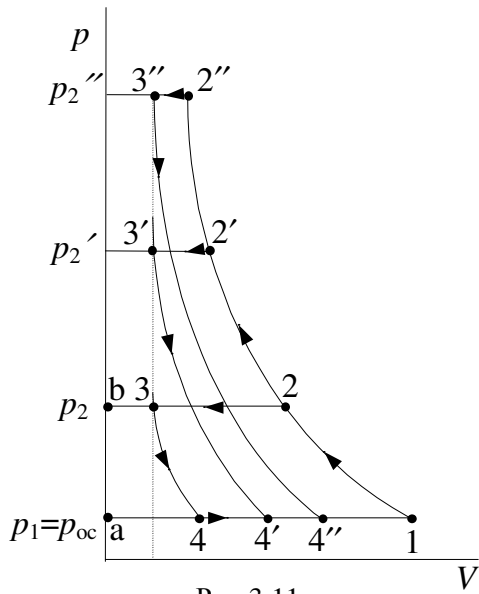


Рис.3.11

$$L_k = -\frac{n}{n-1} G_d RT_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right), \text{ Дж.} \quad (3.88)$$

Мощность, необходимая для привода компрессора, определяется работой, затрачиваемой в единицу времени

$$N_k = -\frac{n}{n-1} \dot{G}_d RT_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right), \text{ Вт.} \quad (3.89)$$

Разделив (3.88) на  $G_d$ , найдем удельную работу компрессора

$$l_k = -\frac{n}{n-1} RT_1 \left( \pi^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right), \text{ Дж/кг.} \quad (3.90)$$

Отметим, что формально запись формулы (3.88) ничем не отличается от (3.83), но в (3.83) масса газа больше:  $G = p_1 V_1 / RT_1 > G_d = p_1 (V_1 - V_4) / RT_1$ .

Многоступенчатое сжатие

Для получения давления газа  $p_2 > 1 \text{ МПа}$  используют многоступенчатые компрессоры с промежуточным охлаждением газа в холодильниках. На рис.3.12 показаны процессы в трехступенчатом компрессоре. Будем считать, что процессы сжатия протекают

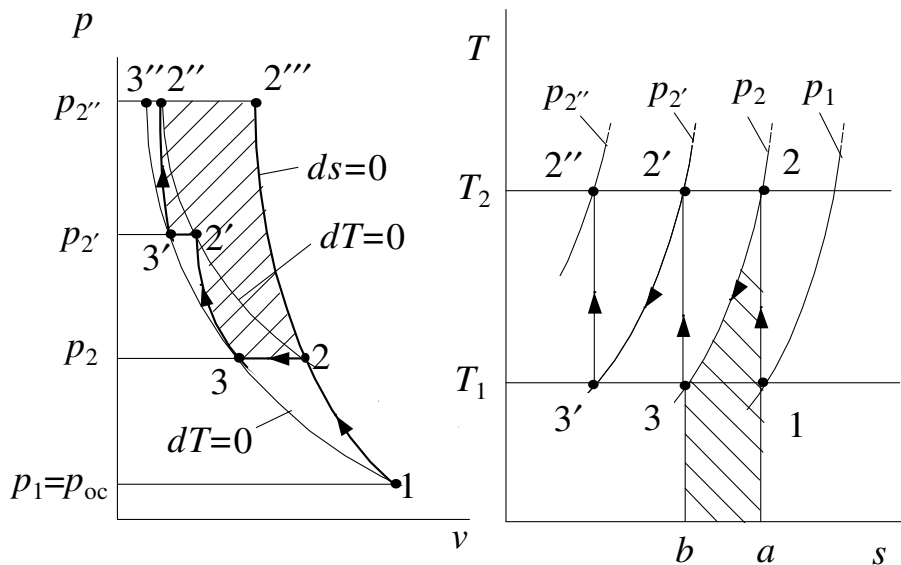


Рис. 3.12 а,б

по изоэнтропам, а процессы отвода теплоты в холодильниках I и II происходят при  $dp=0$ . Из рисунка видно, что если бы сжатие было одноступенчатым (изоэнтропа 1-2'''), то в точке 2''' температура была бы значительно выше, чем в состоянии 2'', что отрицательно сказалось бы на смазке трущихся поверхностей цилиндра и поршня: из-за высокой температуры снижается вязкость масла, возможно возгорание паров и коксование масла. Помимо снижения температуры газа на выходе компрессора, применение многоступенчатого сжатия с промежуточным отводом теплоты в процессах 2-3 и 2'-3' приводит к снижению технической работы на величину закрашенной площади 2-3-2'-3'-2''-2'''-2. Для того чтобы работа многоступенчатого компрессора была

минимальной, необходимо чтобы степень повышения давления во всех ступенях была одна и та же, т.е.  $\pi_{ст} = \sqrt[n]{\pi_k}$ , где  $n$ - число ступеней.

### Струйные компрессоры

Струйные компрессоры в энергетике выполняют, как правило, вспомогательную роль.

Например, в паротурбинных установках они используются для отсоса воздуха из конденсатора, препятствующего конденсации пара на наружных поверхностях трубок, внутри которых течет охлаждающая вода.

Принцип работы струйного компрессора (эжектора) основан на передаче

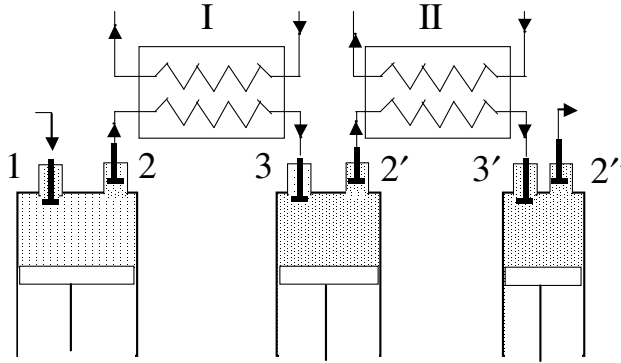


Рис. 3.12 в

кинетической энергии от высокоскоростного активного потока к пассивному (давление которого необходимо повысить) в процессе их смешения. Эжектор состоит из четырех основных элементов: разгонного сопла, пассивного сопла, камеры смешения и диффузора, в котором кинетическая энергия переходит в потенциальную с ростом давления. Достоинство эжектора - простота конструкции, отсутствие движущихся частей, недостаток - низкая эффективность из-за значительной потери кинетической энергии при смешении, которая пропорциональна квадрату разности скоростей смешиваемых потоков. Рассмотрим процессы в эжекторе, показанном на рис.3.13. Полная энергия потока на входе в активное сопло характеризуется энтальпией торможения  $i_1^*$  (если пренебречь потенциальной энергией положения) пассивного -  $i_3^*$ . Точка 2 характеризует состояние потока на срезе активного сопла при изоэнтропном расширении 1-2. Реальный процесс расширения из-за действия сил трения протекает по кривой 1-2<sub>д</sub>. Аналогично для пассивного сопла будем иметь процесс 3-4<sub>д</sub>. Если бы процесс смешения потоков был обратимым, то после изобарного смешения в камере поток характеризовался бы точкой 5, при не изобарном смешении - точкой 5'. Из-за наличия ударных потерь и трения в камере смешения энтальпия потока увеличивается на  $\Delta i = \Delta i_{уд} + \Delta i_{тр}$ . Точка 5<sub>д</sub> характеризует состояние потока перед диффузором. В результате восстановления давления в диффузоре с учетом действия сил трения (процесс 5<sub>д</sub>-6<sub>д</sub>) на срезе диффузора статическое давление равно  $p_{6д}$ , а с учетом кинетической энергии -  $p_{6д}^*$ . Следовательно, в эжекторе статическое давление пассивного агента увеличилось от  $p_3$  до  $p_{6д}$ , т.е. эжектор действует как компрессор. Если процессы в эжекторе будут организованы неудовлетворительно, точка 6<sub>д</sub><sup>\*</sup> будет перемещаться вправо по прямой  $i_{см}^* = const$  и степень повышения давления по

заторможенным параметрам  $\pi^* = \frac{p_{6д}^*}{p_3^*}$  будет уменьшаться.

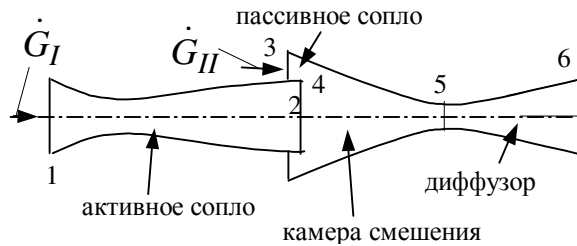
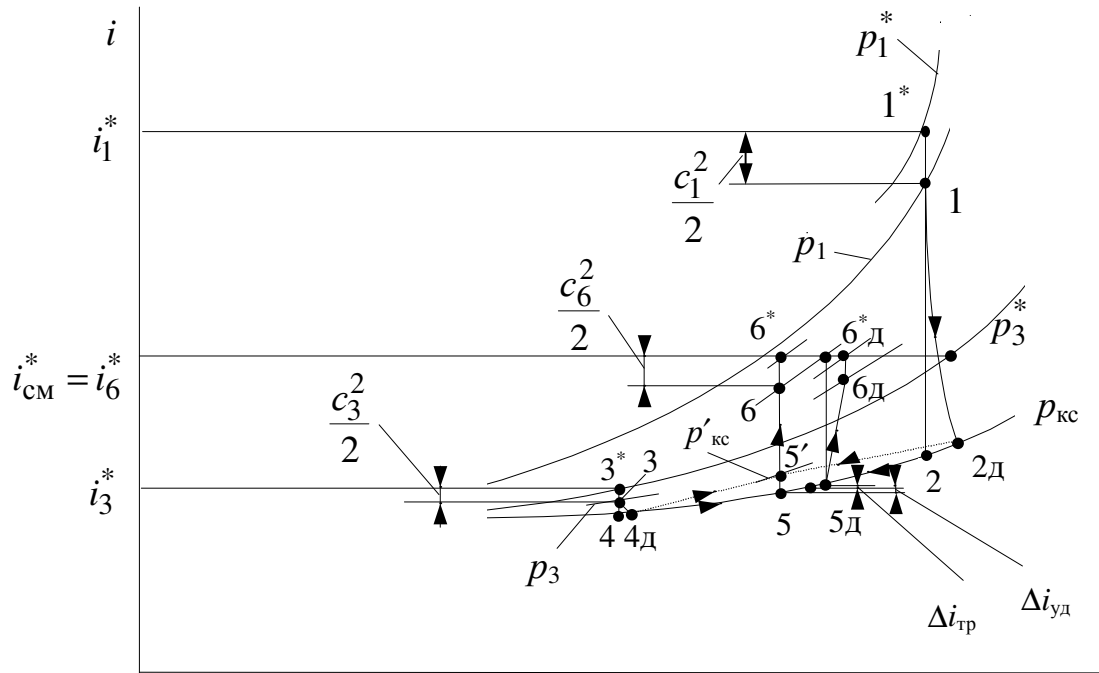


Рис. 3.13

В пределе возможен случай, когда  $p_{6д}^* = p_3^*$ , а  $\pi^*$  станет равным единице. В этом случае эжектор не будет выполнять функции компрессора.

Так как эжектор представляет собой открытую адиабатическую систему, то уравнение энергии имеет вид  $i_{см}^* = i_1^* + i_3^* = \text{const}$ , или  $i_{см}^* (\dot{G}_I + \dot{G}_{II}) = i_1^* \dot{G}_I + i_3^* \dot{G}_{II}$ , откуда, вводя коэффициент эжекции  $u = \dot{G}_{II} / \dot{G}_I$ , получим

$$i_{см}^* = \frac{i_1^* + u i_3^*}{1 + u}, \quad (3.91)$$

т.е. точки, характеризующие состояние потока за эжектором, могут лежать только на линии  $i_{см}^* = \text{const}$ .

#### 4. Второй закон термодинамики

Если первый закон термодинамики устанавливает количественную связь между теплотой, работой и внутренней энергией, то второй закон термодинамики характеризует качественную сторону процессов перехода одного вида энергии в другой. Второй закон термодинамики это закон об энтропии - функции состояния, которая в изолированной системе остается постоянной, если протекают идеальные процессы, или возрастает при необратимых процессах. Второй закон термодинамики показывает направление развития процесса. Так, он "разрешает" скачок конденсации пара в открытой адиабатической ТС (в этом случае  $dS > 0$ ) и "запрещает" скачок испарения жидкости, так как при этом  $dS < 0$ , т.е. паровая фаза может накапливаться только постепенно, а не скачком. Рассматривая первый закон термодинамики, мы установили, что механическая работа может быть полностью превращена в теплоту. Однако второй закон запрещает подведенную теплоту  $Q_1$  в

круговом процессе полностью превратить в работу цикла (что означает невозможность создания *perpetuum mobile* второго рода), т.е. при этом должен существовать еще и компенсирующий процесс в виде передачи части теплоты другому телу - холодному источнику. В изотермическом процессе подведенная или отведенная теплота численно равна работе, но при этом происходят изменения и в ТС в связи с изменением объема, что не противоречит постулату Кельвина (см. формулировки второго закона).

### Обратимые и необратимые процессы

В параграфе "Термодинамический процесс" уже говорилось о равновесных и неравновесных процессах (см. стр.7). Здесь же мы рассмотрим как необратимость влияет

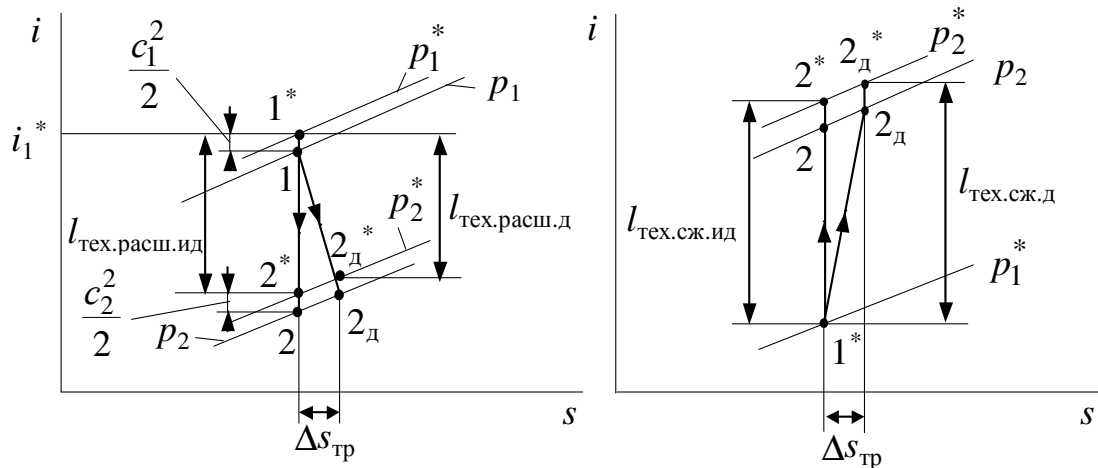


Рис. 4.1

на ТС. Действие сил трения, которое уменьшает работу в процессах расширения и увеличивает работу при сжатии, приводит к понятию внутренней необратимости. При этом в обоих случаях энтропия увеличивается, что наглядно иллюстрируется рис.4.1.

Передача теплоты от горячих тел или потоков к холодным при конечной разности температур порождает внешнюю необратимость. Здесь в результате теплообмена энтропия холодного тела возрастает, а горячего - уменьшается, но всегда алгебраическая сумма  $\Delta S_c = \Delta S_{хг} - \Delta S_{гг} > 0$  (см. рис.4.2). Как будет показано ниже, наличие внутренней и внешней необратимости приводит к потере работоспособности ТС, то есть в этом случае действительная работа будет меньше идеальной, когда процессы протекают обратимо.

### Основные формулировки второго закона термодинамики

Формулировки второго закона термодинамики являются обобщением явлений, имеющих место в природе. Известно, что теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретых тел к более нагретым, поэтому постулат Клаузиуса гласит: "Невозможен процесс, единственным конечным результатом которого был бы переход теплоты от тела с данной температурой к телу с более высокой температурой".

Постулат Кельвина налагает определенные условия на процесс превращения теплоты в работу: "Невозможен процесс, единственным конечным результатом которого будет превращение в работу теплоты, извлеченной из источника, имеющего всюду одинаковую температуру".

Постулат Планка утверждает, что невозможно создать периодически действующую машину, единственным результатом действия которой было бы



совершение механической работы за счет охлаждения одного из источников теплоты.

Существуют и другие формулировки второго закона термодинамики. Так, по Освальду, невозможно создать вечный двигатель второго рода. Процессы, протекающие в природе самопроизвольно, необратимы. Для адиабатической системы  $dS \geq 0$ . Невозможно энергию превратить в эксергию.

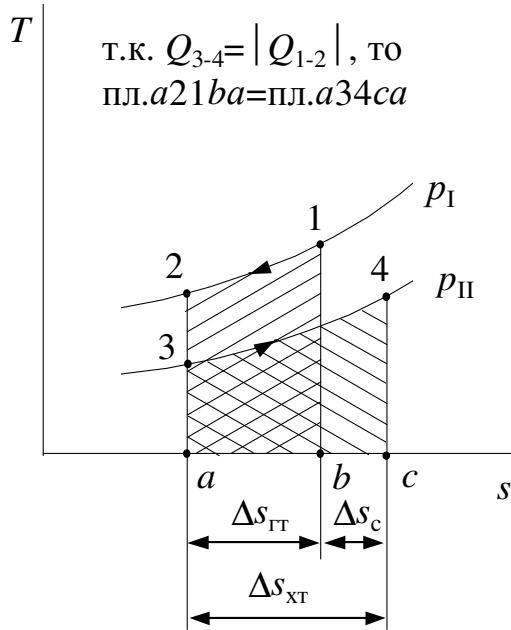


Рис.4.2

### Идеальный цикл Карно

Идеальный цикл Карно имеет максимальную тепловую эффективность по сравнению с другими возможными циклами в заданном интервале температур, поэтому все реальные циклы всегда сравнивают с ним, что позволяет определить степень их совершенства. Цикл Карно состоит из двух обратимых адиабат и двух обратимых изотерм. Под обратимыми изотермами понимают такие изотермы цикла, температуры которых равны температурам горячего и холодного источников, то есть в этом случае нет температурного напора между рабочим телом и источниками, а, следовательно, отсутствует и

внешняя необратимость. Цикл Карно нельзя осуществить так как по мере движения поршня в цилиндре необходимо последовательно обеспечить в процессе сжатия и расширения изотермический и адиабатический процессы.

Дадим аналитическую запись процессов и определим работу и термический КПД идеального цикла Карно. Процесс сжатия 1-2 (рис.4.3),  $dT=0$ . Из первого закона термодинамики  $dq=du+pdv$  при  $dT=0$  имеем  $du=0$ , следовательно,  $dq = pdv$ . В интегральной форме, используя уравнение процесса  $pv=\text{const}$  будем иметь

$$q_{1-2} = q_{II} = l_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} pdv = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = RT_{II} \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (a)$$

где  $q_{II}$  - теплота, отведенная в цикле.

Процесс сжатия 2-3,  $ds=0$ .  $du+pdv=0$ ,  $\Rightarrow pdv = -du$ , но  $dl = pdv$ , тогда  $dl = -du$ . В интегральной форме работу адиабатического сжатия найдем из выражения

$$l_{2-3} = -(u_3 - u_2) = -c_v(T_3 - T_2) = -c_v(T_I - T_{II}). \quad (b)$$

Процесс расширения 3-4,  $dT=0$ .

$$q_{3-4} = q_I = l_{3-4} = RT_I \ln \frac{v_4}{v_3}, \quad (c)$$

где  $q_I$  - теплота, подведенная в цикле.

Процесс 4-1,  $ds=0$ .

$$l_{4-1} = -(u_1 - u_4) = (u_4 - u_1) = c_v(T_4 - T_1) = c_v(T_I - T_{II}). \quad (d)$$

Алгебраически складывая (a),(b),(c) и (d), получим работу идеального цикла Карно

$$l_{II} = \sum_{i=1}^4 l_i = RT_I \ln \frac{v_4}{v_3} + RT_{II} \ln \frac{v_2}{v_1}. \quad (4.1)$$

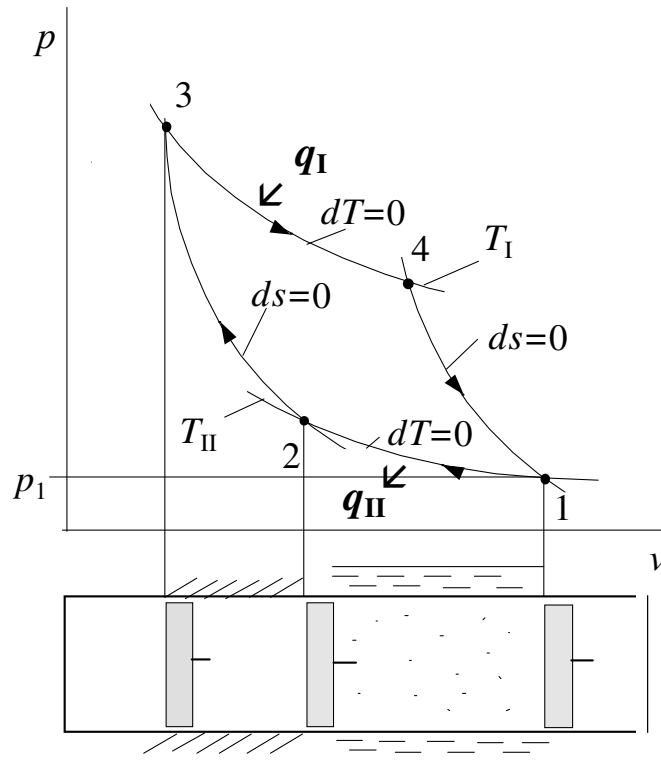


Рис.4.3

Для изоэнтروпийных процессов можно написать

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_3}\right)^{k-1} = \frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{k-1} = \frac{T_I}{T_{II}}, \text{ откуда } \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_1}{v_2}, \text{ тогда формула (4.1) примет вид}$$

$$l_u = R(T_I - T_{II}) \ln \frac{v_1}{v_2}. \quad (4.2)$$

По определению термический КПД цикла есть отношение идеальной работы цикла к подведенной в цикле теплоте и характеризует количественную сторону превращения теплоты в идеальную работу цикла

$$\eta_t = \frac{l_u}{q_I} = \frac{q_I - q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I}. \quad (4.3)$$

Так как всегда  $T_{II} > 0$ , (второй закон термодинамики запрещает достижение абсолютного нуля, кроме того, достижение абсолютного нуля привело бы к равенству  $l_u = q_I$ , что также противоречит второму закону), то термический КПД идеального цикла Карно всегда меньше единицы. Понижение температуры холодного источника в большей мере влияет на рост КПД чем увеличение температуры горячего источника. Действительно, взяв частные производные от КПД по соответствующим температурам, получим, что по модулю

$$\left| \frac{\partial \eta_t}{\partial T_I} = \frac{T_{II}}{T_I^2} \right| < \left| \frac{\partial \eta_t}{\partial T_{II}} = -\frac{1}{T_I} = -\frac{T_I}{T_I^2} \right| \text{ так как } T_I > T_{II}.$$

#### Теорема Карно

Теорема Карно гласит, что термический КПД идеального цикла Карно, осуществляемого в заданном интервале температур, не зависит от физических свойств рабочего тела, при помощи которого этот цикл осуществляется.

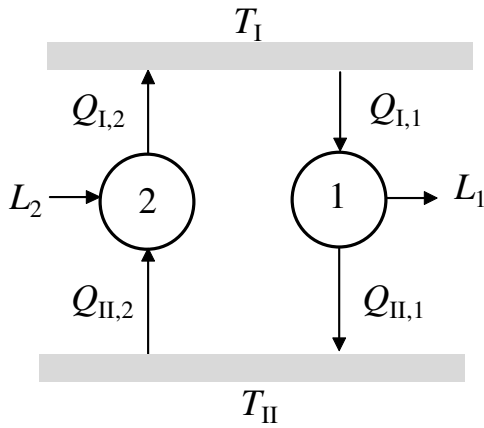


Рис. 4.4

Рассмотрим две идеальные машины, работающие на разных рабочих телах. Будем считать, что в машине 1 осуществляется прямой цикл Карно, в машине 2 - обратный. Температура горячего источника обоих циклов  $T_I$ , холодного -  $T_{II}$ . Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что термический КПД  $\eta_i$  зависит от физических свойств рабочего тела. Допустим также, что  $\eta_{i1} > \eta_{i2}$ , тогда в результате совместной работы двух машин будет произведена работа

$$L_{II} = L_1 - L_2 = Q_{I,1}\eta_{i1} - Q_{I,2}\eta_{i2}. \quad (a)$$

Запишем выражения для термических КПД

$$\eta_{i1} = \frac{Q_{I,1} - Q_{II,1}}{Q_{I,1}} > \eta_{i2} = \frac{Q_{I,2} - Q_{II,2}}{Q_{I,2}} \quad (b)$$

и подберем массу рабочих тел так, чтобы  $Q_{I,1} = Q_{I,2}$ , тогда из (b) получим, что  $Q_{II,2} > Q_{II,1}$ , или  $Q_{II} = Q_{II,2} - Q_{II,1} > 0$ . Следовательно,  $L_{II} = Q_{II}$ , что не противоречит первому закону термодинамики, так как работа цикла равна теплоте цикла, но работа  $L_{II}$  получена за счет охлаждения холодного источника, что противоречит постулату Планка. Таким образом, исходная посылка была не верна, и термический КПД цикла Карно не зависит от физических свойств рабочего тела.

#### Интеграл Клаузиуса для обратимого кругового процесса, энтропия

Для идеального цикла Карно можно написать

$$\eta_i = \frac{Q_I - Q_{II}}{Q_I} = \frac{T_I - T_{II}}{T_I} = 1 - \frac{Q_{II}}{Q_I} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I}, \text{ откуда}$$

$$\frac{Q_{II}}{T_{II}} = \frac{Q_I}{T_I} = \text{const.}$$

Отношение  $Q/T$  называют приведенной теплотой. Следовательно, для идеального цикла Карно приведенная теплота горячего источника равна приведенной теплоте холодного источника. Разделив цикл Карно изоэнтропой  $4'-1'$  (см. рис. 4.5), получим два новых цикла Карно, для которых

$$\frac{Q'_I}{T_I} = \frac{Q'_{II}}{T_{II}}, \quad (a); \quad \frac{Q''_I}{T_I} = \frac{Q''_{II}}{T_{II}}. \quad (b)$$

Складывая (a) и (b), получим

$$\frac{Q'_I}{T_I} + \frac{Q''_I}{T_I} = \frac{Q'_{II}}{T_{II}} + \frac{Q''_{II}}{T_{II}}. \quad (c)$$

Таким же образом можно разбить любой обратимый круговой процесс на  $n$  элементарных циклов Карно, каждый из которых будет иметь свои горячий и холодный источники с температурами  $T_{Ii}$  и  $T_{IIi}$  (см. рис.4.6) и для которых справедливо соотношение

$$\sum \frac{\delta Q_{Ii}}{T_{Ii}} = \sum \frac{\delta Q_{IIi}}{T_{IIi}}, \quad (4.4)$$

$$\text{или } \sum \frac{\delta Q_{Ii}}{T_{Ii}} - \sum \frac{\delta Q_{IIi}}{T_{IIi}} = 0, \quad (4.5)$$

т.е. алгебраическая сумма приведенных теплот горячих и холодных источников равна нулю. Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum \frac{\delta Q_{Ii}}{T_{Ii}} - \sum \frac{\delta Q_{IIi}}{T_{IIi}} \right) = 0, \quad (4.6)$$

получим 
$$\oint \frac{dQ}{T} = 0, \quad (4.7)$$

т.е. круговой интеграл Клаузиуса от приведенной элементарной теплоты для любого обратимого кругового процесса равен нулю. Из курса высшей математики известно, что если круговой интеграл от подынтегральной функции равен нулю, то подынтегральная функция не зависит от пути интегрирования, т.е. является функцией состояния. Эту функцию Клаузиус назвал энтропией  $S$  (от греческого слова  $\epsilon\nu\tau\rho\epsilon\lambda\epsilon\upsilon\nu$  - превращать). Теперь можно записать

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (4.8)$$

Интегрируя (4.8), получим

$$S = \int \frac{dQ}{T} + \text{const}. \quad (4.9)$$

Таким образом, энтропия определяется с точностью до константы интегрирования.

Так как энтропия - функция состояния, то дифференциал этой функции является полным. Чтобы найти  $\Delta S$ , достаточно знать значения энтропии в начале и в конце процесса, т.е. изменение энтропии не зависит от пути интегрирования. Покажем, что это так. Рассмотрим в  $p-v$  диаграмме обратимый круговой процесс 1-a-2-b-1 (рис.4.7), для которого можно написать  $\oint \frac{dq}{T} = 0$ . Представим

этот интеграл в виде суммы двух интегралов  $\int_{1a2} \frac{dq}{T} + \int_{2b1} \frac{dq}{T} = 0$ , но  $\int_{2b1} \frac{dq}{T} = - \int_{1b2} \frac{dq}{T}$ ,

следовательно, 
$$\int_{1a2} \frac{dq}{T} - \int_{1b2} \frac{dq}{T} = 0 \quad \text{или}$$

$$\Delta s_{1a2} = \Delta s_{1b2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Изменение энтропии в обратимых процессах

Из объединенных законов термодинамики для обратимых процессов  $Tds = du + pdv$  и  $Tds = di - vdp$  применительно к идеальному газу можно получить

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} dv = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}, \quad (4.10)$$

$$ds = \frac{di}{T} - \frac{v}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}. \quad (4.11)$$

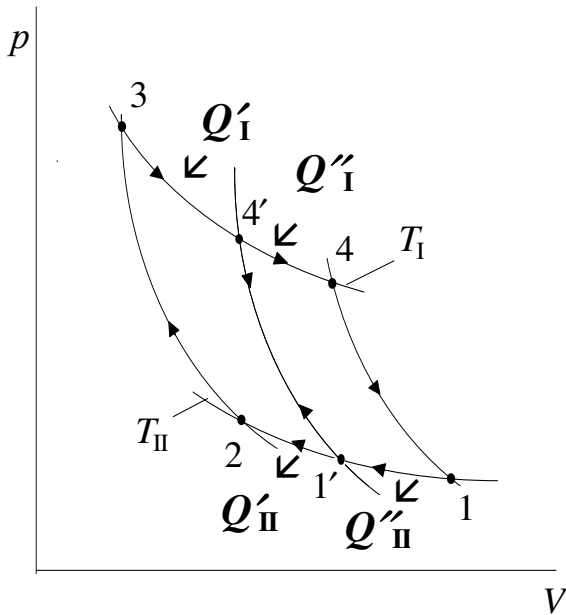


Рис. 4.5

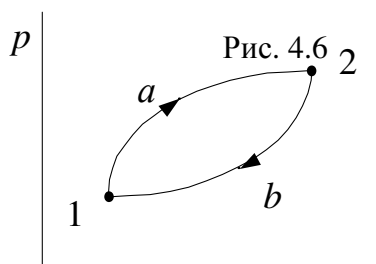
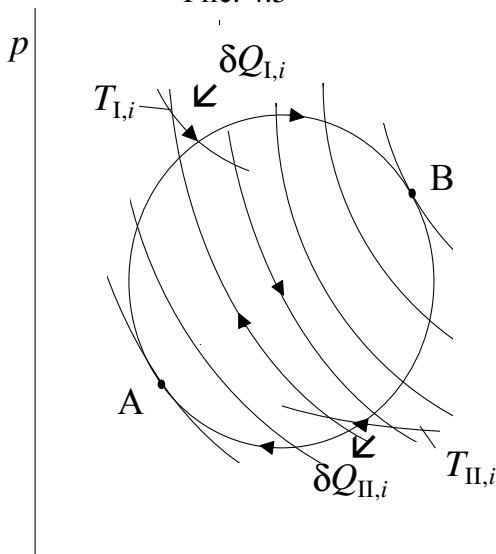


Рис.4.7

Полагая в (4.10) и (4.11) поочередно  $dT=0, dv=0, dp=0$ , получим изменение энтропии в процессах при  $T=\text{const}$ ,  $v=\text{const}$  и  $p=\text{const}$ . Так, при  $T=\text{const}$  после интегрирования (4.10) и (4.11) будем иметь

$$\Delta s_{1-2} = R \ln \frac{v_2}{v_1} = -R \ln \frac{p_{II}}{p_I} = R \ln \frac{p_I}{p_{II}}. \quad (4.12)$$

Для случаев, когда  $v$  и  $p$  являются постоянными величинами, изменение энтропии составит

$$\Delta s_{1-3} = c_v \ln \frac{T_3}{T_1}, \quad (4.13)$$

$$\Delta s_{2-4} = c_p \ln \frac{T_4}{T_2}. \quad (4.14)$$

Из (4.10) при  $dv=0$  можно получить

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_v = \frac{T}{c_v}, \quad (4.15)$$

а из (4.11) при  $dp=0$  -

$$\operatorname{tg} \beta = \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p}. \quad (4.16)$$

Для газовых сред  $c_p > c_v$ , следовательно,

$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_v > \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p$ , т.е. в  $T$ - $s$  диаграмме изохора идет круче изобары (см. рис.4.8). Из (4.15) и

(4.16) следует, также, что в  $T$ - $s$  диаграмме касательные, проведенные к изохоре и изобаре при данной температуре, отсекают на оси абсцисс отрезки, которые по величине равны  $c_v$  и  $c_p$ .

Зная изменение энтропии в каком-либо политропическом процессе, можно найти связь между параметрами этого процесса. Действительно, интегрируя (4.10), можно получить

$$\Delta s_{a-b} = c_v \ln \frac{T_b}{T_a} + R \ln \frac{v_b}{v_a}.$$

Разделив уравнение на  $R = c_p - c_v$ , будем иметь

$$\frac{\Delta s_{a-b}}{R} = \frac{1}{k-1} \ln \frac{T_b}{T_a} + \ln \frac{v_b}{v_a} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta s_{a-b}}{R} = \ln \left[ \left( \frac{T_b}{T_a} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{v_b}{v_a} \right].$$

Окончательное выражение примет вид

$$\frac{v_a}{v_b} e^{\frac{\Delta s_{a-b}}{R}} = \left( \frac{T_b}{T_a} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (4.17)$$

При  $\Delta s_{a-b} = 0$  получим связь между параметрами в изоэнтропийном процессе

$$\frac{T_b}{T_a} = \left( \frac{v_a}{v_b} \right)^{k-1} \quad (\text{см. формулу 3.62}).$$

#### Интеграл Клаузиуса для необратимого кругового процесса

Вначале рассмотрим цикл Карно при наличии внутренней необратимости, которая приводит к увеличению количества теплоты, отдаваемой холодному источнику (для

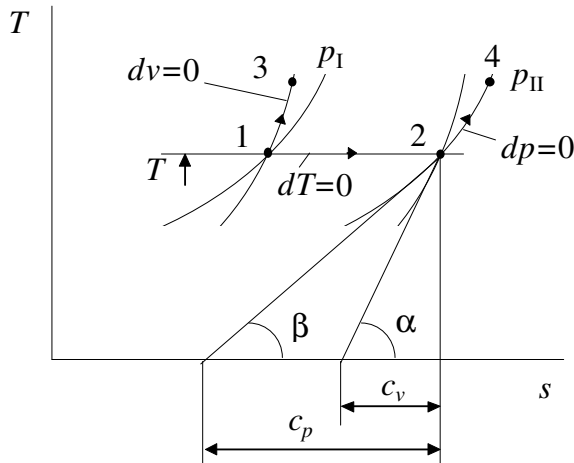


Рис. 4.8

идеального цикла  $q_{II}$  эквивалентно площади  $a-1-4-b-a$ , при наличии внутренней необратимости  $q_{IIд}$  – площади  $a-1-4д-c-a$ .

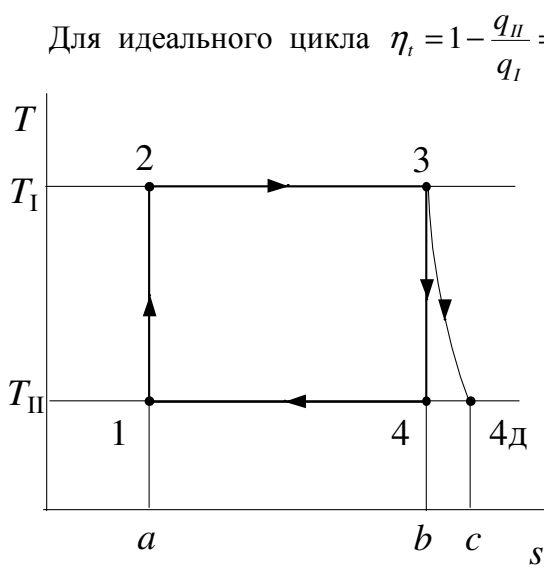


Рис.4.9

Для идеального цикла  $\eta_t = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I}$ , для рассматриваемого -  $\eta_d = 1 - \frac{q_{IIд}}{q_I}$ , но  $q_{IIд} > q_{II}$ , следовательно,  $\eta_t > \eta_d$ . Исходя из этого, можно написать  $1 - \frac{T_{II}}{T_I} > 1 - \frac{q_{IIд}}{q_I}$  или

$$\frac{q_{IIд}}{T_{II}} > \frac{q_I}{T_I}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что в данном случае приведенная теплота холодного источника больше приведенной теплоты горячего источника. Если теперь для кругового необратимого процесса провести рассуждения аналогичные тем, что были сделаны при рассмотрении интеграла Клаузиуса для обратимого цикла, то можно получить

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0. \tag{4.18}$$

Объединяя выражения для обратимого и необратимого круговых процессов, будем иметь

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \tag{4.19}$$

Изменение энтропии при необратимых процессах

Рассмотрим круговой процесс (см. рис.4.10), у которого процесс 1-a-2 протекает необратимо, а процесс 2-b-1 - обратимо. Представим круговой интеграл в виде суммы двух линейных интегралов с учетом (4.18)

$$\int_{1-a-2} \frac{dq_{II}}{T} + \int_{2-b-1} \frac{dq}{T} < 0. \tag{a}$$

Второй интеграл равен разности энтропий  $\int_{2-b-1} \frac{dq}{T} = s_1 - s_2$ , тогда вместо (a) можно

написать  $\int_{1-a-2} \frac{dq_{II}}{T} + s_1 - s_2 < 0$ , или  $\int_{1-a-2} \frac{dq_{II}}{T} - (s_2 - s_1) < 0$ .

Таким образом,

$$s_2 - s_1 > \int_{1-a-2} \frac{dq_{II}}{T}. \tag{4.20}$$

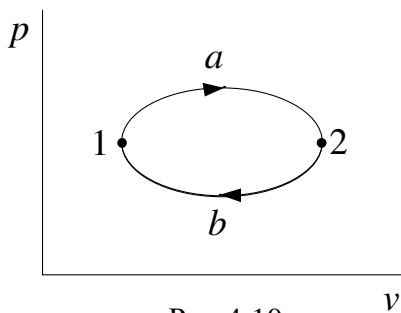


Рис.4.10

Из неравенства (4.20) следует, что интеграл взятый по неравновесному пути, где  $T$  температура источника теплоты, не определяет разность  $s_2 - s_1$ , а меньше ее.

Чем выше степень необратимости, тем больше разность между  $s_2 - s_1$  и  $\int_{1-a-2} \frac{dq_{II}}{T}$ .

Представим (4.20) в дифференциальной форме

$$Tds - dq_{II} = dq', \tag{4.21}$$

где  $dq'$  по Клаузиусу - некомпенсированная теплота превращения. Используя (4.20) в дифференциальной форме, можно написать  $Tds > dq_n = du + dl$ , откуда

$$dl < Tds - du, \quad (4.22)$$

т.е. работа, совершенная системой в необратимом процессе, меньше, чем при обратимом. В общем случае объединенный закон термодинамики можно представить в виде

$$Tds \geq du + pdv, \quad (4.23)$$

где знак равенства относится к обратимым, а знак неравенства - к необратимым процессам. Однако неравенства (4.22) и (4.23) не позволяют количественно определить влияние необратимости на эффективность ТС. Поэтому вернемся к уравнению (4.21) и перепишем его в виде

$$du_{обр} + dl_{обр} - du_n - dl_n = dq'.$$

Так как оба процесса характеризуются одинаковыми состояниями в точках 1 и 2, то  $du_{обр} = du_n$ , тогда  $dl_n = dl_{обр} - dq'$ . Следовательно, теперь объединенный закон термодинамики примет вид

$$Tds = du + dl + dq'. \quad (a)$$

Для обратимых процессов  $dq' = 0$ . Применим (a) к примеру, показанному на рис. 5.5а:

$l_{(1-2)д} = (u_1 - u_2) - q'_{2д-2} = (u_1 - u_2) - c_v (T_{2д} - T_2)$ , то есть чтобы вернуть ТС из состояния, определяемого точкой 2<sub>д</sub> в состояние 2, необходимо от ТС отвести теплоту  $q'_{2д-2}$ , при этом идеальная работа расширения также уменьшится на  $q'_{2д-2}$ .

Для адиабатической системы ( $dQ=0$ ) из  $dS \geq \frac{dQ}{T}$  получим

$$dS > 0. \quad (4.24)$$

Условие (4.24) показывает, что если в адиабатической системе протекают любые обратимые процессы, то энтропия системы остается неизменной ( $dS=0$ ). Протекание реальных процессов, которые всегда необратимы, сопровождается увеличением энтропии системы ( $dS>0$ ), то есть ТС переходит только в такое состояние, при котором  $S_2 > S_1$ .

Отметим, что большинство энергетических машин и установок, в которых имеет место незначительный теплообмен с окружающей средой, можно мысленно заключить в адиабатическую оболочку и рассматривать их как открытые адиабатические термодинамические системы. Такое допущение существенно упрощает термодинамический анализ реальных систем.

Для более глубокого понимания принципа возрастания энтропии рассмотрим процессы при наличии внешней и внутренней необратимости.

#### Передача теплоты путем теплопроводности

Поместим два баллона с газом, имеющим температуру  $T_1$  и  $T_2$ , в адиабатическую оболочку и обеспечим контакт между ними. Будем считать, что  $T_1 > T_2$ . Так как для нашего случая  $dU_{II} = -dU_I$ , то после интегрирования можно написать

$$\bar{c}_{vII} G_{II} (T_3 - T_2) = -\bar{c}_{vI} G_I (T_3 - T_1),$$

откуда определим температуру газов после установления между ними теплового равновесия

$$T_3 = \frac{\bar{c}_{vI} G_I T_1 + \bar{c}_{vII} G_{II} T_2}{\bar{c}_{vI} G_I + \bar{c}_{vII} G_{II}}. \quad (4.25)$$

Если газы в баллонах имеют одинаковую массу и одни и те же физические свойства, то вместо (4.25) будем иметь (см. рис. 4.11)

$$T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (4.26)$$

Для изохорного процесса  $dS = Gc_v \frac{dT}{T}$ , тогда для второго газа приращение энтропии составит

$$\Delta S_{2-3} = G_{II} \bar{c}_{vII} \ln \frac{T_3}{T_2}. \quad (4.27)$$

Для первого газа можно написать

$$\Delta S_{1-3} = G_I \bar{c}_{vI} \ln \frac{T_3}{T_1} = -G_I \bar{c}_{vI} \ln \frac{T_1}{T_3}. \quad (4.28)$$

Алгебраически складывая (4.27) и (4.28), найдем приращение энтропии системы,

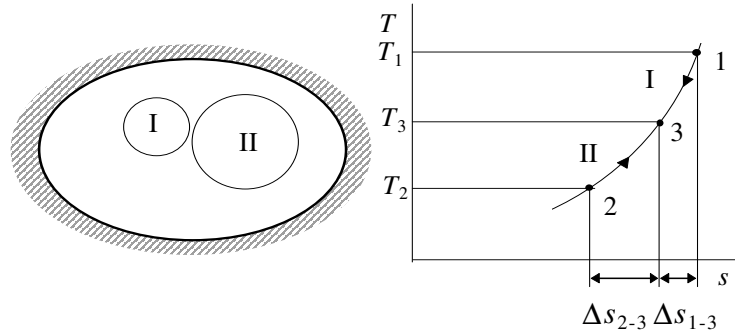


Рис. 4.11

обусловленное внешней необратимостью (передачей теплоты от тела к телу при конечной разности температур):

$$\Delta S_c = \Delta S_{\text{необр.}} = G_{II} \bar{c}_{vII} \ln \frac{T_3}{T_2} - G_I \bar{c}_{vI} \ln \frac{T_1}{T_3} > 0. \quad (4.29)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, самопроизвольная передача теплоты от более нагретого тела к менее нагретому при конечной разности температур является необратимым процессом, сопровождающимся увеличением энтропии системы.

Приращение энтропии системы, обусловленное внешней необратимостью, зависит не только от разности, но и от абсолютных значений температур. Действительно,

$$dS_c = \left( \frac{dQ}{T} \right)_{II} - \left( \frac{dQ}{T} \right)_{I} = \left( \frac{1}{T_{II}} - \frac{1}{T_I} \right) dQ = \frac{T_I - T_{II}}{T_I T_{II}} dQ, \quad (4.30)$$

поэтому в высокотемпературных энергетических системах можно допускать большую разность температур  $\Delta T = T_I - T_{II}$  между телами и потоками.

В низкотемпературных системах с целью уменьшения потери работоспособности температурные напоры должны быть незначительными и уменьшающимися со снижением температур хладагентов.

Отметим также, что  $dS_c$  пропорционально  $(dT)^2$ . Предположим, что  $T_I = T_{II} + dT$ , тогда  $dS_c = \frac{dT}{T_I T_{II}} dQ = \frac{c_v G (dT)^2}{T_I T_{II}}$ , что и требовалось доказать.

#### Цикл Карно с внутренней необратимостью

Будем считать, что все процессы в цикле Карно протекают обратимо кроме процесса расширения 3-4д, в котором проявляют себя силы трения. Для обратимого цикла Карно можно написать (см. рис. 4.12)

$$l_{\text{цид}} = q_I - q_{II} = T_I \Delta s - T_{II} \Delta s = (T_I - T_{II}) \Delta s. \quad (a)$$

$$\text{Для цикла с внутренней необратимостью } l_{\text{цид}} = q_I - q_{IIд} = T_I \Delta s - T_{II} (\Delta s + \Delta s_{\text{н}}), \quad (b)$$



где  $q_{Ид}$  - действительное количество теплоты, отданное холодному источнику. Вычитая (b) из (a), определим потерю работоспособности

$$l_{пр} = l_{цид} - l_{цд} = T_{II} \Delta s_{н} , \quad (4.31)$$

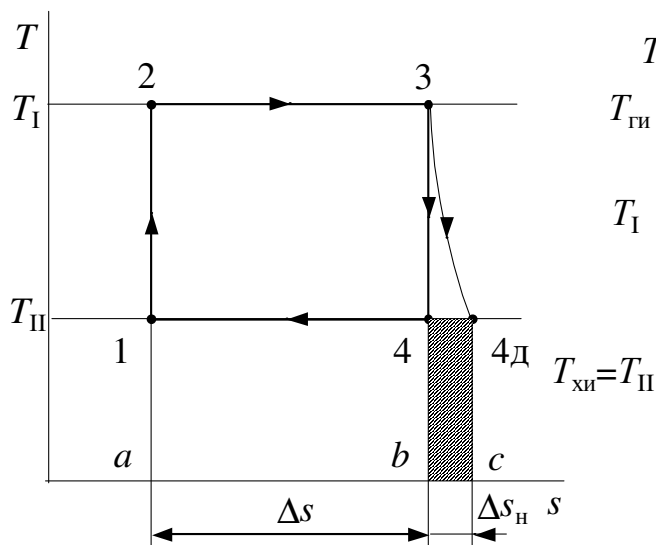


Рис.4.12

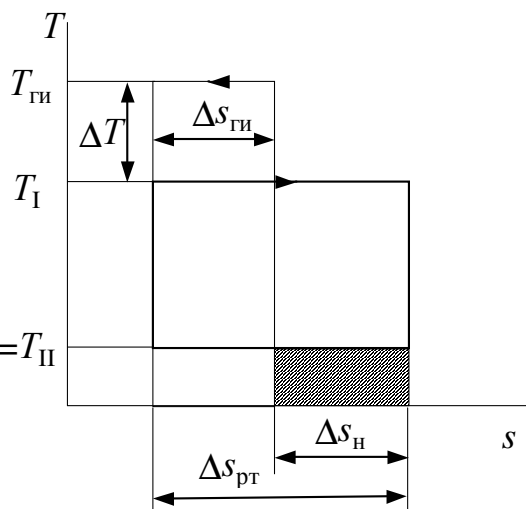


Рис.4.13

которая в  $T-s$  диаграмме изображена заштрихованной площадью  $b-4-4Д-c-b$ . Таким образом, чтобы определить действительную работу цикла Карно, необходимо из идеальной работы вычесть потерю работоспособности

$$l_{цд} = l_{цид} - l_{пр} = (T_I - T_{II}) \Delta s - T_{II} \Delta s_{н} \quad (4.32)$$

#### Цикл Карно с внешней необратимостью

Если бы процесс передачи теплоты от горячего источника к рабочему телу цикла Карно был обратимым, то  $\Delta T = 0$ , а работа идеального цикла

$$l_{цид} = (T_{ГИ} - T_{ХИ}) \Delta s_{ГИ} . \quad (a)$$

При наличии температурного напора  $\Delta T$  (см. рис.4.13) действительная работа цикла

$$l_{цд} = (T_I - T_{II}) \Delta s_{ПГ} . \quad (b)$$

Вычитая (b) из (a), определим потерю работоспособности

$l_{пр} = T_{ГИ} \Delta s_{ГИ} - T_{ХИ} \Delta s_{ГИ} - T_I \Delta s_{ПГ} + T_{ХИ} \Delta s_{ПГ}$ , но  $T_{ГИ} \Delta s_{ГИ} = T_I \Delta s_{ПГ} = q_I$ , тогда

$$l_{пр} = T_{ХИ} (\Delta s_{ПГ} - \Delta s_{ГИ}) = T_{ХИ} \Delta s_{н} \quad (4.33)$$

(см. заштрихованную площадь на рис. 4.13). Как и в предыдущем примере, действительную работу цикла найдем из выражения

$$l_{цд} = l_{цид} - l_{пр} = (T_{ГИ} - T_{ХИ}) \Delta s_{ГИ} - T_{ХИ} \Delta s_{н} . \quad (4.34)$$

#### Движение газа в адиабатической трубе при наличии трения

Мысленно заключим некоторый объем газа, имеющий среднюю скорость  $c_1$  и массу  $G$ , между двумя невесомыми поршнями, движение которых относительно центра тяжести газового элемента сделаем невозможным, наложив связи. Так как вся кинетическая энергия после остановки газового элемента пошла на работу против сил трения, то можно написать

$$G \frac{c_1^2}{2} = L_{тр} = Q_{тр} = U_2 - U_1 = G \bar{c}_v (T_2 - T_1),$$

т.е. в изохорном процессе к газовому элементу была подведена теплота трения  $Q_{тр}$  (см. рис.4.14, процесс 1-2).

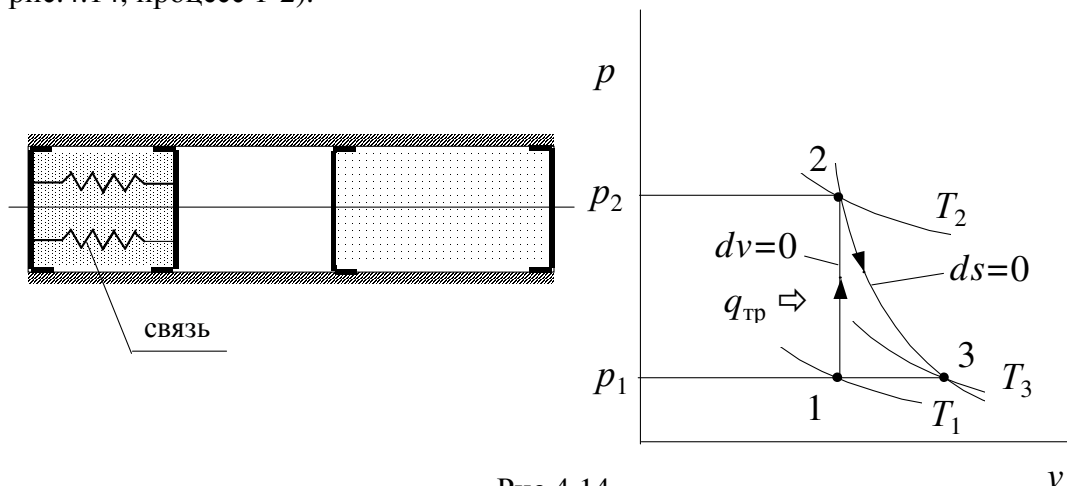


Рис.4.14

Теперь уберем наложенные связи и позволим газу расширяться обратимо по изоэнтропе до давления  $p_1$  так, чтобы не произошло никаких изменений как в самой ТС, так и в окружающей среде (процесс 2-3). Так как  $T_3 > T_1$ , то

$$\Delta s_{н} = c_p \ln \frac{T_3}{T_1} > 0. \quad (4.35)$$

Таким образом, течение газа с трением порождает внутреннюю необратимость, ведущую к росту энтропии.

#### Передача теплоты в теплообменном аппарате

В рассматриваемом примере имеет место как внешняя необратимость, обусловленная передачей теплоты от греющего потока к нагреваемому при конечной разности температур, так и внутренняя, возникающая из-за наличия гидравлического сопротивления приводящего к падению давления вдоль тракта.

Рассмотрим процесс передачи теплоты от одного потока к другому при конечной разности температур в простейшем теплообменном аппарате "труба в трубе" и покажем, что внешняя и внутренняя необратимость приводят к увеличению энтропии ТС "поток-поток". Будем считать, что греющим потоком является поток с расходом  $\dot{G}_I$ , а нагреваемым - с расходом  $\dot{G}_{II}$ . Процессы, протекающие в теплообменном аппарате (ТА), показаны на рис.4.15. Рисунок 4.15б иллюстрирует изменение температур агентов вдоль поверхности теплообмена  $F$ , а 4.15в - показывает процессы в  $T$ - $s$  диаграмме при наличии гидравлических потерь в трактах.

Так как в нашем случае  $d\dot{i}_{II}^* = -d\dot{i}_I^*$ , то пренебрегая кинетической энергией потоков, после интегрирования получим

$$\dot{G}_{II} \bar{c}_{pII} (T_4 - T_3) = -\dot{G}_I \bar{c}_{pI} (T_2 - T_1), \quad (4.36)$$

откуда можно определить температуру  $T_2$  или  $T_4$ . Приращение энтропии потоков найдем из выражений

$$\Delta \dot{S}_I = \dot{G}_I \left( \bar{c}_{pI} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R_I \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \right) = \dot{G}_I \left( -\bar{c}_{pI} \ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right) + R_I \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \right), \quad (4.37)$$

$$\Delta \dot{S}_{II} = \dot{G}_{II} \left( \bar{c}_{pII} \ln \left( \frac{T_4}{T_3} \right) - R_{II} \ln \left( \frac{p_4}{p_3} \right) \right) = \dot{G}_{II} \left( \bar{c}_{pII} \ln \left( \frac{T_4}{T_3} \right) + R_{II} \ln \left( \frac{p_3}{p_4} \right) \right) \quad (4.38)$$

Отметим, что последние слагаемые в формулах (4.37) и (4.38), которые отражают увеличение энтропии за счет внутренней необратимости, всегда положительны. Для всей системы можно написать  $\Delta\dot{S}_C = \Delta\dot{S}_I + \Delta\dot{S}_{II} > 0$ .

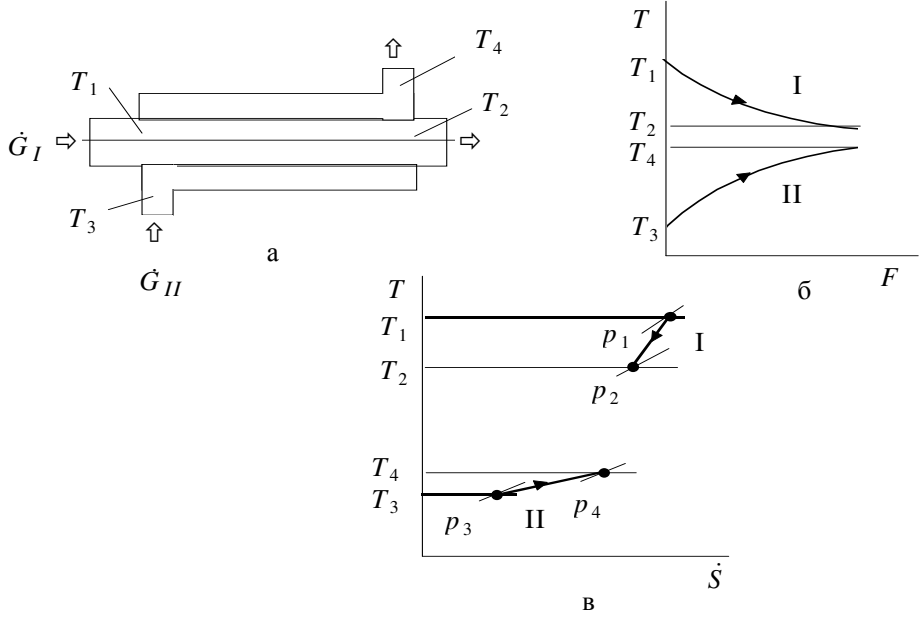


Рис.4.15

Термодинамическая шкала температур

Температура, показываемая жидкостным термометром, отражает термометрические свойства вещества. Однако в термодинамике температура является термодинамическим потенциалом и, следовательно, не должна зависеть от физических свойств вещества. Метод построения термодинамической (абсолютной) шкалы температур был разработан Томсоном (лорд Кельвин, 1824-1907). Идея метода - преобразование теплоты в работу. Рассмотрим идеальный цикл Карно, осуществляемый в двухфазной области (см. процессы в водяном паре) в интервале температур от  $T_I$  до  $T_{II}$ .

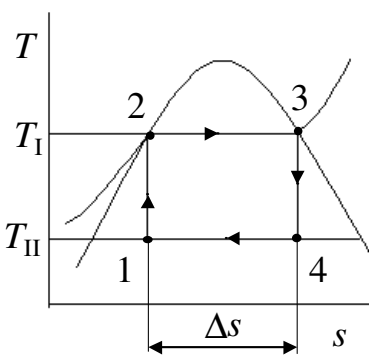


Рис.4.16

$$l_u = q_I - q_{II} = (T_I - T_{II})\Delta s \quad (a)$$

но  $\Delta s = \frac{q_I}{T_I}$ , тогда (a) можно переписать в виде

$$l_u = q_I - q_{II} = \frac{\Delta T q_I}{T_I} \quad (b)$$

откуда  $T_I = \frac{q_I}{q_I - q_{II}} \Delta T \quad (4.39)$

Определим температуру  $T_{II}$

$$l_u = q_I - q_{II} = (T_I - T_{II})\Delta s = \frac{\Delta T q_{II}}{T_{II}} \Rightarrow$$

$$T_{II} = \frac{q_{II}}{q_I - q_{II}} \Delta T \quad (4.40)$$

Если в качестве реперных точек взять точку кипения воды и точку плавления льда при нормальном давлении, то точно поставленный опыт дает:

$$\frac{q_I}{q_I - q_{II}} = \frac{2295,7548}{2295,7548 - 1650,9948} = 3,73,$$

$$\frac{q_{II}}{q_I - q_{II}} = \frac{1650,9948}{2295,7548 - 1650,9948} = 2,73 .$$

Разбивая шкалу на 100 делений, т.е. принимая  $\Delta T=100$ , получим  $T_I=373\text{K}$ ,  $T_{II}=273\text{K}$ . Таким образом, полученная термодинамическая шкала не зависит от термометрических свойств вещества.

### Тождественность газовой и термодинамической температур

Покажем тождественность термодинамической и газовой температуры  $\theta$ , измеряемой газовым термометром, в котором используется идеальный газ, подчиняющийся уравнению  $pv = R\theta$ . Так как газовый термометр работает при  $v=\text{const}$ , то  $\frac{p}{\theta} = \text{const}$ . Для

двух точек на изохоре можно написать 
$$\frac{p_1}{\theta_1} = \frac{p_2}{\theta_2} \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \frac{p_2}{p_1} .$$

Сделаем предположение, что между газовой и термодинамической температурами существует связь  $\theta = \varphi(T)$ .

Напишем объединенный закон термодинамики для обратимого процесса

$$Tds = du + pdv , \quad (a)$$

но  $u = f(T, v)$ , тогда

$$Tds = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + pdv . \quad (b)$$

Разделим (b) на  $T$

$$ds = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] dv . \quad (c)$$

Так как энтропия является функцией состояния и зависит от двух термических параметров  $T$  и  $v$ , то накрест взятые производные от (c) равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \right\}_v . \quad (d)$$

Взяв частные производные из (d), получим

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial T} = -\frac{1}{T^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] + \frac{1}{T} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] . \quad (e)$$

Из курса высшей математики известно, что смешанные производные не зависят от порядка их взятия, т.е.  $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v}$ , тогда вместо (e) можно написать

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p . \quad (4.41)$$

Выражение (4.41) называется дифференциальным уравнением состояния реального газа.

Для идеального газа было показано (см. опыт Гей-Люссака), что  $\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = 0$ , т.е.

$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p = 0$ , но мы предположили, что  $\theta = \varphi(T)$ , следовательно,

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_v \frac{d\theta}{dT} - p = 0 , \quad (4.42)$$

но  $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v = \frac{R}{v} = \frac{p}{\theta}$ , тогда  $T \frac{p}{\theta} \frac{d\theta}{dT} - p = 0$ . Разделив переменные, получим  $\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T}$ .

Интегрирования последнего равенства дает  $\ln \theta = \ln T + \ln C$ , или

$$\theta = kT. \quad (4.43)$$

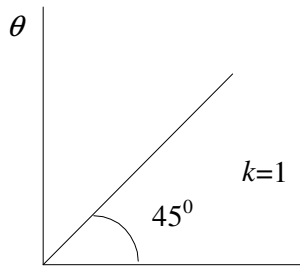


Рис.4.17

Если выбрать одинаковую единицу измерения температуры, то  $k=1$ , а  $\theta = T$  (см. рис.4.17). В дальнейшем мы не будем делать различия между газовой и термодинамической (абсолютной) температурами.

#### Энтропия и термодинамическая вероятность

Великий Людвиг Больцман (1844-1906), создавший кинетическую теорию газов, рассматривая процессы в газах, пришел к выводу, что система, предоставленная самой себе, переходит из менее вероятного состояния в более вероятное, что позволило ему установить связь между энтропией  $S$  и термодинамической вероятностью  $W$ . Под термодинамической вероятностью понимают число различных микросостояний, реализующих данное макросостояние системы (в квантовой механике  $W$  есть число квантовых состояний). По Планку,  $W = \frac{N!}{\prod_i n_i!}$ , где  $N = \sum_i n_i$ ,  $n_i$  - частиц в  $i$ -м состоянии.

Найдем связь между энтропией и термодинамической вероятностью. Для термодинамической системы, состоящей из двух подсистем, можно написать:

$$S = S_1 + S_2, \quad (a)$$

$$W = W_1 \cdot W_2. \quad (b)$$

Полагая, что  $S = \varphi(W)$ , вместо (a) будем иметь

$$\varphi(W_1 W_2) = \varphi(W_1) + \varphi(W_2). \quad (c)$$

Продифференцируем (c) сначала по  $W_1$ :

$$\varphi'(W_1 W_2) W_2 = \varphi'(W_1), \quad (d)$$

а затем по  $W_2$

$$\varphi''(W_1 W_2) W_1 W_2 + \varphi'(W_1 W_2) = 0, \text{ но } W = W_1 W_2,$$

следовательно,

$$\varphi''(W) W + \varphi'(W) = 0. \quad (e)$$

Последнее выражение перепишем в виде

$$\frac{d\varphi'(W)}{dW} W + \varphi'(W) = 0, \quad (f)$$

разделим переменные

$$\frac{d\varphi'(W)}{\varphi'(W)} + \frac{dW}{W} = 0 \quad (g)$$

и проинтегрируем

$$\ln \varphi'(W) + \ln W = \ln k, \quad (h)$$

$$\text{откуда } \varphi'(W) W = k. \quad (k)$$

Решим уравнение (k) относительно  $\varphi(W)$ :

$$\frac{d\varphi(W)}{dW} W = k, \quad d\varphi(W) = k \frac{dW}{W},$$

$\varphi(W) = k \ln W + k_1$ , но  $S = \varphi(W)$ , тогда окончательно

$$S = k \ln W \quad (4.44)$$

(можно показать, что  $k = \frac{R_0}{N_0} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана, а  $k_1=0$ ).

### Диалектическое толкование второго закона термодинамики

Выше говорилось, что термодинамический метод исследования применим лишь к конечным системам. Применение его к микромиру, где теряются понятия теплоты и работы, а также к бесконечным системам приводит к ошибочным выводам. Рудольф Клаузиус, применив второй закон термодинамики к бесконечной системе, пришел к выводу, что рано или поздно наступит так называемая “тепловая смерть вселенной”. Он писал: “Энергия мира остается постоянной, энтропия мира стремится к максимуму”. Теория “тепловой смерти” приводит нас к существованию Бога. Папа Пий XII на заседании папской академии наук в 1952 году говорил о существовании “Необходимого Существа”. Фридрих Энгельс (см. Ф.Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1952, с.19) писал: ”... материя во всех своих превращениях остается вечно одной и той же, ни один из ее атрибутов никогда не может быть утрачен и что поэтому с той же самой признанной необходимостью, с какой она когда-нибудь истребит на Земле свой высший цвет - мыслящий дух, она должна будет снова породить что-нибудь в другом месте и в другое время”. В противовес Клаузиусу Больцман считал, что вселенная находится, вообще говоря, в состоянии термодинамического равновесия, однако в ней неизбежно возникают сколь угодно большие флуктуации. Наблюдения и открытия астрофизиков показывают, что материя обладает никогда не утрачиваемой способностью к концентрации энергии и превращению одних форм движения в другие.

## **5. Приложение второго закона термодинамики к анализу термодинамических процессов**

### Средняя термодинамическая температура процесса

При термодинамическом анализе циклов в ряде случаев удобно ввести понятие средней термодинамической температуры процесса (средней температуры подвода или отвода теплоты). В этом случае работа цикла в  $T$ - $s$  диаграмме изобразится в виде прямоугольника.

Рассмотрим политропический процесс в  $T$ - $s$  диаграмме (см. рис.5.1).

Для политропического процесса  $dq_n = c_n dT$  или в интегральной форме

$$q_{n1-2} = c_n (T_2 - T_1). \quad (a)$$

По определению  $ds = \frac{dq_n}{T}$ , так что после интегрирования получаем

$$\Delta s_{1-2} = c_n \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (b)$$

Умножение (b) на среднюю температуру подвода теплоты  $\bar{T}_{1-2}$  дает

$$q_{b-c} = \bar{T}_{1-2} c_n \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (c)$$

Приравнявая  $q_{b-c}$  и  $q_{n1-2}$ , найдем выражение для средней температуры подвода теплоты

$$\bar{T}_{1-2} = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}. \quad (5.1)$$

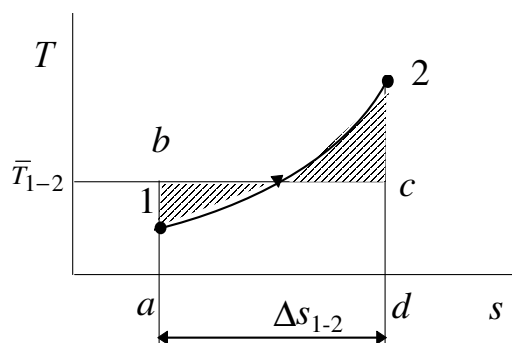


Рис. 5.1

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае отвода теплоты от термодинамической системы.

Так как в *T-s* диаграмме изобары реальных веществ на пограничных кривых имеют излом, то средняя температура процесса должна определяться более общим выражением

$$\bar{T}_{1-2} = \frac{i_2 - i_1}{s_2 - s_1} \quad (5.2)$$

**Адиабатическое течение с трением**

При течении вязкого газа в каналах часть кинетической энергии газа расходуется на работу против сил трения, которая равна теплоте трения. Рассмотрим течение вязкого газа в сопле Лаваля в *i-s* диаграмме. Так как в адиабатическом канале  $di^* = 0$ , то при отсутствии сил трения справедливо равенство

$$i_1^* = i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2} \quad (a)$$

При наличии сил трения будем иметь

$$i_1^* = i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_{2д} + \frac{c_{2д}^2}{2}, \quad (b)$$

где индекс ‘‘д’’ характеризует действительные значения величин. Приравнивая (а) и (b), получим

$$\Delta i_{тр} = i_{2д} - i_2 = \frac{c_2^2 - c_{2д}^2}{2}, \quad (c)$$

где  $\Delta i_{тр}$  - потеря кинетической энергии, обусловленная трением.

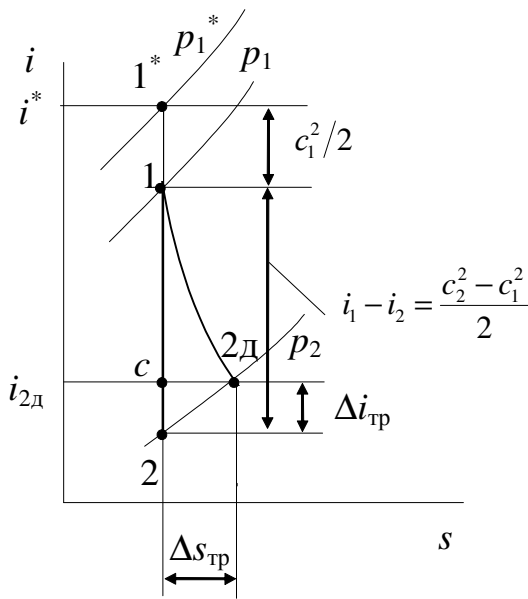


Рис. 5.2

Введем понятие коэффициента скорости  $\varphi_c = \frac{c_{2д}}{c_2}$ , с учетом которого перепишем (c) в виде

$$\Delta i_{тр} = (1 - \varphi_c^2) \frac{c_2^2}{2} \quad (5.3)$$

Для идеального сопла  $\varphi_c = 1$ , а  $\Delta i_{тр} = 0$ . При этом имеет место максимальное приращение кинетической энергии  $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = i_1 - i_2$ . В *T-s*

диаграмме на рис.5.3 площадь под кривой процесса *a-1-2д-b-a* изображает теплоту трения, а  $\Delta i_{тр} = i_{2д} - i_2$  отображается площадью *2-2д-b-a-2* и часто называется термодинамической потерей. Часть же теплоты трения, соответствующая площади *1-2д-2-1*, идет на увеличение энтальпии потока и

может быть использована в процессе последующего расширения. Покажем процессы расширения в *p-v* диаграмме (рис.5.4). Здесь разность энергий  $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$  при

изоэнтропийном расширении в процессе 1-2 изобразится площадью *1-2-m-d-1*. Реальный процесс расширения с трением будет протекать по кривой 1-2д. Чтобы найти действительное приращение кинетической энергии, необходимо из точки 2д провести изоэнтальпу  $di=0$  (линия 2д-с) до пересечения с изоэнтропой 1-2.

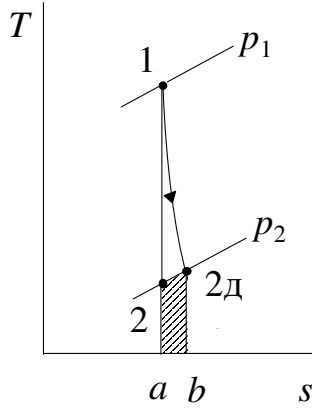


Рис. 5.3

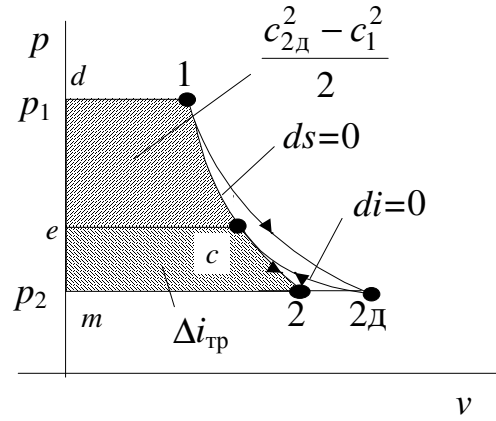


Рис. 5.4

Тогда  $\frac{c_{2д}^2 - c_1^2}{2}$  изобразится площадью 1-с-е-d-1, а  $\Delta i_{тр}$  - площадью с-2-м-е-с. Вся теплота трения в  $p$ - $v$  диаграмме соответствует площади 1-2д-м-е-с-1.

Проведенные для сопла рассуждения справедливы и при рассмотрении процессов в турбине. При рассмотрении внутренней энергии и энтальпии было показано, что значения этих функций состояния могут быть изображены в  $p$ - $v$  диаграмме в виде площадей (см.рис.2.5). Применим это положение при изучении процессов с трением.

На рис.5.5а показан идеальный 1-2 и реальный 1-2д процессы расширения. При изэнтропийном процессе работа изменения объема  $l_{1-2ид} = u_1 - u_2$  изображается разностью площадей 1-с-а-1 и 2-с-б-2. В реальном процессе 1-2д из-за действия сил трения внутренняя энергия  $u_{2д}$  в точке 2д будет больше  $u_2$  и изобразится площадью 2д-д-б-2д. Так как  $l_{1-2д} = u_1 - u_{2д}$ , то работа изэнтропийного расширения (пл. 1-2-б-а-1) уменьшится на величину площади 2д-д-с-2-2д, т.е.  $l_{1-2д} = l_{1-2ид} - (u_{2д} - u_2)$ . В процессе сжатия с трением (рис.5.5б) внутренняя энергия газа в точке 2д изображается площадью 2д-д-а-2д, а в точке 1- площадью 1-с-б-1, тогда действительная работа сжатия  $l_{сж д}$  изобразится площадью 2д-д-с-1-б-а-2д.

Рассматривая действительную техническую работу расширения (рис.5.5в), видим, что идеальная работа (пл. 1-2-а-б-1) уменьшается на величину, эквивалентную площади 2д-д-с-2-2д, которая равна  $\Delta i_{тр}$ . Для того чтобы найти реальную техническую работу сжатия (рис.5.5г) необходимо из площади 2д-д-0-а-2д (эта площадь изображает энтальпию  $i_{2д}$ ) вычесть площадь 1-с-0-б-1, изображающую  $i_1$ .

Ниже приводятся рисунки процессов сжатия в компрессоре в  $i$ - $s$ ,  $T$ - $s$  и  $p$ - $v$  диаграммах. Отметим, что в процессах сжатия  $\Delta i_{тр} = i_{2д} - i_2$  (рис.5.6б, пл. а-2-2д-б-а) больше теплоты трения (пл.а-1-2д-б-а), а в процессах расширения - наоборот ( см. рис.5.4).

Определим значение показателя политропы при расширении идеального газа в адиабатическом канале, если известен коэффициент трения  $\xi$ . Так как  $dq_{внеш} = 0$ , то уравнение первого закона термодинамики примет вид  $dq_{тр} = di - vdp$ , но  $dq_{тр} = \xi di$ ,

тогда  $(1 - \xi)di - vdp = 0$  или

$$(1 - \xi)c_p dT - vdp = 0. \quad (a)$$

Так как  $c_p = \frac{k}{k-1} R$ , то (а) представим в виде

$$(1 - \xi) \frac{k}{k-1} R dT - vdp = (1 - \xi) \frac{k}{k-1} d(pv) - vdp = 0. \quad (b)$$



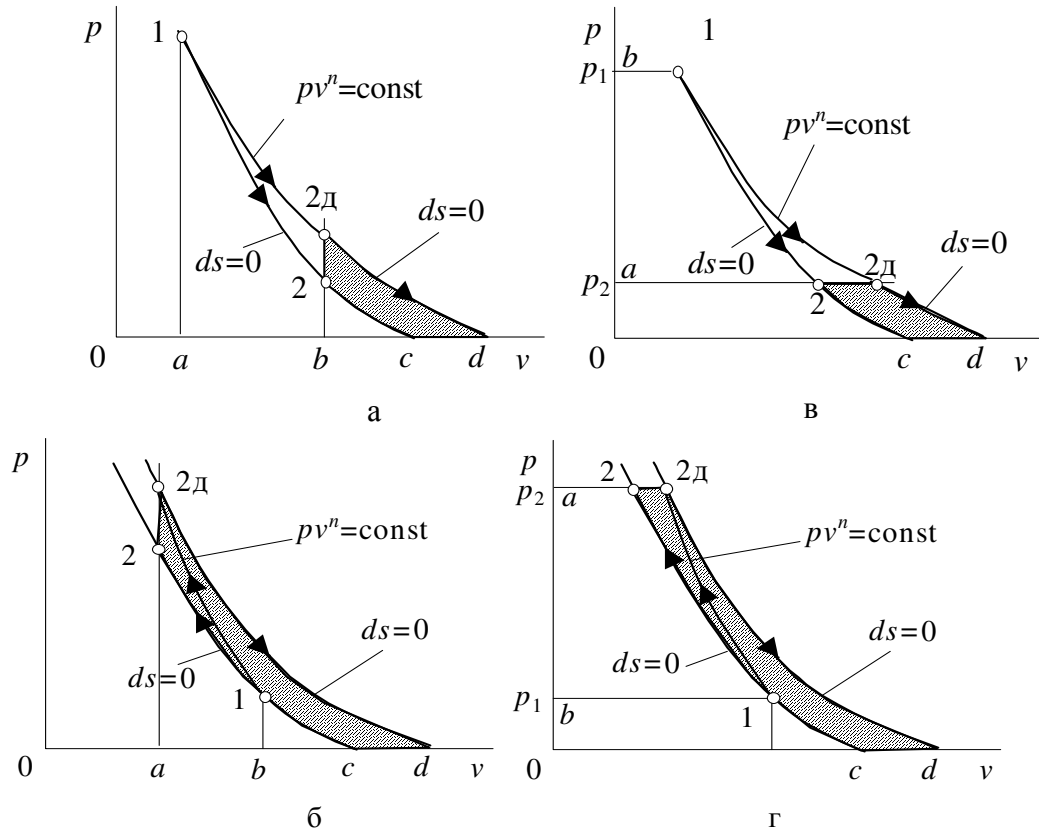


Рис.5.5

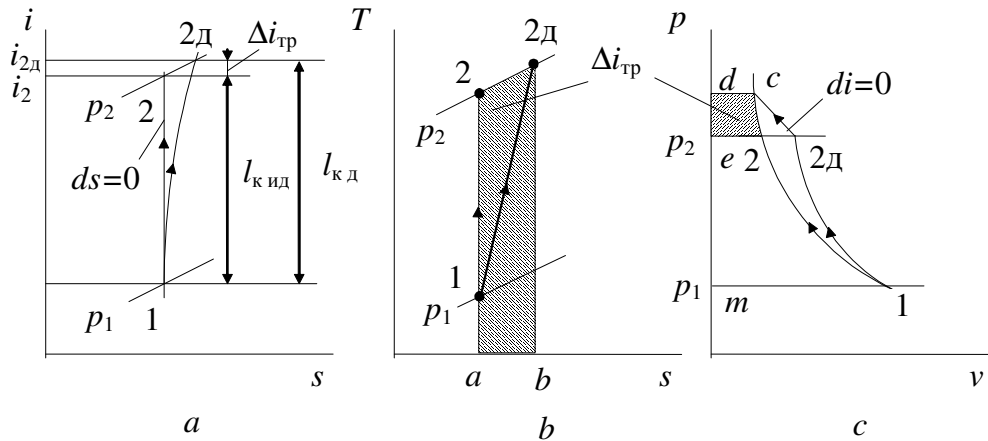


Рис. 5.6

Введем обозначение  $B = (1 - \xi) \frac{k}{k - 1}$  и преобразуем (б):

$$Bp dv + (B - 1)v dp = 0.$$

Разделив переменные, получим уравнение политропического процесса с трением в дифференциальной форме

$$\frac{B}{B - 1} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0,$$

где 
$$n = \frac{B}{B-1} = \frac{(1-\xi) \frac{k}{k-1}}{(1-\xi) \frac{k}{k-1} - 1} \quad (5.4)$$

показатель политропы. Выражение (5.4) имеет предельный переход, т.е. при  $\xi=0$  получаем  $n=k$ .

### Процессы смешения

Во многих энергетических системах и устройствах имеют место процессы смешения газов с различными физическими свойствами и параметрами. При этом возникает вопрос о состоянии смеси: какими будут температура и давление смеси, насколько увеличится энтропия и т.п. Рассмотрим процессы смешения газов в объеме, в потоке и при заполнении сосудов.

Смешение в объеме. Для жесткой адиабатической системы, состоящей из двух газов, разделенных перегородкой, можно написать

$$U_c = U_1 + U_2. \quad (a)$$

Если убрать перегородку между газами, то внутренняя энергия системы  $U_c$  не изменится (нет причин для ее изменения). Раскрывая выражение для внутренней энергии, перепишем (a) в виде

$$(G_1 + G_2)c_{vcm}T_{cm} = G_1c_{v1}T_1 + G_2c_{v2}T_2, \quad (b)$$

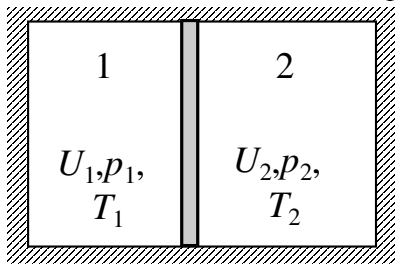


Рис. 5.7

откуда найдем температуру смеси

$$T_{cm} = \frac{G_1c_{v1}T_1 + G_2c_{v2}T_2}{(G_1 + G_2)c_{vcm}}. \quad (5.5)$$

Вводя понятие массовой доли  $g_i = G_i/G_{cm}$ , перепишем (5.5)

$$T_{cm} = \frac{g_1c_{v1}T_1 + g_2c_{v2}T_2}{c_{vcm}} = \frac{g_1c_{v1}T_1 + g_2c_{v2}T_2}{g_1c_{v1} + g_2c_{v2}}. \quad (5.6)$$

Для идеального газа  $p_{cm} = p'_1 + p'_2$ , где  $p'$  - парциальное давление газа. Из уравнений состояния  $p'_1V_{cm} = G_1R_1T_{cm}$  и  $p'_2V_{cm} = G_2R_2T_{cm}$  найдем парциальные давления газов

$$p'_1 = \frac{G_1R_1T_{cm}}{V_{cm}} \quad (c), \quad p'_2 = \frac{G_2R_2T_{cm}}{V_{cm}}. \quad (d)$$

Из уравнений состояния, записанных для газов до смешения, определим массу газов

$$G_1 = \frac{p_1V_1}{R_1T_1} \quad (e), \quad G_2 = \frac{p_2V_2}{R_2T_2}. \quad (g)$$

Подставляя (e) и (g) соответственно в (c) и (d), получим выражение для давления смеси

$$p_{cm} = \left( \frac{p_1r_1}{T_1} + \frac{p_2r_2}{T_2} \right) T_{cm}, \quad (5.7)$$

где  $r_i = V_i/V_{cm}$  - объемная доля газов;  $p_1$  и  $p_2$  - давления газов до смешения. В самом общем случае смешения  $n$  газов можно написать

$$p_{cm} = T_{cm} \sum_{i=1}^n \frac{p_i r_i}{T_i}. \quad (5.8)$$

Зная параметры газов до и после смешения, можно найти увеличение энтропии системы, вызванное процессом образования смеси. Изменение энтропии системы есть сумма изменений энтропии для каждого из компонентов:

$$\Delta S_c = \Delta S_1 + \Delta S_2 = G_1 \left( c_{p1} \ln \frac{T_{cm}}{T_1} - R_1 \ln \frac{p'_1}{p_1} \right) + G_2 \left( c_{p2} \ln \frac{T_{cm}}{T_2} - R_2 \ln \frac{p'_2}{p_2} \right),$$

где  $p'_1$  и  $p'_2$  - парциальные давления компонентов в образовавшейся смеси. Перепишем это выражение с учетом того, что  $p' = rp_{cm}$ :

$$\begin{aligned} \Delta S_c &= G_1 \left( c_{p1} \ln \frac{T_{cm}}{T_1} - R_1 \ln \frac{r_1 p_{cm}}{p_1} \right) + G_2 \left( c_{p2} \ln \frac{T_{cm}}{T_2} - R_2 \ln \frac{r_2 p_{cm}}{p_2} \right) = \\ &= G_1 \left( c_{p1} \ln \frac{T_{cm}}{T_1} - R_1 \ln \frac{p_{cm}}{p_1} - R_1 \ln r_1 \right) + G_2 \left( c_{p2} \ln \frac{T_{cm}}{T_2} - R_2 \ln \frac{p_{cm}}{p_2} - R_2 \ln r_2 \right) = \\ &= G_1 \left( c_{p1} \ln \frac{T_{cm}}{T_1} - R_1 \ln \frac{p_{cm}}{p_1} \right) + G_2 \left( c_{p2} \ln \frac{T_{cm}}{T_2} - R_2 \ln \frac{p_{cm}}{p_2} \right) + \\ &+ G_1 R_1 \ln \frac{1}{r_1} + G_2 R_2 \ln \frac{1}{r_2}. \end{aligned}$$

В расчете на 1 кг смеси, т.е. разделив  $\Delta S_c$  на  $G_1 + G_2$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta s_c &= g_1 \left( c_{p1} \ln \frac{T_{cm}}{T_1} - R_1 \ln \frac{p_{cm}}{p_1} \right) + g_2 \left( c_{p2} \ln \frac{T_{cm}}{T_2} - R_2 \ln \frac{p_{cm}}{p_2} \right) + \\ &+ g_1 R_1 \ln \frac{1}{r_1} + g_2 R_2 \ln \frac{1}{r_2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Два первых слагаемых в (5.9) характеризуют приращение энтропии системы, связанное с изменением температуры и давления, два последних - приращение, обусловленное процессом диффузии при смешении разнородных газов. Выражение  $G_i R_i \ln \frac{1}{r_i} = G_i R_i \ln \frac{p_{cm}}{p'_i}$  можно условно рассматривать как увеличение энтропии в результате дросселирования  $i$ -го газа от давления смеси  $p_{cm}$  до его парциального давления  $p'_i$ .

Смешение в потоке.

Рассмотрим два газовых потока, которые направляются в

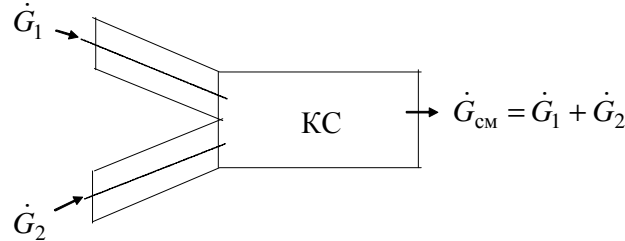


Рис. 5.8

адиабатическую камеру, где происходит их смешение. Для открытой адиабатической системы можно написать

$$i_{cm}^* = i_1^* + i_2^*. \quad (m)$$

Из (m), пренебрегая кинетической энергией газов ( $i \gg \frac{c^2}{2}$ ), можно определить

$$\text{температуру смеси} \quad T_{cm} = \frac{\dot{G}_1 c_{p1} T_1 + \dot{G}_2 c_{p2} T_2}{c_{p1} \dot{G}_1 + c_{p2} \dot{G}_2} = \frac{g_1 c_{p1} T_1 + g_2 c_{p2} T_2}{c_{p1} g_1 + c_{p2} g_2}. \quad (5.10)$$

Процессы смешения потоков можно показать в  $i$ -s диаграмме. Из очевидных соотношений  $i_{cm} = g_1 i_1 + g_2 i_2$  и  $g_1 + g_2 = 1$  можно получить

$$g_1 = \frac{G_1}{G_{\text{см}}} = \frac{i_{\text{см}} - i_2}{i_1 - i_2}, \quad (\text{н})$$

$$g_2 = \frac{G_2}{G_{\text{см}}} = \frac{i_1 - i_{\text{см}}}{i_1 - i_2}. \quad (\text{р})$$

Разделив (н) на (р), найдем соотношение между массовыми долями и энтальпиями газов (см. рис. 5.9)

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{i_{\text{см}} - i_2}{i_1 - i_{\text{см}}}. \quad (\text{г})$$

Давление смеси определим из выражения энтальпии

$$(u + pv)_{\text{см}} \dot{G}_{\text{см}} = (u_1 + p_1 v_1) \dot{G}_1 + (u_2 + p_2 v_2) \dot{G}_2 : \\ p_{\text{см}} = \frac{(u_1 + p_1 v_1) g_1 + (u_2 + p_2 v_2) g_2 - u_{\text{см}}}{v_{\text{см}}}. \quad (5.11)$$

Если бы процесс смешения был обратимым, то  $s_{\text{см}} = g_1 s_1 + g_2 s_2$  (см. рис. 5.9), однако наличие ударных потерь, которые пропорциональны квадрату разности скоростей смешиваемых потоков, и сил трения приводят к увеличению энтропии на  $\Delta s_{\text{н}}$ , т.е.

$$s_{\text{см,д}} = g_1 s_1 + g_2 s_2 + \Delta s_{\text{н}}. \quad (5.12)$$

Заполнение сосуда газом.

Пусть до заполнения сосуда газом внутренняя энергия газа в баллоне равна  $U_1$ . После заполнения будем иметь

$$U_2 = U_1 + I^* = U_1 + G_2 \left( i_2 + \frac{c_2^2}{2} \right), \quad (5.13)$$

где  $G_2 = \dot{G}_2 \tau$  - масса закачанного газа, имеющего энтальпию  $I^*$ ;  $\tau$  - время закачки;  $\dot{G}_2$  -

массовый расход. Пренебрегая кинетической энергией газа, из (5.13) можно найти температуру смеси

$$T_{\text{см}} = \frac{G_1 c_{v1} T_1 + G_2 c_{p2} T_2}{(G_1 + G_2) c_{\text{всм}}} = \frac{g_1 c_{v1} T_1 + g_2 c_{p2} T_2}{c_{v1} g_1 + c_{v2} g_2}. \quad (5.14)$$

Давление газа в баллоне после заполнения найдем из уравнения состояния

$$p_{\text{см}} = \frac{G_{\text{см}} R_{\text{см}} T_{\text{см}}}{V}, \quad (5.15)$$

увеличение энтропии из выражения

$$\Delta S_{\text{см}} = G_{\text{см}} s_{\text{см}} - (G_1 s_1 + G_2 s_2). \quad (5.16)$$

### Максимальная работа изолированной системы. Теорема Гюи-Стодолы

При анализе эффективности энергетических установок встает вопрос определения полезной работы адиабатической системы. С этой целью рассмотрим закрытую адиабатическую систему, состоящую из источника работы и окружающей среды. Для того чтобы такая система могла совершить работу, необходимо наличие тепловой или механической неравновесности между подсистемами, т.е. температура и давление источника работы должны быть больше давления и температуры окружающей среды. В адиабатической системе полезная работа может быть произведена только за счет убыли внутренней энергии

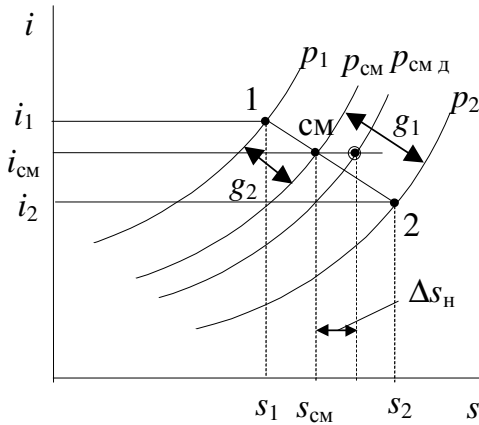


Рис. 5.9

$$L = (U_1 + U_{oc1}) - (U_2 + U_{oc2}) = (U_1 - U_2) - (U_{oc2} - U_{oc1}), \quad (a)$$

где подстрочные индексы 1 и 2 соответствуют параметрам до и после совершения работы. Изменение внутренней энергии окружающей среды определим из первого закона термодинамики:

$$(U_{oc2} - U_{oc1}) = Q_{oc} - L_{oc}. \quad (b)$$

Будем считать, что подсистема окружающая среда намного больше источника работы, что позволяет полагать  $p_{oc} = \text{const}$  и  $T_{oc} = \text{const}$ . В этом случае, т.к.  $(V_2 - V_1) = -(V_{oc2} - V_{oc1})$ , можно написать

$$L_{oc} = p_{oc}(V_{oc2} - V_{oc1}) = -p_{oc}(V_2 - V_1), \quad (c)$$

$$Q_{oc} = T_{oc}(S_{oc2} - S_{oc1}). \quad (d)$$

Подставляя (b) в (a) с учетом (c) и (d), получим

$$L = U_1 - U_2 - p_{oc}(V_2 - V_1) - T_{oc}(S_{oc2} - S_{oc1}). \quad (5.17)$$

Если в системе процессы протекают обратимо, то приращение энтропии системы равно нулю

$$\Delta S_c = (S_2 - S_1) + (S_{oc2} - S_{oc1}) = 0,$$

$S_{oc2} - S_{oc1} = S_1 - S_2$ , а произведенная работа будет максимальной:

$$L_{\max} = U_1 - U_2 - p_{oc}(V_2 - V_1) - T_{oc}(S_1 - S_2). \quad (5.18)$$

Если бы в состоянии теплового и механического равновесия с окружающей средой рабочее тело источника работы массой  $G$  пришло обратимым путем, была бы получена максимально возможная работа, которую может совершить закрытая

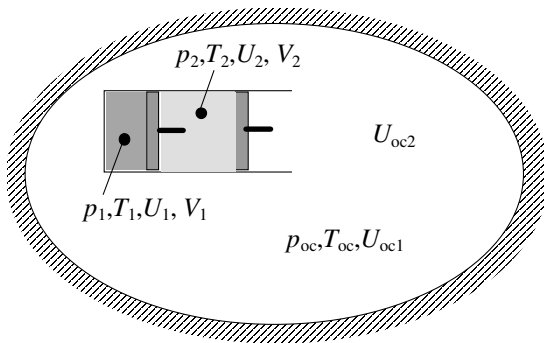


Рис. 5.10

адиабатическая система

$$L_{\max \text{ возм}} = U_1 - U_o + p_{oc}(V_1 - V_o) - T_{oc}(S_1 - S_o), \quad (5.18a)$$

где  $V_o = \frac{GRT_{oc}}{p_{oc}}$ ,  $R$  - газовая постоянная рабочего тела,  $U_o$  и  $S_o$  - внутренняя энергия и энтропия рабочего тела в состоянии равновесия с окружающей средой. Эту максимально возможную работу можно назвать эксергией внутренней энергии (об эксергии см. ниже).

Из (5.18a) видно, что не вся внутренняя энергия источника работы может быть превращена в полезную работу. Вычитая (5.17) из (5.18), найдем потерю работоспособности термодинамической системы

$$L_{\text{пр}} = L_{\max} - L = T_{oc} [(S_{oc2} - S_{oc1}) - (S_1 - S_2)] = T_{oc} \Delta S_c. \quad (5.19)$$

Таким образом, чтобы определить потерю работоспособности ТС необходимо температуру окружающей среды умножить на приращение энтропии системы, обусловленное внешней и внутренней необратимостью. В общем случае теорема Гюи-Стодольи имеет вид

$$L_{\text{пр}} = T_{oc} \sum_{i=1}^n \Delta S_{ni}, \quad (5.20)$$

где  $\Delta S_{ni}$  - приращение энтропии в отдельных элементах энергетической установки, обусловленное необратимостью.

М. Гюи - французский физик, получил уравнение (5.20) в 1889 г.; Стодóла - словацкий теплотехник - впервые применил его для теплотехнических расчетов.

#### Эксергия теплоты и потока, эксергетический КПД

Форма энергии, которая может быть полностью превращена в другие формы энергии называется эксергией, она характеризует меру технической ценности энергии. К таким

формам энергии относятся электрическая, которая в идеальной электрической машине полностью превращается в механическую, кинетическая и потенциальная. Теплота же включает две формы энергии - эксергию и анергию теплоты. Под эксергией теплоты  $E_Q$  понимают ту часть теплоты, которая может быть полностью превращена в работу идеального цикла, осуществляемого в интервале температур  $T...T_{oc}$ . Вторая составляющая - анергия теплоты  $B_Q$  не может быть превращена в работу и передается окружающей среде. Эксергия и анергия теплоты являются функциями процесса.

Эксергия теплоты.

Рассмотрим идеальную тепловую машину, работающую в интервале температур  $T...T_{oc}$ . Так как процессы протекают обратимо, то изменение энтропии системы (горячего и холодного источников теплоты) равно нулю:

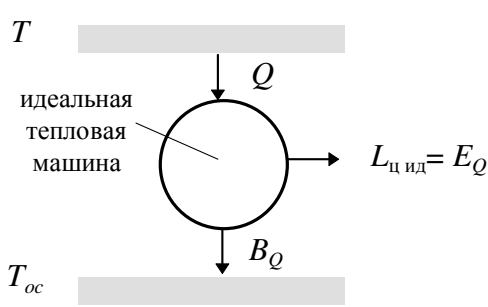


Рис. 5.11

$$dS_c = dS + dS_{oc} = 0, \tag{a}$$

но  $dS = dQ/T$ , тогда

$$-\frac{dQ}{T} + \frac{dQ_{oc}}{T_{oc}} = 0, \tag{b}$$

$$\text{откуда } dQ_{oc} = \frac{T_{oc}}{T} dQ = dB_Q. \tag{5.21}$$

Так как  $dQ = dE_Q + dB_Q$ , то подставляя сюда (5.21), получим

$$dE_Q = \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) dQ. \tag{5.22}$$

В интегральной форме формулы (5.21)-(5.22), например, для изобарного процесса, примут вид (см. рис.5.12)

$$B_{Q1-2} = T_{oc} \int_1^2 \frac{dQ}{T} = Gc_p T_{oc} \ln \frac{T_2}{T_1} = T_{oc} (S_2 - S_1), \tag{5.23}$$

$$E_{Q1-2} = \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) dQ = Gc_p \left[ (T_1 - T_2) - T_{oc} \ln \frac{T_2}{T_1} \right] = Q_{1-2} - B_{Q1-2}. \tag{5.24}$$

В реальной машине, где имеет место необратимость, часть эксергии превращается в анергию (см. рис.5.13) и отводимая теплота  $Q_{oc}$  увеличивается на величину потерь

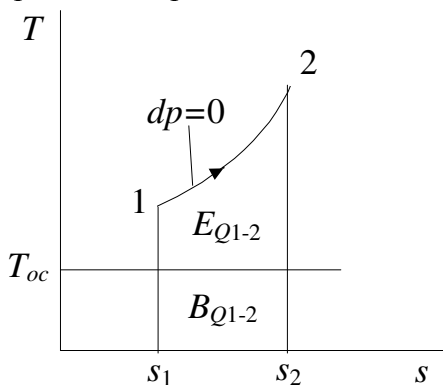


Рис. 5.12

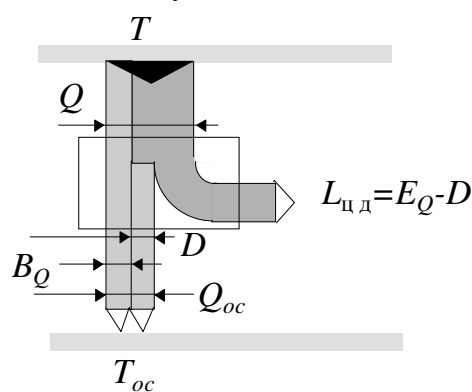


Рис. 5.13

эксергии  $D$ , то есть

$$Q_{oc} = B_Q + D, \text{ Дж.}$$

Качественную сторону превращения эксергии теплоты в работу цикла характеризует эксергетический КПД

$$\eta_{ex} = \frac{L_{цикл}}{E_Q} = \frac{E_Q - D}{E_Q} = 1 - \frac{D}{E_Q}. \tag{5.25}$$

Для идеальной машины  $D=0$ , а  $\eta_{ex}=1$ .

Эксергия потока.

Для открытой системы, пренебрегая кинетической и потенциальной энергией газа, для потока энтальпии можно написать (см. рис.5.14а):

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \int_1^2 d\dot{Q} - \dot{L}_{\text{тех}}. \quad (\text{a})$$

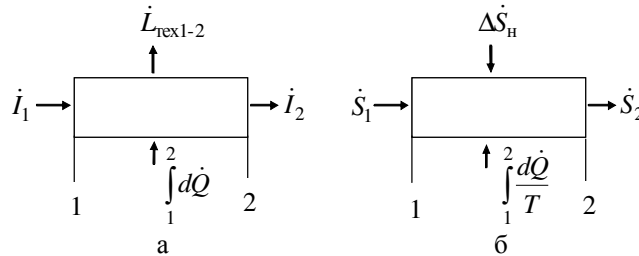


Рис. 5.14

Для потоков энтропии (рис.5.14б) будем иметь

$$\dot{S}_2 = \dot{S}_1 + \int_1^2 \frac{d\dot{Q}}{T} + \Delta\dot{S}_h, \text{ Вт/К}. \quad (\text{b})$$

Умножим (b) на  $T_{oc}$  и вычтем из (a)

$$\dot{I}_2 - T_{oc}\dot{S}_2 = \dot{I}_1 - T_{oc}\dot{S}_1 + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) d\dot{Q} - \dot{L}_{\text{тех1-2}} - T_{oc}\Delta\dot{S}_h. \quad (\text{c})$$

Разрешая (c) относительно технической работы, получим

$$\dot{L}_{\text{тех1-2}} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - T_{oc}(\dot{S}_1 - \dot{S}_2) + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) d\dot{Q} - T_{oc}\Delta\dot{S}_h. \quad (5.26)$$

при  $\Delta\dot{S}_h = 0$  найдем максимальную работу  $\dot{L}_{(\text{тех1-2})\text{max}}$ . Поток совершит максимально возможную работу в том случае, если он будет расширяться обратимо вначале по адиабате (процесс 1-а на рис.5.15), а затем по изотерме при  $T_{oc}$  до состояния равновесия с окружающей средой. Для одного килограмма газа из (5.26) с учетом сказанного получим выражение эксергии потока

$$ex_1 = i_1 - i_o - T_{oc}(s_1 - s_o), \quad (5.27)$$

т.е. в точке 1 поток обладает эксергией  $ex_1$ , величина которой в  $p-v$  диаграмме изобразится

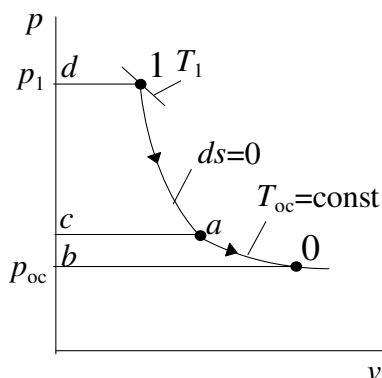


рис. 5.15

площадью 1-а-0-b-d-1. Как видим, эксергия потока зависит не только от начальных параметров, но и от состояния окружающей среды. Итак, под эксергией потока понимают максимальную работу, которую может совершить поток, расширяясь вначале при  $ds=0$ , а затем по обратимой изотерме при  $T_{oc}$  до состояния полного равновесия с окружающей средой. Может возникнуть вопрос, а не совершает ли поток работу в процессе а-0 за счет диссипированной теплоты окружающей среды  $q_{oc}$ , которую он получает, не нарушается ли здесь второй закон термодинамики, запрещающий энергию превращать в эксергию? Дело в том, что в точке “а” наступает тепловое равновесие потока и окружающей среды, но отсутствует механическое равновесие, так как  $p_a > p_{oc}$  и

поток может расширяться до  $p_{oc}$ , совершая работу. Подвод же теплоты  $q_{oc}$  от окружающей среды является лишь компенсационным процессом, позволяющим потоку осуществлять

расширение при  $T_{oc}$ . С учетом кинетической и потенциальной энергии эксергия потока

$$\text{имеет вид} \quad ex_1 = i_1 - i_o - T_{oc}(s_1 - s_o) + \frac{c_1^2}{2} + gz_1. \quad (5.28)$$

На рисунках 5.16 и 5.17 представлены графические изображения эксергии потока в  $T$ - $s$  и  $i$ - $s$  диаграммах. Из рис.5.16 видно, что эксергия потока с параметрами определяемыми точкой 1, изображается в виде двух площадей -  $1cde1$  ( $i_1 - i_o$ ) и  $a0bca$  ( $T_{oc}(s_0 - s_1)$ ), т.е.

$$ex_1 = i_1 - i_o + T_{oc}(s_0 - s_1) = i_1 - i_o - T_{oc}(s_1 - s_o).$$

В  $i$ - $s$  диаграмме эксергия потока изображается вертикальным отрезком, состоящим из двух частей:  $i_1 - i_o$  и  $T_{oc}(s_0 - s_1)$ .

Для того чтобы получить отрезок  $T_{oc}(s_0 - s_1)$ , проведем следующие рассуждения.

Из уравнения  $Tds = di - vdp$  при  $dp=0$  будем

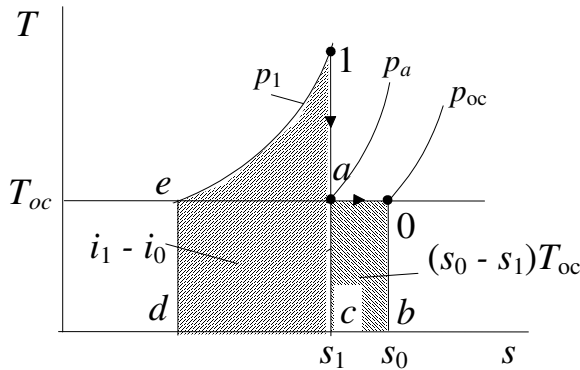


рис. 5.16

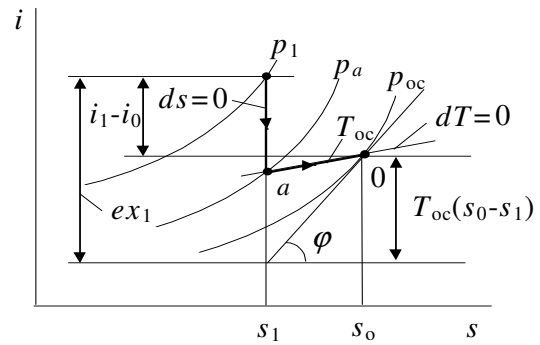


рис. 5.17

иметь  $\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p = T$ . Для нашего случая

$\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_{p_{oc}} = T_{oc} = \text{tg} \varphi$  (см. рис.5.17), следовательно, умножая  $\text{tg} \varphi$  на  $(s_0 - s_1)$ , получим  $T_{oc}(s_0 - s_1)$ .

При использовании эксергетического КПД при анализе энергетических машин более правильно оценивается их эффективность, так как  $\eta_{ex}$  характеризует отношение качественно одинаковых величин - работ.

$$\begin{aligned} \eta_{ex} &= \frac{\dot{L}_{\text{тех1-2}}}{\dot{L}_{\text{тех ид1-2}}} = \frac{\dot{i}_1 - \dot{i}_2 - T_{oc}(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) d\dot{Q} - T_{oc}\Delta\dot{S}_H}{\dot{i}_1 - \dot{i}_2 - T_{oc}(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) d\dot{Q}} = \\ &= 1 - \frac{T_{oc}\Delta\dot{S}_H}{\dot{i}_1 - \dot{i}_2 - T_{oc}(\dot{s}_1 - \dot{s}_2) + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) d\dot{Q}} = 1 - \frac{\dot{D}}{\dot{E}x_1 - \dot{E}x_2 + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) d\dot{Q}}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где  $\dot{E}x = \dot{G}[i - i_o - T_{oc}(s - s_o)]$ , Вт.

Для одного килограмма газа будем иметь

$$\eta_{ex} = 1 - \frac{d}{ex_1 - ex_2 + \int_1^2 \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) dq}. \quad (5.29a)$$

В системах, где теплота не подводится,  $dq=0$ . При отсутствии потери эксергии  $d=0$ ,  $\eta_{ex} = 1$ .



В качестве примера рассмотрим теплообменный аппарат и определим его эксергетический КПД.

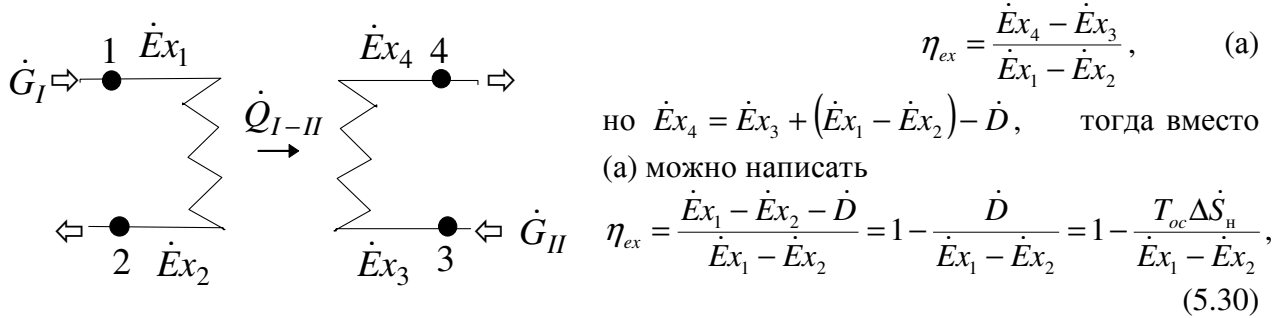


Рис. 5.18

где

$$\begin{aligned} \Delta \dot{S}_H &= \Delta \dot{S}_{1-2} + \Delta \dot{S}_{3-4} = \dot{G}_I \left( \bar{c}_{pl} \ln \frac{T_2}{T_1} - R_l \ln \frac{p_2}{p_1} \right) + \\ &+ \dot{G}_{II} \left( \bar{c}_{pII} \ln \frac{T_4}{T_3} - R_{II} \ln \frac{p_4}{p_3} \right) = \dot{G}_I \left( -\bar{c}_{pl} \ln \frac{T_1}{T_2} + R_l \ln \frac{p_1}{p_2} \right) + \\ &+ \dot{G}_{II} \left( \bar{c}_{pII} \ln \frac{T_4}{T_3} + R_{II} \ln \frac{p_3}{p_4} \right); \quad p_2 = p_1 - \Delta p_{потI}; \quad p_4 = p_3 - \Delta p_{потII}; \\ \dot{Q}_{I-II} &= \dot{G}_{II} (i_4 - i_3) = \dot{G}_I (i_1 - i_2). \end{aligned}$$

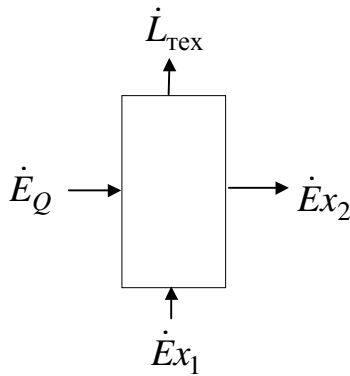


Рис. 5.19

Любую энергетическую систему можно представить в виде объекта, в который входят и выходят потоки эксергии  $\dot{E}x$ ,  $\dot{E}Q$ . Если системой совершается техническая работа  $\dot{L}_{тех}$ , то она должна быть включена в балансовое уравнение потоков. Так, для объекта, показанного на рис.5.19, потерю потока эксергии в нем определим из выражения

$$\dot{D} = \dot{E}Q + \dot{E}x_1 - \dot{E}x_2 - \dot{L}_{тех}, \quad (5.31)$$

где  $\dot{E}Q = \left(1 - \frac{T_{oc}}{T}\right) \dot{Q}$  и  $\dot{E}x_1$  - входящие потоки эксергии теплоты

и эксергии потока;  $\dot{E}x_2$  и  $\dot{L}_{тех}$  - выходящие потоки.

## 6. Теплосиловые газовые циклы и реактивные двигатели

### Циклы двигателей внутреннего сгорания (ДВС)

Первый работоспособный двухтактный газовый двигатель внутреннего сгорания без предварительного сжатия был создан французским механиком Ленуаром в 1860 году. Цикл в этом двигателе совершался за один оборот коленчатого вала. Заполнение цилиндра горючей смесью происходило до половины хода поршня, затем смесь поджигалась электрической искрой и следующие полхода в процессе расширения совершалась полезная работа. При следующем ходе поршня осуществлялся выхлоп отработавших газов. Коэффициент полезного действия двигателя составлял всего 3...5%. В 1877 году, после 12 лет упорной работы, немецкий техник Н.Отто (1832-1881) создает горизонтальный четырехтактный одноцилиндровый двигатель мощностью 4 л.с. (Отто в работе помогал инж. Ланген).

Двигатели, работающие по принципу Отто, где подвод теплоты осуществляется при постоянном объеме, называются двигателями быстрого сгорания.

В 1872 году американский инженер Брайтон сконструировал двухтактный бензиновый двигатель постепенного сгорания. В этом двигателе в конце сжатия в цилиндр вводился воздух, насыщенный парами бензина, и процесс сгорания протекал при  $p=const$ .

В 1890 году Гаргреавес создает двигатель постепенного сгорания работающего на нефти, где впервые было осуществлено самовоспламенение рабочей смеси.

Капитэн создает двухтактный керосиновый двигатель со сгоранием при постоянном давлении, в котором в конце сжатия в цилиндр вводилась струя тонко распыленного керосина.

Рудольф Дизель (1858-1913) совместно с фирмой Крупп в 1897 году создали первый экономичный промышленный четырехтактный двигатель постепенного сгорания, в котором воспламенение дизельного топлива осуществлялось без запального устройства (свечи).

Двигателями внутреннего сгорания называются тепловые машины, в которых теплота к рабочему телу подводится в результате сгорания топлива непосредственно внутри двигателя. Рабочим телом ДВС на первом этапе в процессах всасывания и сжатия является воздух или смесь воздуха с легко воспламеняющимся топливом, на втором этапе в процессе рабочего хода - продукты сгорания жидкого или газообразного топлива. Давления рабочего тела в ДВС не слишком велики, а температуры намного превышают критические, так что рабочее тело можно рассматривать как идеальный газ.

К преимуществам ДВС, относятся:

- компактность, т.к. горячий источник находится внутри самого двигателя и, следовательно, отпадает необходимость в теплообменных поверхностях, через которые передается теплота к рабочему телу (РТ);

- возможность получения относительно высокого КПД, т.к. в цилиндрах двигателя может быть обеспечена высокая температура горячего источника. Основными элементами любого поршневого ДВС являются цилиндр с поршнем, соединенным с внешним потребителем работы. Цилиндр имеет два клапана - через один происходит всасывание РТ, через другой - выброс РТ после завершения цикла. Различают три основных вида циклов ДВС: цикл Отто (сгорание при  $V=const$ ), цикл Дизеля (сгорание при  $p=const$ ), цикл Тринклера (смешанное сгорание, сначала при  $V=const$ , затем при  $p=const$ ).

#### Цикл Отто

Основными элементами двигателя, работающего по циклу Отто, являются цилиндр с поршнем, впускной и выпускной клапаны, свеча (служит для воспламенения горючей смеси), расположенные в головке цилиндра, и карбюратор - устройство для приготовления топливно-воздушной смеси, которое не рассматривается в термодинамическом анализе.

Рассмотрим процессы, происходящие за один цикл на индикаторной диаграмме рис.6.1 (диаграмме, полученной при испытании двигателя):

$a-1$  - всасывание горючей смеси при давлении несколько меньшем атмосферного (из-за гидравлического сопротивления впускного клапана),  $1-2$  - сжатие горючей смеси, при этом топливно-воздушная смесь поджигается электрической искрой несколько раньше, чем поршень приходит в верхнюю мертвую точку (ВМТ),  $2-3$  - сгорание горючей смеси и подвод выделившейся теплоты к продуктам сгорания,  $3-4$  - расширение продуктов сгорания (рабочий ход),  $4-5$  - выхлоп отработавших продуктов сгорания при открытом выпускном клапане,  $5-b$  - выталкивание оставшихся продуктов сгорания поршнем при давлении несколько большем ат-

мосферного. За один цикл поршень совершает четыре хода (такта). Для удобства дальнейшего анализа сделаем ряд допущений:

1. Так как количество топлива в горючей смеси по массе невелико и свойства смеси и продуктов сгорания близки к свойствам воздуха, считаем рабочим телом воздух. Будем считать также, что работы процессов *a-1* и *5-b* равны по модулю, тогда линии процессов сольются, а цикл становится замкнутым.

2. Будем считать, что подвод и отвод теплоты в цикле производятся через стенки цилиндра.

3. Так как процессы сжатия 1-2 и расширения 3-4 происходят за весьма короткие промежутки времени (теплообмен с окружающей средой не успевает совершиться), считаем их адиабатическими. Процессы подвода теплоты 2-3 и отвода теплоты 4-5 будем считать изохорными (поршень не успевает переместиться за время подвода и отвода теплоты).

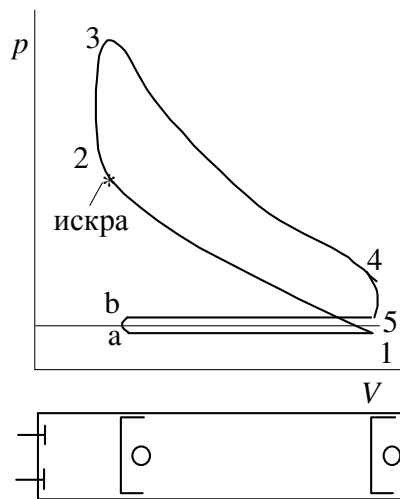
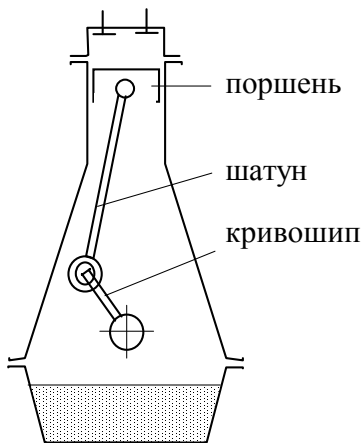
В результате сделанных допущений приходим к идеализированному циклу Отто, состоящему из двух обратных адиабат 1-2 и 3-4 и двух изохор 2-3 и 4-1 (см. рис.6.2).

Определим термический КПД идеального цикла Отто. Количество теплоты, подводимой в изохорном процессе 2-3  $q_1 = \bar{c}_v(T_3 - T_2)$ , отводимой в процессе 4-1  $q_2 = \bar{c}_v(T_4 - T_1)$ . В соответствии с определением термического КПД

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{\bar{c}_v(T_4 - T_1)}{\bar{c}_v(T_3 - T_2)},$$

где теплоемкости в числителе и знаменателе - средние в интервалах температур от  $T_4$  до  $T_1$  и от  $T_2$  до  $T_3$  соответственно. Считая рабочее тело идеальным газом, будем полагать  $c_v = \text{const}$ ,

тогда  $\eta_t = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$ . Преобразуем это выражение  $\eta_t = 1 - \frac{\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} \cdot \frac{T_1}{T_2}$  (\*)



Для изоэнтропийного процесса 1-2 можно записать  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1}$ . Назовем отношение удельных объемов до и после сжатия степенью сжатия

$\epsilon = \frac{v_1}{v_2}$ . С учетом введенного обозначения

$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{k-1}$ . Для

Рис. 6.1

адиабат 1-2 и 3-4 запишем уравнения Пуассона

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k, \tag{a}$$

$$p_4 v_4^k = p_3 v_3^k. \quad (b)$$

Так как  $v_1 = v_4$ , а  $v_2 = v_3$ , то после деления (a) на (b) найдем, что

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}, \text{ или } \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}, \text{ так как 2-3 и 4-1 - изохоры.}$$

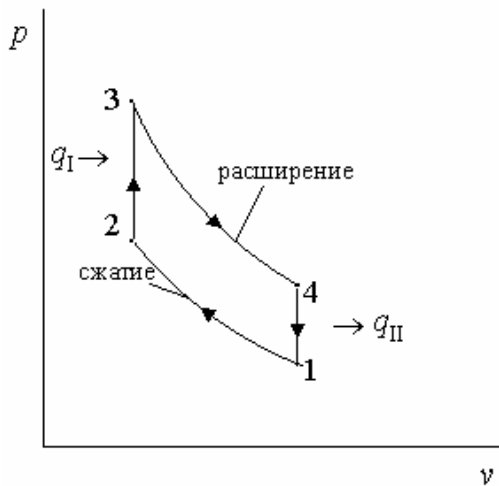


Рис. 6.2

Возвращаясь к выражению (\*) для КПД, получим

$$\eta_i = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}, \quad (6.1)$$

т.е. термический КПД идеализированного цикла Отто зависит от степени сжатия в процессе 1-2 и показателя изоэнтроды  $k$ . Чем выше степень сжатия и показатель изоэнтроды, тем выше КПД. Однако на практике степень сжатия в современных карбюраторных поршневых двигателях не превышает 7...10, так как при большей степени сжатия происходит самовоспламенение горючей смеси и детонация, которая может разрушить цилиндр и поршень. Детонация - это горение, скорость которого значительно превышает скорость нормального горения, сопровождаемое ударной волной, обладающей значительной разрушительной силой. С уменьшением массы топлива в воздухе  $k$  возрастает, следовательно, с

целью повышения тепловой эффективности цикла необходимо в качестве РТ использовать бедные топливно-воздушные смеси. Так, при  $k=1.25$  и  $\varepsilon=8$   $\eta_i=0,405$ . Если  $k=1,4$ , то  $\eta_i=0,574$ .

Как и для идеального (см. рис. 6.3), для реального цикла, в котором расширение и сжатие происходят с необратимыми потерями, существует оптимальная степень сжатия, при которой работа цикла при заданных  $T_1$  и  $T_3$  достигает максимального значения. Чтобы найти эту оптимальную степень сжатия, запишем работу действительного цикла в виде

$$l_{\text{цд}} = l_{\text{рд}} + l_{\text{сжд}},$$

где  $l_{\text{цд}}$ ,  $l_{\text{рд}}$ ,  $l_{\text{сжд}}$  - действительные работы цикла, расширения и сжатия соответственно. Выразим работу цикла через степень сжатия  $\varepsilon$  и КПД действительных процессов расширения и сжатия  $\eta_p$  и  $\eta_{\text{сж}}$ :

$$\begin{aligned} l_{\text{цд}} = l_{\text{рд}} + l_{\text{сжд}} &= \frac{R}{k-1} \left[ (T_3 - T_4) \eta_p - \frac{(T_2 - T_1)}{\eta_{\text{сж}}} \right] = \\ &= \frac{R}{k-1} T_3 \left[ \left( 1 - \frac{T_4}{T_3} \right) \eta_p - \frac{T_1}{T_3} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \frac{1}{\eta_{\text{сж}}} \right] = \\ &= \frac{R}{k-1} T_3 \left[ \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \right) \eta_p - \tau (\varepsilon^{k-1} - 1) \frac{1}{\eta_{\text{сж}}} \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $\tau = \frac{T_1}{T_3}$ .

Введем обозначение  $y = \varepsilon^{k-1}$ ,

$$l_{ц.д.} = \frac{R}{k-1} T_3 \left[ \left( 1 - \frac{1}{y} \right) \eta_p - \tau (y-1) \frac{1}{\eta_{сж}} \right]$$

и найдем экстремум функции  $l_{ц.д.}(y)$ , взяв производную  $\frac{\partial l_{ц.д.}}{\partial y}$  и приравняв ее нулю

$$\frac{\partial l_{ц.д.}}{\partial y} = \frac{RT_3}{k-1} \left( \frac{\eta_p}{y^2} - \frac{\tau}{\eta_{сж}} \right) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{\eta_p \eta_{сж}}{\tau} = \varepsilon^{2(k-1)}, \text{ откуда}$$

$$\varepsilon_{опт} = \left( \frac{\eta_p \eta_{сж} T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{2(k-1)}}. \quad (6.3)$$

Так, при  $\eta_p = \eta_{сж} = 1$ ,  $T_3 = 2273\text{K}$ ,  $T_1 = 293\text{K}$   $\varepsilon_{опт} = 12,95$ ; при  $\eta_p = \eta_{сж} = 0,9$   $\varepsilon_{опт} = 9,95$ .

В действительности процессы сжатия и расширения в ДВС являются политропическими. Исследования показывают, что показатель политропы сжатия  $n_{сж} \approx 1,35$ , а расширения  $n_p \approx 1,3$ .

При расчете ДВС используется такое понятие как среднее индикаторное давление  $p_i = \frac{L_{ц.д.}}{V_h}$ , где  $V_h = V_1 - V_2$  - рабочий объем цилиндра. Зная  $p_i$  можно определить действительную работу цикла.

Определим расход топлива или газа  $\dot{B}_T$  потребляемого двигателем. Количество теплоты, выделившееся при сгорании топлива, идет в изохорном процессе на увеличение внутренней энергии смеси

$$\dot{Q}_I = \dot{B}_T H_H^P \eta_{сг} = \dot{U}_{см3} - \dot{U}_{см2} = \dot{G}_Г c_{vГ} T_{Г3} - (\dot{G}_B c_{vB} T_{B2} + \dot{B}_T c_T T_T), \quad (6.4)$$

где  $H_H^P$  - низшая теплотворная способность топлива (для бензина  $H_H^P \approx 44$  МДж/кг);

$\eta_{сг}$  - КПД характеризующий полноту сгорания топлива, откуда

$$\dot{B}_T = \frac{\dot{G}_Г c_{vГ} T_{Г3} - \dot{G}_B c_{vB} T_{B2}}{H_H^P \eta_{сг} + c_T T_T} \quad (6.5)$$

Для полного сгорания бензина необходимо выдержать определенное соотношение между массой топлива и воздуха. Будем считать, что состав бензина характеризуется массовыми долями:  $g_C = 0,85$ ,  $g_{H_2} = 0,14$  и  $g_{O_2T} = 0,01$  (обычно в топливе содержится около одного процента кислорода), а массовая доля кислорода в воздухе  $g_{O_2B} = 0,23$ , тогда теоретически необходимое количество килограмм воздуха для сгорания одного килограмма топлива найдем по формуле

$$L_0 = \frac{1}{g_{O_2B}} \left( \frac{8}{3} g_C + 8 g_{H_2} - g_{O_2T} \right) = 14,68 \frac{\text{кг. ВОЗД.}}{\text{кг. ТОПЛ.}}. \quad (6.5a)$$

Действительно, из химических реакций  $H_2 + 0,5O_2 = H_2O$  и

62

$C + O_2 = CO_2$  видим, что для сгорания 1 кг водорода необходимо 8 кг кислорода, а для сгорания 1 кг углерода требуется  $\frac{32}{12} = \frac{8}{3}$  кг кислорода. Число киломолей воздуха, необходимое для полного сгорания одного килограмма топлива, определим из (6.5b)

$$L_{0M} = \frac{1}{r_{O_2B}} \left( \frac{g_C}{12} + \frac{g_{H_2}}{4} - \frac{g_{O_2T}}{32} \right) = 0.5025 \frac{\text{кмоль.возд.}}{\text{кг.топл.}}, \quad (6.5b)$$

где  $r_{O_2B} = 0,21$  – объемная доля кислорода в воздухе. Между  $L_0$  и  $L_{0M}$  существует связь  $L_0 = L_{0M} \cdot \mu_{\text{возд.}}$ . В действительности в цилиндр двигателя подается воздуха  $\dot{G}_B = \alpha L_0 \dot{B}_T$ , где  $\alpha = 0,8 \dots 1,1$  – коэффициент избытка воздуха.

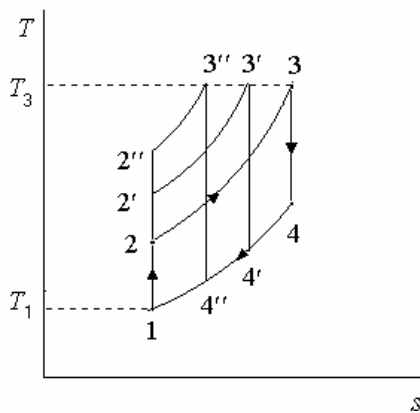


Рис.6.3

### Цикл Дизеля

Если сжимать не горючую смесь, а чистый воздух, а затем впрыскивать горючее, степень сжатия можно повысить, так как исчезает угроза детонации. В этом случае вместо карбюратора используются форсунки, впрыскивающие топливо в цилиндр после сжатия воздуха, когда там высокие давление и температура. Топливо теперь воспламеняется не с помощью свечи, а за счет высокой температуры воздуха в цилиндре. Подача топлива регулируется таким образом, чтобы процесс горения (подвод теплоты) происходил при постоянном давлении, а не при постоянном объеме как в цикле Отто. Идеализированный цикл Дизеля в  $p$ - $v$  диаграмме представлен на рис.6.4.

Вычислим термический КПД этого цикла. Введем понятие степени предварительного расширения  $\rho$  как отношение удельного объема РТ после подвода теплоты к удельному объему до подвода теплоты:

$$\rho = \frac{v_3}{v_2}.$$

Так как  $q_{II} = c_v(T_4 - T_1)$  в изохорном процессе 4-1, а  $q_I = c_p(T_3 - T_2)$  в изобарном процессе 2-3,

$$\text{то } \eta_t = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{c_v}{c_p} \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{k} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

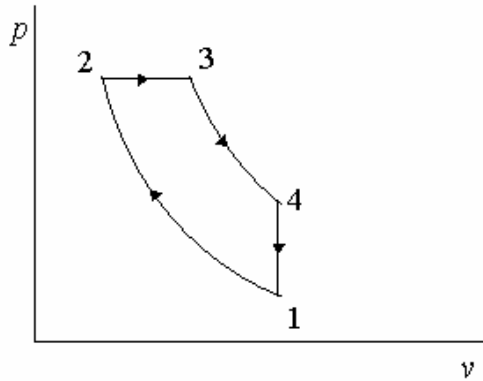


Рис. 6.4

Выразим отношения температур через безразмерные параметры цикла  $\rho$  и  $\varepsilon$ . В изобарном процессе

$$\frac{v_2}{T_2} = \frac{v_3}{T_3}; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{v_3}{v_2} = \rho.$$

Из уравнений адиабатных процессов 1-2 и 3-4

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k,$$

$$p_4 v_4^k = p_3 v_3^k$$

с учетом  $v_1 = v_4$  и  $p_2 = p_3$ , будем иметь  $\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^k$ .

Так как для изохорного процесса 4-1 справедливо

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{T_4}{T_1}, \quad \text{то получаем } \frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^k = \rho^k. \quad \text{Таким образом, выражение для термического КПД цикла Дизеля принимает вид}$$

разом, выражение для термического КПД цикла Дизеля принимает вид

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}. \quad (6.6)$$

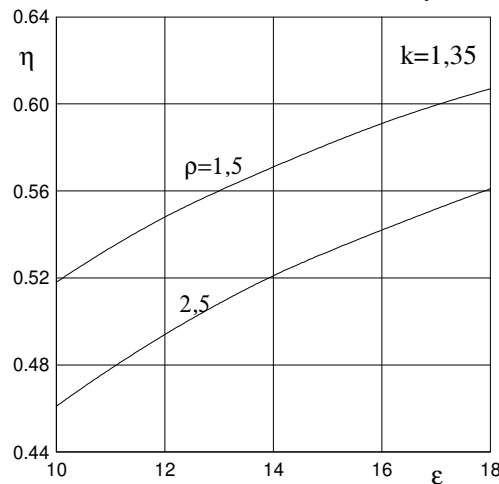


Рис. 6.4а

Термический КПД цикла Дизеля тем выше, чем выше  $\varepsilon$  и чем ниже  $\rho$ , что наглядно иллюстрируется рис.6.4а

Определим реальную и идеальную работу цикла Дизеля.

$$l_{\text{ид}} = l_{2-3} + l_{3-4} + l_{1-2}, \quad (a)$$

$$l_{2-3} = p_2(v_3 - v_2)\eta_p = p_2 v_2 (\rho - 1)\eta_p = \frac{p_1 \varepsilon^k v_1}{\varepsilon} (\rho - 1)\eta_p =$$

$$= RT_1 \varepsilon^{k-1} (\rho - 1)\eta_p, \quad (b)$$

$$l_{3-4} = u_3 - u_4 = c_v (T_3 - T_4)\eta_p = \frac{R}{k-1} T_3 \left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right)\eta_p,$$

$$\text{но } \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{k-1} = \left(\frac{v_3}{v_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{v_3 v_2}{v_2 v_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-1}, \text{ тогда}$$

$$l_{3-4} = \frac{R}{k-1} T_3 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-1}\right) \eta_p, \quad (c)$$

$$\begin{aligned} l_{1-2} &= -(u_2 - u_1) \frac{1}{\eta_{сж}} = -c_v (T_2 - T_1) \frac{1}{\eta_{сж}} = -\frac{RT_1}{k-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \frac{1}{\eta_{сж}} = \\ &= -\frac{RT_1}{k-1} (\varepsilon^{k-1} - 1) \frac{1}{\eta_{сж}}. \end{aligned} \quad (d)$$

Подставляя (b),(c), и (d) в (a), получим:

$$\begin{aligned} l_{цд} &= RT_1 \varepsilon^{k-1} (\rho - 1) \eta_p + \frac{R}{k-1} T_3 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-1}\right) \eta_p - \frac{RT_1}{k-1} (\varepsilon^{k-1} - 1) \frac{1}{\eta_{сж}} = \\ &= \frac{RT_3}{k-1} \left[ \tau(k-1) \varepsilon^{k-1} (\rho - 1) \eta_p + \left(1 - \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-1}\right) \eta_p - \tau(\varepsilon^{k-1} - 1) \frac{1}{\eta_{сж}} \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Определим оптимальную степень сжатия для цикла Дизеля, при которой при заданных  $\tau$ ,  $\rho$  и  $\varepsilon$  работа цикла имеет максимальное значение. Введем  $y = \varepsilon^{k-1}$ , тогда

$$l_{цд} = \frac{RT_3}{k-1} \left[ \tau(k-1)y(\rho-1)\eta_p + \left(1 - \frac{\rho^{k-1}}{y}\right)\eta_p - \tau(y-1)\frac{1}{\eta_{сж}} \right].$$

Приравняв производную от  $l_{цд}$  по  $y$  нулю:

$$\left(\frac{\partial l_{цд}}{\partial y}\right)_{\tau, \rho} = \tau(k-1)(\rho-1)\eta_p + \frac{\rho^{k-1}}{y^2}\eta_p - \frac{\tau}{\eta_{сж}} = 0,$$

получим

$$\varepsilon_{\text{опт}} = \left[ \frac{\rho^{k-1}}{\tau \left( \frac{1}{\eta_{сж}\eta_p} - (k-1)(\rho-1) \right)} \right]^{\frac{1}{2(k-1)}} \quad (6.8)$$

(формула (6.8) получена В. А. Барилловичем).

Полагая  $T_3=2500\text{K}$ ,  $T_1=293\text{K}$ ,  $\eta_{сж} = \eta_p = 1$  и  $\rho = 1,5$ , найдем  $\varepsilon_{\text{опт}} = 14,95$ .

При  $\rho = 1$  получим  $\varepsilon_{\text{опт}}$  для цикла Отто:  $\varepsilon_{\text{опт}} = \left( \frac{\eta_{сж}\eta_p}{\tau} \right)^{\frac{1}{2(k-1)}}$ .

Сравнение КПД циклов Отто и Дизеля выполним графически с помощью  $T$ - $s$  диаграммы (рис.6.5). При одинаковых степенях сжатия КПД цикла Отто выше, т.к. средняя температура отвода теплоты в нем ниже при одинаковых средних температурах подвода теплоты (рис.6.5а). Однако цикл Дизеля как раз предполагает большую степень сжатия, поэтому правильнее сравнивать эффективность циклов при одинаковых максимальных давлении и температуре и разных степенях сжатия (рис.6.5б).



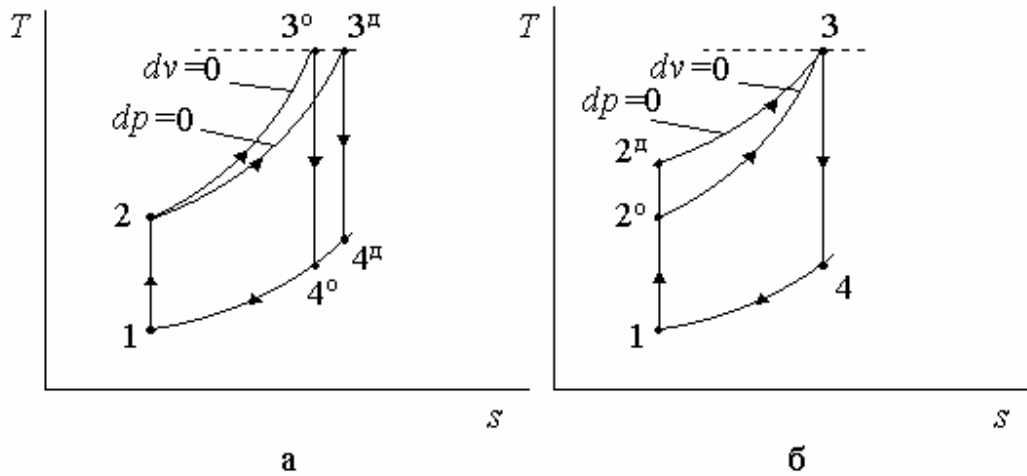


Рис. 6.5

При таких условиях выше становится КПД цикла Дизеля из-за более высокой средней температуры подвода теплоты.

Цикл Тринклера

Данный цикл можно рассматривать как комбинацию двух ранее рассмотренных, в нем осуществляется смешанное сгорание: часть топлива горит при постоянном объеме, часть - при постоянном давлении. Достигается это добавлением еще одного элемента конструкции – форкамеры (см.рис.6.6), соединенной одним или несколькими узкими каналами с цилиндром, в которой топливо сгорает при  $V=const$ . При этом резко возрастает давление, и продукты сгорания вместе с несгоревшей частью топлива выталкиваются в цилиндр, где топливо догорает уже при постоянном давлении. Термический КПД цикла выразим через  $q_I$  и  $q_{II}$ :

$$\eta_t = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_v(T_5 - T_2) + c_p(T_3 - T_5)} = 1 - \frac{\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{\left(\frac{T_5}{T_2} - 1\right) + k\left(\frac{T_3}{T_2} - \frac{T_5}{T_2}\right)} \cdot \frac{T_1}{T_2};$$

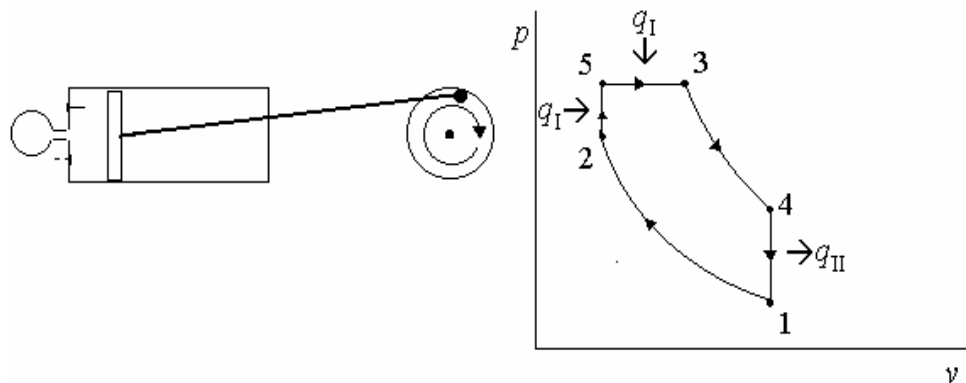


Рис. 6.6

Как и ранее,  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$ , где  $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$  - степень сжатия. Вводя новый безразмерный параметр

$\lambda = \frac{p_5}{p_2}$  - степень повышения давления в изохорном процессе подвода теплоты и используя

уравнение изохорного процесса 2-5, получим  $\frac{T_5}{T_2} = \frac{p_5}{p_2} = \lambda$ . Из уравнения изохорного процес-

са 4-1  $\frac{T_4}{T_1} = \frac{p_4}{p_1}$ , а отношение давлений определим из уравнений адиабатных процессов 3-4 и

1-2  $p_4 v_4^k = p_3 v_3^k$  и  $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$ , разделив первое уравнение на второе с учетом равенств  $v_1 = v_4$ ,  $p_5 = p_3$  и  $v_2 = v_5$ :

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_5}{p_2} \left( \frac{v_3}{v_5} \right)^k = \lambda \rho^k,$$

здесь  $\rho = \frac{v_3}{v_5}$  - степень предварительного расширения в изобарном процессе подвода теплоты.

Таким образом,  $\frac{T_4}{T_1} = \lambda \rho^k$ . Продолжим преобразования:

$$k \left( \frac{T_3}{T_2} - \frac{T_5}{T_2} \right) = k \frac{T_5}{T_2} \left( \frac{T_3}{T_5} - 1 \right) = k \lambda (\rho - 1).$$

Окончательно для цикла со смешанным подводом теплоты получаем

$$\eta_t = 1 - \frac{\lambda \rho^k - 1}{(\lambda - 1) + k \lambda (\rho - 1)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}. \quad (6.9)$$

При  $\rho=1$  ( $v_3 = v_5$ , отсутствие изобарного процесса) формула переходит в выражение для КПД цикла Отто, а при  $\lambda=1$  ( $p_5 = p_2$ , отсутствие изохорного процесса) - для КПД цикла Дизеля.

По эффективности цикл Тринклера занимает промежуточное положение между циклами Отто и Дизеля, что иллюстрируется рисунком 6.7.

В рассмотренных циклах круговой процесс осуществляется за четыре такта (4 хода поршня), которым соответствует два оборота коленчатого вала. Однако существуют и двухтактные двигатели, где цикл происходит за один оборот коленчатого вала. Такие двигатели, как правило, имеют небольшую мощность и находят, как и четырехтактные, широкое применение в автомобильной и мотоциклетной промышленности.

### Цикл Стирлинга

В 1816 году шотландский священник Роберт Стирлинг запатентовал двигатель внешнего сгорания, в котором теплота подводится и отводится через стенки цилиндра. В 1843 году двигатель Стирлинга уже использовался на одном из заводов Шотландии. Появление двигателей, работающих по циклу Отто (1877 г.) и Дизеля (1897 г.), оказавшихся более эффективными и надежными, привело к забвению на длительное время этого оригинального устройства. Однако в 1938 году фирма «Филипс», используя патент Стирлинга, создает двигатель мощностью более 200 л.с, с к.п.д. 30%. С этого момента снова возрастает интерес к этому циклу. В настоящее время цикл Стирлинга используется как в тепловых, так и в холодильных машинах. Эффективность современного цикла Стирлинга в 1,6...1,8 раза выше, чем цикла

Дизеля. На рис.6.7а в  $T-s$  и  $p-v$  диаграммах показаны процессы, протекающие в идеальном цикле Стирлинга в сравнении с циклом Карно.

Для цикла Стирлинга и Карно подведенная извне теплота в процессе расширения 3-4

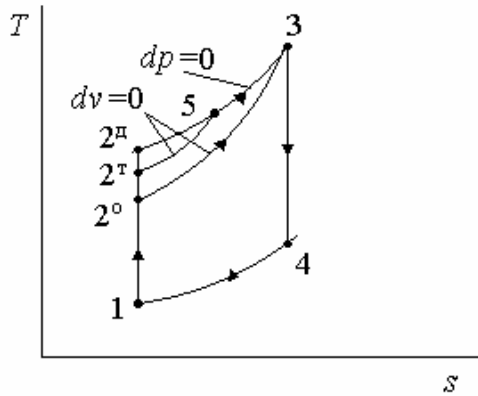


Рис. 6.7

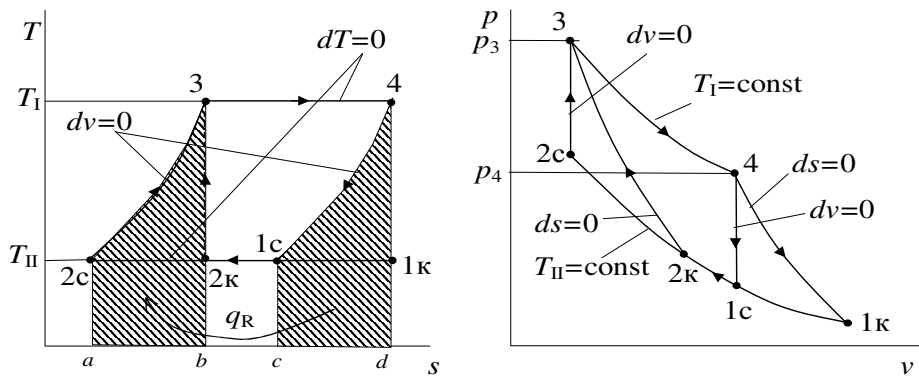


Рис. 6.7а

(см.рис.6.7а) одинакова (пл. 4-d-b-3-4)

$$q_I = l_{3-4} = RT_I \ln \frac{v_4}{v_3} = RT_I \ln \frac{p_3}{p_4}.$$

В цикле Стирлинга процесс расширения 4-1с осуществляется по изохоре  $dv=0$  с отдачей теплоты в регенераторе  $q_R = c_v(T_I - T_{II})$ , которая идет на повышение внутренней энергии газа в процессе сжатия 2с-3, а у Карно – по изоэнтропе 4-1к. Подвод теплоты регенерации к газу в результате охлаждения пористого наполнителя регенератора при  $dv=0$  обеспечивается тем, что уменьшение объема горячего цилиндра равно увеличению объема холодного, и наоборот. Так как линии изохорных процессов 4-1с и 2с-3 эквидистантны, то количество теплоты отданное окружающей среде в цикле Стирлинга (пл. а-2с-1с-с-а) равно теплоте отданной в цикле Карно (пл. в-2к-1к-д-в).  $q_{II} = RT_{II} \ln \frac{v_{2c}}{v_{1c}} = RT_{II} \ln \frac{v_{2k}}{v_{1k}}$ . В процессе 1с-2с теплота  $q_{II}$  через ребренную стенку передается окружающей среде. Отметим, что процессы 3-4 и 4-1с происходят одновременно, также как и процессы 1с-2с и 2с-3. Определим работу цикла Стирлинга как разность между подведенной и отведенной теплотой

$$l_{\text{и}}^{\text{ид}} = R \left( T_1 \ln \frac{v_4}{v_3} - T_{\text{II}} \ln \frac{v_{1c}}{v_{2c}} \right) = R \left( T_1 \ln \frac{p_3}{p_4} - T_{\text{II}} \ln \frac{p_{2c}}{p_{1c}} \right) = R(T_1 - T_{\text{II}}) \ln \frac{p_3}{p_4} = R(T_1 - T_{\text{II}}) \ln \frac{v_4}{v_3},$$

так как при  $dv=0$   $\frac{p}{T} = \text{const}$ , то  $p_{2c} = p_3 \frac{T_{\text{II}}}{T_1}$ , а  $p_{1c} = p_4 \frac{T_{\text{II}}}{T_1}$ .

Термический КПД цикла найдем из формулы

$$\eta_t = \frac{l_{\text{и}}^{\text{ид}}}{q_1} = \frac{R(T_1 - T_{\text{II}}) \ln \frac{v_4}{v_3}}{RT_1 \ln \frac{v_4}{v_3}} = 1 - \frac{T_{\text{II}}}{T_1}.$$

Как видим, термический КПД идеального цикла Стирлинга равен термическому КПД идеального цикла Карно.

При создании двигателей Стирлинга возникают проблемы надежности уплотнения внутреннего пространства, преодоления тепловой инерционности процессов передачи теплоты, снижающей приемистость двигателя, и обеспечения действительной изотермичности процессов 1с–2с и 3–4. На рис.6.7в представлен один из многих вариантов конструктивного решения двигателя Стирлинга. Двигатель состоит из следующих основных элементов: 1, 2 – поршни, 3 – регенератор, 4 – горячий цилиндр, 5 – холодный цилиндр.

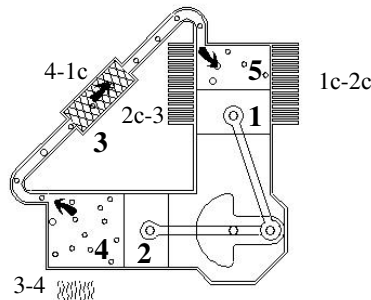


Рис.6.7б

### Газотурбинные установки

Газотурбинная установка (ГТУ), в отличие от ДВС, позволяет в одном агрегате получить значительно бóльшую полезную мощность за счет бóльшего расхода рабочего тела. Однако создание ГТУ стало возможным лишь тогда, когда научная интеллигенция научилась создавать компрессоры и турбины высокой эффективности. Рассмотрим пример. Пусть полезная мощность турбины  $N_{\text{т}}=4000$  кВт, для привода компрессора требуется мощность  $N_{\text{к}}=3000$  кВт, тогда полезная мощность установки  $N_{\text{пол}} = N_{\text{т}} - N_{\text{к}} = 1000$  кВт. Предположим, что турбомашинны имеют внутренний относительный КПД (о нем будет сказано позже)  $\eta_{oi}^{\text{т}} = \eta_{oi}^{\text{к}} = \eta_{oi} = 0,8$ . Тогда мощность, теряемая внутри ГТУ, составит

$$N_{\text{пот}} = (1 - \eta_{oi}^{\text{т}})N_{\text{т}} + (1 - \eta_{oi}^{\text{к}})N_{\text{к}} = 1400 \text{ кВт},$$

то есть соизмерима с полезной мощностью. Этот пример также показывает, насколько оправдана борьба создателей ГТУ за повышение  $\eta_{oi}$  даже на сотые доли.

Первые попытки создания ГТУ относятся к концу XIX в. В 1892 году инженер П.Д. Кузьминский спроектировал и построил газотурбинную установку малой мощности для кате-

ра, но встретился с серьезными трудностями по регулированию температуры парогазовой смеси перед турбиной.

В 1900-1904 гг. в Германии начинаются испытания воздушной турбины, разработанной инженером Штольце в 1872 г., но из-за низкого КПД турбомашин были признаны неудачными.

Во Франции в 1906 г. изготавливается и испытывается ГТУ непрерывного горения ( $p=\text{const}$ ), спроектированная инженерами Арманго и Лемаль, КПД установки составил около 3%.

Турбина прерывистого горения (подвод теплоты в камере сгорания осуществлялся при  $V=\text{const}$ ) немецкого инженера Хольцварта была испытана в 1908 г. В дальнейшем было построено несколько таких машин. Максимальный достигнутый КПД составил около 17%.

В настоящее время развитие получили турбины непрерывного горения, у которых процесс в камере горения протекает при  $p=\text{const}$ , турбины прерывистого горения не нашли применения из-за сложной конструкции камеры сгорания (КС) и низкого КПД турбин, работающих в пульсирующем потоке. В то же время следует отметить, что термический КПД ГТУ прерывистого горения выше термического КПД ГТУ с непрерывным горением.

Появление в конце Великой Отечественной войны скоростных самолетов с турбореактивными двигателями (ТРД) дало толчок развитию газотурбиностроения в нашей стране и за рубежом. В настоящее время ГТУ непрерывного горения находят широкое применение в различных областях техники.

#### Идеальная газотурбинная установка (цикл Брайтона)

Простейшая газотурбинная установка (ГТУ) состоит из компрессора, турбины и камеры сгорания (см. рис.6.8а). Процессы, протекающие в идеальной ГТУ, показаны в  $p-v$  и  $T-s$  на рис.6.8б и 6.8в. Идеальный цикл ГТУ состоит из двух обратимых адиабат 1-2 и 3-4 и двух изобар 2-3 и 4-1. Рассмотрим их более подробно для ГТУ, где в качестве рабочего тела используется идеальный газ. Процесс 1-2,  $ds=0$  - повышение давления газа в идеальном ком-

прессоре. В изэнтропийном процессе  $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ . Введем понятие степени повышения

давления в компрессоре  $\pi = \frac{p_2}{p_1}$ ,

тогда  $T_2 = T_1 \pi^{\frac{k-1}{k}}$ . Зная  $T_2$  и  $p_2$ , найдем  $v_2 = \frac{RT_2}{p_2}$ . Определим работу идеального

компрессора

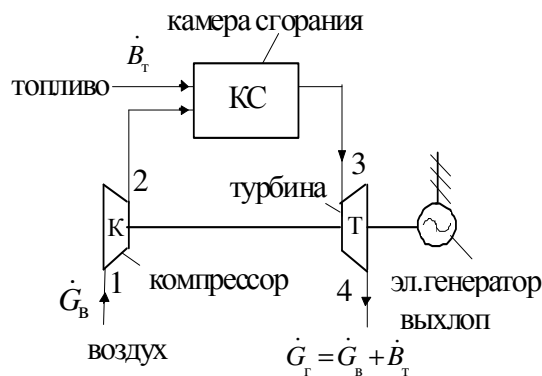


Рис.6.8а

$$l_k = -(i_2 - i_1) = -c_p(T_2 - T_1) = -\frac{k}{k-1} \frac{R_0}{\mu} T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = -\frac{k}{k-1} \frac{R_0}{\mu} T_1 \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right). \quad (a)$$

Процесс 2-3,  $dp=0$  - процесс горения топлива, как правило керосина, распыленного форсунками, с выделением теплоты при постоянном давлении в идеальной камере сгорания (отсутствуют гидравлические потери).

Выделившаяся теплота идет на увеличение энтальпии потока

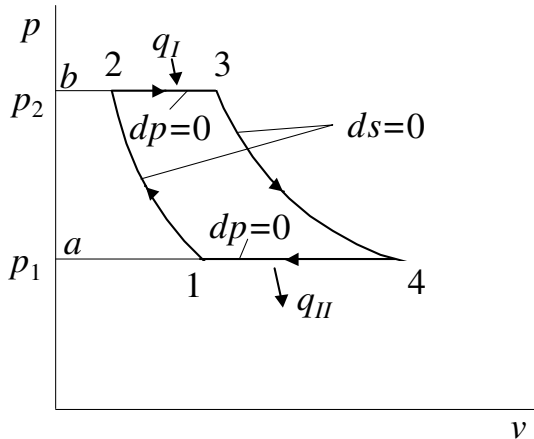


Рис.6.8б

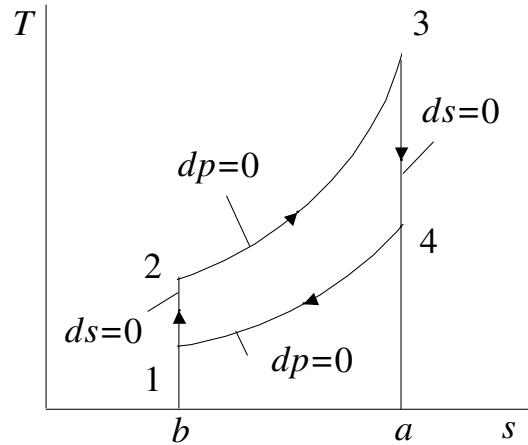


Рис.6.8в

$$\dot{Q}_I = \dot{B}_T H_H^p \eta_{\text{кс}} = \dot{G}_r c_{pr} T_3 - (\dot{G}_B c_{pB} T_{B2} + \dot{B}_T c_T T_T) \quad (\text{б}),$$

$$\text{откуда } T_3 = \frac{\dot{B}_T (H_H^p \eta_{\text{кс}} + c_T T_T) + \dot{G}_B c_{pB} T_{B2}}{\dot{G}_r c_{pr}}. \quad (\text{в})$$

Так как в реальных ГТУ  $\dot{B}_T \approx 0,03\dot{G}_B$ , то будем считать, что  $\dot{G}_r = \dot{G}_B$ ,  $c_{pr} = c_{pB} = c_p$ ;  $\eta_{\text{кс}} = 1$ . Разделив (б) на  $\dot{G}_B$  с учетом сделанных допущений, получим

$$q_I = c_p (T_3 - T_2), \quad (\text{г})$$

где  $q_I = \frac{\dot{B}_T H_H^p}{\dot{G}_B}$ . Для изобарного процесса также можно написать  $v_3 = v_2 \frac{T_3}{T_2}$ . Процесс 3-4 -

расширение газов в идеальной турбине. Здесь

$$\frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \text{ но } p_3 = p_2, \text{ а } p_4 = p_1, \text{ тогда } T_4 = \frac{T_3}{\pi^{\frac{k-1}{k}}}, v_4 = \frac{RT_4}{p_1}.$$

Из первого закона термодинамики  $dq = di + dl_{\text{тех}}$  при  $dq = 0$  после интегрирования найдем работу идеальной турбины

$$l_T = -(i_4 - i_3) = c_p (T_3 - T_4) = \frac{k}{(k-1)} \frac{R_0}{\mu} T_3 \left( 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \right) = \frac{k}{(k-1)} \frac{R_0}{\mu} T_3 \left( 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \right). \quad (6.10)$$

Процесс 4-1,  $dp=0$  - отвод теплоты из цикла. Удельное количество теплоты, отдаваемое окружающей среде

$$q_{II} = i_4 - i_1 = c_p (T_4 - T_1) = \frac{k}{k-1} \frac{R_0}{\mu} (T_4 - T_1). \quad (6.11)$$

Этим процессом цикл условно замыкается.

Получим выражение термического КПД идеального цикла ГТУ. По определению

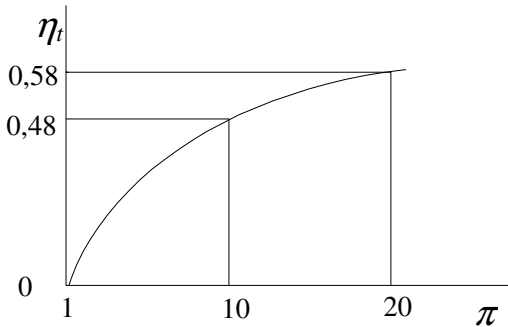
$$\eta_t = \frac{l_{\text{ид}}}{q_I} = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{c_p(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \frac{\left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{\left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)},$$

но для изоэнтروпийных процессов 1-2 и 3-4

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \pi^{\frac{k-1}{k}}, \text{ тогда } \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1},$$

следовательно,

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}}. \quad (6.12)$$



Наличие внутренней необратимости приводит к снижению эффективности ГТУ. Так, у реального компрессора температура воздуха в конце сжатия выше, чем у идеального при одинаковых  $\pi$ . При этом

растет техническая работа сжатия, а следовательно, и мощность, потребляемая компрессором. Для оценки эффективности компрессора вводят понятие внутреннего относительного КПД как отношение идеальной работы компрессора к действительной

$$\eta_{0\text{ик}} = \frac{l_{\text{кид}}}{l_{\text{кд}}} = \frac{i_2 - i_1}{i_{2\text{д}} - i_1} = \frac{\bar{c}_{p1-2}(T_2 - T_1)}{\bar{c}_{p1-2\text{д}}(T_{2\text{д}} - T_1)},$$

Не делая различия в теплоемкостях, получим

$$\eta_{0\text{ик}} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2\text{д}} - T_1}, \quad (6.13)$$

где  $T_{2\text{д}}$  - действительная температура воздуха за компрессором.

В камере сгорания процесс подвода теплоты из-за гидравлических потерь происходит с уменьшением давления, т.е. при  $dp < 0$ , что приводит к уменьшению степени расширения газа в турбине  $\pi_T = \frac{p_3}{p_4}$ , так как  $\pi_T = \sigma_{\text{кс}} \pi_K$ , где  $\sigma_{\text{кс}} = p_3^*/p_2^* < 1$ ,  $\sigma_{\text{кс}}$  - коэффициент восстановления давления, характеризующий отношение полных механических энергий потока

$p^* = p \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$  в соответствующих сечениях,  $M = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{kRT}}$  - число Маха,  $c$  - скорость потока,  $a$  - местная термодинамическая скорость звука.

В турбине из-за действия сил трения действительная температура газа  $T_{4\text{д}}$  выше, чем температура  $T_4$  в конце изоэнтропийного расширения. По определению, внутренний относительный КПД турбины равен отношению действительной работы турбины к идеальной

$$\eta_{0\text{ик}} = \frac{l_{\text{тд}}}{l_{\text{тид}}} = \frac{i_3 - i_{4\text{д}}}{i_3 - i_4} \approx \frac{T_3 - T_{4\text{д}}}{T_3 - T_4}. \quad (6.14)$$

На рис.6.9 в  $T$ - $s$  диаграмме показан цикл реальной ГТУ.

Определим работу цикла с учетом потерь в турбомашине и оптимальную степень повышения давления в компрессоре, при которой работа цикла максимальна.

$$\begin{aligned}
 l_{цд} = l_{\tau} + l_{\kappa} &= \frac{k}{(k-1)} \frac{R_0}{\mu} T_3 \left( 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \right) \eta_{0it} - \frac{k}{(k-1)} \frac{R_0}{\mu} T_1 \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \frac{1}{\eta_{0ik}} = \\
 &= \frac{k}{(k-1)} \frac{R_0}{\mu} T_3 \left[ \left( 1 - \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \right) \eta_{0it} - \tau \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \frac{1}{\eta_{0ik}} \right]. \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Введем обозначение  $y = \pi^{\frac{k-1}{k}}$ , возьмем производную от (6.15) по  $y$  и приравняем ее нулю

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial l_{ц}}{\partial y} \right)_{\tau} &= \frac{\eta_{0it}}{y^2} - \frac{\tau}{\eta_{0ik}} = 0, \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{\eta_{0it} \eta_{0ik}}{\tau}, \quad \text{или} \\
 \pi_{\text{опт}} &= \left( \frac{\eta_{0it} \eta_{0ik} T_3}{T_1} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}}. \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что степень повышения давления в компрессоре должна быть тем выше, чем больше внутренние относительные КПД турбомашин и отношение  $T_3/T_1$ .

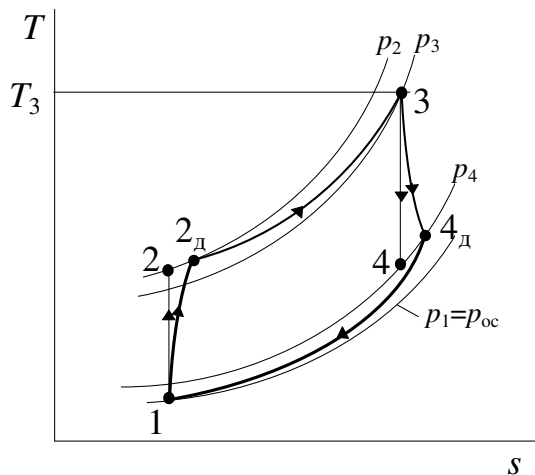


Рис. 6.9

Повышение тепловой эффективности ГТУ возможно за счет: увеличения начальной температуры газа перед турбиной (в этом случае возникает проблема надежности). Возврата части теплоты в циклы и применения схем, в которых имеет место промежуточное охлаждение воздуха между компрессорами в процессе сжатия и промежуточный подвод теплоты между турбинами в процессе расширения газа, что позволяет в определенной мере приблизить конфигурацию цикла к циклу Карно.

#### ГТУ с регенерацией теплоты

Возврат части теплоты в цикл повышает эффективность ГТУ и смещает оптимальную степень повышения давления в компрессоре в сторону более низких значений, что позволяет уменьшить число ступеней компрессора. Рассмотрим ГТУ с регенеративным теплообменным аппаратом (ТА). В таком аппарате передача теплоты от горячих газов к нагреваемому воздуху осуществляется через стенки - теплопередающие поверхности. На рис.6.10 показаны принципиальная схема ГТУ с регенерацией теплоты и цикл такой установки, состоящий из следующих процессов: 1-2д - адиабатическое сжатие воздуха в компрессоре;

2д-5 - подвод теплоты к воздуху в ТА при  $dp=0$ ;

5-3 - подвод теплоты в КС  $\dot{Q}_l = \dot{G}_r c_p (T_3 - T_5)$ ;

3-4д - адиабатическое расширение газа в турбине;



4д-6 - охлаждение газов в ТА при  $dp=0$ ;

6-1 - передача теплоты окружающей среде  $\dot{Q}_{II} = \dot{G}_r c_p (T_6 - T_1)$ .

Тепловой баланс для ТА имеет вид:  $(i_5 - i_{2д})\dot{G}_в = (i_{4д} - i_6)\dot{G}_r$ , из которого определяется температура газа за турбиной  $T_6$ .

Разности энтальпий  $(i_5 - i_{2д})$  соответствует площадь 2д-5-b-a-2д, а  $(i_{4д} - i_6)$  изображается площадью 4д-d-c-6-4д. Отношение теплоты, которую получает воздух (процесс 2д-5) к теплоте, которую он мог бы получить в бесконечно большом ТА в процессе 4д-6 при  $T_6=T_{2д}$ ,

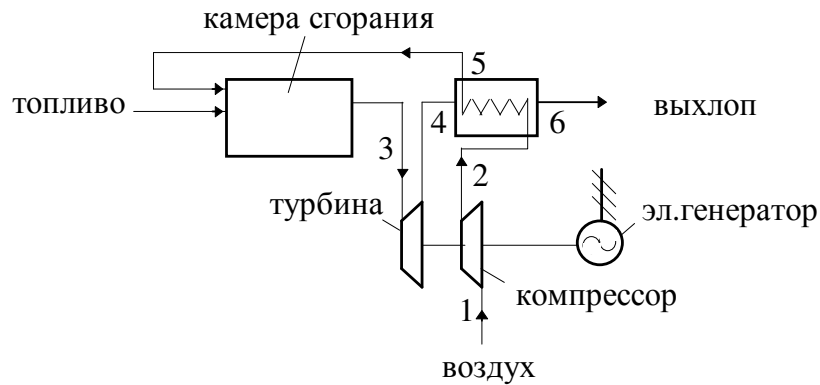


Рис.6.10а

называется степенью регенерации теплоты

$$\mu = \frac{i_5 - i_{2д}}{i_{4д} - i_{2д}} = \frac{\bar{c}_{p2д-5}(T_5 - T_{2д})}{\bar{c}_{p4д-2д}(T_{4д} - T_{2д})} \approx \frac{T_5 - T_{2д}}{T_{4д} - T_{2д}}. \quad (a)$$

Выразим внутренний абсолютный КПД цикла через основные параметры и степень

$$\eta_{\text{вн}} = \eta_t \eta_{0\text{вн}} = \frac{l_{\text{ц.ид}}}{q_I} \frac{l_{\text{ц.д}}}{l_{\text{ц.ид}}} = \frac{\frac{k}{k-1} RT_3 \left[ \left(1 - \frac{1}{\pi^m}\right) \eta_{0\text{ит}} - \tau (\pi^m - 1) \frac{1}{\eta_{0\text{ик}}} \right]}{\frac{k}{k-1} R(T_3 - T_5)}$$

регенерации

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{\pi^m}\right) \eta_{0\text{ит}} - \tau (\pi^m - 1) \frac{1}{\eta_{0\text{ик}}}}{1 - \frac{T_5}{T_3}},$$

(b)

где  $m=(k-1)/k$ ;  $\tau=T_1/T_3$ .

Из (a) определим  $T_5 = T_{2д} + \mu(T_{4д} - T_{2д})$ . (c)

Используя выражения для внутренних КПД компрессора и турбины,

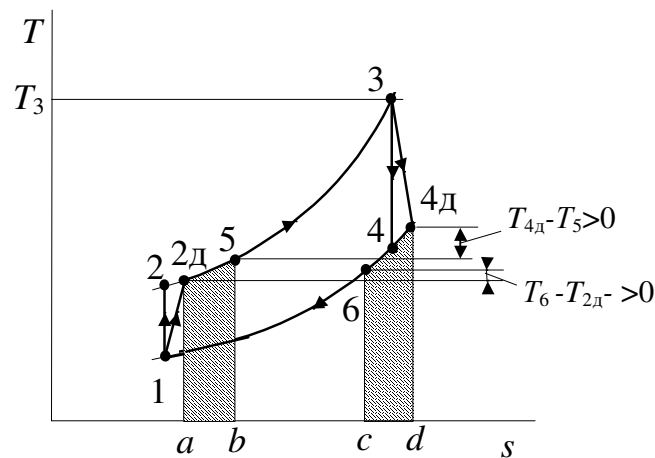


Рис. 6.10б

найдем

$$T_{2д} = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{1}{\eta_{0ик}}, \quad (d)$$

$$T_{4д} = T_3 - (T_3 - T_4) \eta_{0ит}. \quad (e)$$

Подставим (d) и (e) в (c), и разделим (c) на  $T_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{T_5}{T_3} &= \frac{T_1}{T_3} + \left( \frac{T_2}{T_3} \frac{T_1}{T_1} - \frac{T_1}{T_3} \right) \frac{1}{\eta_{0ик}} + \mu \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_4}{T_3} \right) \eta_{0ит} - \frac{T_1}{T_3} - \left( \frac{T_2}{T_3} \frac{T_1}{T_1} - \frac{T_1}{T_3} \right) \frac{1}{\eta_{0ик}} \right] = \\ &= \tau + (\tau \pi^m - \tau) \frac{1}{\eta_{0ик}} + \mu \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\pi^m} \right) \eta_{0ит} - \tau - (\tau \pi^m - \tau) \frac{1}{\eta_{0ик}} \right]. \quad (g) \end{aligned}$$

Подставляя (g) в (b), получим окончательное выражение для  $\eta_{iц}$ . Рис.6.11 иллюстрирует зависимость  $\eta_{iц} = f(\pi)$  при разных  $\mu$ , построенную на основании формулы (b) при заданном  $\tau$ .

Из рисунка видно, что с увеличением  $\mu$  возрастает тепловая эффективность ГТУ (кривые правее точки А лишены физического смысла, так как в точке А  $T_{4д} = T_{2д}$ ), но при этом растет поверхность ТА. Так, увеличение степени регенерации от 0,5 до 0,75 приводит к росту площади теплообменной поверхности приблизительно в 3 раза.

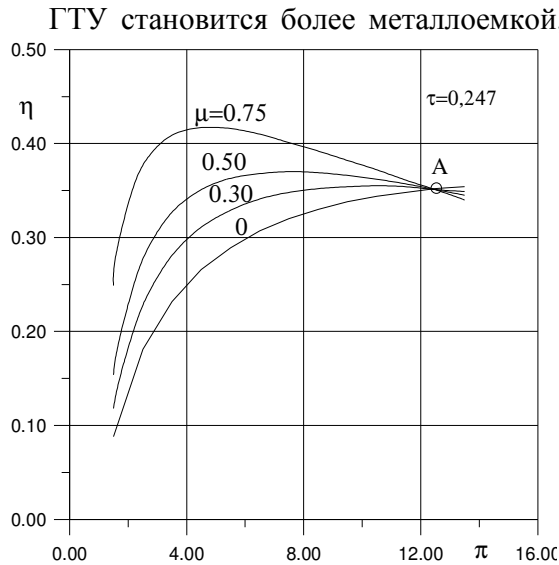


Рис. 6.11

$$\pi_{\text{опт}} = 4,738.$$

Максимальная работа цикла не зависит от степени регенерации и  $\pi_{\text{опт}}$  определяется по формуле (6.16). При  $\mu=0,5$  максимальные работа цикла и тепловая эффективность достигаются при одинаковом  $\pi_{\text{опт}}$ , определяемым по (6.16). Программа расчета ГТУ с регенерацией теплоты на ЭВМ приведена в приложении I.

#### Процессы в турбореактивном двигателе

Для создания самолетов, развивающих скорость полета свыше 800 км/час (рекорд скорости для винтомоторных самолетов - 756 км/час - был установлен на самолете фирмы "Мессершмидт" в 1939 г.), потребовался новый тип двигателя - турбореактивный (ТРД), в котором теплота сгорания топлива превращается в направленную кинетическую энергию струи газа, создающей реактивную тягу.

В 1930 г. англичанин Ф.Уиттл запатентовал конструкцию турбореактивного двигателя. В 1939 г. совершил первый успешный полет самолет Хейнкель HE-178 с турбореактивным двигателем, у которого тяга в статических условиях составляла 410 кг.

В 1941 г. англичане, а затем в 1942 г. американцы испытывают реактивные самолеты на базе двигателей Уиттла.

Первые самолеты с ТРД в Военно-воздушных силах СССР появились в конце 40-х годов. На самолетах конструкторов Яковлева и Лавочкина устанавливаются ТРД с осевым компрессором, а на самолетах Микояна - с центробежными компрессорами. У первых ТРД моторесурс составлял около 5-10 часов.

На самолетах МиГ-15 (конструкторы А.И. Микоян и М.И. Гуревич) устанавливается двигатель конструкции В.Я.Климова - ВК-1 с центробежными компрессором. В режиме взлета тяга двигателя составляла 2700 кг при расходе воздуха 50 кг/с. Однако после того как научились регулировать ступени осевого компрессора за счет поворота направляющих аппаратов, на все самолеты устанавливаются, как правило, ТРД с осевыми компрессорами, позволяющими пропустить больший расход воздуха и имеющими более высокий КПД, чем цен-

Вводя обозначение  $y = \pi^{\frac{k-1}{k}}$  и взяв производную от (b) по  $y$  с учетом (g) и приравняв ее нулю, получим квадратное уравнение позволяющее определить  $\pi_{\text{опт}}$ , при котором тепловая эффективность установки достигает максимума

$$(1 - \tau - (1 - \tau)\mu - (1 - 2\mu)\eta_i^{oi}) \frac{\tau}{\eta_k^{oi}} y^2 + \frac{2\tau\eta_i^{oi}}{\eta_k^{oi}} (1 - 2\mu)y - (1 - \tau - (1 - \tau)\mu)\eta_i^{oi} - \tau(1 - 2\mu) \frac{\eta_i^{oi}}{\eta_k^{oi}} = 0.$$

Так, при  $\tau = 0,247$ ,  $\eta_i^{oi} = 0,89$ ,  $\eta_k^{oi} = 0,88$  и  $\mu = 0,3$   $\pi_{\text{опт}} = 10,198$ . Значению  $\mu = 0,5$  отвечает  $\pi_{\text{опт}} = 7,535$ . Для случая  $\mu = 0,75$ ,

требужные. На первом пассажирском реактивном самолете ТУ-104, созданном в 1955г. под руководством А.Н.Туполева, расход воздуха через двигатель АМ-3 конструкции А.А. Микулина с осевым компрессором составлял 150 кг/с, а реактивная тяга на взлете равнялась 10 тоннам. Расход воздуха через двухконтурные ТРД может составлять более 500 кг/с. Второй контур представляет собой кольцевой канал, охватывающий основной контур, с компрессором низкого давления (вентилятором), в котором повышается давление воздуха с последующим расширением его в сопле второго контура. Двухконтурные ТРД применяются в самолетах, летающих как правило с до звуковыми скоростями. В ТРД самолетов-истребителей после газовой турбины устанавливают форсажную камеру (дополнительную камеру сгорания), предназначенную для кратковременного увеличения тяги двигателя.

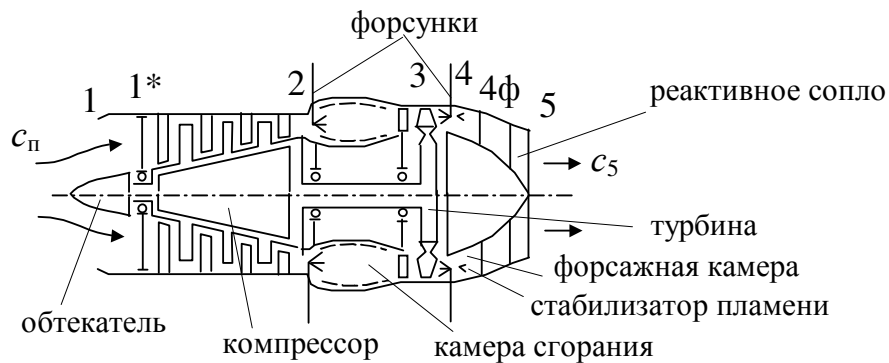


Рис. 6.12

Рассмотрим процессы, протекающие в одноконтурном идеальном ТРД в полете. Так как самолет летит, то перед компрессором в сечении 1\* полная энергия потока воздуха без учета потенциальной энергии составляет

$$i_1^* = i_1 + \frac{c_{п}^2}{2}, \quad (a)$$

где  $c_{п}$  - скорость полета. Разделив (a) на  $c_p T_1$ , получим

$$\frac{T_1^*}{T_1} = 1 + \frac{c_{п}^2}{2c_p T_1} = 1 + \frac{(k-1)c_{п}^2}{2kRT_1} = 1 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{c_{п}}{a_1} \right)^2 = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2, \quad (6.17)$$

где  $a_1 = \sqrt{kRT_1}$  - местная термодинамическая скорость звука;  $M_1 = \frac{c_{п}}{a_1}$  - критерий Маха.

Используя связь между параметрами в изоэнтропийном процессе, определим

$$p_1^* = p_1 \left( \frac{T_1^*}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (6.18)$$

где  $p_1^*$  - давление торможения, характеризующее полную механическую энергию потока.

Работу идеального компрессора, которая в  $p$ - $v$  диаграмме изображается площадью  $b-1^*-2^*-e-b$ , определим по формуле

$$l_k = -(i_2^* - i_1^*), \quad (6.19)$$

работу идеальной турбины (пл.  $e-3^*-4^*-d-e$ ) - по формуле

$$l_t = i_3^* - i_4^*, \quad (6.20)$$

где  $i_4^* = i_4 + \frac{c_4^2}{2}$ ;  $c_4$ - скорость газа на выходе из турбины в абсолютном движении.

В ТРД мощность турбины равна мощности, потребляемой компрессором, поэтому, пренебрегая расходом топлива по сравнению с расходом воздуха, получим:  $l_T = l_K$ . В процессе 4-5 газ расширяется в адиабатическом сопле, следовательно,  $di^* = 0$ . Из  $i_4^* = i_5^*$  следует, что увеличение кинетической энергии газа равно убыли его энтальпии

$$\frac{c_5^2 - c_4^2}{2} = i_4 - i_5 \text{ (пл. 4-5-a-c-4).}$$

Так как  $i_4^* = i_4 + \frac{c_4^2}{2}$ , то

$$c_5 = \left[ 2(i_4^* - i_5) \right]^{0.5}. \quad (6.21)$$

Под термическим КПД турбореактивного двигателя понимают отношение приращения кинетической энергии газа в идеальном реактивном сопле к теплоте, подведенной в цикле

$$\eta_t = \frac{c_5^2 - c_4^2}{2q_I}. \quad (6.22)$$

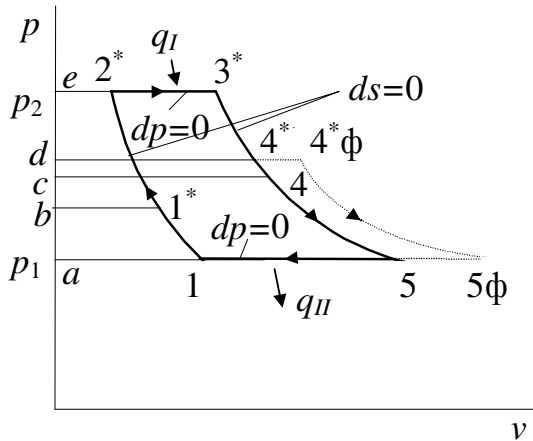


Рис.6.13

Реактивную тягу  $R$ , развиваемую двигателем в расчетном режиме ( $p_5 = p_{oc}$ ), найдем из уравнения количества движения

$$R = \dot{G}_t c_5 - \dot{G}_B c_n \approx \dot{G}_B (c_5 - c_n), \text{ Н.} \quad (6.23)$$

Для нерасчетного режима, когда давление на срезе сопла  $p_5 > p_{oc}$

$$R = \dot{G}_B (c_5 - c_n) + F_{cp} (p_5 - p_{oc}), \quad (6.24)$$

где  $F_{cp}$ - площадь поперечного сопла на срезе.

Если ТРД имеет форсажную камеру, где в изобарном процессе  $4^* - 4^*\phi$  (рис.6.13) подводится дополнительная теплота за счет сжигания топлива, то растет полная энтальпия ( $i_{4\phi}^* = i_4^* + q_\phi$ ), а следовательно, увеличивается скорость потока на срезе сопла  $c_{5\phi} = \left[ 2(i_{4\phi}^* - i_{5\phi}) \right]^{0.5}$ .

#### Прямоточный воздушно-реактивный двигатель

Идея создания прямоточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД) принадлежит французскому инженеру Рене Лорену, который в 1913 г. опубликовал свое изобретение. В 1926 г. Б.Картер запатентовал ПВРД для артиллерийских снарядов. В 1929 г. русский ученый Б.С.Стечкин создает основы теории ПВРД. Французский инженер Рене Ледюк в 1933 г. разработал, а в 1934 г. получил патент на самолет с ПВРД. В 1935 г. он испытал ПВРД на стенде, где скорость воздушного потока на входе в двигатель достигала 280 м/с. В 1938 г. во Франции была начата постройка самолета с двигателем Р.Ледюка, но в связи с оккупацией Франции Германией работы были приостановлены. В начале 1945 г., после освобождения Франции, работы возобновились и к концу года была закончена постройка самолета Ледюк-010. В СССР в 1939 г. под руководством И.А. Меркулова был создан и испытан в полете дозвуковой ПВРД. В настоящее время ПВРД находят широкое применение в качестве силовых установок для крылатых ракет, имеющих сверхзвуковые скорости полета ( $M > 2$ ). К достоинствам таких двигателей можно отнести простоту конструкции, отсутствие движущихся частей, высокую

экономичность при полете на больших высотах со сверхзвуковыми скоростями. Так, при  $M=c_{н}/a=0.8$  термический КПД двигателя составляет только 0,113, но при  $M=3$  уже 0,643, а при  $M=6$   $\eta_t = 0,878$ . Недостатком является невозможность запуска в статических условиях без стартовых двигателей (обычно для этой цели используют двигатели на твердом топливе).

Рассмотрим процессы, протекающие в идеальном ПВРД.

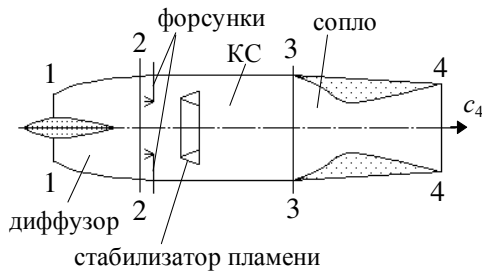


рис. 6.14а

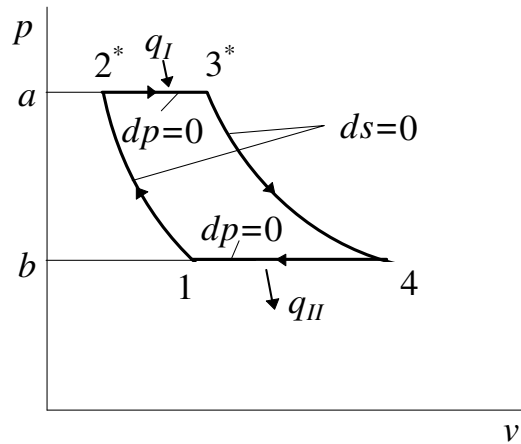


Рис.6.14б

1-2\*,  $ds=0$  - процесс восстановления давления воздуха в диффузоре, здесь кинетическая энергия набегающего потока преобразуется в энергию давления

$$T_2^* = T_1 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (a)$$

$$p_2^* = p_1 \left( \frac{T_2^*}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (b)$$

2\*-3\*,  $dp=0$  - подвод теплоты в камере сгорания  $q_I = i_3^* - i_2^*$ ; (c)

3\*-4,  $ds=0$  - расширение газов в сопле Лавале

$$i_3^* - i_4 = \frac{c_4^2}{2} \Rightarrow c_4 = [2(i_3^* - i_4)]^{0.5}, \quad (d)$$

где разность энтальпий  $i_3^* - i_4$  соответствует площади  $a-3^*-4-b-a$  на рис. 6.14б;

4-1,  $dp=0$  - отвод теплоты в окружающую среду

$$q_{II} = i_4 - i_1. \quad (e)$$

Получим выражение для термического КПД цикла ПВРД.

$$\eta_t = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3^* - T_2^*} = 1 - \frac{T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2^* \left( \frac{T_3^*}{T_2^*} - 1 \right)}. \quad (g)$$

Так как в процессах 1-2\* и 3\*-4  $ds=0$ , то

$\frac{T_2^*}{T_1} = \left(\frac{p_2^*}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ ,  $\frac{T_3^*}{T_4} = \left(\frac{p_3^*}{p_4}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ , но  $p_2^* = p_3^*$ , а  $p_4 = p_1$ , тогда  $\frac{T_2^*}{T_1} = \frac{T_3^*}{T_4}$ , откуда  $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3^*}{T_2^*}$ . Теперь с учетом последнего соотношения и (а) можно переписать (г) в окончательном виде

$$\eta_i = 1 - \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (6.25)$$

Из формулы видно, что с ростом скорости полета эффективность двигателя увеличивается.

Реактивную тягу ПВРД найдем из уравнения количества движения

$$R = (\dot{G}_r c_{r4} + p_4 F_{cp4}) - (\dot{G}_в c_{в1} + p_1 F_{дифф.1}). \quad (6.26)$$

### Жидкостной реактивный двигатель

Первые ракеты, используемые в военных целях, умели изготавливать еще в древнем Китае после того как был изобретен порох. Реактивные двигатели, работающие на жидком топливе (ЖРД), появились значительно позже.

В 1903 г. русский ученый К.Э.Циолковский разработал возможную конструкцию жидкостной ракеты, где в качестве топлива планировалось использовать жидкий водород, а в качестве окислителя - жидкий кислород. Значительный вклад в развитие теории ЖРД внес советский ученый Цандер (1887-1933), под руководством которого в 1931 г. был создан первый ЖРД с тягой 5 кг. В 1932 г. создаются и испытываются ЖРД конструкции В.П.Глушко, работающие на бензине и жидком кислороде.

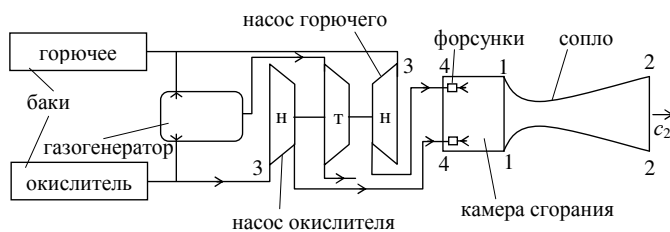
Создание немецкими учеными в конце Второй мировой войны баллистической ракеты V-2 (Фау-2) дальнего действия с ЖРД послужило мощным толчком к развитию мирового ракетостроения. Двигатель ракеты V-2 работал на этиловом спирте и жидком кислороде, развиваемая им реактивная тяга составляла 25 тонн, время работы двигателя - 60...80 с, дальность полета ракеты - 270 км.

Огромный вклад в развитие ракетостроения нашей страны внесли такие ученые как С.П.Королев, В.П.Глушко, А.М.Исаев, М.К.Янгель.

В настоящее время ракеты, оснащенные мощными ЖРД, используются как в космических исследованиях, так и в военных целях.

Рассмотрим принципиальную схему ЖРД на рис.6.15а.

Горючее и окислитель из баков поступают к насосам, где повышается давление агентов. После насосов они направляются к форсункам, расположенным в днище камеры сгорания, кото-



рые осуществляют распыл топлива и окислителя. Процесс окисления топлива в КС сопровождается выделением теплоты. Насосы приводятся во вращение турбиной, рабочим телом которой является газ, образующийся в результате химической реакции между топливом и окислителем в газогенераторе.

Рис. 6.15а

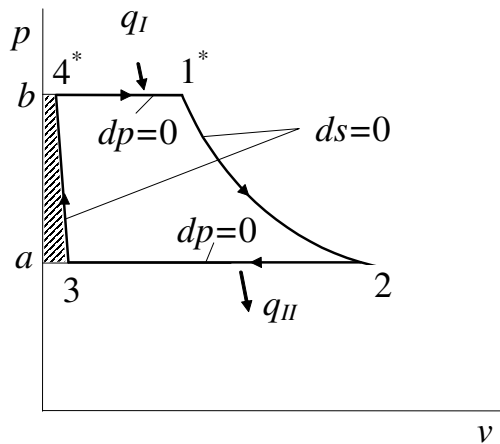


Рис.6.15б

На рис.6.15б представлен идеальный цикл двигателя в  $p$ - $v$  диаграмме, состоящий из следующих процессов:

1\*-2,  $ds=0$  - процесс расширения газа в сопле;

2-3,  $dp=0$  - отвод теплоты в окружающую среду;

3-4\*,  $ds=0$  - процесс сжатия окислителя и топлива в насосах,  $l_H = -(i_4^* - i_3)$ ;

4\*-1\*,  $dp=0$  - процесс подвода теплоты в камере сгорания.

Определим термический КПД жидкостного реактивного двигателя

$$\eta_t = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{i_2 - i_3}{i_1^* - i_4^*} = \frac{(i_1^* - i_2) - (i_4^* - i_3)}{i_1^* - i_4^*} = \frac{\frac{c_2^2}{2} - |l_H|}{q_I}. \quad (6.27)$$

Так как работа насосов (см. рис.6.15б, площадь  $a$ - $b$ - $4^*$ - $3$ - $a$ ) намного меньше кинетической энергии газа на выходе из сопла, то с удовлетворительной точностью можно написать

$$\eta_t = \frac{c_2^2}{2q_I}. \quad (6.28)$$

Из формулы видно, что термический КПД ЖРД возрастает с ростом кинетической энергии истекающего из сопла газа.

Реактивная тяга двигателя

$$R = \dot{G}_r c_2 + F_{cp} (p_{cp} - p_{oc}). \quad (6.29)$$

В расчетном режиме работы ЖРД статическое давление на выходном срезе сопла  $p_{cp}$  равно давлению окружающей среды  $p_{oc}$ , и тяга двигателя максимальна:

$$R = \dot{G}_r c_2. \quad (6.30)$$

## 7. Термодинамические потенциалы и дифференциальные уравнения термодинамики

### Термодинамические потенциалы

Элементарная механическая работа в поле гравитационных сил равна убыли потенциальной энергии грузов и не зависит от пути интегрирования, так как потенциальная энергия  $\Pi$  является функцией состояния

$$dL_{\text{мех}} = -d\Pi = -Ggdh. \quad (a)$$

В интегральной форме будем иметь

$$L_{\text{мех}1-2} = -Gg(h_2 - h_1) = Gg(h_1 - h_2). \quad (b)$$

Применяя аналогичный подход к термодинамической системе, из уравнения  $Tds = dU + dL$  при  $S=\text{const}$  находим, что элементарная работа изменения объема равна убыли внутренней энергии газа, т.е.

$$dL = -dU, \quad (c)$$

или в интегральной форме

$$L_{1-2} = U_1 - U_2. \quad (d)$$

Для технической работы из  $Tds = dl + dL_{\text{тех}}$  при  $dS=0$  получим

$$dL_{\text{тех}} = -dl, \quad (e)$$

$$L_{\text{тех}1-2} = I_1 - I_2. \quad (f)$$



Рассмотренные функции  $\Pi$ ,  $U$ ,  $I$  называют потенциалами, так как их разность равна тому или иному виду работы.

Кроме адиабатической системы существуют, как говорят, “сопряженные” с окружающей средой термодинамические системы, которые могут обмениваться с окружающей средой теплотой и работой. В этих системах вводятся в рассмотрение такие термодинамические функции как свободная энергия или изохорно-изотермический потенциал (потенциал Гельмгольца)

$$F = U - TS, \quad (7.1)$$

где  $TS$ - так называемая связанная энергия, свободная энтальпия или изобарно-изотермический потенциал (потенциал Гиббса)

$$\Phi = I - TS. \quad (7.2)$$

Получим выражения для дифференциалов этих функций.

Вычитая  $d(TS)$  из левой и правой частей уравнения  $dU = TdS - pdV$ , получим  $d(U - TS) = -SdT - pdV$ , или

$$dF = -SdT - pdV. \quad (7.3)$$

Выполнив аналогичные выкладки с уравнением  $dI = TdS + Vdp$ , найдем дифференциал свободной энтальпии

$$\begin{aligned} d(I - TS) &= TdS - d(TS) + Vdp, \\ d\Phi &= -SdT + Vdp. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из (7.3) легко видеть, что элементарная работа изменения объема при  $dT=0$  равна убыли свободной энергии

$$dL = -dF. \quad (7.5)$$

Интегрируя (7.4) при  $dT=0$  с учетом уравнения состояния идеального газа получим  $\Delta\Phi_{1-2} = GRT \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ . Однако для реальных газов изменение потенциала Гиббса записы-

вают через летучесть  $f$   $\Delta\Phi_{1-2} = GRT \ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$  (это понятие было введено в термодинамику

Льюисом в 1901 г.). Связь между  $p$  и  $f$  найдем из выражения  $\ln\left(\frac{f}{p}\right) = -\frac{\Delta l}{RT}$ , где

$\Delta l$  – разность между удельными работами совершаемыми идеальным и реальным газами в изотермическом процессе. При  $p \rightarrow 0$   $\lim_{p \rightarrow 0} (f/p) = 1$ ).

Если ТС при  $dT=0$  кроме работы изменения объема совершает другие виды работ (в магнитных, электрических, гравитационных полях, против сил поверхностного натяжения и т.д.), то их сумма равна убыли свободной энергии

$$dL + \sum_{i=1}^n dL_{Vi} = -dF, \quad (7.5a)$$

где  $\sum_{i=1}^n dL_{Vi}$  - сумма элементарных работ, не связанных с изменением объема.

Термодинамические потенциалы  $U$ ,  $I$ ,  $F$  и  $\Phi$  широко используются при рассмотрении фазовых переходов, вопросов устойчивости ТС, процессов, сопровождающихся химическими реакциями, процессов в гальванических и топливных элементах (в топливном элементе химическая энергия топлива с помощью окислителя превращается в электрическую энергию).

При изучении таких систем применяются уравнения Гиббса-Гельмгольца

$$I = \Phi + TS = \Phi - T \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p, \quad (7.6)$$

$$U = F + TS = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V. \quad (7.7)$$

Используя эти уравнения для двух любых точек процесса, можно написать

$$\Delta I = \Delta \Phi - T \left( \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial T} \right)_p, \quad (7.8)$$

$$\Delta U = \Delta F - T \left( \frac{\partial \Delta F}{\partial T} \right)_V. \quad (7.9)$$

Так как максимальная работа химической реакции при  $p = \text{const}$  и  $T = \text{const}$   $L_{\text{max } p} = -\Delta \Phi$ , а  $Q_p = \Delta I = \Delta U + p \Delta V$ , то (7.8) перепишем в виде

$$Q_p = -L_{\text{max } p} + T \left( \frac{\partial L_{\text{max } p}}{\partial T} \right)_p. \quad (7.10)$$

Для изохорно-изотермической системы будем иметь  $L_{\text{max } v} = -\Delta F$ ,  $Q_v = \Delta U$ ,

$$Q_v = -L_{\text{max } v} + T \left( \frac{\partial L_{\text{max } v}}{\partial T} \right)_V. \quad (7.11)$$

В общем виде уравнение Гиббса-Гельмгольца имеет вид

$$Q_x = -L_{\text{max } x} + T \left( \frac{\partial L_{\text{max } x}}{\partial T} \right)_x. \quad (7.12)$$

При анализе, например, гальванического элемента (при обратимом протекании процессов), используя уравнение Гиббса-Гельмгольца, можно определить электродвижущую силу  $E$  элемента. Так как работа по переносу электрического заряда  $L_{\text{max } p} = n \Phi^* E$ , где  $\Phi^*$  - постоянная Фарадея;  $n$  - валентность, а  $L_{\text{max } p} = -\Delta \Phi$ , то можно написать

$$\Delta \Phi = -L_{\text{max } p} = -n \Phi^* E. \quad (7.13)$$

Подставляя (7.13) в (7.8), получим

$$E = T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p - \frac{\Delta I}{n \Phi^*}. \quad (7.14)$$

Рассмотренные функции  $U$ ,  $I$ ,  $F$ ,  $\Phi$  называются также характеристическими функциями, так как их частные производные определяют термодинамические параметры системы. Так, из  $dU = TdS - pdV$  соответственно получим

$$\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T, \quad (7.15)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p. \quad (7.16)$$

Взяв частные производные от  $dI = TdS + Vdp$  при  $S = \text{const}$  или  $p = \text{const}$  найдем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_s = V, \quad (7.17)$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_p = T. \quad (7.18)$$

Из (7.3) и (7.4) получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S, \quad (7.19)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p, \quad (7.20)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = -S, \quad (7.21)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = V. \quad (7.22)$$

#### Дифференциальные уравнения термодинамики

При анализе термодинамических систем или решении задач часто необходимо одни частные производные выразить через другие, значения которых могут быть получены из опыта, например,  $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$ ,  $c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p$ . Замена одних частных производных через другие в дифференциальных уравнениях может упростить уравнения, облегчить их решение, или привести к виду, более удобному для термодинамического анализа (см. тему “дросселирование газов и паров”). Под дифференциальными уравнениями будем понимать не только уравнения, содержащие частные производные, но и выражения, устанавливающие связь между ними. К последним относятся уравнения Максвелла. Получим их.

Приравняем уравнения (7.15)-(7.22), содержащие одинаковые правые части, например, (7.15) и (7.18), (7.17) и (7.22) и т.д.:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_p = T, \quad (7.23)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p, \quad (7.24)$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = V, \quad (7.25)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = -S. \quad (7.26)$$

Возьмем смешанные производные от (7.23)-(7.26)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S, \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial S} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S, \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial S \partial p} = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = - \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T, \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T \partial p} = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial T} = - \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T, \quad (7.34)$$

Из курса высшей математики известно, что значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования, поэтому, приравнявая (7.27) и (7.28), получим одно из дифференциальных уравнений Максвелла

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_V. \quad (7.35)$$

Приравнявая (7.29) и (7.30), (7.31) и (7.32), (7.33) и (7.34) запишем остальные уравнения Максвелла:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p, \quad (7.36)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T, \quad (7.37)$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T. \quad (7.38)$$

Получим дифференциальное уравнение, связывающее частные производные от термических параметров. Так как  $T = f(p, v)$ , то после дифференцирования будем иметь

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv. \quad (a)$$

Полагая  $T = \text{const}$ , найдем, что

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = - \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p, \quad (b)$$

$$\text{или} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -1. \quad (7.39)$$

Найдем частные производные внутренней энергии и энтальпии. Из объединенного закона термодинамики для обратимых процессов  $dU = TdS - pdV$  получим зависимость  $U$  от  $V$  при  $T = \text{const}$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p. \quad (7.40)$$

Используя уравнение Максвелла  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ , перепишем (7.40) в виде

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p. \quad (7.41)$$

Полученное уравнение часто называют уравнением состояния реального газа в дифференциальной форме. Оно связывает между собой калорические и термические параметры.

Для идеального газа  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ , а  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{v}$ , тогда  $T\frac{R}{v} - p = 0$  или  $pv = RT$ .

Зависимость внутренней энергии от давления при  $T = \text{const}$  найдем из уравнений

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T. \quad (7.42)$$

С учетом того, что  $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ , будем иметь

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T. \quad (7.43)$$

Частные производные для энтальпии найдем из уравнения  $dI = TdS + Vdp$ :

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T, \quad (7.44)$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + V\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V. \quad (7.45)$$

Выведем некоторые дифференциальные уравнения для теплоемкостей.

$$Tds = c_v dT + \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right] dv, \quad (7.46)$$

откуда при  $dv=0$

$$c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v. \quad (7.47)$$

Так как  $s = f(T, v)$ , то при  $s = \text{const}$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s. \quad (7.48)$$

Таким образом,

$$c_v = -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s. \quad (a)$$

Из  $Tds = c_p dT + \left[ \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - v \right] dp$  при  $p = \text{const}$  следует

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p, \quad (7.49)$$

но  $s = f(p, T)$ , следовательно, при  $ds=0$  будем иметь

$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s$ , тогда (7.49) перепишем в виде

$$c_p = T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s. \quad (b)$$

Вычитая (a) из (b), найдем связь между  $c_p$  и  $c_v$ :

$$c_p - c_v = T \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s \right]. \quad (c)$$

Приравнявая уравнения  $dq = c_v dT + \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right] dv$  и  $dq = c_p dT + \left[ \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - v \right] dp$  при  $dp=0$ ,

найдем что

$$c_p - c_v = \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \quad (7.50)$$

Для идеального газа  $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = 0$ ,  $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$ , тогда  $c_p - c_v = R$ .

## 8. Равновесие термодинамических систем и фазовые переходы

### Термодинамическое равновесие, четыре случая сопряжения термодинамической системы с окружающей средой

Термодинамические системы можно разделить на системы, не обменивающиеся теплотой с окружающей средой (адиабатические системы) и системы, которые могут обмениваться с окружающей средой теплотой и работой. Установим признаки перехода ТС в равновесное состояние и определим, какими свойствами характеризуется система в состоянии равновесия.

1. Для изолированной ТС из объединенного закона термодинамики

$TdS \geq dU + pdV$  при  $dU=0$  и  $dV=0$  получим  $dS > 0$ , т.е. увеличение энтропии в адиабатической ТС служит признаком перехода ее в равновесное состояние. В равновесном состоянии  $dS=0$ ,  $d^2S < 0$ , т.е.  $S=S_{\max}$ . Таким образом, когда адиабатическая система приходит в равновесное состояние, энтропия системы достигает максимального значения.

2. ТС обменивается с окружающей средой теплотой, но так, что  $S=\text{const}$  и  $V=\text{const}$ . Для такой ТС можно написать  $dU \leq TdS - pdV$ , откуда при  $dS=0$  и  $dV=0$  получаем  $dU < 0$ , т.е. уменьшение внутренней энергии ТС служит признаком стремления ее к равновесному состоянию. В состоянии равновесия

$dU=0$ ,  $d^2U > 0$ , т.е.  $U=U_{\min}$ .

3. ТС обменивается с окружающей средой теплотой и работой, но так, что  $p=\text{const}$  и  $S=\text{const}$ . Из  $dI \leq TdS - Vdp$  при  $dp=0$  и  $dS=0$  получим  $dI < 0$  - признак перехода системы в равновесное состояние. В состоянии равновесия  $dI=0$ ,  $d^2I > 0$ , т.е.  $I=I_{\min}$ .

4. ТС обменивается с окружающей средой теплотой, но при этом  $T=\text{const}$  и  $V=\text{const}$ . Из полного дифференциала свободной энергии (см. раздел "термодинамические потенциалы")  $dF \leq -SdT - pdV$  при  $dT=0$  и  $dV=0$  будем иметь  $dF < 0$ . В состоянии равновесия  $dF=0$ ,  $d^2F > 0$ ,  $F=F_{\min}$ .

5. ТС обменивается с окружающей средой теплотой и работой, но так, что  $T=\text{const}$  и  $p=\text{const}$ . Тогда из  $d\Phi \leq -SdT + Vdp$  при  $dT=0$  и  $dp=0$  при переходе системы в равновесное состояние получим  $d\Phi < 0$ . В состоянии равновесия  $d\Phi=0$ ,  $d^2\Phi > 0$ ,  $\Phi=\Phi_{\min}$ .

### Химический потенциал

При рассмотрении фазовых переходов, когда имеют место испарение и конденсация веществ, особое место занимает удельный изобарно-изотермический потенциал (удельный потенциал Гиббса)  $\varphi = i - Ts$ , получивший название химического потенциала.

Выразим потенциал Гиббса через химический потенциал и массу вещества  $G$ :  $\Phi = G\varphi$ . После дифференцирования будем иметь

$$d\Phi = Gd\varphi + \varphi dG = G(-sdT + vdp) + \varphi dG.$$

При  $dT=0$  и  $dp=0$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G}\right)_{T,p} = \varphi, \quad (8.1)$$

т.е. химический потенциал связан с изменением массы в ТС.

Рассмотрим свободную энергию и определим  $\left(\frac{\partial F}{\partial G}\right)_{v,T}$ .

$$F = Gf, \quad dF = Gdf + fdG = G(-sdT - pdv) + fdG = -GsdT - Gpdv + fdG. \quad (a)$$

Выразим  $Gdv$  как функцию  $V$  и  $G$ .

$$V = Gv, \quad dV = Gdv + vdG, \Rightarrow Gdv = dV - vdG. \quad (b)$$

Подставим (b) в (a)

$$dF = -SdT - pdV + (f + pv)dG. \quad (8.2)$$

При  $dT=0$  и  $dV=0$  получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial G}\right)_{V,T} = f + pv. \quad (8.3)$$

Покажем, что  $f + pv = \varphi$ . Для этого рассмотрим диаграмму потенциалов, из которой видно, что  $F + TS + pV = \Phi + TS$ ,  $F + pV = \Phi$ . Разделив на массу, получим  $f + pv = \varphi$ . Произведя подобные выкладки для  $U$  и  $I$ , будем иметь

$$\left(\frac{\partial U}{\partial G}\right)_{v,s} = \left(\frac{\partial I}{\partial G}\right)_{p,s} = \left(\frac{\partial F}{\partial G}\right)_{v,T} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G}\right)_{p,T} = \varphi.$$

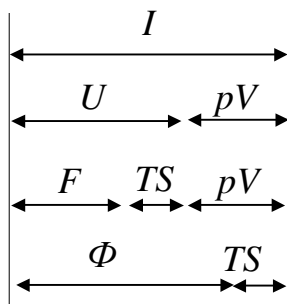


Рис. 8.1

Таким образом, химический потенциал позволяет определить изменение любой характеристической функции при изменении количества вещества в фазовых превращениях. Внутренняя энергия фазы в такой системе - функция трех переменных  $U = f(S, V, G)$ , тогда

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{v,G} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{s,G} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial G}\right)_{v,s} dG = TdS - pdV + \varphi dG,$$

откуда

$$TdS = dU + pdV - \varphi dG. \quad (8.4)$$

Объединенный закон термодинамики для системы с фазовыми переходами и с учетом работ  $L_{Vi}$ , не связанных с изменением объема, имеет вид ( $m$  - число фаз):

$$TdS \geq dU + pdV - \sum_{j=1}^m \varphi_j dG_j + \sum_{i=1}^n dL_{Vi}. \quad (8.5)$$

Условия устойчивости и равновесия в изолированной системе.

Условия устойчивости

Термодинамический анализ показывает, что ТС будет механически

устойчивой, если  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$ . Тепловая устойчивость системы выражается неравенством  $c_v > 0$ . Действительно, если  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T > 0$ , то увеличение объема приведет к росту давления в системе и дальнейшему ее расширению, т.е. ТС все дальше и дальше будет уходить от равновесного состояния. При  $c_v < 0$  подвод теплоты приводит к уменьшению температуры системы, т.е. к росту температурного напора между ТС и окружающей средой и увеличению теплоподвода к ТС - процесс также становится лавинообразным.

#### Условия равновесия в однородной изолированной системе

Было показано, что для изолированной системы, когда  $dU=0$  и  $dV=0$ , в состоянии равновесия  $dS_c=0$ . Будем считать, что ТС состоит из двух подсистем 1 и 2, тогда

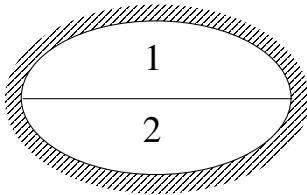


Рис. 8.2

$$dS_c = dS_1 + dS_2 = 0, \quad (a)$$

$$\text{но } dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{p_1}{T_1} dV_1, \quad (b)$$

$$dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2} dV_2. \quad (c)$$

Так как  $U_c = U_1 + U_2 = \text{const}$ , то  $dU_2 = -dU_1$ . (d)

Аналогично, из  $V_c = V_1 + V_2 = \text{const}$  следует  $dV_1 = -dV_2$ . (e)

Подставив (b) и (c) в (a) с учетом (d) и (e), получим

$$dS_c = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) dV_1 = 0, \quad (8.6)$$

но  $dU_1$  и  $dV_1$  не равны нулю, следовательно,

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ p_1 = p_2. \end{cases} \quad (8.7)$$

Таким образом, изолированная однородная ТС будет находиться в равновесии в том случае, если во всех точках ТС одинаковые давление и температура.

#### Условия фазового равновесия

Рассмотрим систему, состоящую из двух фаз. Как и в предыдущем случае, в состоянии равновесия системы



Рис. 8.3

$$dS_c = dS_1 + dS_2 = 0, \quad (a)$$

$$dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{p_1}{T_1} dV_1 - \frac{\varphi_1}{T_1} dG_1, \quad (b)$$

$$dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2} dV_2 - \frac{\varphi_2}{T_2} dG_2. \quad (c)$$

Так как  $U_c = U_1 + U_2$ ,  $V_c = V_1 + V_2$  и  $G_c = G_1 + G_2$ , то  $dU_2 = -dU_1$ ,  $dV_1 = -dV_2$ ,  $dG_1 = -dG_2$ . Подставляя (b) и (c) в (a) с учетом последних равенств, получим

$$dS_c = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) dV_1 - \left(\frac{\varphi_1}{T_1} - \frac{\varphi_2}{T_2}\right) dG_1 = 0, \quad (8.8)$$

так как  $dU_1$ ,  $dV_1$  и  $dG_1$  не равны нулю, следовательно,



$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ p_1 = p_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2, \end{cases} \quad (8.9)$$

т.е. чтобы в изолированной ТС не происходили фазовые переходы, необходимо равенство температур, давлений и химических потенциалов фаз. В действительности равновесие является динамическим: фазовый переход имеет место, но число молекул, покинувших поверхность жидкости, равно числу молекул, возвратившихся из пара в жидкость.

### Фазовые переходы. Правило фаз Гиббса

Рассмотрим фазовые переходы в  $p$ - $T$  диаграмме вещества. Любое вещество может находиться в трех агрегатных состояниях: жидком, газообразном и в виде твердого вещества, в котором при определенных физических условиях может быть несколько фаз (например, железо может состоять из  $\alpha$ -железа и  $\beta$ -железа).

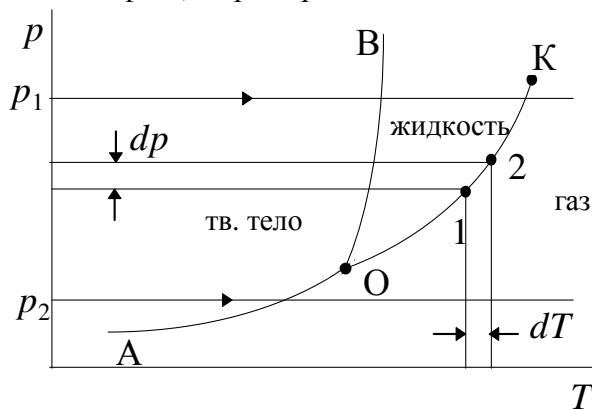


Рис. 8.4

На  $p$ - $T$  диаграмме агрегатные состояния разделены линиями фазовых переходов. АО- линия сублимации, ОВ- линия плавления, ОК- линия испарения. В точке О, которая называется главной тройной точкой (для воды  $p_{тт}=610,8$  Па,  $t_{тт}=0,01$  С), вещество находится одновременно в трех агрегатных состояниях. В дальнейшем, если не будет особо оговорено, под фазами будем понимать агрегатные состояния вещества. В точке К вещество находится в критическом состоянии, здесь теряется понятие жидкости и пара (газа), так как  $v_{ж}=v_{п}=v$ , теплота парообразования и коэффициент поверхностного

натяжения равны нулю. Если подвод теплоты при постоянном давлении осуществляется при  $p_1 > p_{тт}$  (см. рис.8.4), то вещество из твердого состояния переходит в жидкое, а затем в газообразное, однако если  $p_2 < p_{тт}$ , то при нагреве сразу происходит переход из твердого в газообразное состояние.

Правило фаз Гиббса устанавливает зависимость степени свободы ТС (т.е. числа независимых переменных) от числа компонентов и фаз в системе:

$$\psi = n - r + 2, \quad (8.10)$$

где  $n$ - число компонентов системы,  $r$ -число фаз в системе.

Для чистого вещества, например, кислорода  $O_2$ ,  $n=1$ ,  $r=1$ ,  $\psi=2$ . В такой системе можно произвольно изменять два параметра, третий же является зависимым, определяемым уравнением состояния (например,  $p = f(T, v)$ ).

Для однокомпонентной системы, состоящей из двух фаз, например, воды и водяного пара  $n=1$ ,  $r=2$ ,  $\psi=1$ . В этом случае лишь один параметр можно выбирать произвольно. Так, энтропия и энтальпия сухого насыщенного пара, энтропия и энтальпия насыщенной жидкости однозначно определяются только температурой (или только давлением, так как в двухфазной области  $p = f(T)$ ).

В главной тройной точке  $n=1$ ,  $r=3$ ,  $\psi=0$ , т.е. существование вещества в таком состоянии возможно только при единственном для каждого вещества сочетании температуры и давления.

### Уравнение Клапейрона-Клаузиуса

Было показано, что условиями термодинамического равновесия являются равенства  $T_{ж} = T_{п}$ ,  $p_{ж} = p_{п}$ , и  $\varphi_{ж} = \varphi_{п}$ . Рассмотрим процесс вдоль кривой ОК (рис.8.4). В точке 1 имеет место равенство

$$\varphi_{ж1}(T, p) = \varphi_{п1}(T, p).$$

Изменим температуру и давление на  $dT$  и  $dp$  так, чтобы точка 2 осталась на кривой ОК. В новой точке снова получим

$$\varphi_{ж2}(T + dT, p + dp) = \varphi_{п1}(T + dT, p + dp),$$

или  $\varphi_{ж1} + d\varphi_{ж} = \varphi_{п1} + d\varphi_{п}$ , но  $\varphi_{ж1} = \varphi_{п1}$ , тогда  $d\varphi_{ж} = d\varphi_{п}$ . Раскрывая полные дифференциалы  $d\varphi_{ж}$  и  $d\varphi_{п}$ , получим  $-s_{ж}dT + v_{ж}dp = -s_{п}dT + v_{п}dp$ , откуда

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_{п} - s_{ж}}{v_{п} - v_{ж}}. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) называется уравнением Клапейрона-Клаузиуса и может быть применено ко всем фазовым превращениям чистых веществ.

В термодинамике принято жидкую и газообразную фазы, находящиеся в равновесии (когда состояние вещества изображается точкой на кривой ОК) обозначать надстрочными индексами ' для жидкости и '' для пара, и называть их соответственно насыщенной жидкостью и сухим насыщенным паром. Так как  $s'' - s' = \frac{r}{T}$ , где  $r$  - удельная теплота парообразования,  $T$  - температура насыщения, то уравнение (8.11) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v'' - v')}. \quad (8.12)$$

Проинтегрировав уравнение Клапейрона-Клаузиуса, найдем связь между давлением и температурой насыщения

$$p_s = \int \frac{r}{T(v'' - v')} dT + const. \quad (8.13)$$

### Устойчивость фаз

При рассмотрении процессов с фазовыми переходами возникает вопрос, при каких условиях масса одной из фаз будет увеличиваться за счет другой (фаза, у которой  $dG > 0$  называется устойчивой).

Рассмотрим ход кривых  $\varphi = f(p)$  при  $T = \text{const}$  в  $\varphi$ - $p$  диаграмме. Из полного дифференциала  $\varphi$ :  $d\varphi = -sdT + vdp$  при  $T = \text{const}$  получим  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_T = v$ . Так как  $v'' > v'$ , то

$\left(\frac{\partial \varphi_{п}}{\partial p}\right)_T > \left(\frac{\partial \varphi_{ж}}{\partial p}\right)_T$ , т.е. в  $\varphi$ - $p$  диаграмме

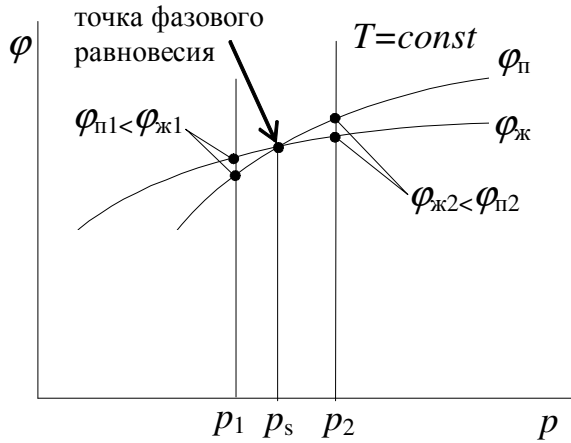


Рис. 8.5

кривая  $\varphi_{\text{п}}$  идет круче кривой  $\varphi_{\text{ж}}$ . Кроме того,  $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}\right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T < 0$ , значит, кривые обращены выпуклостью вверх. Для ТС при  $p_1 < p_s$  можно написать

$$\Phi_{c1} = \varphi_{\text{п}} G_{\text{п}} + \varphi_{\text{ж}1} G_{\text{ж}}, \quad (8.14)$$

но в этом состоянии система не находится в равновесии. Так как в процессе фазового перехода при неизменных  $p_1$  и  $T_1$   $\varphi_{\text{п}}$  и  $\varphi_{\text{ж}}$  остаются постоянными, то дифференцирование (8.14) дает

$$d\Phi_{c1} = \varphi_{\text{п}} dG_{\text{п}} + \varphi_{\text{ж}1} dG_{\text{ж}}. \quad (8.15)$$

Имея в виду, что  $dG_{\text{п}} = -dG_{\text{ж}}$ , а также тот

факт, что при переходе ТС в равновесное состояние в изобарно-изотермическом процессе  $d\Phi_c < 0$  (потенциал стремится к минимуму), перепишем (8.15) в окончательном виде

$$d\Phi_{c1} = (\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{ж}1}) dG_{\text{п}} < 0. \quad (8.16)$$

Таким образом, чтобы процесс шел в направлении образования паровой фазы ( $dG_{\text{п}} > 0$ ), должно выполняться условие  $\varphi_{\text{п}} < \varphi_{\text{ж}1}$ , т.е. устойчивой будет та фаза, у которой химический потенциал при данных условиях меньше. Если в ТС поднять давление до  $p_2 > p_s$ , то начнется процесс конденсации ( $dG_{\text{ж}} > 0$ ), так как теперь  $\varphi_{\text{ж}2} < \varphi_{\text{п}2}$ .

Фазовые переходы при неодинаковых давлениях фаз

Рассмотрим две фазы, находящиеся в термодинамическом равновесии. В этом случае химические потенциалы фаз равны

$$\varphi_1(p_0, T) = \varphi_2(p_0, T).$$

Увеличим давление в первой фазе на  $dp_1$  при  $T = \text{const}$ . Тогда в новом состоянии равновесия будем иметь

$$\varphi_1(p_0 + dp_1, T) = \varphi_2(p_0 + dp_2, T).$$

Разлагая функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в ряд Тейлора, получим

$$\varphi_1(p_0, T) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1}\right)_T dp_1 + \dots = \varphi_2(p_0, T) + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}\right)_T dp_2 + \dots,$$

$$\text{но } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_T = v, \text{ тогда } v_1 dp_1 = v_2 dp_2, \quad (8.17)$$

$$\text{или } \left(\frac{\partial p_2}{\partial p_1}\right)_T = \frac{v_1}{v_2} \quad (8.18)$$

- уравнение Пойнтинга, из которого для жидкости и пара при  $T = \text{const}$  можно, например, получить

$$\Delta p_{(1-2)\text{ж}} = \int_{p_{1\text{п}}}^{p_{2\text{п}}} \frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{ж}}} dp_{\text{п}}, \quad (8.19)$$

то есть увеличение давления в одной фазе на  $\Delta p_{\text{п}}$  при  $T = \text{const}$  приводит к росту давления в другой фазе на  $\Delta p_{\text{ж}}$ , которое зависит как от  $\Delta p_{\text{п}}$ , так и от отношения удельных объемов фаз. В рассматриваемом случае  $v_{\text{п}} > v_{\text{ж}}$ , следовательно,  $\Delta p_{(1-2)\text{ж}} > \Delta p_{(1-2)\text{п}}$ .

Используя выражение для полного дифференциала химического потенциала  $d\varphi = v dp - s dT$  при условии равновесия фаз, можно написать

$$v_1 dp_1 - s_1 dT_1 = v_2 dp_2 - s_2 dT_2. \quad (8.20)$$

Для случая  $dT_1=dT_2=dT$  и  $dp_1 \neq dp_2$  найдем связь между производными  $dp/dT$  для сосуществующих фаз при неодинаковых давлениях в этих фазах

$$v_2 \frac{dp_2}{dT} - v_1 \frac{dp_1}{dT} = \frac{r}{T}. \quad (8.21)$$

При  $dp_1=dp_2=dp$  получим уравнение Клапейрона-Клаузиуса, при  $dT=0$  - уравнение Пойнтинга.

### Фазовые переходы при искривленных поверхностях раздела фаз.

#### Уравнение Лапласа

На жидкость, расположенную под вогнутой поверхностью, действует дополнительная сила, обусловленная силами поверхностного натяжения. На рис.8.6 показан мысленно вырезанный участок поверхности раздела фаз размером  $l \times l$ . Для того чтобы он остался в равновесии, к нему необходимо приложить силы поверхностного натяжения  $F_1=F_2=F_3=F_4$ . Силу  $F$  можно выразить через коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$

$$F = \sigma l. \quad (a)$$

Спроектируем силу  $F_1$  на вертикальную ось 0-z

$$F_{1z} = F_1 \sin \alpha_1 = F_1 \left( \frac{1}{2} l / \rho_1 \right) = \frac{\sigma l^2}{2\rho_1}, \quad (b)$$

где  $\rho$  - радиус кривизны поверхности.

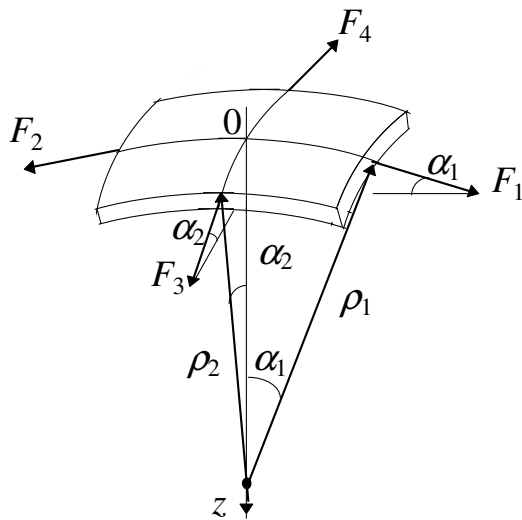


Рис.8.6

Проекция силы  $F_2$  на ось 0-z равна

$$F_{2z} = \frac{\sigma l^2}{2\rho_1}. \quad (c)$$

Складывая (b) и (c), получим

$$F_{1z} + F_{2z} = \frac{\sigma l^2}{\rho_1}. \quad (d)$$

Аналогичное выражение можно записать и для проекций на вертикальную ось сил  $F_3$  и  $F_4$

$$F_{3z} + F_{4z} = \frac{\sigma l^2}{\rho_2}. \quad (e)$$

Складывая (d) и (e), найдем дополнительную силу  $F_d$ , действующую на жидкость, расположенную под вогнутой поверхностью

$$F_d = \sigma l^2 \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Разделив эту силу на площадь поверхности площадки, определим дополнительное давление на жидкость, обусловленное силами поверхностного натяжения

$$p_d = \sigma \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (8.22)$$

Для капли  $\rho_1=\rho_2=R_k$ , тогда

$$p_d = \frac{2\sigma}{R_k}. \quad (8.23)$$

Для капли, находящейся в паре с давлением  $p_n$ ,

$$p_k = p_n + \frac{2\sigma}{R_k}. \quad (8.24)$$

Из формул (8.23) и (8.24) следует, что с уменьшением радиуса растет давление в капле и при очень малых радиусах жидкость в капле будет находиться под значительным давлением.

Уравнение Клапейрона-Клаузиуса с учетом кривизны поверхности

При фазовом равновесии жидкости и пара  $\varphi_{ж}=\varphi_{п}$ . После дифференцирования будем иметь  $d\varphi_{ж}=d\varphi_{п}$ . Так как  $d\varphi = vdp - sdT$ , то

$$v_{ж}dp_{ж} - s_{ж}dT = v_{п}dp_{п} - s_{п}dT. \quad (a)$$

Рассматривая жидкость, находящуюся под сферической поверхностью с радиусом кривизны  $R$ , можно написать:

$$p_{ж} = p_{п} + \frac{2\sigma}{R}. \quad (b)$$

перепишем (a) с учетом (b)

$$v_{ж}dp_{п} + \frac{2v_{ж}d\sigma}{R} - s_{ж}dT = v_{п}dp_{п} - s_{п}dT. \quad (c)$$

Деля (c) на  $dT$  и учитывая, что  $s_{п} - s_{ж} = \frac{r}{T}$ , получим

$$\frac{dp_{п}}{dT} = \frac{r}{T(v_{п} - v_{ж})} + \frac{2v_{ж}}{R(v_{п} - v_{ж})} \frac{d\sigma}{dT}. \quad (8.25)$$

Принято считать радиус кривизны  $R$  в формуле (8.25) положительным, если пар находится с вогнутой стороны поверхности раздела и отрицательным - если с выпуклой (см. рис.8.7).

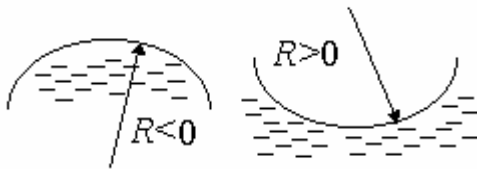


Рис. 8.7

Так как  $\sigma = a - bT$ , то  $\frac{d\sigma}{dT}$  всегда меньше нуля, и знак второго слагаемого в (8.25) определяется знаком  $R$ . Следовательно, в паре, находящемся со стороны вогнутой поверхности, зависимость давления от температуры  $\frac{dp_{п}}{dT}$  слабее, чем в паре над выпук-

лой поверхностью. Интегрирование (8.25) с учетом знака радиуса кривизны поверхности раздела показывает, что при  $R > 0$   $p_{п} < p_s$ , а при  $R < 0$   $p_{п} > p_s$ , где  $p_s$  - давление пара над плоской поверхностью раздела фаз. При плоской поверхности, когда  $R = \infty$ , или при  $\sigma = \text{const}$  формула (8.25) переходит в уравнение Клапейрона-Клаузиуса.

Формула Кельвина

Формула Кельвина позволяет определить давление пара над каплей жидкости, находящейся в собственном паре при постоянной и одинаковой температуре жидкой и паровой фаз в условиях фазового равновесия. Записывая последовательно  $\varphi_{ж}=\varphi_{п}$ ,  $d\varphi_{ж}=d\varphi_{п}$ ,  $v_{ж}dp_{ж} - s_{ж}dT = v_{п}dp_{п} - s_{п}dT$  при условии  $T_{п} = T_{ж} = T = \text{const}$  и учитывая  $p_{ж} = p_{п} + \frac{2\sigma}{R_k}$ , полу-

чим 
$$v_{ж}d\left(p_{п} + \frac{2\sigma}{R_k}\right) = v_{п}dp_{п}.$$

После дифференцирования левой части уравнения будем иметь

$$v_{\text{ж}} dp_{\text{п}} - \frac{2\sigma v_{\text{ж}}}{R_{\text{к}}^2} dR_{\text{к}} = R_{\text{п}} T_{\text{п}} \frac{dp_{\text{п}}}{p_{\text{п}}}. \quad (\text{с})$$

Проинтегрируем (с) по давлению от  $p_s$  до  $p_{\text{п}}$  и по радиусу от  $\infty$  до  $R_{\text{к}}$

$$v_{\text{ж}} \int_{p_s}^{p_{\text{п}}} dp_{\text{п}} - 2\sigma v_{\text{ж}} \int_{\infty}^{R_{\text{к}}} \frac{dR_{\text{к}}}{R_{\text{к}}^2} = R_{\text{п}} T_{\text{п}} \int_{p_s}^{p_{\text{п}}} \frac{dp_{\text{п}}}{p_{\text{п}}},$$

$$v_{\text{ж}} (p_{\text{п}} - p_s) + \frac{2\sigma v_{\text{ж}}}{R_{\text{к}}} = R_{\text{п}} T_{\text{п}} \ln \frac{p_{\text{п}}}{p_s}. \quad (\text{д})$$

Разделим (д) на  $R_{\text{п}} T_{\text{п}}$ :

$v_{\text{ж}} \frac{p_{\text{п}}}{R_{\text{п}} T_{\text{п}}} \left(1 - \frac{p_s}{p_{\text{п}}}\right) + \frac{2\sigma v_{\text{ж}}}{R_{\text{к}} R_{\text{п}} T_{\text{п}}} = \ln \frac{p_{\text{п}}}{p_s}$ , но  $\frac{p_{\text{п}}}{R_{\text{п}} T_{\text{п}}} = v_{\text{п}}$ , тогда окончательно формулу Кельвина можно записать в виде

$$\ln \frac{p_{\text{п}}}{p_s} = \frac{v_{\text{ж}}}{v_{\text{п}}} \left(1 - \frac{p_s}{p_{\text{п}}}\right) + \frac{2\sigma v_{\text{ж}}}{R_{\text{к}} R_{\text{п}} T_{\text{п}}}. \quad (8.26)$$

Для случая, когда давление пара намного меньше критического (т.е.  $v_{\text{п}} \gg v_{\text{ж}}$ ), (8.26) упрощается:

$$\ln \frac{p_{\text{п}}}{p_s} = \frac{2\sigma v_{\text{ж}}}{R_{\text{к}} R_{\text{п}} T_{\text{п}}}. \quad (8.27)$$

Давление пара над каплей найдем из уравнения

$$p_{\text{п}} = p_s \exp\left(\frac{2\sigma v_{\text{ж}}}{R_{\text{к}} R_{\text{п}} T_{\text{п}}}\right). \quad (8.28)$$

### Термодинамика образования новой фазы.

#### Критический радиус пузырька

Зарождение парового пузырька (новой фазы) в жидкости требует выполнения двух условий - наличия центров парообразования (пузырьков газа, твердых частиц) и перегрева жидкости относительно температуры насыщения при данном давлении. Остановимся лишь на термодинамическом аспекте этого вопроса и рассмотрим образование новой фазы в чистой жидкости, находящейся в большом объеме.

До образования пузырька изобарно-изотермический потенциал жидкости равен

$$\Phi_1 = (G_{\text{п}} + G_{\text{ж}}) \varphi_{\text{ж}}. \quad (\text{а})$$

Такая запись предполагает, что молекулы пара растворены в жидкости. После того, как образовался паровой пузырек, изобарно-изотермический потенциал системы записывается в виде

$$\Phi_2 = G_{\text{п}} \varphi_{\text{п}} + G_{\text{ж}} \varphi_{\text{ж}} + 4\pi\sigma R_{\text{п}}^2, \quad (\text{б})$$

где  $R_{\text{п}}$  - радиус пузырька. Изменение изобарно-изотермического потенциала термодинамической системы составит

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{ж}}) G_{\text{п}} + 4\pi\sigma R_{\text{п}}^2. \quad (\text{с})$$

Так как масса пузырька  $G_{\text{п}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{п}}^3 \rho_{\text{п}}$ , то перепишем (с) в виде

$$\Delta\Phi = (\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{ж}}) \frac{4}{3} \pi R_{\text{п}}^3 \rho_{\text{п}} + 4\pi\sigma R_{\text{п}}^2. \quad (\text{д})$$

Функция  $\Delta\Phi = f(R_{\text{п}})$  имеет экстремум только при  $\varphi_{\text{п}} < \varphi_{\text{ж}}$  (см. рис.8.8). Определим значение критического радиуса пузырька, при котором функция имеет экстремум

$$\frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial R_{\text{п}}} = -(\varphi_{\text{ж}} - \varphi_{\text{п}}) \pi R_{\text{пкп}}^2 \rho_{\text{п}} + 2\pi\sigma = 0,$$

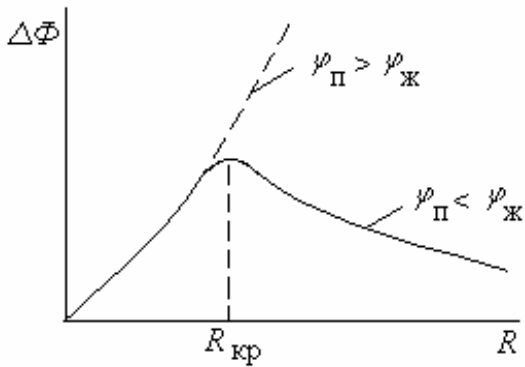


Рис. 8.8

откуда 
$$R_{\text{пкр}} = \frac{2\sigma}{(\varphi_{\text{ж}} - \varphi_{\text{п}})\rho_{\text{п}}} \tag{8.29}$$

Пузырек, имеющий такой радиус, называется критическим, так как система пузырь-жидкость в этом случае находится в неустойчивом равновесии. Переход ТС к состоянию устойчивого равновесия сопровождается, как известно, уменьшением изобарно-изотермического потенциала ( $\Delta\Phi < 0$ ) и либо увеличением, либо уменьшением радиуса пузырька. Таким образом, если в перегретой жидкости появляются пузырьки с  $R_{\text{п}} > R_{\text{пкр}}$ , то они будут расти; пузырьки с радиусом  $R_{\text{п}} < R_{\text{пкр}}$  будут схлопываться, т.е. исчезать.

Разность химических потенциалов фаз можно

выразить через перегрев жидкости

$$\varphi_{\text{ж}} - \varphi_{\text{п}} = \left( \frac{T_{\text{ж}} - T_{\text{с}}}{T_{\text{с}}} \right) r = \frac{\Delta T_{\text{пер ж}} r}{T_{\text{с}}}, \tag{e}$$

где  $r$  - удельная теплота парообразования. Подставляя (e) в (8.29), получим

$$R_{\text{пкр}} = \frac{2\sigma T_{\text{с}}}{r\rho_{\text{п}}\Delta T_{\text{пер ж}}}. \tag{8.30}$$

Работа образования пузырька критического размера складывается из работы образования объема пузырька и работы против сил поверхностного натяжения

$$W_{\text{пкр}} = -\Delta p V_{\text{п}} + 4\pi R_{\text{пкр}}^2 \sigma = \frac{2\sigma}{R_{\text{пкр}}} \frac{4}{3} \pi R_{\text{пкр}}^3 + 4\pi R_{\text{пкр}}^2 \sigma = \frac{4}{3} \pi R_{\text{пкр}}^2 \sigma. \tag{8.31}$$

Подставляя значение критического радиуса пузырька в (8.31), найдем связь между работой образования пузырька критического размера и перегревом жидкости

$$W_{\text{пкр}} = \frac{16}{3} \sigma^3 \pi \left( \frac{T_{\text{с}}}{r\rho_{\text{п}}\Delta T_{\text{пер ж}}} \right)^2. \tag{8.32}$$

Как видим,  $W_{\text{пкр}}$  пропорциональна  $1/\Delta T_{\text{пер ж}}^2$ , т.е. чем больше перегрев жидкости, тем меньше работа образования пузырька критического размера. Интенсивность образования пузырьков критического размера определяют по формуле

$$j = A \exp\left(-\frac{W_{\text{пкр}}}{kT_{\text{с}}}\right), \quad \frac{1}{\text{м}^3\text{с}}, \tag{8.33}$$

где  $A = NB$ ;  $N \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$  - число молекул в единице объема жидкости;  $B \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$  - кинетический множитель ( $\ln A = 89,8$ );  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  - постоянная Больцмана. Согласно опытам В.П. Скрипова и его сотрудников, изучавших образование новой фазы в перегретых жидкостях, для воды в большом объеме

$$\ln j = 91 - \frac{W_{\text{пкр}}}{kT_{\text{с}}}. \tag{8.34}$$

### 9. Свойства реальных газов и паров

Напомним, что идеальным газом называется газ, молекулы которого рассматриваются как материальные точки, имеющие массу, но не имеющие объема. Межмолекулярные силы отсутствуют, а передача энергии в таком газе осуществляется за счет упругих соударений молекул, газ подчиняется уравнению состояния идеального газа  $pV = RT$ .

Долгое время считалось, что реальные газы подчиняются закону Бойля (1662), однако в конце XVIII века М. Ван-Марум, исследовавший аммиак, установил, что  $\text{NH}_3$  не следует закону Бойля и может быть при определенных условиях переведен в жидкое состояние. С этого времени начинается систематическое изучение свойств газов.

### Опыт Эндрюса

Опыты Т. Эндрюса с углекислотой ( $\text{CO}_2$ ), которые он проводил в 1857-1869 гг., показали, что газ может быть переведен в жидкую фазу в изотермическом процессе сжатия в случае, если давление газа ниже критического, при котором пропадает различие между жидкостью и газом в равновесном состоянии, т.е.  $v_{\text{ж}} = v_{\text{г}} = v_{\text{кр}}$ . При критическом давлении удельная теплота парообразования равна нулю, так как из уравнения Клапейрона-

Клаузиуса следует  $r = (v_{\text{г}} - v_{\text{ж}})T \frac{dp}{dT}$ .

Суть опыта заключалась в следующем. Прозрачный цилиндр, заполненный  $\text{CO}_2$  и закрытый поршнем, помещался в проточную жидкость, в которой поддерживалась заданная температура. Перемещение поршня при сжатии осуществлялось очень медленно, чтобы сделать процесс изотермическим. В результате опытов было обнаружено, что на участке  $a-b$  при  $t_1$  поведение изотермы близко к  $pv = \text{const}$ , а газ оставался прозрачным. В точке  $b$  наблюдался излом кривой. Далее, на участке  $b-c$  изотерма совпадала с изобарой, а в газе появлялась жидкая фаза. В точке  $c$  газообразная фаза полностью исчезала. При дальнейшем сжатии изотерма приближалась к изохоре. Выполнив опыты при температурах  $t_1 \dots t_n$  и соединив точки, где изотермы имели излом (в точке “кр” - перегиб), Эндрюс получил кривые, отделяющие однофазные области от двухфазной (нижнюю  $c$ -кр и верхнюю  $кр$ - $b$  бинодали, см. рис.9.1). Опыты показали, что для  $\text{CO}_2$  критические температура и давление равны соответственно  $t_{\text{кр}} = 31^\circ\text{C}$  и  $p_{\text{кр}} = 7,4$  МПа.

### Сжимаемость реальных газов

Значительный вклад в решение проблемы сжимаемости газов внес Е. Амагá, который в период с 1878 по 1893 гг. исследовал поведение многих газов в зависимости от давления при разных температурах. На рис.9.2 в  $pv$ - $p$  диаграмме показан ход изотерм реального газа. Как видно из рисунка, изотермы имеют экстремальные точки, где  $\left(\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right)_T = 0$ , в то время как изотерма идеального газа в  $pv$ - $p$  диаграмме изображается прямой линией, параллельной оси  $p$ .

Рассмотрим поведение реального газа, введя понятие коэффициента сжимаемости  $z = \frac{pv}{RT}$ . Еще Клаузиус считал, что наличие объема у молекул газа должно привести уравнение состояния идеального газа к виду

$$p(v-b) = RT, \quad (9.1)$$

где  $b$ - “недоступный” объем, зависящий от числа молекул и их размера, откуда  $p = \frac{RT}{(v-b)}$ , т.е. давление в реальном газе больше, чем в идеальном при той же температуре.

Поведение изотерм Амага можно объяснить следующим образом. При небольшом давлении (малых плотностях газа) преобладают силы взаимного притяжения молекул и сжимаемость газа улучшается (коэффициент сжимаемости  $z$  уменьшается).



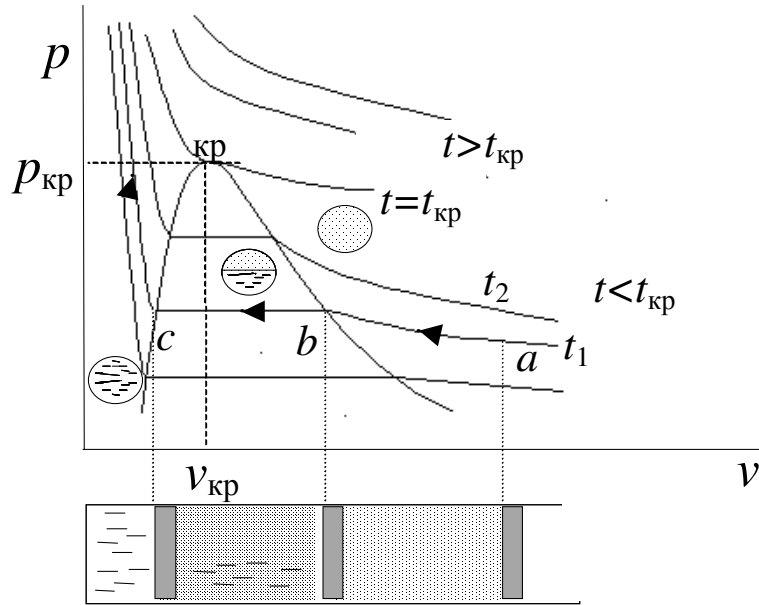


Рис.9.1

При значительных давлениях определяющую роль играет собственный объем молекул и сжимаемость ухудшается, а  $pv$  и  $z$  растет. Выше точки Бойля  $B$ , где  $\left(\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right)_{T,P=0} = 0$ , сжимаемость ухудшается даже в разреженных газах ( $p \rightarrow 0$ ) из-за преобладания сил отталкивания.

Уравнение Ван-дер-Ваальса (1873 г.)

Ван-дер-Ваальс в отличие от Клаузиуса при выводе уравнения состояния реального газа учел не только объем, занимаемый молекулами, но и действие межмолекулярных сил. Он получил уравнение, которое качественно отражает поведение вещества вплоть до перехода из газообразного состояния в жидкое.

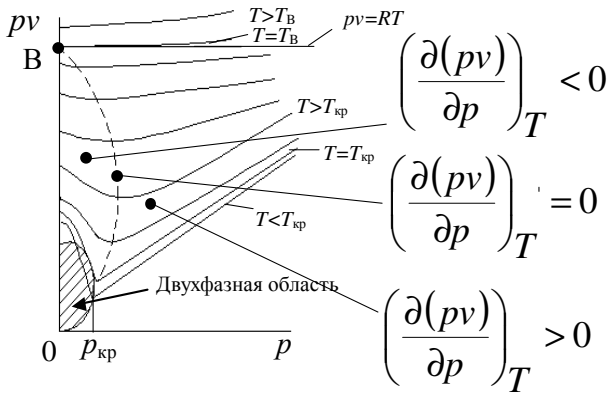


Рис.9.2

Внутри газа силы притяжения действуют на молекулу во всех направлениях одинаково, но на границах объема (поверхности раздела с другими фазами, стенки сосуда) на молекулы действует результирующая сила, направленная внутрь газа. Этот эффект приводит к уменьшению давления газа на стенку сосуда на величину

$$p_{\text{доп}} = \frac{a}{v^2}, \quad \text{т.е.} \quad p = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{v^2} \quad \text{или} \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT, \quad (9.2)$$

где  $a$ - константа, зависящая от природы газа. Умножив (9.2) на отношение  $v^2/p$ , получим

$$v^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p} = 0. \quad (9.3)$$

Ван-дер-Ваальс показал, что при обычных плотностях  $b$  равно учетверенному собственному объему молекул одного киломоля газа. Уравнение Ван-дер-Ваальса относительно объема является кубическим, т.е. имеет три корня. При  $p < p_{кр}$  имеем три вещественных корня:  $v'_1$ ,  $v_{2см}$  и  $v''_3$ . В критической точке все три корня вещественны и равны  $v_{кр}$ . В области  $p > p_{кр}$  один корень вещественный и два мнимых. На рис.9.3 в  $p$ - $v$  диаграмме показан ход изотерм Ван-дер-Ваальса. Соединив точки изотерм, отвечающие условию  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$ ,

получим верхнюю ( $a$ - $c$ -кр) и нижнюю ( $b$ - $d$ -кр) спинодали. В области, заключенной между нижними бинодалью и спинодалью (заштрихованная площадь) вещество может находиться в однофазном жидком метастабильном состоянии (перегретом относительно температуры насыщения). В области между верхними бинодалью и спинодалью пар может находиться в переохлажденном состоянии. В области между спинодалями, где  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \geq 0$

имеет место механическая неустойчивость, то есть здесь вещество может находиться только в двухфазном состоянии. Так как в критической точке изотерма имеет перегиб, то  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$  и  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$ . Взяв эти производные и приравняв их нулю, найдем постоянные

$a$  и  $b$ :  $a = 3p_{кр}v_{кр}^2$ ;  $b = \frac{v_{кр}}{3}$ . Подставив эти значения в (9.3), определим  $R = \frac{8}{3} \frac{p_{кр}v_{кр}}{T_{кр}}$ .

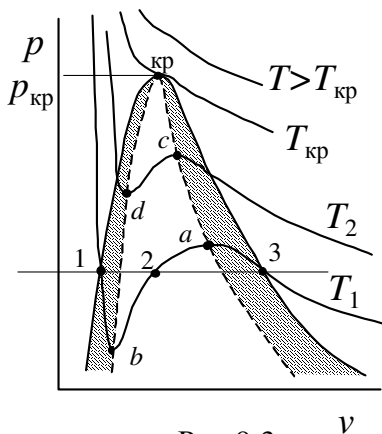


Рис.9.3

Вводя безразмерные давление  $\pi = \frac{p}{p_{кр}}$ , удельный объем

$\omega = \frac{v}{v_{кр}}$  и температуру  $\tau = \frac{T}{T_{кр}}$ , с учетом  $a$  и  $b$  получим уравнение Ван-дер-Ваальса в безразмерном виде

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \quad (9.4)$$

Уравнения состояния, записанные в безразмерном виде, используются в теории подобия реальных газов.

Кроме уравнения Ван-дер-Ваальса существует большое число уравнений состояния реальных газов (более 150). В уравнении Бертелло учитывается ослабление межмолекулярных связей с ростом температуры

$$\left(p + \frac{a}{v^2T}\right)(v - b) = RT. \quad (9.5)$$

Уравнение (9.5) удовлетворительно согласуется с опытными данными при низких давлениях.

Первое и второе уравнения Дитеричи имеют вид

$$p(v - b) = RT e^{-\frac{a}{RTv}}, \quad (9.6)$$

$$\left(p + \frac{a}{v^{5/3}}\right)(v - b) = RT. \quad (9.7)$$

Большое распространение при описании и моделировании свойств реальных газов получили уравнения состояния с вириальными коэффициентами

$$pv = RT \left( 1 + \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v^3} + \dots \right). \tag{9.8}$$

Зависимость изобарной теплоемкости от давления

По определению удельная изобарная теплоемкость есть производная от энтальпии по температуре при постоянном давлении

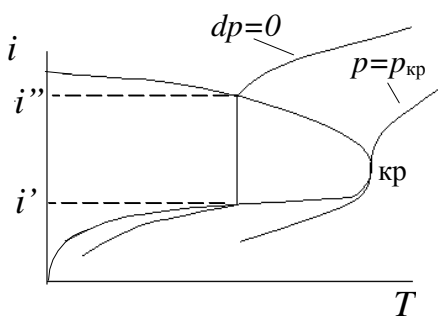


Рис.9.4

$c_p = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p$ . Рассматривая процессы в  $i-T$  диаграмме

(рис.9.4), приходим к выводу, что в двухфазной области и в критической точке  $c_p = \infty$ , так как

$\left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p = \infty$ . Отметим, что изохорная теплоемкость  $c_v$  в

двухфазной области имеет конечную величину. Из рисунка видно, что на пограничных кривых имеет место скачок теплоемкости, но в области однофазного состояния веще-

ства  $c_p$  имеет конечные значения, так как  $\left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \neq \infty$ . Вблизи верхней пограничной

кривой теплоемкость пара выше, чем вдали от нее, так в первом случае подведенная теплота идет не только на увеличение температуры пара, но и на работу диссоциации, связанную с разрушением крупных ассоциаций молекул на более мелкие. Данное положение иллюстрируется рисунками 9.5 и 9.6. На рис. 9.5 показано изменение теплоемкости пара при  $p < p_{кр}$ , а на рис.9.6 - при  $p \geq p_{кр}$ , где имеют место аналогичные явления.

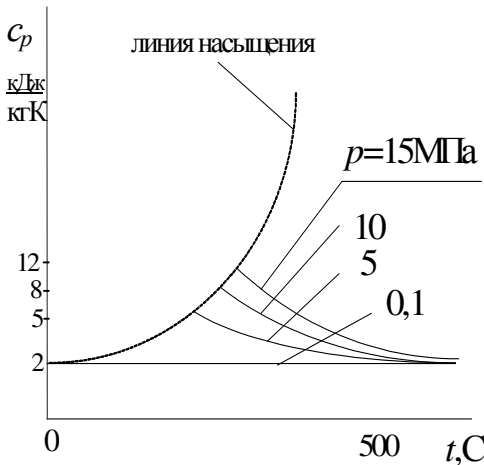


рис. 9.5

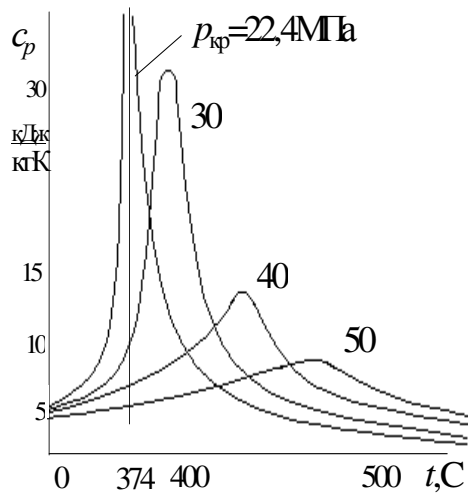


рис.9.6

Дросселирование газов и паров. Эффект Джоуля-Гомсона

Если поток реального газа пропускать через пористую вставку (дроссель), то в зависимости от исходных параметров он или охладится, или нагреется, но давление его всегда уменьшается ( $dp < 0$ ).

Дросселирование газов и жидкостей широко применяется в холодильной технике для получения низких температур. На рис.9.7а показан характер изменения статического да-

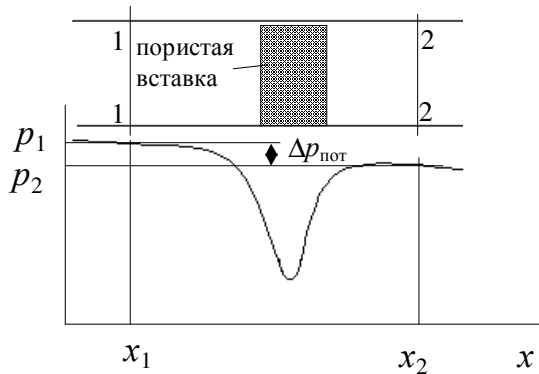


Рис. 9.7а

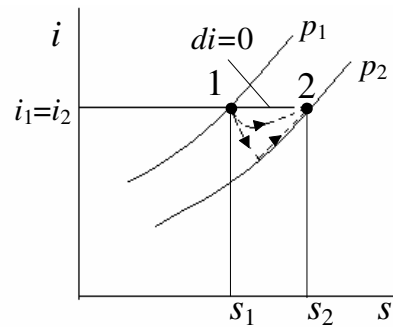


Рис. 9.7б

вления в адиабатическом канале с пористой вставкой. Из рисунка видно, что восстановление давления на координате  $x_2$  происходит до более низкого значения  $p_2 < p_1$ , т.е. имеют место гидравлические потери  $\Delta p_{\text{пот}} = p_1 - p_2$  при прохождении потоком вставки. Процесс дросселирования является сугубо неравновесным процессом и его нельзя показать в диаграмме состояния. Однако можно показать, что при дросселировании энthalпия потока остается неизменной, т.е.  $i_1 = i_2$ , или  $di = 0$  (см. рис.9.7б). Покажем, что это так. Для двух сечений 1-1 и 2-2, достаточно удаленных от вставки, можно написать уравнение сохранения энергии для адиабатического канала в виде  $i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2}$ . Так как расход вдоль трубы не меняется, то  $\rho_1 F_1 c_1 = \rho_2 F_2 c_2$  (уравнение сплошности). Будем считать, что газ движется в трубе с незначительной скоростью, т.е. газ несжимаем и  $c_1 = c_2$ . Канал постоянного сечения,  $F_1 = F_2$ , следовательно,  $c_1 = c_2$ . Таким образом, доказано, что  $i_1 = i_2$ . Так как  $i = f(p, T)$ , то при дросселировании  $di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp = 0$ .

Из последнего выражения получим

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = 0, \text{ или}$$

$$\alpha_i = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = -\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T / \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T / c_p, \quad (9.9)$$

где  $\alpha_i = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i$  - коэффициент адиабатического дросселирования. Дифференцируя по  $p$  при

$T = \text{const}$  уравнение объединенного закона термодинамики для обратимого процесса  $Tds = di - vdp$ , получим

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - v, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + v. \quad (9.10)$$

Подставляя (9.10) в (9.9) с учетом одного из уравнений Максвелла  $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ , най-

дем, что 
$$\alpha_i = \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v}{c_p} \tag{9.11}$$

Приравнявая  $\alpha_i$  нулю, получим уравнение кривой инверсии

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = 0. \tag{9.12}$$

Кривая инверсии разделяет области положительных и отрицательных значений  $\alpha_i$ . На рис.9.8 в безразмерной  $\pi$ - $\tau$  диаграмме показана кривая инверсии Ван-дер-Ваальсовского газа. Из рисунка видно, что область, где  $\alpha_i > 0$  значительна, так как  $\pi_{и} = p_{и}/p_{кр} = 9$ ,  $\tau_{и} = T_{и}/T_{кр} = 3$ ,  $\omega_{и} = v_{и}/v_{кр} = 1$ . Выполнив расчеты, можно показать, что  $\tau_{В} = T_{В}/T_{кр} = 0,75$ ,  $\tau_{А} = T_{А}/T_{кр} = 6,75$ . Так как в процессе изоэнтروпийного расширения газ также охлаждается, то представляет интерес сравнить интегральный эффект охлаждения при  $di=0$

$$\Delta T_i = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i dp \tag{9.13}$$

и при  $ds=0$

$$\Delta T_s = \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s dp. \tag{9.14}$$

Определим  $\alpha_s = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$ . Рассматривая энтропию как функцию двух переменных  $s=f(p,T)$ ,

приравняем ее дифференциал нулю  $ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp = 0$ , откуда

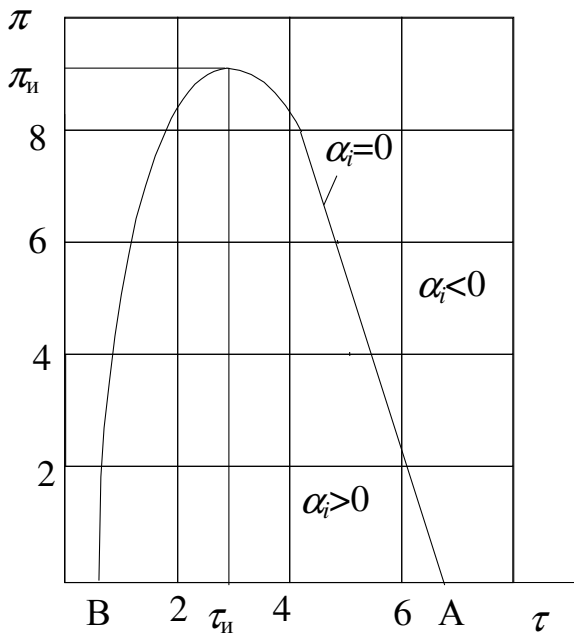


Рис. 9.8

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = 0,$$

следовательно,

$$\alpha_s = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T / \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p, \tag{9.15}$$

но  $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ , тогда

$$\alpha_s = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p / \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p. \tag{*}$$

Для определим  $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$  продифференцируем по

$T$  при  $p=\text{const}$  уравнение  $Tds = di - vdp$ :

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = c_p, \Rightarrow \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}.$$

Теперь вместо (\*) можно написать

$$\alpha_s = T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p / c_p. \quad (9.16)$$

Вычитая (9.11) из (9.16), найдем

$$\alpha_s - \alpha_i = \frac{v}{c_p}. \quad (9.17)$$

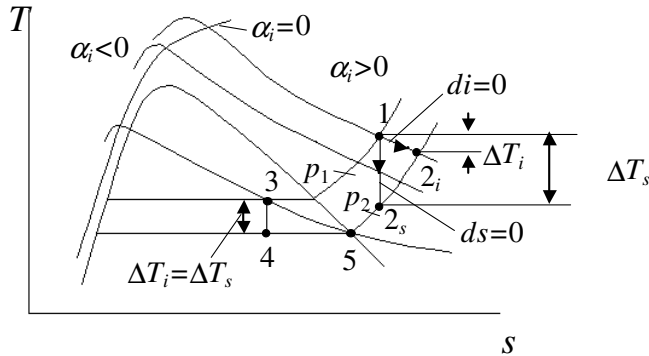


Рис. 9.9

Таким образом, при том же перепаде давления  $\alpha_s > \alpha_i$  и, следовательно, в однофазной области  $\Delta T_s > \Delta T_i$  (см. рис.9.9). В двухфазной области  $\alpha_s = \alpha_i$ , так как  $c_p = \infty$  (см. ф-лу 9.17 и рис.9.9). При дросселировании идеального газа его температура не изменяется. Действительно, взяв производную  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} = \frac{v}{T}$  и подставив ее в (9.11), получим  $\alpha_i = 0$ .

#### Водяной пар, диаграмма состояния, процесс парообразования

Вода и водяной пар с древних времен используются человечеством в качестве рабочего тела в гидравлических и паровых машинах. Первая паровая машина была создана в Англии в 1710 г. Ньюменом и Коулейном и использовалась для откачки воды из шахт. Основными элементами машины были вертикальный открытый сверху цилиндр и поршень. Водяной пар подавался снизу под поршень и поднимал его. После того как поршень достигал верхнего положения, в цилиндр впрыскивалась холодная вода. В результате конденсации пара в цилиндре создавался вакуум и поршень под действием разности давлений  $p_{ос} - p_{цил}$  и собственного веса устремлялся вниз. Паровые машины, работавшие на основе этого принципа, назывались “атмосферными”, так как в них “работала” атмосфера. КПД такой машины составлял около 0,5%. В 1765 г. И.И.Ползунов строит подобную атмосферную машину для привода мехов плавильной печи. Однако только шотландцу Джеймсу Уатту (1736-1819) удалось создать паровую машину, принцип действия которой не претерпел существенных изменений до наших дней. В машине Уатта работала уже не атмосфера, а пар с давлением 2-3 атм. Машина имела конденсатор и была двухстороннего действия: пар поочередно подводился то с одной, то с другой стороны поршня. В дальнейшем паровые машины совершенствовались за счет применения многократного расширения пара в двух-четырех цилиндрах (Артур Вольф).

На смену паровым машинам, где потенциальная энергия пара превращалась в механическую, пришли паровые турбины, в которых потенциальная энергия пара превращается в кинетическую, а затем в механическую энергию вращательного движения вала. Сопловые аппараты первых паровых турбин состояли из сходящихся насадков Рато. В 1900 г. французский профессор Август Рато (1863-1930) совместно с фирмой Соттэ-Гарле создает и испытывает первую активную паровую турбину мощностью 1000 л.с. Насадки Рато не позволяли полностью сработать перепад энтальпии пара в кинетическую энергию направленного потока, так как на срезе насадка устанавливалось так называемое критическое давление  $p_{кр} > p_{ос}$ . Только после изобретения Лавалем в 1889 г. сопла, состоящего из сходящегося и расходящегося каналов, эффективность паровых турбин резко возросла. (Карл Густав де Лаваль (1845-1913) - шведский доктор философии, изобретатель сепаратора, в 1888 г. создал однодисковую турбину активного типа).

В 1884 г. выпускник Кембриджского университета Чарльз Парсонс (1854-1931) получает патент на реактивную турбину, в которой ускорение парового потока осуществляется

не только в сопловом аппарате как у активной турбины, но и на рабочих лопатках колеса. Вскоре после этого он создает и испытывает реактивную турбину мощностью 10 л.с. с частотой вращения 18000 об/мин. Современные мощные паровые турбины строятся, как правило, реактивными.

После краткого экскурса в историю теплотехники, перейдем к рассмотрению свойств водяного пара.

Вода, как и любое другое вещество, может находиться в трех агрегатных состояниях. На рис 9.10 в  $T-s$  диаграмме показаны области существования вещества в твердом (т),

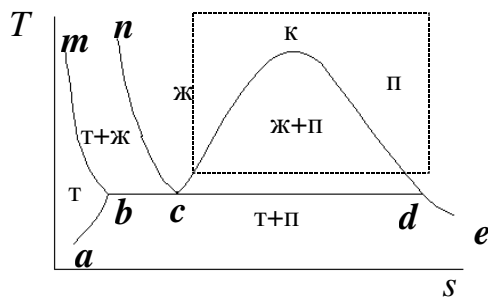


Рис. 9.10

твердом и жидком (т+ж), жидком (ж), жидком и парообразном (ж+п), твердом и парообразном (т+п) состояниях. Эти области разделяются кривыми  $ab$  и  $de$  - левой и правой пограничными кривыми двухфазной области "твердая фаза - пар";  $ск$  и  $kd$  - левой и правой пограничными кривыми двухфазной области "жидкость - пар";  $mb$  и  $nc$  - левой и правой пограничными кривыми двухфазной области "твердая фаза - жидкость";  $bcd$  - линией, соответствующей тройной точке, в которой сосуществуют все три агрегатные состояния вещества.

При изучении циклов паросиловых установок нас будет интересовать лишь область, ограниченная на фазовой диаграмме прямоугольником.

При изучении циклов паросиловых установок нас будет интересовать лишь область, ограниченная на фазовой диаграмме прямоугольником.

Рассмотрим процесс парообразования в  $T-s$  диаграмме (рис. 9.11а). Предположим, что имеется вода с параметрами, которые характеризуются точкой 1. Будем при постоянном давлении подводить теплоту к воде до тех пор, пока она не станет насыщенной (кипящей) - процесс 1- $s$ . При этом энтальпия воды увеличится от  $i_1$  (пл. 0-0'-1- $a$ -0) до  $i_s=i'$  (пл. 0-0'- $s$ - $b$ -0), а удельное количество подведенной теплоты равно  $q_{1-s} = i' - i_1$ . Полагая теплоем-

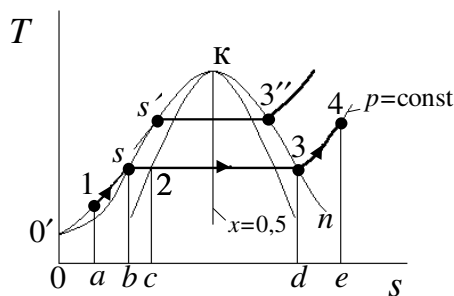


Рис. 9.11а

кость  $c_{pH_2O} = \text{const}$ , найдем увеличение энтропии

$$\Delta s_{1-s} = c_{pH_2O} \ln \frac{T_s}{T_1}$$

Дальнейший подвод теплоты приведет к образованию влажного пара (процесс  $s-2$ ), параметры которого будут определяться состоянием 2. Так как в двухфазной области  $c_p = \infty$ ,

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} = 0, \text{ т.е. изобары и изотермы в}$$

двухфазной области, включая левую и правую пограничные кривые со стороны двухфазной области, совпадают. В точке  $s$  изобара имеет излом, а теплоемкость  $c_p$  вещества скачком изменяется от конечного до бесконечного значения.

Если продолжить подвод при  $dp=0$  (процесс 2-3), то влажный пар в точке 3 превратится в сухой насыщенный пар, термодинамические параметры которого принято обозначать надстрочным индексом " :  $i''$ ,  $s''$ ,  $v''$  и т.д. Значению энтальпии  $i_3 = i''$  в  $T-s$  диаграмме соответствует площадь 3- $d$ -0-0'- $s$ -3. На правой пограничной кривой (в точке 3) изобара снова имеет излом, а теплоемкость скачком изменяется от бесконечного значения до конечной величины, так как со стороны перегретого пара

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_{pп}} > 0. \text{ Подвод теплоты в процессе 3-4 делает пар перегретым. Так как под}$$

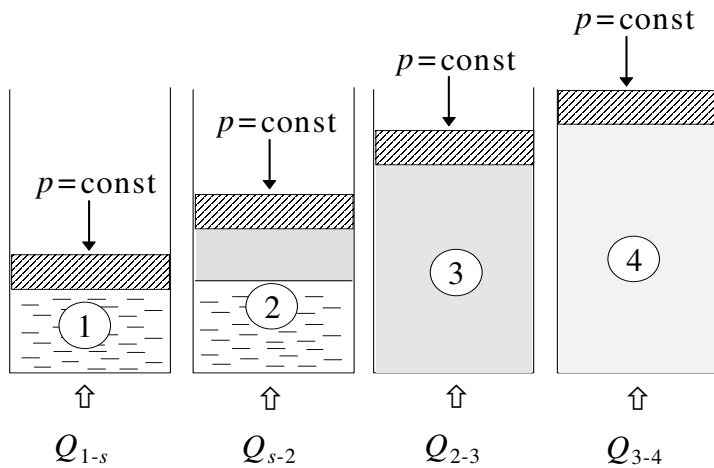


Рис. 9.116

удельной теплотой парообразования  $r$  понимают количество теплоты, которое необходимо подвести к 1 кг кипящей жидкости, чтобы превратить ее в сухой насыщенный пар, то  $r = i'' - i'$  (пл.  $b-s-3-d-b$ ). Если теперь увеличить давление от  $p_1$  до  $p_2$  и осуществить подвод теплоты, получим новые точки  $s'$  и  $3''$ . Выполнив подвод теплоты при разных давлениях и соединив точки изломов изобар, получим левую ( $0'-s-s'-k$ ) и правую ( $k-3''-3-n$ ) пограничные кривые как геометрические места состояний насыщенной жидкости и сухого насыщенного пара соответственно. В критической точке ( $k$ )  $r=0$ ,  $v' = v'' = v_{кр}$ .

#### Параметры влажного пара

Введем понятие степени сухости влажного пара  $x$  как отношение массы сухого насыщенного пара  $G''$  к общей массе смеси, состоящей из массы насыщенной воды и массы сухого насыщенного пара  $G' + G''$

$$x = \frac{G''}{G' + G''}. \quad (9.18)$$

Под степенью влажности пара понимают выражение

$$y = \frac{G'}{G' + G''}. \quad (9.19)$$

В двухфазной области объем смеси

$$V = V' + V'', \quad (9.20)$$

но  $V = Gv$ , тогда  $(G' + G'')v = G'v' + G''v''$ , откуда найдем удельный объем смеси

$$v = \frac{G'}{G' + G''}v' + \frac{G''}{G' + G''}v'' = yv' + xv'' = (1-x)v' + xv''. \quad (9.21)$$

Так как функции состояния энтальпия  $I$ , энтропия  $S$  и внутренняя энергия  $U$  обладают свойством аддитивности, то так же как и для объема, можно написать

$$I = I' + I'' = (G' + G'')i = G'i' + G''i'', \quad (9.22)$$

$$\Rightarrow i = (1-x)i' + xi'' = i' + rx;$$

$$S = S' + S'' = (G' + G'')s = G's' + G''s'', \quad (9.23)$$

$$\Rightarrow s = (1-x)s' + xs'' = s' + \frac{rx}{T_s};$$

$$U = U' + U'' = (G' + G'')u = G'u' + G''u'', \quad (9.24)$$

$$\Rightarrow u = (1-x)u' + xu''.$$

Так как  $u = i - pv$ , то удельная внутренняя энергия смеси

$$u = (1-x)(i' - pv') + x(i'' - pv''). \quad (9.25)$$

Удельная изохорная теплоемкость со стороны двухфазной области имеет конечное значение и зависит от степени сухости пара

$$c_v = (1-x)c'_{вдф} + xc''_{вдф}, \quad (9.26)$$

где индексом “дф” обозначены теплоемкости со стороны двухфазной области.



T-s, p-v и i-s диаграммы водяного пара.

Таблицы свойств водяного пара

Диаграммы состояния водяного пара (особенно T-s и i-s) широко используются при выполнении термодинамических расчетов энергетического оборудования. Чтобы построить двухфазную область T-s диаграммы, поступают следующим образом. По таблицам термодинамических свойств водяного пара, где представлены значения параметров на левой и правой пограничных кривых в зависимости от температуры (см. рис.9.12), находят при разных температурах величины s'(T<sub>1</sub>), s''(T<sub>1</sub>), s'(T<sub>2</sub>), s''(T<sub>2</sub>) и т.д.

t	T	p	v'	v''	i'	i''	r	s'	s''	s''-s'
С	К	бар	м <sup>3</sup> /кг		кДж/кг			кДж/(кгК)		

Рис.9.12

Соединив эти точки, получаем левую и правую пограничные кривые. Так как в двухфазной области p=f(T), то на T-s диаграмме можно нанести линии p=f(T)=const. Задаваясь значением x=const и переходя от одной изотермы к другой, найдем значение

$$s = (1-x)s' + xs'',$$

отвечающее данной степени сухости. Используя формулу  $x = \frac{v-v'}{v''-v'}$ ,

для разных температур наносим точки, отвечающие v=const, т.е. строим изохоры. Аналогичным образом строятся линии i=const. Для построения изобар и изохор в области перегретого пара используются таблицы, показанные на рис.9.13. Эти таблицы позволяют по заданной температуре и давлению находить v, i, s и c<sub>p</sub> для недогретой до температуры насыщения воды (значения этих величин лежат выше жирной горизонтальной черты) и перегретого пара (ниже жирной черты).

t	p			
	v	i	s	c <sub>p</sub>
недогретая до температуры насыщения вода				
перегретый пар				

Рис.9.13

Вид фазовых диаграмм водяного пара и ход основных кривых - изотерм, изобар и изохор в p-v и i-s координатах представлены на рисунках 9.15 и 9.16 соответственно. Как и в T-s диаграмме, внутри двухфазной области изотермы и изобары совпадают. В то же время i-s диаграмма (была создана в 1904г. профессором Высшей технической школы в г. Дрездене Мольте Рихардом (1863-1935)) имеет ряд особенностей по сравнению с двумя други-

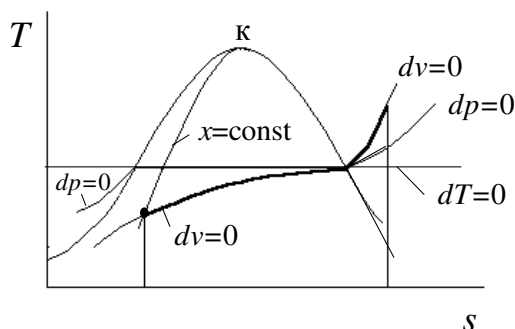


Рис. 9.14

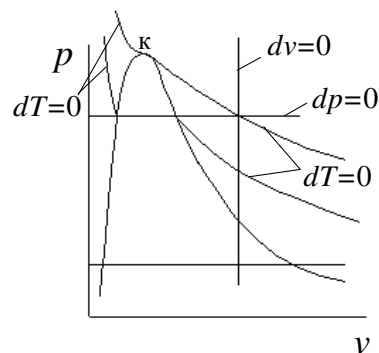


Рис. 9.15

ми. Так, в силу того, что  $\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_{\text{кр}} = T_{\text{кр}}$ , тангенс угла наклона касательной к пограничной кривой в критической точке больше нуля и, следовательно, критическая точка (к) лежит на восходящей ветви пограничной кривой (рис.9.16). Далее, поскольку  $\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p = T$ , угол наклона изобар (и совпадающих с ними изотерм) в двухфазной области увеличивается с ростом температуры, а значит и давления (см. изобары  $p_1$  и  $p_2$  на рисунке,  $p_2 > p_1$ ). В области перегретого пара изотермы и изобары расходятся: тангенс угла наклона изобар начинает расти, а изотерм - уменьшаться, приближая изотермы на бесконечности к асимптоте  $di=0$ .

### Процессы в водяном паре

Расчет процессов в водяном паре можно выполнить тремя способами - аналитическим, используя достаточно сложные уравнения состояния водяного пара, при помощи таблиц термодинамических свойств водяного пара и диаграмм состояния. Рассмотрим решение задач с использованием таблиц и диаграмм состояния.

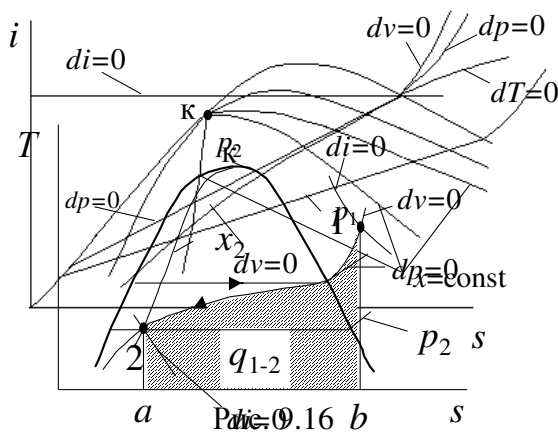


Рис. 9.17

ценного пара в первом приближении определяем  $p_2 = f(v_2'')$ . Полученное значение нужно уточнить, чтобы удовлетворить условию  $v = (1 - x_2)v_2' + x_2v_2'' = \text{const}$ . Удельную внутреннюю энергию влажного пара в точке 2 определим по формуле  $u_2 = i_2 - p_2v_2$ , где  $i_2 = (1 - x_2)i_2' + x_2i_2''$ . Так как в рассматриваемом случае  $dv=0$ , то согласно первому закону термодинамики удельное количество теплоты, отводимое от пара в процессе 1-2, равно убыли внутренней энергии  $q_{1-2} = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2)$  и изображается в  $T$ - $s$  диаграмме площадью 1-2-a-b-1.

При использовании диаграммы состояния решение задачи упрощается. Пересечение изобары  $p_1$  и изотермы  $T_1$  определяет начальное состояние 1. Двигаясь из точки 1 вниз по изохоре  $v$  до пересечения с линией  $x_2 = \text{const}$ , определим  $p_2, i_2, s_2$ . Удельную внутреннюю энергию в точках 1 и 2 и  $q_{1-2}$  определим по вышеприведенным формулам.

### Процесс при постоянном давлении, $dp=0$

Допустим, что в изобарном процессе точка 1 находится в жидкой области и определяется параметрами  $p$  и  $T_1$ , а точка 2 лежит

### Процесс при постоянном объеме, $dv=0$

Пусть в изохорном процессе начальное состояние перегретого пара определяется точкой 1 с параметрами  $p_1$  и  $T_1$ , а конечное состояние определено степенью сухости  $x_2$ . По таблицам перегретого пара зная  $p_1$  и  $T_1$ , находим удельный объем перегретого пара  $v_1$ , удельные энтальпию и энтропию перегретого пара  $i_1$  и  $s_1$ . По формуле  $u_1 = i_1 - p_1v_1$  определяем удельную внутреннюю энергию пара. Для того чтобы определить параметры пара в точке 2, сделаем допущение, что в выражении  $v = (1 - x_2)v_2' + x_2v_2''$  первым слагаемым можно пренебречь, т.е.  $x_2v_2'' \gg (1 - x_2)v_2'$ , тогда  $v_2''(p_2) = \frac{v}{x_2}$ . Зная  $v_2''$ , по таблицам насы-

в двухфазной области и определяется степенью сухости влажного пара  $x_2$ . По значениям параметров в точке 1 с помощью таблиц определяем  $i_1, v_1, s_1$ . Так как давление известно, по таблицам насыщенных воды и пара находим  $i'(p)$  и  $i''(p)$ . По формуле

$$i_2 = (1 - x_2)i'_2 + x_2i''_2$$

находим удельную энтальпию смеси. В изобарном процессе подводимая теплота равна изменению энтальпии  $q_{1-2} = i_2 - i_1$ . Удельная внутренняя энергия в точках 1 и 2

$$u_1 = i_1 - pv_1, u_2 = i_2 - pv_2, \text{ где}$$

$$v_2 = (1 - x_2)v'(p) + x_2v''(p).$$

Работа изменения объема в изобарном процессе  $l_{1-2} = p(v_2 - v_1)$ .

Изотермический процесс,  $dT=0$

Пусть начальная точка 1 во влажном паре определяется параметрами  $x_1$  и  $T$ . Зная  $T$ , по таблицам определяем  $p, v', v'', i', i'', s' \text{ и } s''$ , после чего находим  $v_1 = (1 - x_1)v' + x_1v''$ ,

$i_1 = (1 - x_1)i' + x_1i''$ ,  $s_1 = (1 - x_1)s' + x_1s''$ ,  $u_1 = i_1 - p_1v_1$ . Точка 2 определяется заданными  $T$  и  $p_2$ , по значениям которых с помощью таблиц перегретого пара находим  $v_2, i_2$  и  $s_2$ . Далее можно определить  $u_2 = i_2 - p_2v_2$ ,  $q_{1-2} = T(s_2 - s_1)$ ,  $\Delta u_{1-2} = u_2 - u_1$ ,  $\Delta i_{1-2} = i_2 - i_1$ , удельную работу изменения объема  $l_{1-2} = q_{1-2} - \Delta u_{1-2}$  и удельную техническую работу

$$l_{\text{тех}1-2} = q_{1-2} - \Delta i_{1-2}.$$

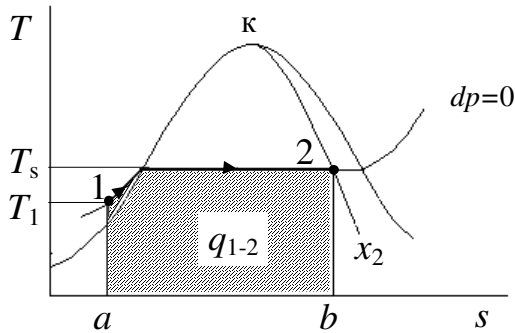


Рис. 9.18

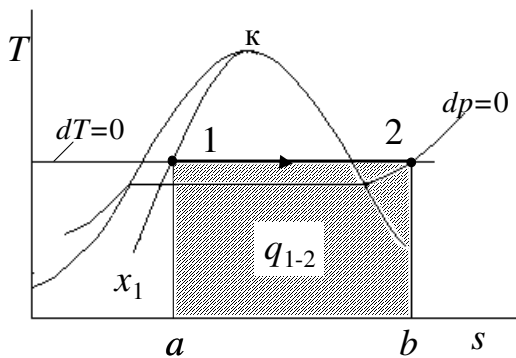


Рис. 9.19в.

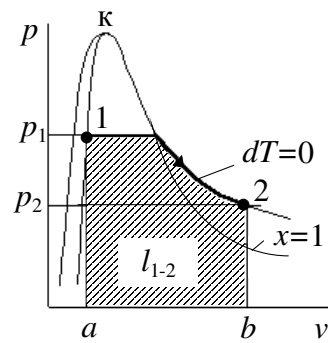
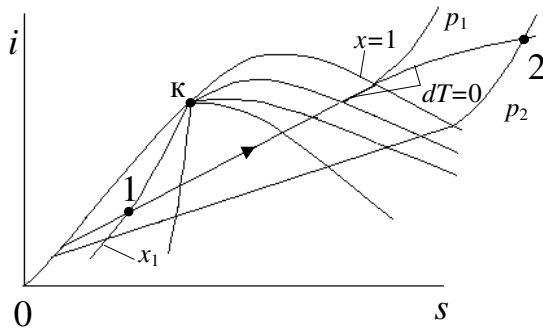


Рис.9.19б



9.19а

Изоэнтروпийный процесс,  $ds=0$

Будем считать, что начальная точка 1 процесса находится в области перегретого пара и определяется параметрами  $p_1$  и  $T_1$ , а конечная точка 2 лежит на изобаре  $p_2$ . По значениям  $p_1$  и  $T_1$  с помощью таблиц перегретого пара найдем  $v_1, i_1$  и  $s_1$ ,  $u_1 = i_1 - p_1v_1$ . Так как  $s = \text{const}$ , то из  $s_1 = s_2 = (1 - x_2)s'_2 + x_2s''_2$  найдем степень сухости в конце изоэнтропийного процесса  $x_2 = \frac{s_1 - s'_2}{s''_2 - s'_2}$ , после чего можно оп-

ределить остальные параметры в точке 2:  $i_2 = i'_2 + r(p_2)x_2$ ,  $v_2 = (1 - x_2)v'(p_2) + x_2v''(p_2)$  и  $u_2 = i_2 - p_2v_2$ .

Удельную работу изменения объема (пл. 1-2-d-c-1 в  $p-v$  диаграмме) найдем как разность удельных внутренних энергий  $l_{1-2} = u_1 - u_2$ . Техническая работа (пл. a-1-2-b-a):  $l_{\text{тех1-2}} = i_1 - i_2$ .

Рассматривая процесс расширения пара в сопле, можно написать  $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = i_1 - i_2$ , откуда скорость парового потока на срезе идеального сопла  $c_2 = [2(i_1^* - i_2)]^{0.5}$ , где  $i_1^* = i_1 + \frac{c_1^2}{2}$ . В  $T-s$  диаграмме энтальпия в точке 1 изображается площадью 1-c-0-a-1, а в точке 2 - площадью 2-c-0-b-2. Разность этих площадей определит техническую работу или изменение кинетической энергии пара.

Влажный воздух

Механическая смесь сухого воздуха и водяного пара называется влажным воздухом. С понятием "влажный воздух" мы встречаемся как в повседневной жизни, когда утром по радио слышим объявление об относительной влажности атмосферного воздуха, так и в

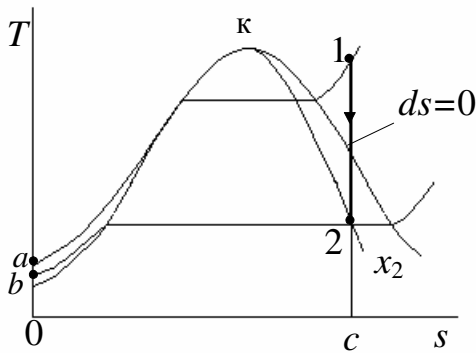


Рис. 9.20а

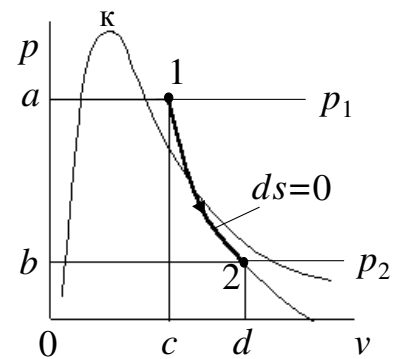


Рис.9.20б

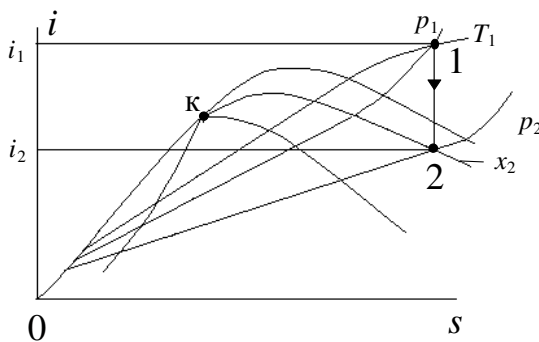


Рис. 9.20в

технике при рассмотрении, например, процессов в кондиционерах, предназначенных для поддержания в помещениях требуемой влажности и температуры воздуха, в сушильных камерах, где происходит обезвоживание материалов, в градирнях, где за счет испарения воды происходит ее охлаждение.

В отличие от газовых смесей водяной пар, находящийся в воздухе, при определенных условиях может превращаться в

жидкое или даже в твердое состояние, что необходимо учитывать при выполнении термодинамических расчетов. Так как процессы, протекающие во влажном воздухе, идут как правило, при атмосферном давлении, то влажный воздух можно считать разреженной смесью, подчиняющейся уравнению состояния идеального газа и закону Дальтона. Парциальное давление водяного пара  $p_n$  при данной температуре не может быть выше давления насыщения, которое зависит только от температуры смеси и не зависит от давления смеси, т.е.  $p_n \leq p_s = f(T_{\text{см}})$ . Влажный воздух, в котором  $p_n < p_s$  будем называть ненасы-

щенным, если  $p_{\Pi} = p_s$  - насыщенным. При данном  $p_{\Pi} < p_s$  водяной пар находится в перегретом состоянии (см. точку 1 на рис.в1). Если в изобарном процессе 1-2 отводить теплоту, то в точке 2 водяной пар станет насыщенным. Температура, при которой это происходит, называется точкой росы (точка 2). Дальнейшее понижение температуры приводит к выпадению влаги и уменьшению парциального давления пара.

Введем такие понятия как массовое влагосодержание, мольное влагосодержание, относительная и абсолютная влажность, степень насыщения. Отношение массы воды, которая может находиться в любом агрегатном состоянии, к массе сухого воздуха называется массовым влагосодержанием

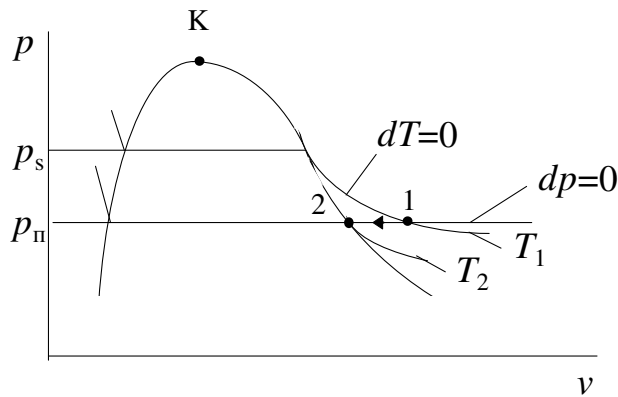


Рис. 9.21

$$d = \frac{G_{\text{вод}}}{G_{\text{возд}}} \quad (9.27)$$

Получим выражение для мольного влагосодержания  $x = \frac{M_{\text{вод}}}{M_{\text{возд}}}$ . Так

как  $M = \frac{G}{\mu}$ , то

$$x = \frac{G_{\text{вод}}}{\mu_{\text{вод}}} \frac{\mu_{\text{возд}}}{G_{\text{возд}}} = \frac{\mu_{\text{возд}}}{\mu_{\text{вод}}} d \quad (9.28)$$

Найдем зависимость  $x = f(p_{\Pi})$ . Для пара и воздуха можно написать

$$p_{\Pi} V_{\text{см}} = G_{\Pi} R_{\Pi} T_{\text{см}} \quad (a)$$

$$p_{\text{возд}} V_{\text{см}} = G_{\text{возд}} R_{\text{возд}} T_{\text{см}} \quad (b)$$

Разделив (a) на (b), будем иметь

$$\frac{p_{\Pi}}{p_{\text{возд}}} = d_{\Pi} \frac{R_{\Pi}}{R_{\text{возд}}} = d_{\Pi} \frac{\mu_{\text{возд}}}{\mu_{\Pi}} \quad (9.29)$$

Подставляя значения  $d$  из (9.28) в (9.29), найдем

$$x = \frac{p_{\Pi}}{p_{\text{возд}}} = \frac{p_{\Pi}}{p - p_{\Pi}}, \quad (9.30)$$

где  $p = p_{\Pi} + p_{\text{возд}}$  - давление смеси.

Из (9.29) с учетом (9.30) можно получить

$$d_{\Pi} = \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\text{возд}}} x = \frac{p_{\Pi}}{p - p_{\Pi}} \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\text{возд}}} = 0,622 \frac{p_{\Pi}}{p - p_{\Pi}}, \quad (9.31)$$

так как  $\mu_{\Pi} = 18,016$ ,  $\mu_{\text{возд}} = 28,960$ .

Максимально возможное паросодержание при заданной температуре влажного воздуха определим из (9.30) и (9.31) при  $p_{\Pi} = p_s$ .

Относительной влажностью называется отношение парциального давления пара к давлению насыщения при той же температуре, т.е.

$$\varphi = \left( \frac{p_{\Pi}}{p_s} \right)_t, \quad 0 \leq \varphi \leq 1. \quad (9.32)$$

Абсолютная влажность воздуха равна парциальному давлению пара

$$p_{\Pi} = \frac{G_{\Pi} R_{\Pi} T_{\text{см}}}{V_{\text{см}}} \quad (9.33)$$

Иногда под абсолютной влажностью подразумевают плотность пара при его парциальном давлении (парциальная плотность):

$$\rho_{\text{п}} = \frac{G_{\text{п}}}{V_{\text{см}}} = \frac{p_{\text{п}}}{R_{\text{п}} T_{\text{см}}}. \quad (9.34)$$

Степень насыщения - это отношение массового паросодержания во влажном воздухе к максимально возможному при данной температуре

$$\psi = \frac{d_{\text{п}}}{d_{\text{с}}} = \frac{p_{\text{п}}}{p - p_{\text{п}}} \cdot \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu_{\text{возд}}} \cdot \frac{p - p_{\text{с}}}{p_{\text{с}}} \cdot \frac{\mu_{\text{возд}}}{\mu_{\text{п}}} = \frac{p_{\text{п}}(p - p_{\text{с}})}{p_{\text{с}}(p - p_{\text{п}})} = \varphi \left( \frac{p - p_{\text{с}}}{p - p_{\text{п}}} \right). \quad (9.35)$$

Определим молекулярную массу и плотность влажного воздуха.

$$\mu_{\text{см}} = r_{\text{п}} \mu_{\text{п}} + r_{\text{возд}} \mu_{\text{возд}} = \frac{p_{\text{п}}}{p} \mu_{\text{п}} + \frac{p - p_{\text{п}}}{p} \mu_{\text{возд}} = \frac{p_{\text{п}} \mu_{\text{п}} + (p - p_{\text{п}}) \mu_{\text{возд}}}{p} \quad (9.36)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{см}} &= \frac{p}{R_{\text{см}} T_{\text{см}}} = \frac{p \mu_{\text{см}}}{R_0 T_{\text{см}}} = \frac{p_{\text{п}} \mu_{\text{п}} + (p - p_{\text{п}}) \mu_{\text{возд}}}{R_0 T_{\text{см}}} = \\ &= \frac{p \mu_{\text{возд}} - (\mu_{\text{возд}} - \mu_{\text{п}}) p_{\text{п}}}{R_0 T_{\text{см}}}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Из формулы (9.37) видно, что  $\rho_{\text{см}} < \rho_{\text{возд}}$ , т.е. влажный воздух легче, чем сухой.

Энтальпию влажного воздуха представим в виде суммы энтальпий сухого воздуха и пара

$$i_{\text{см}} (G_{\text{возд}} + G_{\text{п}}) = G_{\text{возд}} i_{\text{возд}} + G_{\text{п}} i_{\text{п}}.$$

После деления на  $G_{\text{в}}$  будем иметь

$$i_{\text{см}} (1 + d_{\text{п}}) = i_{\text{возд}} + d_{\text{п}} i_{\text{п}}, \quad (9.38)$$

или, вводя обозначение  $I = i_{\text{см}} (1 + d_{\text{п}})$ :

$$I = i_{\text{возд}} + d_{\text{п}} i_{\text{п}}. \quad (9.39)$$

Полагая, что энтальпия пара при  $0^{\circ}\text{C}$  равна нулю, а пар - идеальный газ, запишем

$$i_{\text{п}} = r(0^{\circ}\text{C}) + c_{\text{пл}} t, \quad (9.40)$$

где  $c_{\text{пл}} = 1,93$  кДж/(кг·К),  $r(0^{\circ}\text{C}) = 2501$  кДж/кг - удельная теплота парообразования воды при  $t = 0^{\circ}\text{C}$ .

В самом общем случае энтальпия смеси определяется с учетом наличия во влажном воздухе воды в различных агрегатных состояниях

$$I = i_{\text{возд}} + d_{\text{п}} i_{\text{п}} + d_{\text{ж}} i_{\text{ж}} + d_{\text{л}} i_{\text{л}},$$

где  $d_{\text{ж}}$ ,  $d_{\text{п}}$  - массовые содержания жидкой фазы и льда в сухом воздухе;

$$i_{\text{л}} = \lambda_{\text{п}} + c_{\text{пл}} t = -335 + 2,1t \text{ кДж/кг}.$$

Для определения массового влагосодержания в воздухе используют психрометр - прибор, состоящий из двух термометров. Один термометр измеряет температуру воздуха в помещении, датчик другого обернут влажной тканью. Так как на испарение воды из ткани затрачивается теплота, то температура мокрой ткани будет понижаться вплоть до температуры насыщения при данном давлении, что соответствует точке росы для данного парциального давления водяного пара. Испарение воды с поверхности влажной ткани будет происходить тем интенсивнее, чем меньше влаги в воздухе (т.е. чем ниже  $p_{\text{п}}$ ). Однако снижение температуры воды, измеряемой мокрым термометром, приводит к притоку теплоты от окружающего влажного воздуха, и тепловое равновесие устанавливается при температуре выше температуры точки росы. Зная температуру сухого и мокрого термометров, по таблицам или графикам (рис.9.23) находят  $d$ . При стопроцентной влажности температуры сухого и мокрого термометров равны.

Рассмотрим процессы, протекающие на границе воздух-вода во влажной ткани. Скорость изменения энтальпии воды  $dI_{\text{ж}}/d\tau$  зависит от интенсивности конвективного подвода теплоты  $\alpha(t-t_{\text{ж}})F_{\text{ж}}$ , где  $\alpha$ - коэффициент теплоотдачи;  $F_{\text{ж}}$  - поверхность жидкостного объема, и теплоты, обусловленной испарением жидкости  $r \frac{dG_{\text{ж}}}{d\tau}$ , т.е.

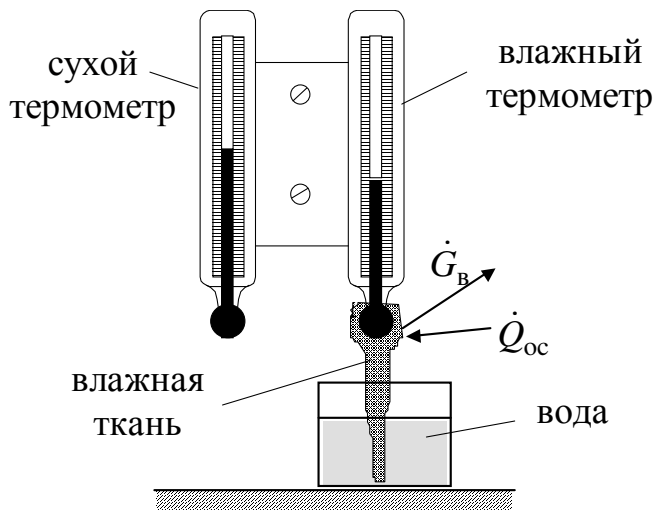


Рис. 9.22

где  $r$  - удельная теплота испарения. Так как происходит испарение воды, то  $dG_{\text{ж}} < 0$ . В связи с тем, что масса воды намного меньше массы влажного воздуха, то считают температуру воздуха  $t$  постоянной. При установлении теплового равновесия будем иметь

$$\frac{dI_{\text{ж}}}{d\tau} = c_{\text{рж}} G_{\text{ж}} \frac{dt_{\text{ж}}}{d\tau} = \alpha(t-t_{\text{ж}})F_{\text{ж}} + r \frac{dG_{\text{ж}}}{d\tau} \tag{9.41}$$

где  $r$  - удельная теплота испарения. Так как происходит испарение воды, то  $dG_{\text{ж}} < 0$ . В связи с тем, что масса воды намного меньше массы влажного воздуха, то считают температуру воздуха  $t$  постоянной. При установлении теплового равновесия будем иметь

$$\alpha(t-t_{\text{м}})F_{\text{ж}} = r \frac{dG_{\text{ж}}}{d\tau} . \tag{9.42}$$

Температура жидкости, отвечающая этому равновесию, называется температурой мокрого термометра.

Процессы во влажном воздухе удобно рассматривать в  $I$ - $d$  диаграмме, разработанной профессором Л.К. Рамзиным в 1918 г.

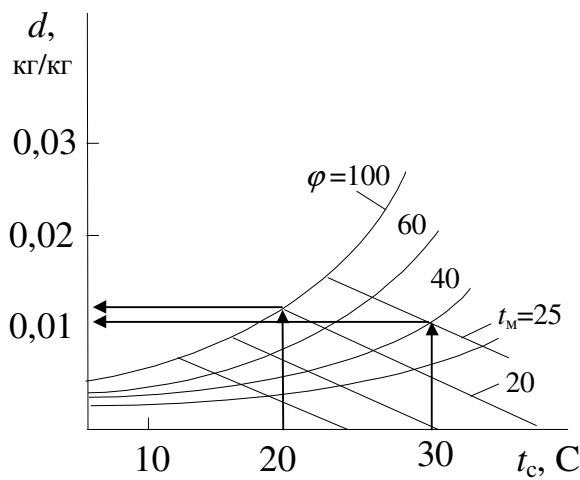


Рис. 9.23

В основе построения диаграммы лежит выражение энтальпии влажного воздуха в расчете на один килограмм сухого воздуха

$$I = t + d_{\text{н}}(2501 + 1,93t) + 4,19 d_{\text{ж}} t + d_{\text{н}}(-335 + 2,1t). \tag{a}$$

Для области ненасыщенного воздуха, взяв производную от  $I$  по  $d_{\text{н}}$  при  $t=\text{const}$ , получим

$$\left( \frac{\partial I}{\partial d_{\text{н}}} \right)_t = 2501 + 1,93t , \tag{b}$$

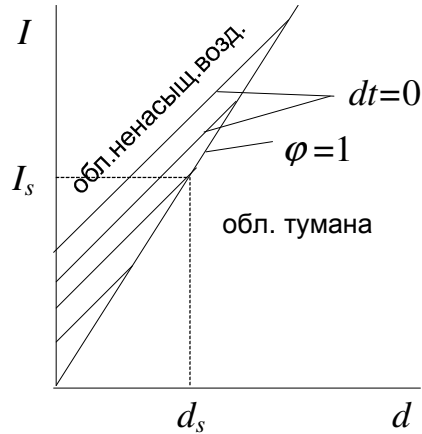


Рис.9.24

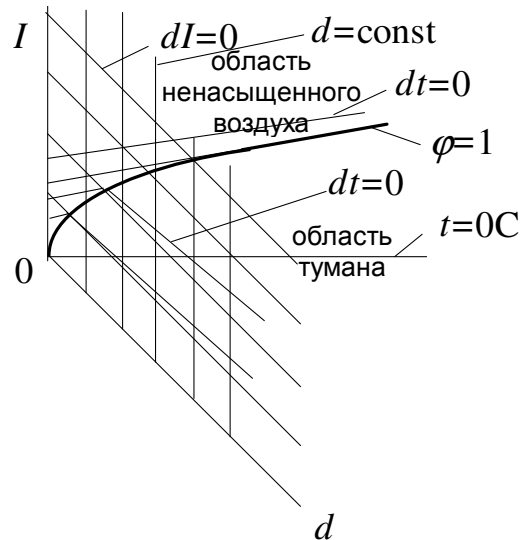


Рис. 9.25

т.е. в  $I-d$  координатах изотермы изображаются прямыми линиями, наклон которых возрастает с ростом температуры. Построение такой диаграммы (рис.9.24) показывает, что область ненасыщенного воздуха, наиболее важная для расчетов, сильно сжата и диаграмма неудобна для практического использования.

Однако если совместить изотерму  $t=0$  с осью абсцисс, область ненасыщенного воздуха увеличивается, а диаграмма становится косоугольной (линии  $I=\text{const}$  поворачиваются на угол  $135^\circ$  и идут параллельно оси  $0-d$ , рис.9.25). Для построения в  $I-d$  диаграмме линий постоянной относительной влажности  $\varphi=\text{const}$  поступают следующим образом. На каждой изотерме находят  $p_n=\varphi p_s$ , которому соответствует свое значение  $d_n = 0,622 \frac{p_n}{p - p_n}$ . При

достижении влажным воздухом температуры насыщения  $t_s$  линии  $\varphi=\text{const}$  терпят излом и поднимаются вертикально вверх (если считать, что влажный воздух подчиняется уравнению состояния идеального газа, в действительности они несколько отклоняются от вертикали), так как  $\varphi = 0,622 \frac{d_n}{d_n - 0,622}$  и при  $t > t_s$  зависит только от влагосодержания (см.

рис.2.6б). Как указывалось, при переходе через линию насыщения  $\varphi=1$  изотермы имеют излом. Действительно, взяв производную от (а) по  $d$ , где  $d=d_n+d_{ж}+d_{л}$  с учетом того, что  $d_n=d_s=\text{const}$ , а  $d_{л}=0$ , при  $t>0$  получим в области тумана

$$\left(\frac{\partial I}{\partial d}\right)_t = 4,19t \quad (c)$$

Если температура влажного воздуха ниже нуля ( $t<0^\circ\text{C}$ ), то в области тумана влага может находиться только в виде пара и льда. Из (а), с учетом того, что  $d_n=d_s=\text{const}$ , а  $d_{ж}=0$ , найдем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial d}\right)_{t<0} = -335 + 2,1t \quad (d)$$

Сравнивая (с) и (d), видим, что изотермы тумана при  $t<0^\circ\text{C}$  идут круче, чем изотермы при  $t>0^\circ\text{C}$ .



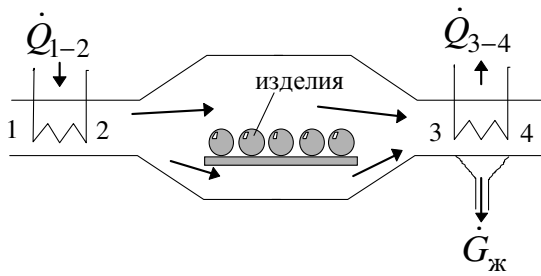


Рис. 9.26а

В качестве примера рассмотрим процессы в сушильной камере, где происходит сушка влажных изделий (см. рис.9.26а и 9.26б). В камеру поступает влажный воздух с параметрами, определяемыми точкой 1. В процессе 1-2 к влажному воздуху с  $\varphi=10\%$  подводится теплота и его температура повышается от 40 до  $155^{\circ}\text{C}$ . В процессе 2-3 при  $dI=0$  происходит увлажнение воздуха за счет влаги, отнимаемой от изделий. Может возникнуть вопрос, почему увлажнение идет при постоянной энтальпии? Дело в том, что рассматривая процесс в идеальной сушилке (т.е. при отсутствии тепловых потерь), считают что температура осушаемого тела и влаги в нем равна  $0^{\circ}\text{C}$ , а значит энтальпия жидкости равна нулю. Тогда в процессе сушки теплота испарения  $r\dot{G}_{\text{ж}}$ , которую получает воздух, равна теплоте, передаваемой от воздуха к изделиям  $\alpha(t - t_{\text{изд}})F_{\text{изд}}$ , т.е.

$$\Delta I = \alpha(t - t_{\text{изд}})F_{\text{изд}} - r\dot{G}_{\text{ж}} = 0.$$

При охлаждении воздуха до температуры  $t=30^{\circ}\text{C}$  (процесс 3-4) линия процесса пересекает линию  $\varphi=100\%$ , т.е. достигается состояние насыщения, а температура становится равной температуре точки росы (ТТР). С этого момента при дальнейшем охлаждении начинает выпадать влага и в процессе ТТР-5 ее относительное количество во влажном воздухе уменьшается от  $d_4$  до  $d_5$ . При заданном расходе сухого воздуха  $\dot{G}_в$  количество выделившейся влаги найдем из выражения  $\dot{G}_{\text{ж}} = (d_4 - d_5)\dot{G}_в$ . Это количество равно массе влаги, полученной воздухом от осушаемых изделий. Если продолжить процесс 2-3 до пересечения с линией  $\varphi=1$ , получим температуру адиабатного насыщения воздуха (ТАН).

Отметим, что кроме рассмотренной диаграммы, построенной для процессов при атмосферном давлении, существуют диаграммы, в которых учитывается давление влажного воздуха. Такие диаграммы используются, например, при расчете компрессоров, работающих на влажном воздухе.

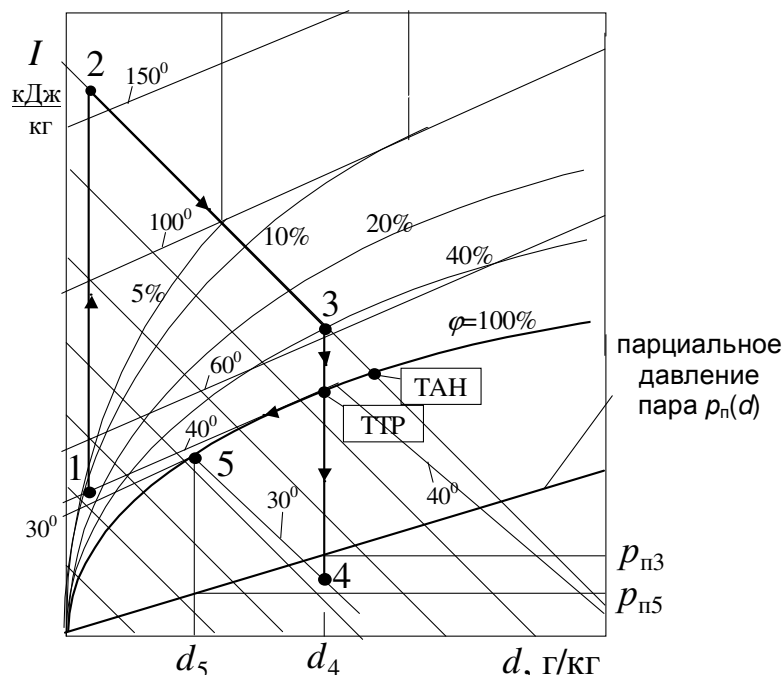


Рис. 9.26б

### 10. Паровые и комбинированные циклы теплоэнергетических установок

Около 80% (79,3% в 2005 г.) электрической энергии в России вырабатывается энергетическими установками (ТЭС и АЭС), работающими на водяном паре. В настоящее время с целью повышения тепловой эффективности создаются комбинированные установки, использующие разные рабочие тела, что позволяет повысить температуру подвода теплоты и уменьшить температуру отвода теплоты.

Так как цикл Карно имеет наибольшую тепловую эффективность в заданном интервале температур, начнем рассмотрение паросиловых циклов с него.

#### Цикл Карно

Рассмотрим идеальный цикл Карно, работающий в интервале температур от  $T_I$  до  $T_{II}$ . Цикл состоит из двух изоэнтроп 1-2 и 3-4 и двух обратимых изотерм 4-1 и 2-3 (температуры рабочего тела на верхнем и нижнем температурных уровнях равны соответственно температурам горячего и холодного

источников теплоты). Работа идеального цикла Карно может быть записана различными

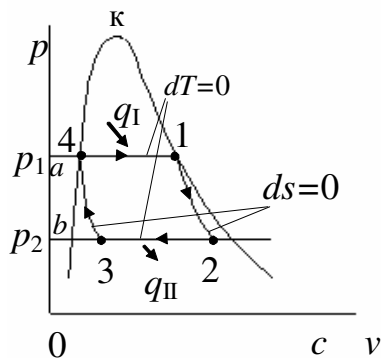


Рис. 10.1а

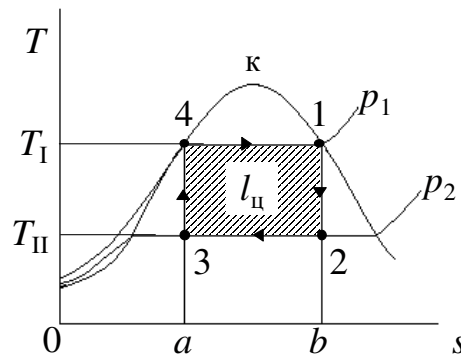


Рис. 10.1б

способами:

$$l_{II} = (i_1 - i_2) - (i_4 - i_3) = (T_I - T_{II})(s_1 - s_4).$$

Из рис.10.1а видно, что техническая работа сжатия  $l_{\text{тех}3-4} = -(i_4 - i_3)$  значительна (пл. 3-4-a-b-3), а в точке 3 пар имеет большую влажность  $y_3 = 1 - x_3$  и сжать такую смесь чрезвычайно трудно из-за возникновения гидравлических ударов.

Термический КПД цикла Карно определим по формуле

$$\eta_t = \frac{(T_I - T_{II})(s_1 - s_4)}{T_I(s_1 - s_4)} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I}. \quad (10.1)$$

Как отмечалось ранее, цикл Карно нельзя осуществить, но с ним всегда сравнивают циклы реальных энергетических установок.

#### Цикл Ренкина

У.Д.Ренкин (1820-1872), шотландец, был профессором университета в Глазго, крупным специалистом в области технической термодинамики и тепловых машин, автором учебника по технической термодинамике (1857г.). Предложенный им цикл паротурбинной установки (цикл Ренкина) был оценен как образцовый Английским Обществом инженеров.

Паротурбинная установка, работающая по циклу Ренкина, состоит (рис.10.2а) из парогенератора ПГ, в котором вода превращается в пар, турбины Т, конденсатора К, где влажный пар, конденсируясь на холодных трубках, внутри которых циркулирует охлаждающая

вода, превращается в насыщенную воду, и насоса Н, в котором повышается давление воды.

В отличие от цикла Карно, процесс повышения давления 3-4 осуществляется в жидкой фазе, что значительно уменьшает техническую работу сжатия (пл. 3-4-a-b-3 на рис.10.2б). Процессы, протекающие в цикле Ренкина, показаны на рис. 10.10б,в,г:

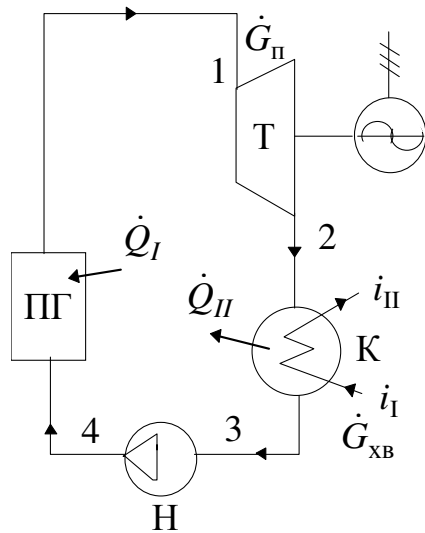


Рис. 10.2а

- 1-2,  $ds=0$ - расширение пара в идеальной турбине  $l_T = i_1 - i_2$ ;
- 2-3,  $dp=0$ - процесс отвода теплоты в конденсаторе  $\dot{Q}_{II} = \dot{G}_n(i_2 - i_3) = \dot{G}_{xb}(i_{II} - i_I)$ ;
- 3-4,  $ds=0$ - процесс повышения давления в насосе  $l_H = -(i_4 - i_3)$ ;
- 4-1,  $dp=0$  - подвод теплоты в цикле  $\dot{Q}_I = \dot{B}_T H_n^p \eta_{пр} = \dot{G}_n(i_1 - i_4)$ , где  $\dot{B}_T$  - расход топлива;  $H_n^p$  - низшая теплотворная способность топлива;  $\eta_{пр}$  - КПД парогенератора.

Мощность идеального цикла найдем из выражения

$$N_{ц} = \dot{G}_n [(i_1 - i_2) - (i_4 - i_3)]. \quad (10.2)$$

Разделив (10.2) на расход пара, получим удельную работу цикла

$$l_{ц} = (i_1 - i_2) - (i_4 - i_3). \quad (10.3)$$

Определим термический КПД идеального цикла Ренкина

$$\eta_t = \frac{l_{ц}}{q_I} = \frac{(i_1 - i_2) - (i_4 - i_3)}{i_1 - i_4} = 1 - \frac{q_{II}}{q_I} = 1 - \frac{i_2 - i_3}{i_1 - i_4}. \quad (10.4)$$

Влияние начальных и конечных параметров на эффективность цикла Ренкина

Рассмотрим влияние начального давления на эффективность цикла Ренкина. Как видно из рис.10.3, с ростом начального давления возрастает средняя температура подвода те-

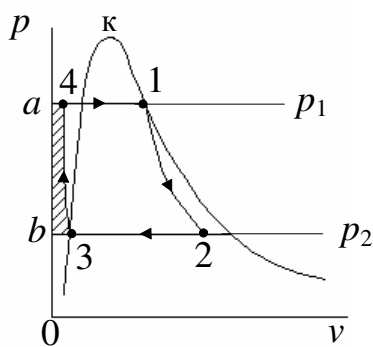


Рис. 10.2б

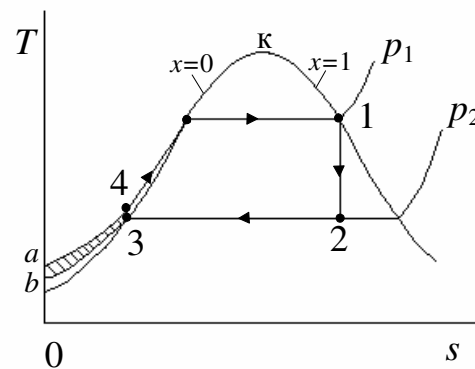


Рис. 10.2в

плоты в цикле  $\bar{T}_{4-1} = \frac{i_1 - i_4}{s_1 - s_4}$ , т.е.  $\bar{T}_{4-1}^{**} > \bar{T}_{4-1}^* > \bar{T}_{4-1}$ , что приводит к росту термического

$$\text{КПД цикла } \eta_t = 1 - \frac{\bar{T}_{2-3}}{\bar{T}_{4-1}}.$$

Однако с ростом начального давления увеличивается влажность пара  $y_2 = 1 - x_2$  в конце процесса расширения, что приводит к снижению внутреннего относительного КПД

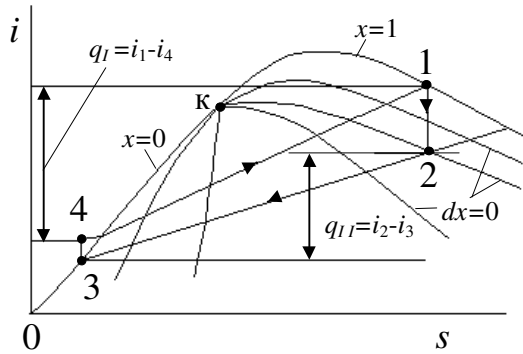


Рис. 10.2г

следних ступеней турбины. В то же время чрезмерное увеличение температуры (точка 1\*\*, рис.10.4) ведет к перемещению точки 2\*\* в область перегретого пара, т.е. к росту температуры отвода теплоты

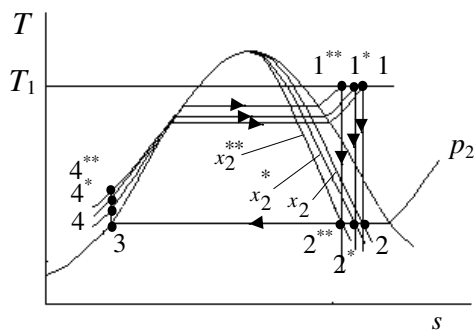


Рис. 10.3

$$\bar{T}_{2^{**}-3} = \frac{i_{2^{**}} - i_3}{s_{2^{**}} - s_3} \text{ и снижению тер-}$$

мического КПД. Кроме того, рост температуры  $\bar{T}_{2^{**}-3}$  будет отрицательно сказываться на температурном режиме конденсатора. Уменьшение противодействия за паровой турбиной снижает среднюю температуру отвода теплоты

$$\bar{T}_{2-3} = \frac{i_2 - i_3}{s_2 - s_3}, \text{ что приводит к росту}$$

термического КПД, но при этом увеличивается влажность пара и снижается внутренний относительный КПД турбины  $\eta_{0i}^T$  (рис.10.5).

В современных паровых турбинах влажность пара в последних ступенях не превышает 15%.

### Цикл Ренкина с промежуточным перегревом пара

Для уменьшения степени влажности пара в последних ступенях паровых турбин применяется промежуточный перегрев пара.

турбины  $\eta_{0i}^T$  из-за наличия влаги в лопаточном аппарате последних ступеней турбины (капельки влаги бомбардируют поверхность лопаток, создавая значительные контактные напряжения). Увеличение начальной температуры пара, как и в предыдущем случае, увеличивает среднюю температуру подвода теплоты, а следовательно, и  $\eta_t$ , причем возрастает и степень сухости пара в конце расширения, что приводит к росту  $\eta_{0i}^T$  по-

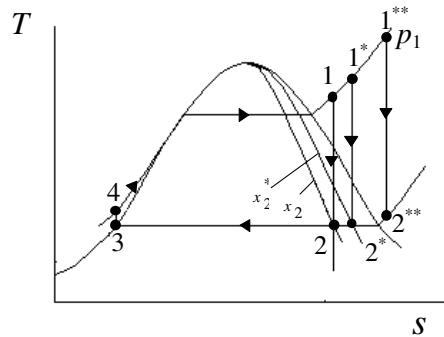


Рис. 10.4

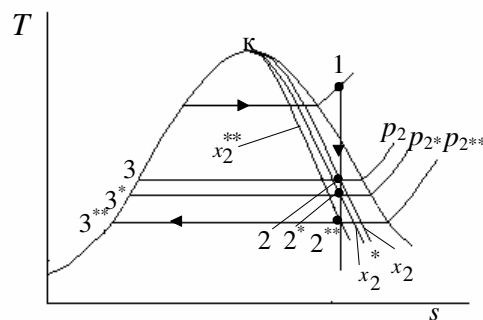


Рис. 10.5

Увеличение степени сухости пара путем его перегрева положительно сказывается на  $\eta_{0i}^T$ . Кроме того, в ряде случаев возможно и некоторое повышение термического КПД

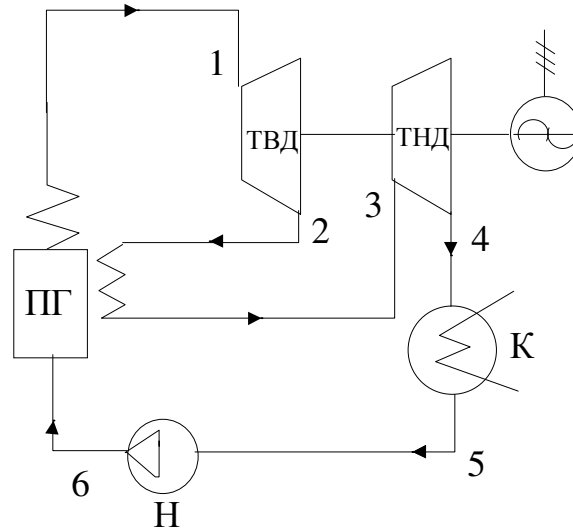


Рис. 10.6а

цикла, что в конечном итоге приводит к росту эффективности паротурбинной установки (ПТУ).

Рассмотрим процессы на примере идеальной ПТУ (рис.10.6б): 1-2,  $ds=0$  - изэнтропийное расширение пара в турбине высокого давления (ТВД); 2-3,  $dp=0$  - промежуточный подвод теплоты в парогенераторе, температура пара растет от  $T_2$  до  $T_3$ ; 3-4,  $ds=0$  - расширение пара в турбине низкого давления (ТНД); 4-5,  $dp=0$  - отвод теплоты в окружающую среду в процессе конденсации влажного пара и превращения его в насыщенную воду (точка 5); 5-6,  $ds=0$  - повышение давления воды в насосе; 6-1,  $dp=0$  - подвод теплоты в парогенераторе.

Из рисунка 10.6б видно, что если бы промежуточный подвод теплоты отсутствовал, то в конце процесса расширения степень сухости пара была бы меньше (точка 4а вместо точки 4).

Кроме того, если термический КПД дополнительного цикла (пл. 3-4-4а-2-3) выше, чем КПД основного (пл. 1-4а-5-6-1), то промежуточный подвод теплоты увеличивает  $\eta_t$ .

Удельную работу идеального цикла определим по формуле

$$l_{\text{ц}} = l_{\text{т1}} + l_{\text{т2}} - |l_{\text{н}}| = (i_1 - i_2) + (i_3 - i_4) - (i_6 - i_5). \quad (10.5)$$

Удельное количество теплоты, подведенное в цикле

$$q_l = (i_1 - i_6) + (i_3 - i_2), \quad (10.6)$$

удельная отведенная теплота

$$q_{\text{н}} = i_4 - i_5, \quad (10.7)$$

термический КПД цикла

$$\eta_t = \frac{l_{\text{ц}}}{q_l}. \quad (10.8)$$

#### Регенеративный цикл

Рассмотрим сначала цикл Ренкина со 100% регенерацией теплоты, а затем цикл с конечным числом водоподогревателей. Идеальный цикл Ренкина без регенерации в  $T-s$  диаграмме изображается площадью 1-2-3\*-4-1 на рис.10.7 (если пренебречь работой насоса). В процессе расширения 1-2 осуществим отвод пара через бесконечное число отборов,

но так, чтобы линия 1-2\* была эквидистантна линии 3\*-4. Теплота, отведенная в процессе 1-2\*, соответствует площади 1-d-c-2\*-1. Используем эту теплоту для нагрева воды в процессе 3\*-4. Полученная водой теплота изобразится площадью 3\*-4-b-a-3\*. Однако реально процессы 1-2\* и 3\*-4 осуществить невозможно, так как невозможно выполнить бесконечное число отборов пара. Оставляя в стороне вопрос реализации цикла Ренкина со 100% регенерацией, определим его достоинства с термодинамической точки зрения. Итак, без регенерации теплоты подведенная в цикле теплота равна  $q_I = i_1 - i_{3^*}$ , в цикле со 100% регенерацией будем иметь  $q_{IR} = i_1 - i_4$ , т.е.  $q_{IR} < q_I$ . Отведенная теплота соответственно  $q_{II} = i_2 - i_{3^*}$  (пл. 2-d-a-3\*-2) и  $q_{IIR} = i_2 - i_3$ ,  $q_{IIR} < q_{II}$ .

Рассмотрим цикл Карно (пл. 1-2-3-4-1):  $q_{IK} = i_1 - i_4$ ,  $q_{IJK} = i_2 - i_3$ , но  $q_{IR} = q_{IK}$ , а  $q_{IIR} = q_{IJK}$  (так как пл. 2\*-c-a-3\*-2\* равна пл. 2-d-b-3-2). Таким образом, приходим к выводу, что термический КПД цикла Ренкина со 100% регенерацией теплоты равен термическому КПД цикла Карно в том же интервале температур.

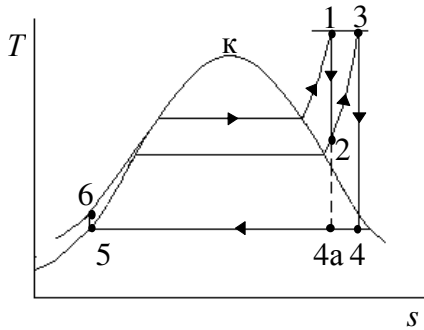


Рис. 10.66

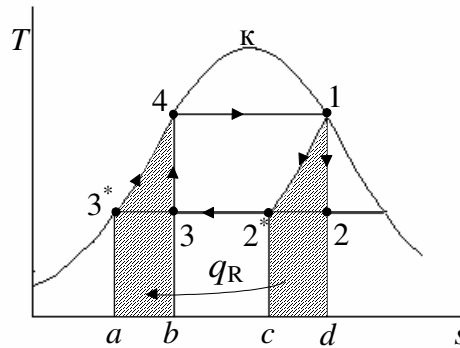


Рис. 10.7

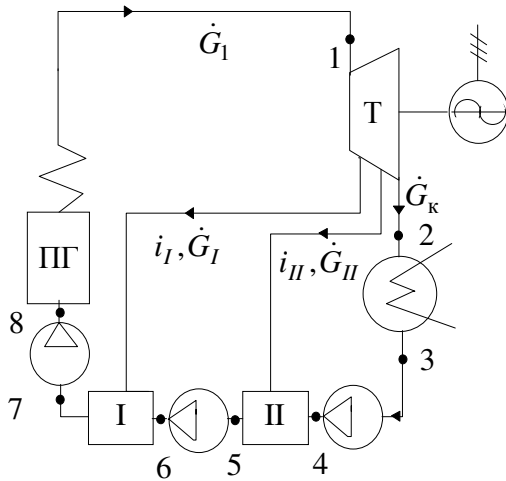


Рис. 10.8а

Рассмотрим теперь цикл Ренкина с конечным числом водоподогревателей. На рис.10.8а показана принципиальная схема установки с двумя водоподогревателями. Составим материальный баланс для ПТУ. Расход  $\dot{G}_1$  пара, поступающего в турбину, можно представить в виде суммы

$$\dot{G}_1 = \dot{G}_I + \dot{G}_{II} + \dot{G}_K, \quad (a)$$

где  $\dot{G}_I, \dot{G}_{II}$  - расходы пара, поступающие в первый и второй водоподогреватели,  $\dot{G}_K$  - расход пара через конденсатор.

Разделив (а) на  $\dot{G}_1$ , получим

$$1 = \alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_K, \quad (b)$$

где  $\alpha_i = \frac{\dot{G}_i}{\dot{G}_1}$  - массовые доли пара.

Составим уравнение теплового баланса для водоподогревателей. Для второго (II) водоподогревателя можно написать (см. рис.10.8б)

Для второго (II) водоподогревателя можно написать (см. рис.10.8б)

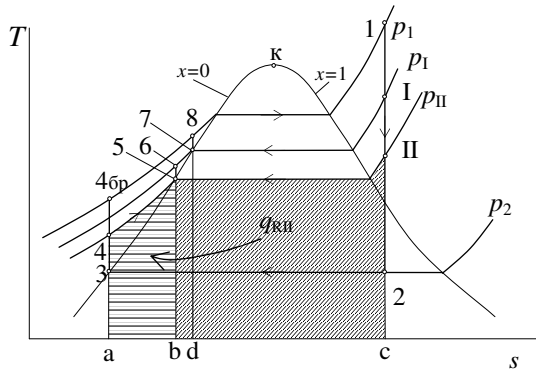


Рис. 10.8б

Выбор параметров отбора пара (т.е. давления) определяется в результате расчетов таким образом, чтобы достигалась максимальная тепловая эффективность установки. Зная  $i_I$  и  $i_{II}$ , можно определить  $\alpha_I$  и  $\alpha_{II}$  из вышеприведенных уравнений.

Наличие отборов пара приводит к уменьшению удельной работы турбины на величину работы, которую мог бы совершить отобранный пар:

$$l_T = (i_1 - i_2) - \alpha_I(i_1 - i_2) - \alpha_{II}(i_{II} - i_2). \quad (10.11)$$

Удельную работу насосов можно записать следующим образом

$$l_H = -[(i_4 - i_3)(1 - \alpha_I - \alpha_{II}) + (i_6 - i_5)(1 - \alpha_I) + (i_8 - i_7)]. \quad (10.12)$$

Работу цикла и термический КПД найдем из формул

$$\Delta \eta_t \quad l_{ц} = l_T - |l_H|, \quad \eta_t = \frac{l_{ц}}{q_{IR}} = \frac{l_{ц}}{i_1 - i_8}.$$

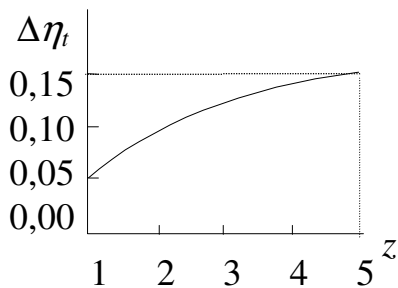


Рис. 10.8в

При отсутствии регенерации теплоты  $q_I = i_1 - i_4$ . Так как  $i_8 > i_4$ , то  $q_{IR} < q_I$ , т.е. ПТУ стала более эффективной. На рис.10.8б показана зависимость приращения термического КПД от числа  $z$  водоподогревателей (отборов пара).

### Комбинированный цикл с высоконапорным парогенератором

Применение комбинированной установки, состоящей из газовой и паровой турбин позволяет увеличить среднюю температуру подвода теплоты в верхней части цикла и уменьшить температуру отвода теплоты в нижней части, что приводит к росту термического КПД цикла. На рис. 10.9а,б показаны принципиальная тепловая схема и цикл комбинированной установки. Теплота, выделившаяся в высоконапорном парогенераторе ВПГ в результате сгорания топлива, идет на увеличение энтальпии смеси

$$\dot{Q}_I = \dot{B}_T H_H^p \eta_{ВПГ} = \dot{G}_r i_{r3'} - (\dot{G}_B i_{B2} + \dot{B}_T i_T). \quad (10.13)$$

Подвод теплоты к пару в процессе 9-5 снижает температуру газа на выходе из ВПГ с  $T_{3'}$  до  $T_3$ , что делает температурный режим в турбине более благоприятным.

В ВПГ уравнение теплового баланса имеет вид

$$\dot{G}_r (i_{r3'} - i_3) = \dot{G}_п (i_5 - i_9). \quad (a)$$

Соотношения между массовыми потоками в газовом и паровом контурах найдем из уравнения теплового баланса, составленного для теплообменного аппарата

$$\dot{G}_r (i_{4д} - i_{1'}) = \dot{G}_п (i_9 - i_{8д}). \quad (b)$$

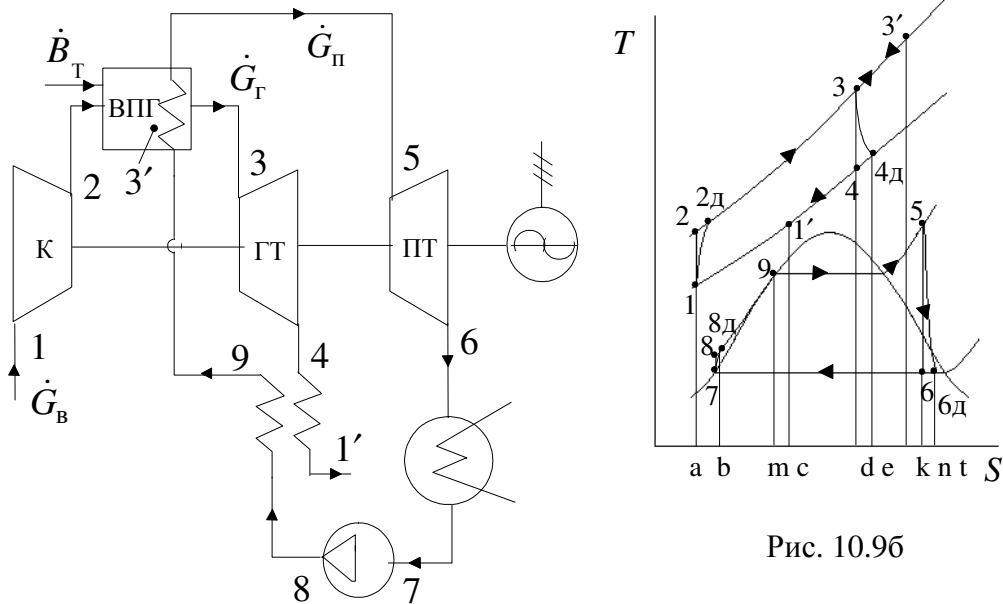


Рис.10.9а

Тепловой поток, подведенный в комбинированном цикле, полагая  $\dot{G}_B \gg \dot{B}_T$ , найдем из формулы

$$\dot{Q}_{Iд} = \dot{G}_B (i_{1'3'} - i_{2д}) = \dot{G}_B (i_3 - i_{2д}) + \dot{G}_п (i_5 - i_9). \quad (10.14)$$

Тепловой поток, отдаваемый окружающей среде, составит

$$\dot{Q}_{IIд} = \dot{G}_B (i_1 - i_7) + \dot{G}_п (i_{6д} - i_7). \quad (10.15)$$

Действительную мощность цикла определим из уравнения

$$N_{цд} = \dot{G}_B [(i_3 - i_{4д}) - (i_{2д} - i_1)] + \dot{G}_п [(i_5 - i_{6д}) - (i_{8д} - i_7)]. \quad (10.16)$$

Внутренний абсолютный КПД цикла равен произведению внутреннего относительного КПД цикла  $\eta_{0i}^н$  и термического КПД  $\eta_t$ :

$$\eta_i^н = \eta_{0i}^н \eta_t = \frac{N_{цд}}{N_{цид}} \cdot \frac{N_{цид}}{Q_{Iд}} = \frac{N_{цд}}{\dot{G}_B (i_{3'} - i_2)}. \quad (10.17)$$

Электрическую мощность (мощность электрического тока на клеммах электрогенератора) найдем из формулы

$$N_{эл} = N_{цд} \eta_{мех} \eta_{ген}, \quad (10.18)$$

где  $\eta_{мех} = N_{мех} / N_{цд} = 0,97 \dots 0,99$  - механический КПД,  $N_{мех}$  - механическая мощность, переданная генератору;  $\eta_{ген} = N_{эл} / N_{мех} = 0,97 \dots 0,99$  - КПД электрогенератора.

Эффективный абсолютный КПД установки

$$\eta_e^н = \eta_{0i}^н \eta_t \eta_{мех} \eta_{ген} = \eta_i^н \eta_{мех} \eta_{ген}. \quad (10.19)$$

Использование парогазовых циклов позволяет существенно повысить тепловую эффективность энергетических установок ( $\eta_e^н = 0,5 \dots 0,55$ ).

Создание и применение высокотемпературных газовых турбин ( $t_3 > 1000^\circ\text{C}$ ) в парогазовых циклах позволит сделать эти установки еще более эффективными. Отметим, что зна-



чительный вклад в разработку теории парогазовых циклов внес профессор СПбГПУ В.А.Зысин [12].

К недостатку рассмотренной установки следует отнести конструкцию ВПГ, который в отличие от камеры сгорания ГТУ имеет значительный объем и должен выдерживать достаточно высокие давления ( $p_3 \geq 0,6$  МПа).

#### Бинарный ртутно-водяной цикл

Как отмечалось выше, бинарные циклы позволяют увеличить среднюю температуру подвода теплоты и уменьшить среднюю температуру отвода теплоты, что приводит к увеличению тепловой эффективности комбинированного цикла.

Использование ртути в качестве рабочего тела в верхней части цикла позволяет при относительно небольших давлениях в контуре иметь высокую начальную температуру перед турбиной (точка 1 на рис.10.10б), а следовательно, и высокую среднюю температуру подвода теплоты  $\bar{T}_{4-1}$ . Так, при температуре 550С давление насыщения ртути составляет всего лишь 1,4 МПа.

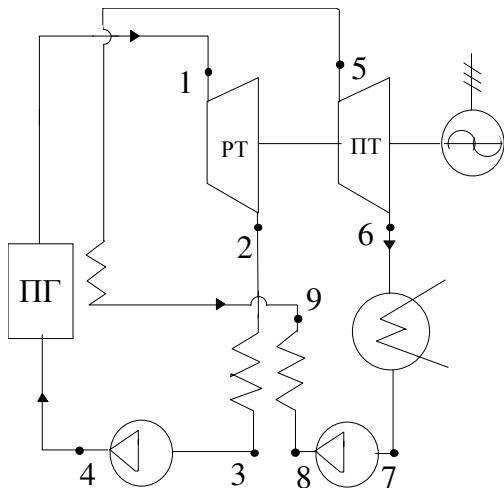


Рис. 10.10а

Отметим, что у водяного пара при критической температуре 374С критическое давление равно 22,4 МПа. Применение же ртути в нижней части цикла нерационально из-за слишком низкого давления паров - при  $t=30$ С давление насыщения  $p_s=0,36$  Па. Поддержание в конденсаторе столь низкого давления представляет значительные технические трудности: такая система должна иметь высокую герметичность и мощную компрессорную установку для откачки из конденсатора в атмосферу посторонних газов. Поэтому в нижней части цикла используют воду (при  $t=30$ С  $p_s=4$ кПа). В этом случае для удаления воздуха из конденсатора достаточно использовать паровой эжектор. Отметим, что в ртутном контуре нет необходимости перегревать пар перед турбиной, так как у ртути левая и правая пограничные кривые близки к вертикалям и пар в конце расширения в турбине (точка 2) имеет высокую степень сухости.

Соотношение между массовыми расходами воды и ртути определяют из уравнения теплового баланса, составленного для теплообменного аппарата

$$\dot{G}_{\text{Hg}}(i_2 - i_3) = \dot{G}_{\text{H}_2\text{O}}(i_9 - i_8). \quad (10.20)$$

Идеальный ртутно-водяной цикл состоит из следующих процессов:

- 1-2,  $ds=0$  - расширение сухого насыщенного ртутного пара в турбине;
- 2-3,  $dp=0$  - передача теплоты от ртути к воде второго контура в теплообменном аппарате;
- 3-4,  $ds=0$  - повышение давления жидкой ртути в насосе;
- 1-4,  $dp=0$  - подвод теплоты к ртути в парогенераторе;
- 5-6,  $ds=0$  - расширение водяного пара в турбине;
- 6-7,  $dp=0$  - процесс конденсации водяного пара с отдачей теплоты окружающей среде;
- 7-8,  $ds=0$  - повышение давления в водяном насосе;
- 8-9,  $dp=0$  - подвод теплоты к воде в теплообменном аппарате;

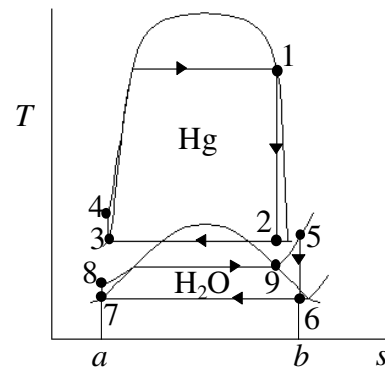


Рис. 10.10б

9-5,  $dp=0$  - перегрев водяного пара за счет теплоты горячего источника цикла.

Так как поток теплоты, выделившейся в результате сгорания топлива в парогенераторе, идет на увеличение энтальпии потоков рабочего тела, то можно написать

$$\dot{Q}_I = \dot{B}_T H_n^p \eta_{пр} = \dot{G}_{Hg} (i_1 - i_4) + \dot{G}_{H_2O} (i_5 - i_9). \quad (10.21)$$

Мощность идеального цикла найдем из выражения

$$N_{ц} = \dot{G}_{Hg} [(i_1 - i_2) - (i_4 - i_3)] + \dot{G}_{H_2O} [(i_5 - i_6) - (i_8 - i_7)]. \quad (10.22)$$

Теплота, отводимая в окружающую среду

$$\dot{Q}_{II} = \dot{G}_{H_2O} (i_6 - i_7), \quad (10.23)$$

термический КПД комбинированной установки

$$\eta_t = \frac{N_{ц}}{\dot{Q}_I} \quad (10.24)$$

### Газопаровой цикл с котлом-утилизатором

Как уже отмечалось, возврат части теплоты в цикл повышает тепловую эффективность установки, снижает тепловое загрязнение окружающей среды, улучшает экологическую обстановку среды обитания человека.

В 1940-1960 годах в Центральном котлотурбинном институте им. И.И.Ползунова (ЦКТИ) и Ленинградском политехническом институте им. М.И.Калинина (СПбГПУ) под руководством А.Н.Ложкина и В.А.Зысина велись серьезные научные исследования по повышению эффективности энергетических установок и электрических тепловых станций за счет применения комбинированных установок на базе парогазовых схем с высоконапорным парогенератором и котлом-утилизатором [12]. В последующие годы значительные научные силы и средства в СССР были направлены на создание МГД-генераторов и развитие атомной энергетики, а исследования парогазовых циклов были практически прекращены. После неудач с установками на базе МГД-генераторов снова возрос интерес к парогазовым циклам у нас и за рубежом. В настоящее время создана и успешно работает в Ленинградской области Северо-Западная ТЭЦ с парогазовой установкой мощностью 450 МВт, которая состоит из двух газовых турбин мощностью по 150 МВт, котла-утилизатора и одной паровой турбины мощностью 150 МВт. Эффективный КПД станции составляет около 52%. На рис.10.11 показана принципиальная тепловая схема комбинированной парогазовой установки, состоящей из ГТУ, ПСУ и котла-утилизатора, а на рис.10.12 – процессы в  $T-s$  диаграмме. Котел-утилизатор состоит из экономайзера ЭК, в котором вода после насоса Н нагревается до температуры насыщения при данном давлении (процесс 13д-8), парогенератора ПГ, где насыщенная вода превращается в сухой насыщенный пар (процесс 8-9), пароперегревателя ПП, в котором в процессе 9-10 сухой насыщенный пар становится перегретым. При расчете цикла необходимо, чтобы в процессе отвода теплоты от газов (4д-7) к паровому контуру (13д-8-9-10) обеспечивался положительный температурный напор между газом и водой (а затем паром). С этой целью температуру в точке 6 назначают как минимум на 10 градусов выше, чем температура насыщения воды  $t_8$  при выбранном давлении пара в котле-утилизаторе. После этого составляют уравнение теплового баланса

$$\dot{G}_r \bar{c}_{pr} (t_{4д} - t_6) = \dot{G}_n (i_{10} - i_8),$$

из которого при заданном расходе газа через ГТУ определяют расход пара в паровом контуре

$$\dot{G}_n = \frac{\dot{G}_r \bar{c}_{pr} (t_{4д} - t_6)}{(i_{10} - i_8)}.$$

Температура уходящих газов  $t_7$  определяется из уравнения теплового баланса, составленного для экономайзера

$$\dot{G}_n(i_8 - i_{13д}) = \dot{G}_r \bar{c}_{pr}(t_6 - t_7)$$

Составив уравнение теплового баланса для пароперегревателя, найдем температуру газов в точке 5

$$\dot{G}_r \bar{c}_{pr}(t_{4д} - t_5) = \dot{G}_n(i_{10} - i_9'')$$

Действительную полезную мощность комбинированной парогазовой установки определим из выражения

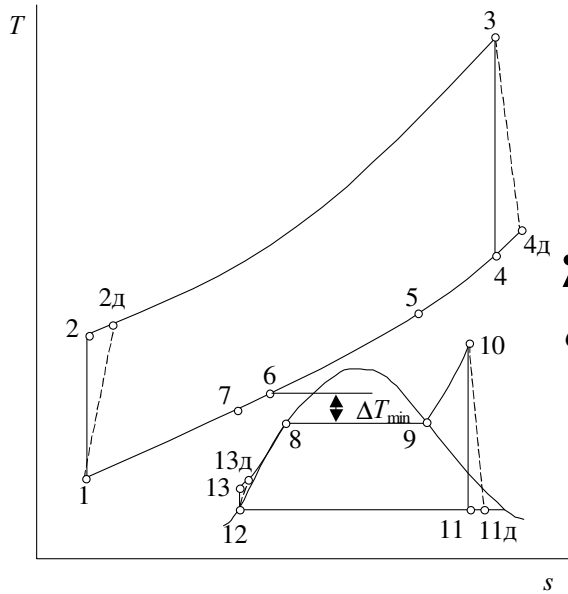


Рис. 20.11

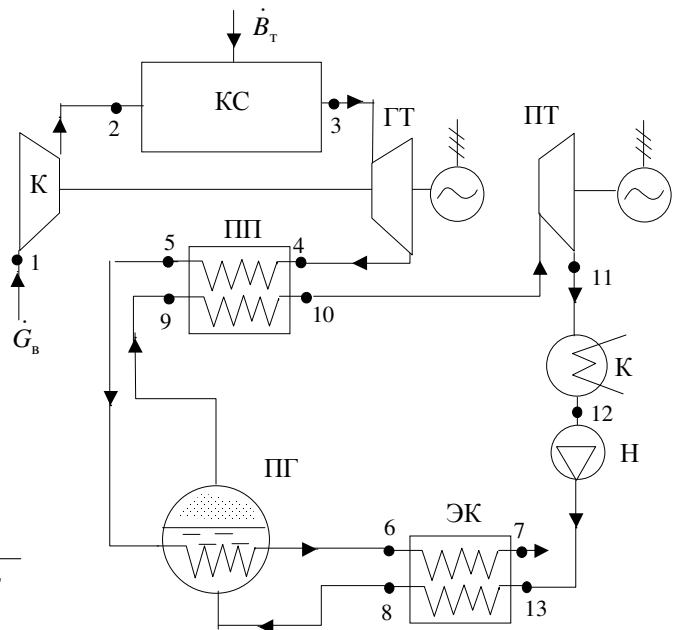


Рис. 10.12

$$N_{цд}^{уст} = (N_{цгту} + N_{цпсу})_д = \dot{G}_r [(i_3 - i_{4д}) - (i_{2д} - i_1)] + \dot{G}_n [(i_{10} - i_{11д}) - (i_{13д} - i_{12})]$$

Поток теплоты, отдаваемый окружающей среде

$$\dot{Q}_н = \dot{G}_r(i_7 - i_1) + \dot{G}_n(i_{11д} - i_{12}),$$

поток теплоты, подведенный к циклу

$$\dot{Q}_л = \dot{B}_r H_p^H \eta_{КС} = \dot{G}_r c_{pr} t_3 - (\dot{G}_v c_{pv} t_{2д} + \dot{B}_r c_T t_T).$$

Из последнего выражения, зная низшую теплотворную способность топлива  $H_p^H$ , можно определить расход топлива  $\dot{B}_r$ .

Эффективный КПД установки найдем по формуле

$$\eta_e^{уст} = \frac{N_{цд}}{\dot{Q}_л} \eta_{мех} \eta_{ген},$$

где  $\eta_{мех}$  - механический КПД, учитывающий потери в подшипниках,  $\eta_{ген}$  - КПД электрогенератора. Расчет при исходных данных  $t_1=17^0C$ ,  $t_3=1100^0C$ ,  $\eta_{oi}^{гт}=0.89$ ,  $\eta_{oi}^к=0.88$ ,  $\eta_{oi}^н=0.7$ ,  $\eta_{oi}^{ит}=0.85$ ,  $\eta_{кc}=0.9$ ,  $\pi_к=10$ ,  $p_1=0.1$  МПа,  $\dot{G}_r=100$  кг/с,  $p_{10}=8$  МПа,  $t_{10}=450^0C$ ,  $p_{11}=0.01$  МПа показал, что расход пара составляет 10.7 кг/с, действительная мощность цикла Ренкина 10.7 МВт, мощность ГТУ 28.3 МВт, мощность установки 39 МВт, эффективный КПД установки  $\eta_e^{уст}=0.5$ . При этом прирост КПД за счет применения цикла Ренкина  $\Delta \eta = (\eta_e^{уст} - \eta_e^{гту}) \cdot 100 / \eta_e^{гту} = 44\%$ . Полученный результат свидетельствует о

на  $\Delta\eta = (\eta_e^{\text{уст}} - \eta_e^{\text{гт}}) \cdot 100 / \eta_e^{\text{гт}} = 44\%$ . Полученный результат свидетельствует о высокой тепловой эффективности парогазовых установок.

### Теплофикационные циклы

Выработка низкопотенциальной теплоты (горячей воды, пара низкого давления) для технических и бытовых нужд за счет высокопотенциальной теплоты является термодинамически невыгодной из-за значительной потери эксергии термодинамической системы,

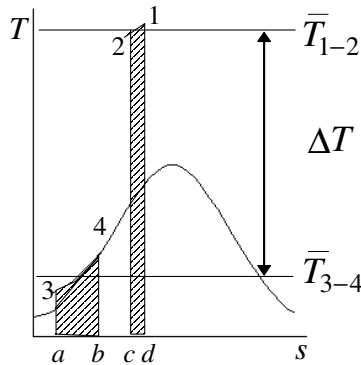


Рис. 10.13

обусловленной большим температурным напором  $\Delta T$  между греющей средой и нагреваемым потоком. На рис.10.13 показан процесс нагрева воды за счет охлаждения высокотемпературного газа ( $T$ - $s$  диаграммы воды и газа условно совмещены в одном рисунке). Приращение энтропии системы газ-вода, обусловленное необратимым теплообменом, составит

$$\Delta\dot{S}_c = \dot{G}_{\text{гв}} \bar{c}_{\text{ргв}} \ln \frac{T_4}{T_3} - \dot{G}_r \bar{c}_{\text{рг}} \ln \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.25)$$

Потерю эксергии  $\dot{D}$  определим по формуле Гюи-Столды

$$\dot{D} = \Delta\dot{S}_c T_{\text{ос}}. \quad (10.26)$$

Полагая, что в теплообменнике тепловые потери в окружающую среду отсутствуют, приравняем тепловые потоки греющего и нагреваемого агентов

$$\dot{G}_r (i_1 - i_2) = \dot{G}_{\text{гв}} (i_4 - i_3). \quad (10.27)$$

Процесс получения низкопотенциальной теплоты можно значительно улучшить, если использовать так называемые теплофикационные циклы, вырабатывающие как электрическую энергию, так и теплоту низкого потенциала. Эффективность таких установок оценивается коэффициентом использования теплоты

$$K = \frac{N_{\text{эл}} + \dot{Q}_{\text{потр}}}{\dot{Q}_I}. \quad (10.28)$$

Этот коэффициент в реальных установках достаточно высок, но в числителе формулы (10.28) стоят величины разного качества: эксергия  $N_{\text{эл}}$  и теплота

низкого потенциала  $\dot{Q}_{\text{потр}}$ . На рис.10.14 показана схема теплофикационной установки с

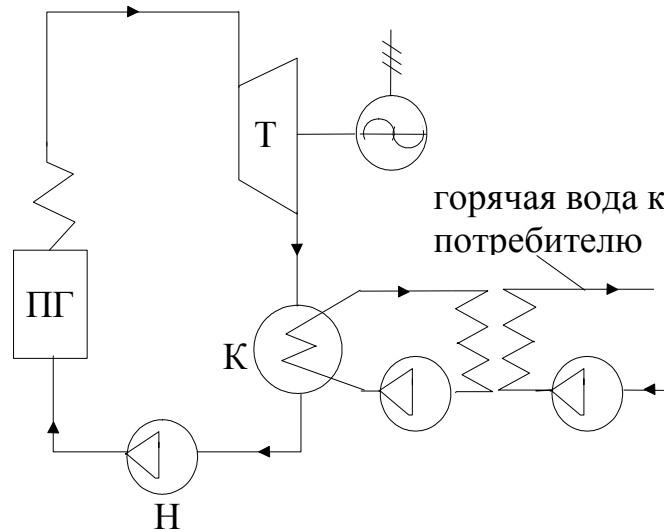


Рис. 10.14

ухудшенным вакуумом, в которой нагретая в конденсаторе вода направляется на технические или бытовые нужды. Так как давление в конденсаторе выше, чем у конденсационных турбин, мощность турбины уменьшается. Для получения пара низкого давления (0,2...0,4 МПа) для технологических нужд используют турбины с противодавлением (рис.10.15).

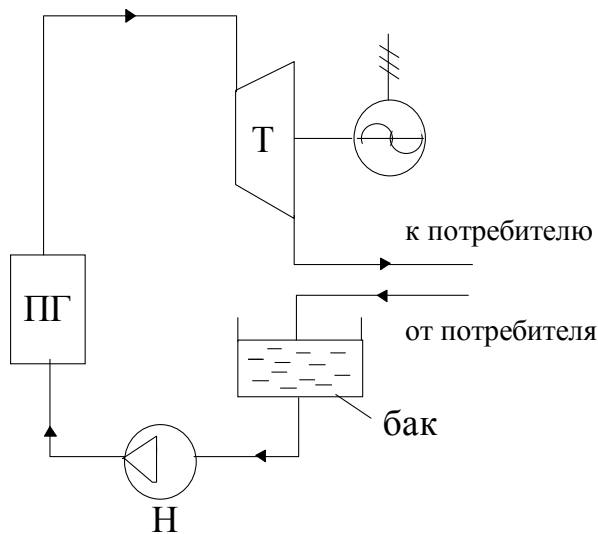


Рис.10.15

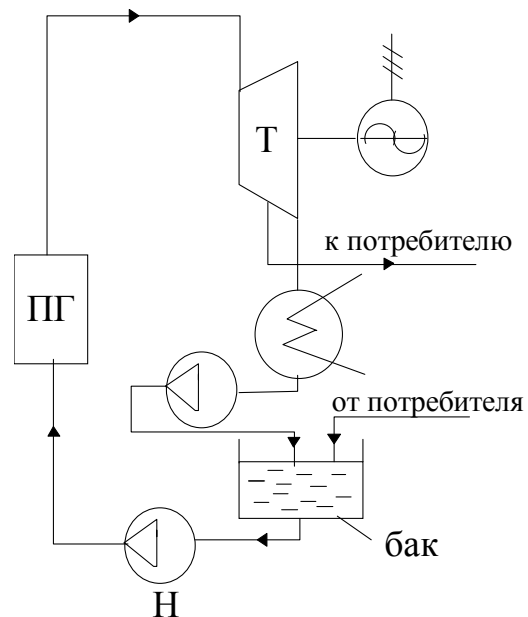


Рис. 10.16

В настоящее время для целей теплофикации наибольшее распространение получили турбины с промежуточным отбором пара. Принципиальная схема такой установки показана на рис.10.16.

#### Циклы атомных теплоэнергетических установок

В результате деления ядра изотопа урана  $^{235}\text{U}$  выделяется около 200 МэВ (мегаэлектрон-вольт) энергии. Кинетическая энергия (около 167 МэВ) осколков деления, имеющих

малую длину пробега, почти полностью поглощается в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛ), превращаясь в теплоту. При “сгорании” одного килограмма  $^{235}\text{U}$  выделяется около  $80 \cdot 10^{12}$  Дж теплоты. Если в качестве теплоты сгорания 1 кг угля принять цифру  $7 \cdot 10^6$  Кал или  $29,4 \cdot 10^6$  Дж, то одному килограмму ядерного топлива соответствует  $2,72 \cdot 10^6$  кг угля. Так как запасы ядерного топлива на Земле велики, то можно предположить, что в будущем определяющим станет производство электрической энергии на атомных станциях. В настоящее время в России на АЭС вырабатывается около 10% электрической мощности (22,2 млн. кВт). На ТЭС-149,4; ГЭС-44,6 млн. кВт. Серьезными факторами, сдерживающими строительство АЭС, являются трудности обеспечения надежности, радиационной безопасности станций и уничтожения отработавшего ядерного топлива.

Первый в мире атомный реактор был запущен в 1942 г. в Чикагском университете. Первая в мире атомная электрическая станция мощностью 5 МВт вступила в строй в 1954 г. под Москвой. До появления промышленных реакторов первые ядерные установки были разработаны для подводного флота, в создание которых неоценимый вклад внесли советские академики: И.В. Курчатов, А.Д.Сахаров, А.П.Александров, Н. А. Доллежалъ.

Тепловая схема АЭС может быть одноконтурной, когда рабочее тело получает теплоту непосредственно в реакторе, омывая ТВЭЛы (в этом случае проточная часть всего оборудования загрязняется осколками ядерного деления) и двухконтурной. В двухконтурной схеме теплота, выделяющаяся в реакторе, передается промежуточному теплоносителю, который в парогенераторе отдает теплоту рабочему телу. На рис.10.17 показана принципиальная тепловая схема одноконтурной АЭС с реактором кипящего типа. На выходе из реактора в результате подвода теплоты от ТВЭЛов к воде образуется высоковлажный поток пара с пузырьковой структурой (объемное паросодержание  $\beta$  должно быть не более 40...45%, чтобы исключить пленочный режим кипения), который поступает в паросборник. В паросборнике влажный пар разделяется на сухой насыщенный пар и кипящую воду. Далее пар, если в схеме предусмотрен перегрев пара, поступает во второй реактор, где его температура может быть поднята до  $400 \leq t < 600\text{C}$  (при температуре  $600\text{C}$  в уране начинают происходить нежелательные фазовые переходы), а затем - в турбину.

Рассмотрим расчет основных параметров одноконтурной атомной электростанции с кипящим реактором на примере Белоярской АЭС.

Исходными данными для расчета являются: давления  $p_0=13$  МПа,  $p_1=12,8$  МПа и  $p_k=0,04$  бар, степень сухости пара  $x_0$ , расход парожидкостной смеси  $\dot{G}_0=889$  кг/с, температура перегретого пара  $T_1=773$  К.

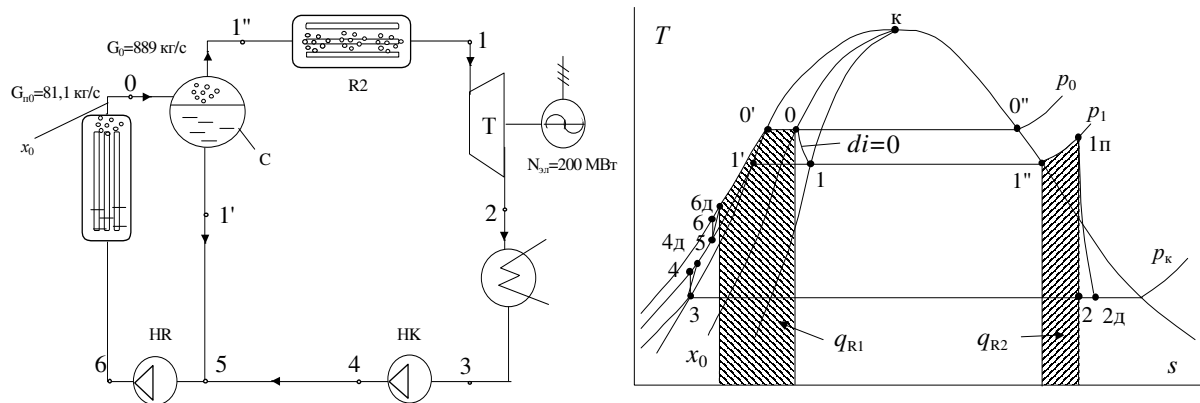


Рис. 10.17

Для определения начальной степени сухости пара  $x_0$  воспользуемся условием, что на выходе из реактора объемное расходное паросодержание смеси  $\beta = \frac{\dot{V}''}{\dot{V}}$  не должно превышать 40...45%. Так как  $\dot{V} = \dot{V}' + \dot{V}'' = \frac{\dot{G}'}{\rho'} + \frac{\dot{G}''}{\rho''}$ ,  $x = \frac{\dot{G}''}{\dot{G}}$ ,  $1-x = \frac{\dot{G}'}{\dot{G}}$ , то  $\frac{\dot{G}''}{\dot{G}'} = \frac{x}{1-x}$ , а  $\frac{\dot{V}''}{\dot{V}'} = \frac{\beta}{1-\beta}$ , откуда можно получить связь между объемным паросодержанием и степенью сухости смеси:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\beta}{(1-\beta)} \cdot \frac{\rho''}{\rho'}$$

Таким образом, при  $\beta=0,45$  степень сухости  $x_0=0,09123$  (при  $p_0 = 13$  МПа). Количество пара, вырабатываемого первым реактором

$$\dot{G}_{п0} = \dot{G}_0 x_0 = 889 \cdot 0,09123 = 81,1 \text{ кг/с}; \quad \dot{G}' = \dot{G}_0 - \dot{G}_{п0} = 807,9 \text{ кг/с}.$$

Будем считать, что давление парожидкостной смеси в сепараторе (паросборнике) равно  $p_1=12,8$  МПа, а сам процесс 0-1 (см. T-s диаграмму на рис.10.17) изоэнтальпийный, тогда

$$i_0 = (1-x_0)i' + x_0 i'' = 1634,63 \text{ кДж/кг}.$$

Степень сухости пара в точке 1 (см. рис. 10.17):  $x_1 = \frac{i_0 - i'_1}{r_1} = 0,09719$ .

Расход пара через турбину  $\dot{G}_{п1} = \dot{G}_0 x_1 = 86,4 \text{ кг/с}$ .

Тепловой поток во втором реакторе

$$\dot{Q}_{R2} = \dot{G}_{п1} (i_{1п} - i''_1) = 86,4(3334-2667) = 57,63 \text{ МВт}.$$

Мощность турбины

$$N_{тд} = \dot{G}_{п1} (i_{1п} - i_{2д}) = 86,4(3334-2148,6) = 102,42 \text{ МВт}.$$

Тепловой поток, отдаваемый влажным паром охлаждающей воде в конденсаторе

$$\dot{Q}_{II} = \dot{G}_{п1} (i_{2д} - i'_3) = 175,15 \text{ МВт}, \quad i_{2д} = i_{1п} - l_{тд} \eta_{0i}^T = 2148,6 \text{ КДж/кг}, \quad \eta_{0i}^T = 0,85.$$

Мощность насоса конденсатора

$$N_{нкд} = \dot{G}_{п1} v'_3 (p_1 - p_k) / \eta_{0i}^H = 86,4 \cdot 0,001 \cdot 130 \cdot 10^5 / 0,75 = 1,5 \text{ МВт}.$$

Тепловой поток, подводимый в первом реакторе

$$\dot{Q}_{R1} = \dot{G}_0 (i_0 - i_6) = 889(1634,66 - 1405,26) = 203,94 \text{ МВт},$$

где  $i_0 = i'_0 + r_0 x_0$ ,  $i_5 = \frac{\dot{G}'_1 i'_1 + \dot{G}_{п1} i_{4д}}{\dot{G}'_1 + \dot{G}_{п1}}$ ,  $i_{4д} = i'_2 + l_{нд} = i'_2 + \frac{N_{нкд}}{\dot{G}_{п1}}$ .

Суммарный тепловой поток

$$\dot{Q}_I = \dot{Q}_{R1} + \dot{Q}_{R2} = 261,57 \text{ МВт}.$$

Эффективный к.п.д. установки  $\eta_e = \frac{N_{тд} - N_{нкд} - N_{нрд}}{\dot{Q}_I} = 0,386$ ; где

$N_{нрд} = \dot{G}_0 v_5 (p_0 - p_1) / \eta_{0i}^H$  - действительная мощность насоса реактора.

Если перегрев пара отсутствует, то после турбины высокого давления (ТВД) пар имеет значительную влажность. Для удаления влаги из пара служит сепаратор. После сепаратора, как показано на схеме рис. 10.17а, может устанавливаться промежуточный подогреватель пара. Наличие подогревателя снижает влажность в последних ступенях турбины низкого давления (ТНД), что положительно сказывается на  $\eta_{oi}^T$

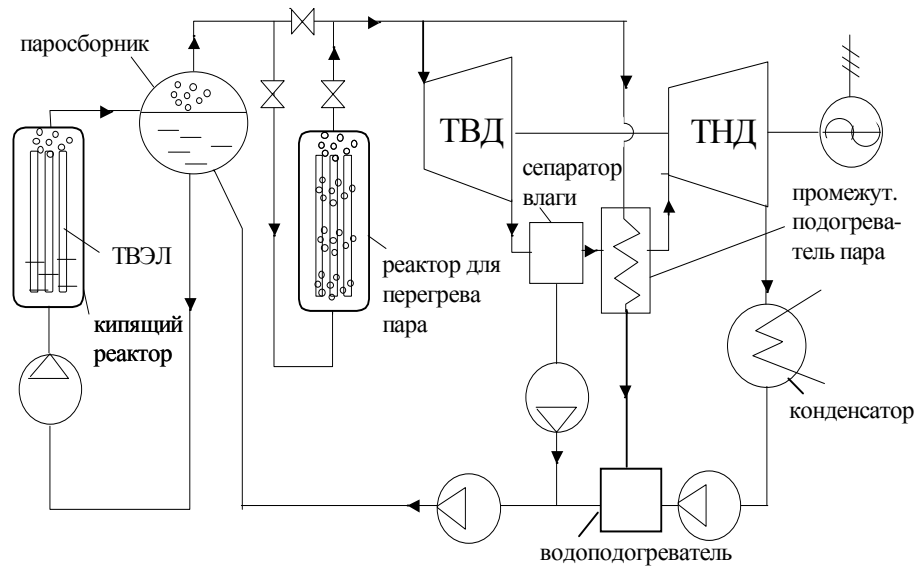


Рис. 10.17а

На рис.10.18 показана упрощенная тепловая схема двухконтурной АЭС с некипящим реактором. В реакторе вода нагревается всего на 25...30 градусов, при этом на выходе из реактора она остается недогретой до температуры насыщения (парообразование здесь не допускается). После реактора горячая вода первого контура поступает в парогенератор, в котором вода второго контура, получая теплоту, вскипает, образуя пар, который направляется в паровую турбину, затем в конденсатор, насос и снова в парогенератор. Соотношение между секундными массами воды в первом и втором контурах найдем из теплового баланса, составленного для парогенератора

$$\dot{G}_I(i_1 - i_2) = \dot{G}_{II}(i_3 - i_6). \quad (10.29)$$

Мощность цикла определим по формуле

$$N_{ц} = \dot{G}_{II}[(i_3 - i_4) - v'_5(p_6 - p_5)] - \dot{G}_I v'_2(p_{2*} - p_2), \quad (10.30)$$

где  $p_{2*}$  - давление воды на выходе из насоса первого контура (см. рис.10.19).

Если к определению КПД подходить также как в случае тепловых схем, работающих на органическом топливе, то

$$\eta_t = \frac{N_{ц}}{\dot{Q}_I} = \frac{N_{ц}}{\dot{G}_I(i_1 - i_{2*})}. \quad (10.31)$$

### Тепловые циклы геотермальных электростанций

Рост стоимости топлива, истощение его запасов, необходимость защиты и сохранения окружающей среды заставляют человечество более серьезно подходить к освоению нетрадиционных возобновляемых источников энергии: энергии солнца, ветра, теплоты Земли. В настоящее время хорошо изученные геотермальные ресурсы занимают более 10% поверхности Земли. Суммарная мощность, вырабатываемая тепловыми геотермальными электростанциями (ГеоТЭС) мира в 1976 г. составила 1325 МВт, в 1979 г. - уже



2000 МВт, в 1983 г. вырабатывалось 3159 МВт электрической энергии. К 1990 г. эта цифра достигла 11,4 ГВт. Прирост мощности ГеоТЭС с 1985 по 1990 г. составил 12%. В 2000 г. мире эксплуатировалось более 200 геотермальных станций мощностью 17,2 ГВт. Особый прогресс достигнут в таких странах как США и Филиппины. На Филиппинах к 2000 г. построены ГеоТЭС мощностью 1,91 ГВт, а в США – 2,23 ГВт.

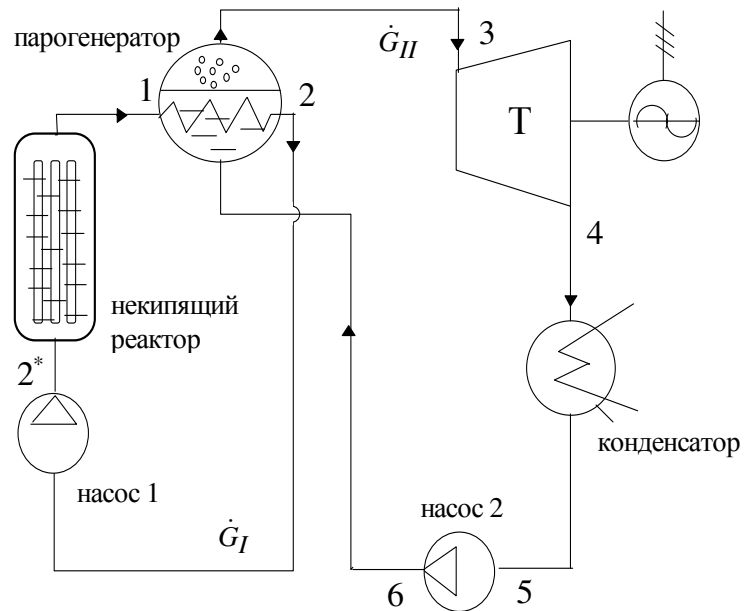


Рис. 10.18

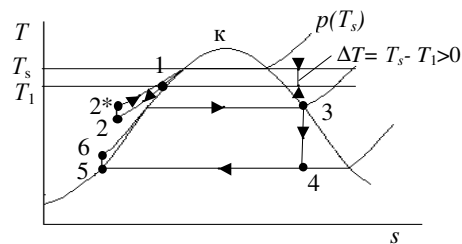


Рис. 10.19

Упрощенные схемы преобразования теплоты Земли в электрическую энергию показаны на рис. 10.20 а,б,в,г. Если геотермальный источник имеет пар низкого влагосодержания при практическом отсутствии в нем солей, то используется схема, показанная на рис.10.20а. При значительном влагосодержании термальной смеси перед турбиной устанавливают сепаратор влаги (рис.10.20б) и в турбину поступает сухой насыщенный пар. Вода после сепаратора, как правило, направляется в расширитель, где вскипает, а образовавшийся пар поступает в промежуточные ступени паровой турбины и совершает дополнительную работу. Применение расширителя увеличивает тепловую эффективность схемы. Однако процесс парообразования в расширителе протекает при  $di=0$ , что приводит к значительной потере эксергии.

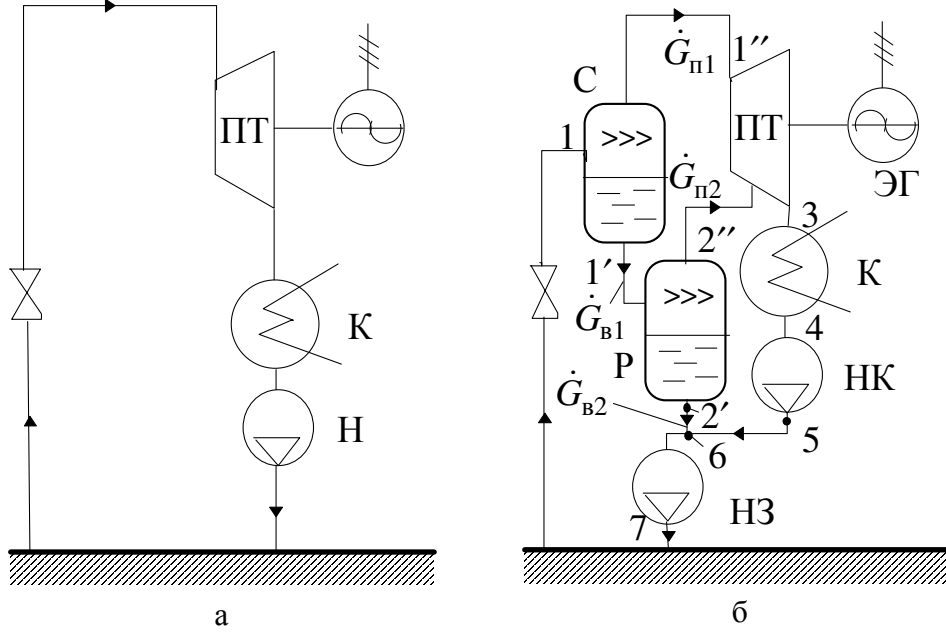


Рис. 10.20а,б

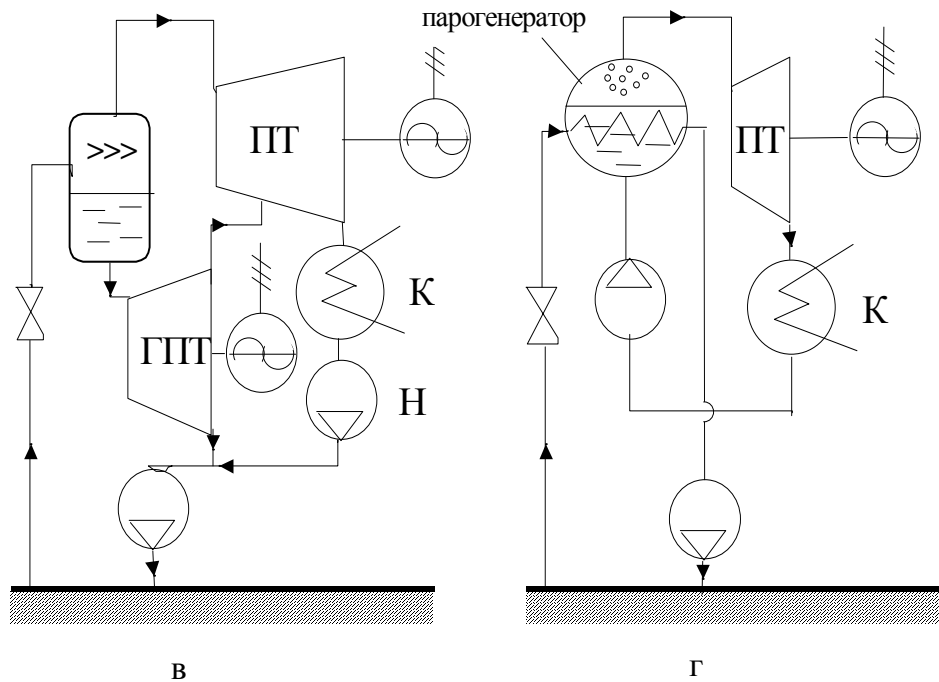


Рис. 10.20 в,г

Применение вместо расширителей гидропаровых турбин (ГПТ), работающих на вскипающих потоках, особенно при низкой степени сухости термальной смеси, существенно повышает тепловую эффективность ГеоТЭС. На рис.10.20в показана схема ГеоТЭС с ГПТ. В данной схеме ГПТ не только генерирует пар для промежуточных ступеней ПТ, но и производит электрическую энергию.

Проф. В.А.Барилловичем были разработаны основы инженерного метода расчета проточной части ГПТ и в 1986 г. создана модель ГПТ мощностью 100 кВт, которая успешно прошла испытания, показав  $\eta_{oi}^r = 0,42$ . Использование в ГПТ сопел с парогенерирующими решетками, разработанных на кафедре “Теоретические основы теплотехники” позволит

создавать ГПТ с  $\eta_{oi}^* = 0,55 \dots 0,60$ , что приведет к дальнейшему росту эффективности ГеоТЭС (идея создания таких сопел принадлежит профессору ЛПИ В.А.Зысину). К настоящему времени на кафедре ТОТ СПбПУ проф. В.А.Барилловичем и доц. Ю.А.Смирновым выполнен термодинамический анализ с оптимизацией параметров одноконтурных и двухконтурных ГеоТЭС с ГПТ.

Для геотермальных источников с горячей термальной водой, содержащей значительное количество растворенных солей, используются двухконтурные схемы (рис.10.20г), эффективность которых ниже, чем одноконтурных.

Рассмотрим широко используемую в геотермальной энергетике схему, показанную на рис. 10.20б. Установка состоит из сепаратора влаги С, расширителя Р, паровой турбины ПТ, конденсатора К, насоса конденсатора НК, насоса закачки воды в пласт НЗ и электрогенератора ЭГ. Термальная смесь из скважины с энтальпией  $i_{1cm}$  поступает в сепаратор, где разделяется на насыщенную воду и сухой насыщенный пар. Водяной пар с секундной массой  $\dot{G}_{n1} = \dot{G}_{cm}x_1$ , энтальпией  $i_1''$  при давлении  $p_1$  поступает в турбину, в которой расширяется до  $p_{II}$  (точка 2t на рис.10.21). В конце расширения степень сухости пара равна

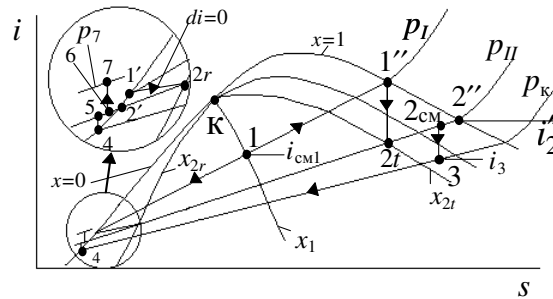


рис. 10.21

$x_{2t} = \frac{s_1'' - s'(p_{II})}{s''(p_{II}) - s'(p_{II})}$ . Насыщенная вода (точка 1') с расходом  $\dot{G}_{в1} = \dot{G}_{cm}(1 - x_1)$  поступает в расширитель, где вскипает в процессе дросселирования (1'-2r,  $di=0$ ) и разделяется на пар с энтальпией  $i_2''$  и воду с энтальпией  $i_2'$ . Сухой насыщенный пар с расходом  $\dot{G}_{п2} = \dot{G}_{cm}(1 - x_1)x_{2r}$  и энтальпией  $i_2''$  поступает из расширителя в промежуточную ступень турбины, где смешивается с основным потоком пара в состоянии 2t, в результате смешения состояние пара характеризуется точкой 2см:

$$i_{2cm}(\dot{G}_{п1} + \dot{G}_{п2}) = \dot{G}_{п1}i_{2t} + \dot{G}_{п2}i_2''(p_{II}) = \dot{G}_{п1}[i'(p_{II}) + r(p_{II})x_{2t}] + \dot{G}_{п2}i_2''(p_{II}),$$

откуда

$$i_{2cm} = \frac{x_1[i'(p_{II}) + r(p_{II})x_{2t}] + (1 - x_1)x_{2r}i_2''(p_{II})}{x_1 + (1 - x_1)x_{2r}}. \quad (10.32)$$

Полагая процесс смешения обратимым, энтропию  $s_{2cm}$  найдем по формуле

$$s_{2cm} = \frac{x_1 \left[ s'(p_{II}) + \frac{r(p_{II})x_{2t}}{T_s(p_{II})} \right] + (1 - x_1)x_{2r}s_2''(p_{II})}{x_1 + (1 - x_1)x_{2r}}. \quad (10.33)$$

Так как процесс дальнейшего расширения пара в турбине 2см-3 протекает при  $ds=0$ , то

$$x_3 = \frac{s_{2\text{см}} - s'(p_k)}{s''(p_k) - s'(p_k)}. \quad (10.34)$$

Энтальпия влажного пара в точке 3 равна

$$i_3 = i'(p_k) + r(p_k)x_3. \quad (10.35)$$

Обычно давление  $p_k$  в конденсаторах турбин ГеоТЭС составляет 0,1 бар.

Мощность турбины определяется перепадами энтальпий и расходами потоков пара  $\dot{G}_{\text{п1}}$  и  $\dot{G}_{\text{п2}}$

$$\begin{aligned} N_T &= \dot{G}_{\text{п1}}(i_1'' - i_{2t}) + (\dot{G}_{\text{п1}} + \dot{G}_{\text{п2}})(i_{2\text{см}} - i_3) = \\ &= \dot{G}_{\text{см}} [x_1(i_1'' - i_{2t}) + (x_1 + (1 - x_1)x_{2r})(i_{2\text{см}} - i_3)]. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Суммарная потребляемая насосами мощность

$$N_H = N_{\text{нк}} + N_{\text{нз}} = \dot{G}_{\text{см}} [(x_1 + (1 - x_1)x_{2r})v_4(p_5 - p_k) + v_6(p_7 - p_6)].$$

Мощность цикла

$$N_{\text{ц}} = N_T - N_H. \quad (10.37)$$

Давление  $p_{\text{II}}$  в расширителе определяют расчетным путем из условия

$$N_{\text{ц}} = N_{\text{цmax}}.$$

Термический КПД ГеоТЭС

$$\eta_t = \frac{N_{\text{ц}}}{\dot{Q}_t} = \frac{N_{\text{ц}}}{\dot{G}_{\text{см}}(i_{1\text{см}} - i_7)}, \quad (10.38)$$

эксергетический КПД

$$\eta_{\text{ex}} = \frac{N_{\text{ц}}}{\dot{G}_{\text{см}} [(i_{1\text{см}} - i_{oc}) - T_{oc}(s_{1\text{см}} - s_{oc})]}, \quad (10.39)$$

где  $T_{oc} = 283\text{K}$  - среднегодовая температура воды,  $i_{oc} = 42$  кДж/кг,  $s_{oc} = 0,1511$  кДж/(кгК) - энтальпия и энтропия воды при  $T_{oc}$ .

Энтальпия воды в точке 6:

$$i_6 = (1 - x_1)(1 - x_{2r})i_2' + (x_1 + (1 - x_1)x_{2r})i_5, \quad (10.40)$$

где  $i_5 = i_4' + |l_{\text{нз}}| = i_4' + \frac{p_5 - p_4}{\rho_4'}$ .

Температура воды, закачиваемой в пласт  $t_7$ , должна быть не ниже 70С (при более низких температурах пористость пласта, а следовательно, и производительность скважины с течением времени будет уменьшаться из-за выпадения солей) :  $t_7 = f(i_7, p_7)$ ,

$i_7 = i_6' + |l_{\text{нз}}| = i_6 + \frac{p_7 - p_6}{\rho_6}$ . Давление в пласте  $p_8 = p_7 + \rho_7 gh$ , где  $h$  - глубина залегания

пласта с термальной смесью (водой).

Если считать, что термальная вода является возобновляемым источником энергии, то более правильно определять эффективность реальной ГеоТЭС по формуле

$$\eta_{\text{уст}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n N_{\text{нд},i}}{N_{\text{тд}}}, \quad (10.41)$$

где  $N_{\text{нд}}$  и  $N_{\text{тд}}$  - соответственно действительная мощность, потребляемая насосами, вспомогательным оборудованием и действительная мощность турбины. В этом случае тепловая эффективность ГеоТЭС будет выше всех существующих установок.

Анализ цикла Ренкина с учетом необратимых потерь  
энтропийным и эксергетическим методами

Энтропийный и эксергетический методы позволяют определять эффективность энергетической установки с позиций первого и второго законов термодинамики и выявлять элементы, в которых термодинамические потери максимальны и которые в силу этого требуют дальнейшего совершенствования.

Энтропийный метод

Для термодинамической системы источник работы - окружающая среда, совершающей идеальный процесс, максимальная мощность цикла в интервале температур  $T \dots T_{oc}$

$$\dot{L}_{\max} = \dot{Q}_I \left( 1 - \frac{T_{oc}}{T} \right) = \dot{Q}_I \eta_{tc}, \quad (10.42)$$

где  $\eta_{tc}$  - термический КПД обратимого цикла Карно (фактор Карно). Действительную мощность найдем по формуле

$$\dot{L}_d = \dot{L}_{\max} - \Delta \dot{L}_{пр}, \quad (10.43)$$

где  $\Delta \dot{L}_{пр} = T_{oc} \sum \Delta \dot{S}_{ин} = \dot{D}$  - потеря работоспособности термодинамической системы (потеря эксергии).

С другой стороны, действительную мощность можно записать через абсолютный эффективный КПД установки

$$\dot{L}_d = \dot{Q}_I \eta_e^{уст}. \quad (10.44)$$

Приравнявая (10.43) и (10.44), получим

$$\Delta \dot{L}_{пр} = (\eta_{tc} - \eta_e^{уст}) \dot{Q}_I. \quad (10.45)$$

Введем понятие коэффициента потери работоспособности

$$\eta_{пр} = \frac{\Delta \dot{L}_{пр}}{\dot{L}_{\max}} \quad (10.46)$$

и коэффициента относительной работоспособности

$$\eta_{ор} = 1 - \eta_{пр} \quad (10.47)$$

Теперь абсолютный эффективный КПД установки можно выразить через  $\eta_{ор}$  и  $\eta_{tc}$ . Действительно, подставляя  $\eta_{пр}$  из (10.46) в (10.45) с учетом (10.42) и (10.47), получим

$$\eta_e^{уст} = \eta_{ор} \eta_{tc}. \quad (10.48)$$

Однако такой подход оценивает установку в целом, не давая возможности выявить элемент, где имеет место наибольшая потеря работоспособности, поэтому рассмотрим каждый агрегат ПСУ в отдельности.

Парогенератор. Введем КПД парогенератора

$$\eta_{пр} = \frac{(i_{10} - i_{4д}) \dot{G}_п}{\dot{Q}'}, \quad (10.49)$$

где  $\dot{Q}' = H_n^p \dot{B}_T$  - теплота, выделившаяся при сгорании топлива в топке идеального парогенератора ( $\eta_{пр} = 1$ ), и КПД паропровода

$$\eta_{пр} = \frac{i_1 - i_{4д}}{i_{10} - i_{4д}}. \quad (10.50)$$

Выразим  $i_1 - i_{4д}$  из (10.50) и подставим в (10.49):

$$\eta_{\text{пр}} = \frac{(i_1 - i_{4\text{д}})\dot{G}_{\text{п}}}{\dot{Q}'\eta_{\text{пр}}} = \frac{(i_1 - i_{4\text{д}})\dot{G}_{\text{п}}}{H_{\text{н}}^{\text{п}}\dot{B}_{\text{т}}\eta_{\text{пр}}}. \quad (10.51)$$

Определим расход топлива

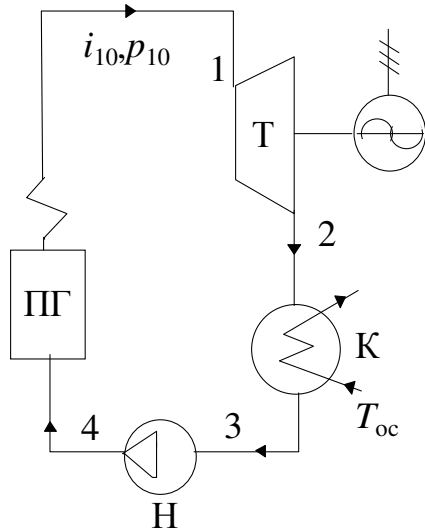


Рис. 10.20а

$$\dot{B}_{\text{т}} = \frac{(i_1 - i_{4\text{д}})\dot{G}_{\text{п}}}{\eta_{\text{пр}}\eta_{\text{пр}}H_{\text{н}}^{\text{п}}}. \quad (10.52)$$

По определению,  $q_l = (i_1 - i_{4\text{д}})$ , а  $\dot{Q}_l = q_l\dot{G}_{\text{п}}$ , тогда

$$\dot{Q}_l = \dot{B}_{\text{т}}H_{\text{н}}^{\text{п}}\eta_{\text{пр}}\eta_{\text{пр}}. \quad (10.53)$$

Найдем потерю работоспособности парогенератора  $\Delta\dot{L}_{\text{прI}}$ , обусловленную необратимым теплообменом между топочными газами и рабочим телом

$$\Delta\dot{S}_{\text{прI}} = (s_{10} - s_{4\text{д}})\dot{G}_{\text{п}} - \frac{\dot{Q}'\eta_{\text{пр}}}{\bar{T}_{\text{г}}}, \quad (10.54)$$

$$\Delta\dot{L}_{\text{прI}} = T_{\text{oc}}\Delta\dot{S}_{\text{прI}}. \quad (10.55)$$

Рассматривая потерю работоспособности в ПГ за счет потери теплоты  $\dot{Q}_{\text{пот}}$  в окружающую среду, можно написать

$$\dot{Q}_{\text{пот}} = (1 - \eta_{\text{пр}})\dot{Q}', \quad (10.56)$$

$$\Delta\dot{S}_{\text{прII}} = \left( \frac{1}{T_{\text{oc}}} - \frac{1}{\bar{T}_{\text{г}}} \right) \dot{Q}_{\text{пот}}, \quad (10.57)$$

$$\Delta\dot{L}_{\text{прII}} = T_{\text{oc}}\Delta\dot{S}_{\text{прII}} = \left( 1 - \frac{T_{\text{oc}}}{\bar{T}_{\text{г}}} \right) \dot{Q}_{\text{пот}}. \quad (10.58)$$

Таким образом, суммарная потеря работоспособности в ПГ

$$\Delta\dot{L}_{\text{прпр}} = \Delta\dot{L}_{\text{прI}} + \Delta\dot{L}_{\text{прII}}. \quad (10.59)$$

Паропровод. Потери в паропроводе

$$\dot{Q}_{\text{пот.пр}} = (i_{10} - i_1)\dot{G}_{\text{п}}, \quad (10.60)$$

$$\Delta\dot{S}_{\text{пр}} = \left( \frac{1}{T_{\text{oc}}} - \frac{1}{\bar{T}_{\text{пр}}} \right) \dot{Q}_{\text{пот.пр}}, \quad (10.61)$$

$$\text{где } \bar{T}_{\text{пр}} \approx \frac{T_{10} + T_1}{2}, \quad \Delta\dot{L}_{\text{пр.пр}} = T_{\text{oc}}\Delta\dot{S}_{\text{пр}} = \left( 1 - \frac{T_{\text{oc}}}{\bar{T}_{\text{пр}}} \right) \dot{Q}_{\text{пот.пр}}. \quad (10.62)$$

Турбина-генератор.

Выразим приращение энтропии пара в процессе расширения в турбине через внутренний относительный КПД  $\eta_{0i}^{\text{T}}$  и идеальную работу турбины  $l_{\text{т ид}}$  (см. рис.10.23):

$$\Delta s_{\text{н}} = \frac{i_{2\text{д}} - i_2}{T_2}. \quad (a)$$

Так как  $\eta_{0i}^{\text{T}} = \frac{i_1 - i_{2\text{д}}}{i_1 - i_2}$ , то

$$i_1 - i_{2\text{д}} = (i_1 - i_2)\eta_{0i}^{\text{T}}. \quad (b)$$

Запишем разность  $i_{2\text{д}} - i_2$  в виде

$$i_{2\text{д}} - i_2 = (i_1 - i_2) - (i_1 - i_{2\text{д}}). \quad (c)$$

С учетом (b) перепишем выражение (c)

$$i_{2д} - i_2 = (i_1 - i_2) - (i_1 - i_2)\eta_{oi}^T = l_{Tид} - l_{Tид}\eta_{oi}^T = (1 - \eta_{oi}^T)l_{Tид}. \quad (d)$$

Подставляя (d) в (a), с учетом секундного расхода пара  $\dot{G}_п$  получим

$$\Delta\dot{S}_{нт} = \frac{(1 - \eta_{oi}^T)l_{Tид}\dot{G}_п}{T_2} \quad (10.63)$$

$$\Delta\dot{L}_{пр.т} = T_{oc}\Delta\dot{S}_{нт}. \quad (10.64)$$

Механическую потерю работоспособности в турбине определим по формуле

$$\Delta\dot{L}_{пр.мех} = (i_1 - i_{2д})(1 - \eta_{мех})\dot{G}_п = l_{Tид}\eta_{oi}^T(1 - \eta_{мех})\dot{G}_п. \quad (10.65)$$

Для электрогенератора

$$\Delta\dot{L}_{пр.ген} = l_{Tд}\eta_{мех}(1 - \eta_{ген})\dot{G}_п. \quad (10.66)$$

Конденсатор.

Из уравнения теплового баланса

$$\dot{Q}_{II} = \bar{c}_{рхв}(T_{вых} - T_{oc})\dot{G}_{хв} = (i_{2д} - i'_3)\dot{G}_п \quad (10.67)$$

можно определить температуру охлаждающей воды  $T_{вых}$  на выходе из конденсатора. Изменение энтропии системы, обусловленное теплообменом

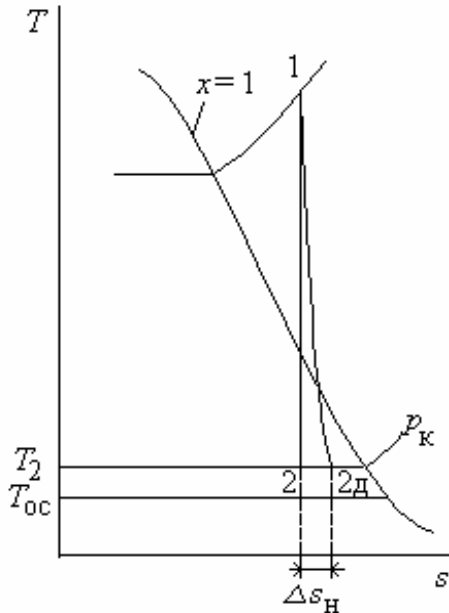


Рис. 10.23

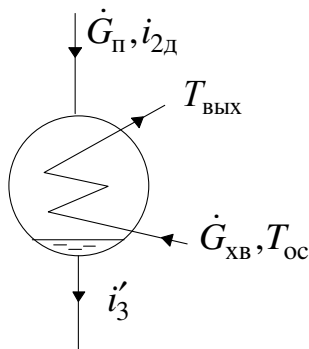


Рис. 10.24

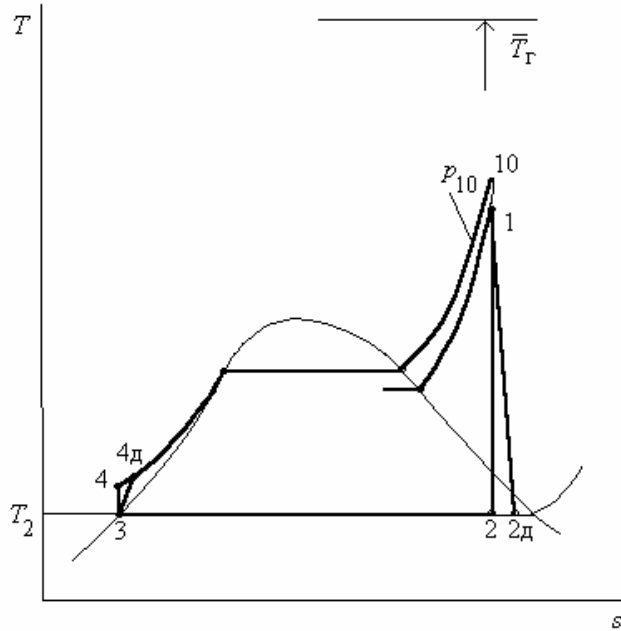


Рис. 10.22б

между охлаждающей водой и конденсирующимся влажным паром, найдем из выражения (см. рис. 10.24 и 10.23)

$$\Delta\dot{S}_{кн} = \Delta\dot{S}_{хв} + \Delta\dot{S}_{п} = \bar{c}_{рхв}\dot{G}_{хв} \ln \frac{T_{вых}}{T_{oc}} - \frac{i_{2д} - i'_3}{T_2}\dot{G}_п. \quad (10.68)$$

Потеря работоспособности в конденсаторе  $\Delta\dot{L}_{пр.к} = T_{oc}\Delta\dot{S}_{кн}$ .

Насос.

Для насоса можно написать:

$$\Delta S_{н.н} = \frac{i_{4д} - i_4}{\bar{T}_{4-4д}} = \frac{(i_{4д} - i_3) - (i_4 - i_3)}{\bar{T}_{4-4д}}, \quad (a)$$

где  $\bar{T}_{4-4д} = (T_4 + T_{4д})/2$ , но  $\eta_{0i}^н = \frac{i_4 - i_3}{i_{4д} - i_3}$ , откуда

$$i_{4д} - i_3 = (i_4 - i_3) \frac{1}{\eta_{0i}^н}. \quad (b)$$

Подставляя (b) в (a) с учетом расхода пара  $\dot{G}_п$ , получим

$$\Delta \dot{S}_{н.н} = \frac{(i_4 - i_3) \left( \frac{1}{\eta_{0i}^н} - 1 \right)}{\bar{T}_{4-4д}} \dot{G}_п = \frac{l_{н.нд} \left( \frac{1}{\eta_{0i}^н} - 1 \right) \dot{G}_п}{\bar{T}_{4-4д}}, \quad (10.69)$$

$$\Delta \dot{L}_{пр.н} = T_{oc} \Delta \dot{S}_{н.н}. \quad (10.70)$$

Потеря работоспособности установки

$$\Delta \dot{L}_{пр.уст} = \sum_{i=1}^n \Delta \dot{L}_{пр.i}. \quad (10.71)$$

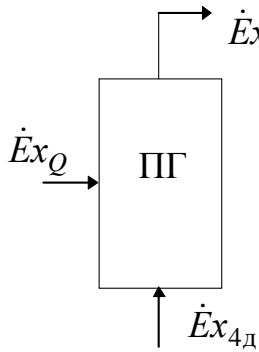
Электрическую мощность (на клеммах генератора) ПТУ найдем по формуле

$$N_{эл} = \dot{L}_{max} - \Delta \dot{L}_{пр.уст}. \quad (10.72)$$

### Эксергетический метод

Парогенератор. Потерю эксергии  $\dot{D}$  или потерю работоспособности  $\Delta \dot{L}_{пр.пг}$  в парогенераторе запишем как алгебраическую сумму потоков эксергии, входящих и выходящих из ПГ

$$\begin{aligned} \dot{D}_{пг} = \Delta \dot{L}_{пр.пг} = \dot{E}_Q + \dot{E}x_{4д} - \dot{E}x_{10} &= \left( 1 - \frac{T_{oc}}{T_r} \right) Q' + \\ &+ \dot{G}_п [(i_{4д} - i_{oc}) - T_{oc} (s_{4д} - s_{oc})] - \dot{G}_п [(i_{10} - i_{oc}) - T_{oc} (s_{10} - s_{oc})], \end{aligned} \quad (10.73)$$



где  $Q' = \dot{B}_r H_N^p$ ;  $\dot{E}_Q$  - поток эксергии теплоты;  $\dot{E}x_{4д}$  - поток эксергии питательной воды, входящей в ПГ;  $\dot{E}x_{10}$  - поток эксергии пара, выходящего из ПГ.

Паропровод (см. рис. 10.20б).

$$\dot{D}_{пп} = \Delta \dot{L}_{пр.пп} = \dot{G}_п (ex_{10} - ex_1), \quad (10.74)$$

где  $ex_i = (i_i - i_{oc}) - T_{oc} (s_i - s_{oc})$  - удельная эксергия  $i$ -го потока.

Турбогенератор.

$$\dot{D}_{тр} = \Delta \dot{L}_{пр.тр} = \dot{G}_п (ex_1 - ex_{2д}) - N_{эл}, \quad (10.75)$$

где  $N_{эл}$  - мощность электрического тока на клеммах электрогенератора.

Потеря потока эксергии  $\dot{D}_{тр}$  в турбогенераторе учитывает потерю эксергии в турбине за счет внутренней необратимости, в подшипниках турбогенератора (механические потери) и в самом электрогенераторе (электрические потери).

$$\text{Конденсатор} \quad \dot{D}_к = \Delta \dot{L}_{пр.к} = \dot{G}_п (ex_{2д} - ex_3). \quad (10.76)$$

$$\text{Насос.} \quad \dot{D}_н = \Delta \dot{L}_{пр.н} = \dot{G}_п (ex_3 + |l_{нд}| - ex_{4д}). \quad (10.77)$$

Дальнейший расчет эффективности ПТУ осуществляется по формулам, полученным в энтропийном методе.



Выполненные расчеты цикла Ренкина на основе энтропийного или эксергетического метода показывают, что основная потеря работоспособности (эксергии) в ПТУ имеет место в парогенераторе из-за значительной внешней необратимости, обусловленной большим температурным напором между топочными газами и нагреваемым рабочим телом  $\Delta\bar{T} = \bar{T}_r - \bar{T}_{4д-10}$ , где  $\bar{T}_{4д-10} = \frac{i_{10} - i_{4д}}{s_{10} - s_{4д}}$ . На рис.10.25 приведена диаграмма потоков эксергии и потоков потери эксергии, дающая наглядное представление о величинах потерь эксергии на пути превращения потока эксергии теплоты  $\dot{E}_Q = \left(1 - \frac{T_{oc}}{T_r}\right) \dot{Q}'$  в электрическую мощность  $N_{эл}$ .

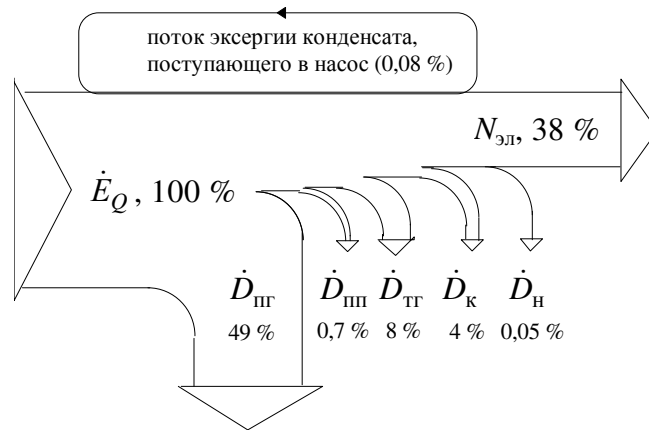


Рис. 10.25

При определении потерь эксергии возможен и несколько иной подход [8]. Так, для парогенератора можно написать

$$\dot{D}_{пр} = \Delta\dot{L}_{пр.пр} = \dot{E}x_t + \dot{E}x_b + \dot{E}x_{4д} - (\dot{E}x_{10} + \dot{E}x_r), \quad (10.78)$$

$\dot{E}x_t, \dot{E}x_b, \dot{E}x_{4д}, \dot{E}x_{10}, \dot{E}x_r$  - соответственно потоки эксергии топлива, воздуха, питательной воды, пара на выходе из ПГ, уходящих газов. Так как поток эксергии воздуха на входе в ПГ  $\dot{E}x_b = \dot{G}_b ex_b = 0$ , то

$$\dot{D}_{пр} = \Delta\dot{L}_{пр.пр} = \dot{B}_t ex_t + \dot{G}_п ex_{4д} - (\dot{G}_п ex_{10} + \dot{G}_r ex_r). \quad (10.79)$$

В инженерных расчетах можно считать, что эксергия топлива  $ex_t$  равна высшей теплотворной способности топлива  $H_b^p$ , т.е.  $ex_t = H_b^p$ . Так, для нефти  $ex_t=43$  МДж/кг, а для окисления метана кислородом  $CH_4+2O_2=CO_2+2H_2O$ ,  $ex_t=51,9$  МДж/кг.

Эксергетический КПД парогенератора определим по

формуле 
$$\eta_{ex.пр} = \frac{\dot{G}_п (ex_{10} - ex_{4д})}{\dot{B}_t ex_t} = 1 - \frac{\dot{D}_{пр} + \dot{G}_r ex_r}{\dot{B}_t ex_t}. \quad (10.80)$$

Для конденсатора имеем

$$\begin{aligned} \dot{D}_к = \Delta\dot{L}_{пр.к} &= \dot{E}x_{2д} + \dot{E}x_{хвI} - (\dot{E}x_3 + \dot{E}x_{хвII}) = \\ &= \dot{G}_п ex_{2д} + \dot{G}_{хв} ex_{хвI} - (\dot{G}_п ex_3 + \dot{G}_{хв} ex_{хвII}). \end{aligned} \quad (10.81)$$

Диаграмма потоков эксергии в ГТУ

В связи с тем, что в ГТУ значительная часть мощности турбины расходуется на привод компрессора, диаграмма потоков эксергии в ГТУ существенно отличается от диаграммы потоков эксергии в ПТУ.

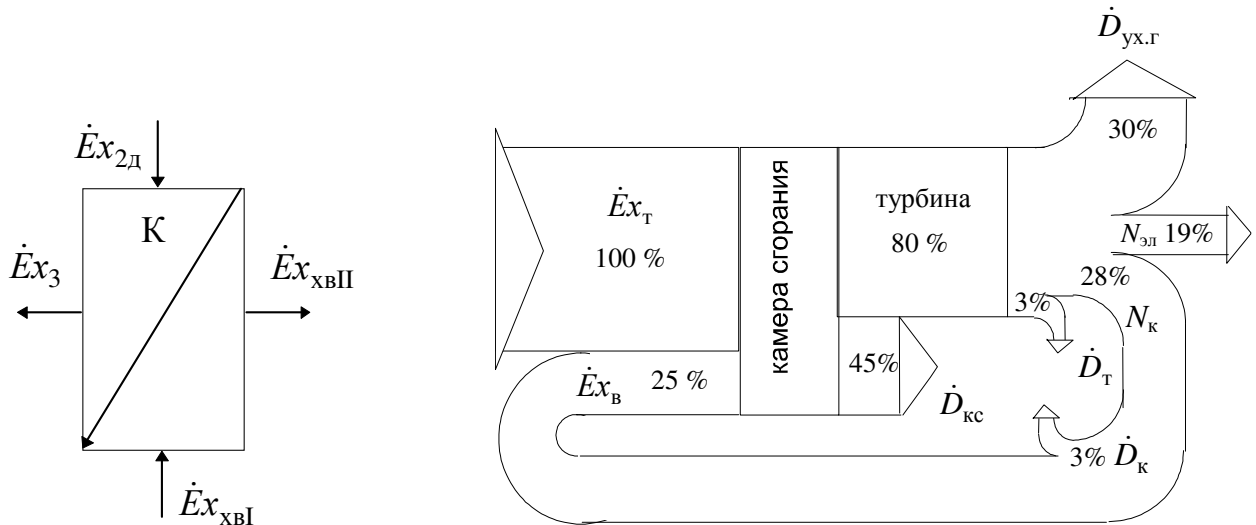


Рис. 10.26

Из рис.10.26 видно, что в камеру сгорания входит поток эксергии, состоящий из потоков эксергии топлива и воздуха после компрессора  $\dot{E}x_{кc} = \dot{E}x_{т} + \dot{E}x_{в}$  и составляет около 125% по отношению к  $\dot{E}x_{т}$ . Для камеры сгорания можно написать

$$\dot{D}_{кc} = \dot{E}x_{в} + \dot{E}x_{т} - \dot{E}x_{г} = \dot{G}_{в}ex_{в} + \dot{B}_{т}ex_{т} - \dot{G}_{г}ex_{г}. \quad (10.82)$$

Из диаграммы видно, что в КС имеет место значительная потеря эксергии. Перепишем (10.82) в виде

$$\dot{G}_{г}ex_{г} - \dot{G}_{в}ex_{в} = \dot{B}_{т}ex_{т} - \dot{D}_{кc}. \quad (a)$$

Разделив (a) на  $\dot{B}_{т}ex_{т}$ , определим эксергетический КПД камеры сгорания

$$\eta_{ex,кc} = \frac{\dot{G}_{г}ex_{г} - \dot{G}_{в}ex_{в}}{\dot{B}_{т}ex_{т}} = 1 - \frac{\dot{D}_{кc}}{\dot{B}_{т}ex_{т}}. \quad (10.83)$$

Из (10.83) следует, что чем выше температура газа на выходе из КС, тем больше эксергетический КПД, а следовательно, меньше потеря  $\dot{D}_{кc}$ . В турбину входит поток газа, имеющий 80% потока эксергии топлива. Для турбины можно написать

$$\dot{D}_{у.г} + \dot{D}_{т} = \dot{E}x_{г} - (N_{эл} + N_{к}), \quad (10.84)$$

откуда найдем эксергетический КПД турбины в виде

$$\eta_{ex,т} = \frac{N_{эл} + N_{к}}{\dot{E}x_{г}} = 1 - \frac{\dot{D}_{у.г} + \dot{D}_{т}}{\dot{E}x_{г}}. \quad (10.85)$$

Эксергетический КПД установки определим по формуле

$$\eta_{ex,уст} = \frac{N_{эл}}{\dot{B}_{т}ex_{т}}. \quad (10.86)$$

Для простейших ГТУ  $\eta_{ex,уст} \approx 0.2...0.25$ .

## 11. Методы непосредственного преобразования энергии Магнетогидродинамический генератор на газовом рабочем теле

Благодаря достижениям науки в области высоких температур, создаются благоприятные условия для разработки энергетических установок непосредственного преобразования теплоты в электрическую энергию. Такие установки называются магнетогидродинамическими генераторами (МГД-генераторами). Принцип работы генератора основан на том,

что при пересечении ионизированной плазмой (т.е. газом, содержащим свободные электроны) магнитного поля образуется электродвижущая сила (ЭДС). С ростом температуры газа растет степень его ионизации, однако чтобы ионизированная плазма могла быть использована в качестве рабочего тела, ее температура должна быть около 3000...4000С, такая плазма называется низкотемпературной. При более высоких температурах начинается распад ядер атомов, а плазма классифицируется как высокотемпературная. Реализация МГД-генераторов с температурой плазмы выше 3000С в настоящее время невозможна, поэтому используют плазму с температурой 2500...2800С, добавляя в нее с целью повышения степени ионизации пары щелочных металлов (калия, цезия).

МГД-генераторы, как правило, соединяют с паротурбинной установкой (рис.11.1), что позволяет получить комбинированную установку высокой эффективности ( $\eta_e^{уст} \approx 50\%$ ).

Рассмотрим процессы, протекающие в комбинированной установке с МГД-генератором:

1-2,  $ds=0$  - повышение давления в компрессоре, который приводится во вращение электрическим двигателем Д, мощность, потребляемая компрессором  $N_k = \dot{G}_b(i_2 - i_1)$ ;

2-5,  $dp=0$  - процесс нагрева воздуха в теплообменном аппарате за счет охлаждения газов (4-6), уравнение теплового баланса в ТА имеет вид  $\dot{G}_b(i_5 - i_2) = \dot{G}_r(i_4 - i_6)$ ;

5-3,  $dp=0$  - подвод теплоты к рабочему телу в КС за счет сгорания топлива;

3-4,  $ds=0$  - расширение плазмы в разгонном сопле до давления окружающей среды (в идеальном цикле). В адиабатическом сопле  $di^*=0$ , или  $i_3^* = i_4^*$ , откуда  $\frac{c_4^2 - c_3^2}{2} = i_3 - i_4$ . В ка-

нал МГД-генератора входит плазма с температурой около 2000С и скоростью  $c_4 \approx 1000$  м/с, где кинетическая энергия плазмы превращается в электрическую. Для МГД-канала можно написать  $i_4^* - l_{эл} - q_{охл} = i_4^*$ , где  $q_{охл}$  - отводимая теплота от стенок канала с целью охлаждения. Но  $i_3^* = i_4^*$ , тогда удельная идеальная электрическая работа

$l_{эл} = i_3 - i_4 + \frac{c_3^2 - c_4^2}{2} - q_{охл}$ . Если на выходе из канала МГД-генератора скорость плазмы  $c_4$  равна скорости на входе в разгонное сопло  $c_3$ , а  $q_{охл}=0$ , то  $l_{эл} = i_3 - i_4$  (см. рис.11.1);

4-6,  $dp=0$  - процесс охлаждения газов в ТА;

6-7,  $dp=0$  - охлаждение газов в парогенераторе ПГ, из уравнения теплового баланса  $\dot{G}_r(i_6 - i_7) = \dot{G}_n(i_8 - i_{11})$  находят соотношение между секундными массами теплоносителей, циркулирующими в контурах;

11-8,  $dp=0$  - процесс подвода теплоты в ПГ к воде;

8-9,  $ds=0$  - расширение пара в идеальной паровой турбине;

9-10,  $dp=0$  - конденсация пара в конденсаторе.

10-11,  $ds=0$  - повышение давления в идеальном насосе  $l_n = -(i_{11} - i_{10})$ .

Мощность идеального цикла комбинированной установки

$$N_{ц} = \dot{G}_r[(i_3 - i_4) - (i_2 - i_1)] + \dot{G}_n[(i_8 - i_9) - (i_{11} - i_{10})]. \quad (11.1)$$

Подведенный в цикле поток теплоты

$$\dot{Q}_1 = \dot{B}_r H_n^p = \dot{G}_r i_3 - (\dot{G}_b i_5 + \dot{B}_r i_r + \dot{G}_{np} i_{np}). \quad (11.2)$$

Тепловой поток отдаваемый окружающей среде

$$\dot{Q}_{II} = \dot{G}_r(i_7 - i_1) + \dot{G}_n(i_9 - i_{10}). \quad (11.3)$$

Термический КПД установки

$$\eta_t = \frac{N_{\text{п}}}{\dot{Q}_I} \quad (11.4)$$

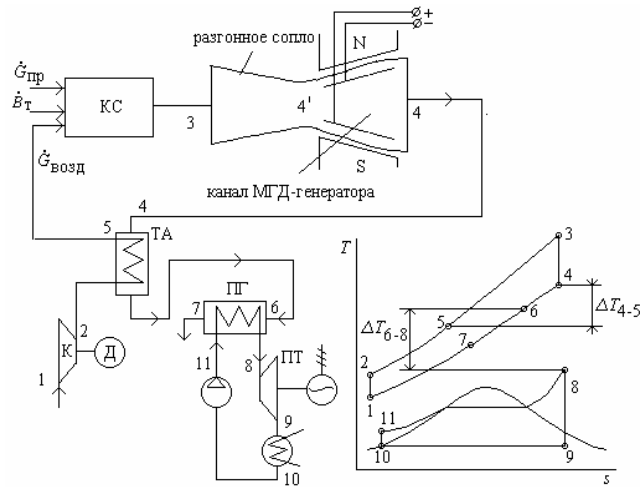


Рис.11.1

### Цикл МГД-генератора с жидкометаллическим рабочим телом

Жидкометаллические МГД-установки могут найти применение в космических аппаратах, где в качестве источника теплоты используется ядерный реактор (рис.11.2). Такие установки в связи с большой плотностью рабочего тела (применяется, как правило, смесь металлов, состоящая из Na и K) могут генерировать значительную электрическую мощность на единицу объема. К разгонному соплу РС подводится горячая жидкая металлическая смесь (25% натрия и 75% калия), недогретая до температуры насыщения на несколько градусов. В процессе расширения смесь вскипает, превращаясь в высоковлажный пар с большой кинетической энергией. Далее поток пара поступает в камеру смешения КС, куда также подается холодная жидкая металлическая смесь из холодильника. В результате смешения увеличивается степень влажности потока, что положительно сказывается на работе МГД-генератора, однако в КС имеет место значительная потеря кинетической энергии потока, пропорциональная квадрату разности скоростей смешиваемых потоков. Ударные потери приводят к снижению эффективности установки. В МГД-генераторе имеет место преобразование кинетической энергии в электрическую. В диффузоре происходит процесс восстановления давления. После диффузора одна часть потока поступает в реактор, где получает теплоту  $\dot{Q}_I$ , а другая - в холодильник, где окружающей среде отдается теплота  $\dot{Q}_{II}$ .

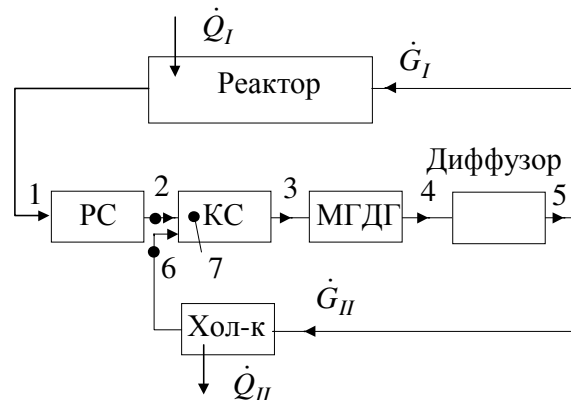


Рис. 11.2

Мощность цикла такой установки можно определить по формуле

$$N_{\text{эл}} = \dot{Q}_I - \dot{Q}_{II} \quad (11.5)$$

Абсолютный эффективный КПД реальной установки найдем из выражения

$$\eta_e^{\text{уст}} = \frac{N_{\text{эл}}}{\dot{Q}_I} = 1 - \frac{\dot{Q}_{II}}{\dot{Q}_I} \quad (11.6)$$

Из рассмотрения процессов в  $i$ - $s$  диаграмме (рис.11.3) следует, что

$$\dot{Q}_I = \dot{G}_I (i_1^* - i_5^*), \quad (11.7)$$

$$\dot{Q}_{II} = \dot{G}_{II} (i_5^* - i_6^*), \quad (11.8)$$

$$N_{\text{ц}} = (i_3^* - i_5^*) (\dot{G}_I + \dot{G}_{II}), \quad (11.9)$$

где  $i_3^* = \frac{i_1^* + ui_6^*}{1+u}$ ;  $u = \frac{\dot{G}_{II}}{\dot{G}_I}$  - коэффициент инжекции.

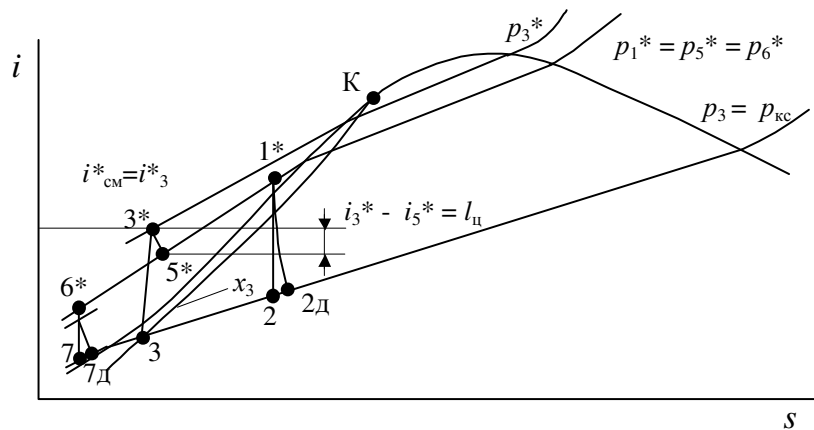


Рис. 11.3

Для того чтобы понять смысл формулы (11.9), мысленно поменяем местами диффузор и МГД-канал, тогда после камеры смешения поток поступит не в канал МГД-генератора, а в диффузор, где давление потока увеличится от  $p_3$  до  $p_3^*$  (см. рис.11.3). В канале МГД-генератора после срабатывания энтальпии получим (11.9).

Электрическую мощность установки запишем как

$$N_{\text{эл}} = N_{\text{ц}} \eta_{\text{ген}}, \quad (11.10)$$

где  $\eta_{\text{ген}}$  - КПД МГД-генератора.

Расчеты показывают, что  $\eta_e^{\text{уст}} = 2...3\%$ , поэтому такие установки целесообразно создавать лишь для специального назначения. Применение натрия в качестве компонента смеси требует абсолютной герметичности конструкции. Достоинством рассмотренной установки можно считать относительную простоту конструкции и отсутствие вращающихся частей.

### Цикл термоэлектрического генератора

В 1821 г. немецкий физик Т. Зеебек установил, что при помещении спаев двух термоэлектродов с различающимися физическими свойствами в среды с разными температурами возникает термо-э.д.с., что приводит к появлению электрического тока при замыкании цепи на внешнюю нагрузку сопротивлением  $R$  (рис.11.4). Между температурой и термо-э.д.с. имеет место связь

$$dE = \alpha dT, \quad (11.11)$$

где  $\alpha$  - термоэлектрический коэффициент. Интегрируя (11.11) при  $\alpha = \text{const}$ , получим зависимость э.д.с. от перепада температур между электродами

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \alpha(T_1 - T_2). \quad (11.12)$$

Эффект Зеебека широко используется в измерительной технике при определении температуры тел и сред. На этом принципе работают и полупроводниковые термоэлектрические генераторы.

В 1934 г. французский физик Ж.Пельтье обнаружил, что при пропускании через термоэлектроды электрического тока от внешнего источника один из спаев выделяет теплоту, а другой – поглощает (эффект Пельтье). Было установлено, что потоки выделившейся и поглощенной теплоты (теплоты Пельтье  $\dot{Q}_{\text{П}}$ ) прямо пропорциональны величине протекающего электрического тока  $I$ , т.е.

$$\dot{Q}_{\text{П}} = \Pi I, \quad (11.13)$$

где  $\Pi = \alpha T$  – коэффициент Пельтье, который однозначно связан с термоэлектрическим коэффициентом и температурой электрода.

При замкнутой электрической цепи горячий спай поглощает от горячего источника с температурой  $T_1$  поток теплоты

$$\dot{Q}_{1\text{П}} = \alpha T_1 I, \quad (11.14)$$

а холодный выделяет и передает холодному источнику с температурой  $T_2$  поток теплоты

$$\dot{Q}_{2\text{П}} = \alpha T_2 I. \quad (11.15)$$

Мощность идеального цикла найдем как разность между выделившейся и поглощенной теплотой

$$N_{\text{ц}} = \dot{Q}_{1\text{П}} - \dot{Q}_{2\text{П}} = \alpha I(T_1 - T_2). \quad (11.16)$$

Поток теплоты, отбираемый реальной установкой, записывается с учетом перетока теплоты от горячего к холодному спаю по электродам путем теплопроводности и Джоулевых потерь

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{1\text{П}} + \dot{Q}_{\lambda} - \frac{1}{2} \dot{Q}_{\text{Дж}}, \quad (11.17)$$

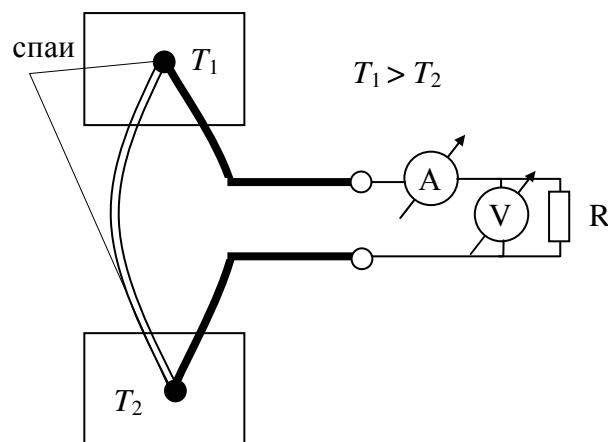


Рис.11.4

где  $\dot{Q}_\lambda = \left( \frac{\lambda_I F_I}{l_I} + \frac{\lambda_{II} F_{II}}{l_{II}} \right) (T_1 - T_2)$  - тепловой поток, передаваемый по двум термоэлектродам теплопроводностью;  $F$  - площадь поперечного сечения термоэлектрода;  $l$  - длина термоэлектрода;  $\dot{Q}_{Дж} = I^2 r$  - поток Джоулевой теплоты;  $r$  - электрическое сопротивление электродов. Поток теплоты, передаваемый холодному источнику

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_{2п} + \dot{Q}_\lambda + \frac{1}{2} \dot{Q}_{Дж}. \quad (11.18)$$

Вычитая (11.18) из (11.17), получим действительную мощность цикла

$$N_{цд} = I^2 R = \alpha I (T_1 - T_2) - \dot{Q}_{Дж}, \quad (11.19)$$

где  $R$  - электрическое сопротивление внешнего потребителя электроэнергии.

Тепловую эффективность термоэлектрического генератора определим из выражения

$$\eta = \frac{N_{цд}}{\dot{Q}_1} = \frac{I^2 R}{\dot{Q}_{1п} + \dot{Q}_\lambda - \frac{1}{2} \dot{Q}_{Дж}}. \quad (11.20)$$

Для идеальной установки ( $\dot{Q}_\lambda = \dot{Q}_{Дж} = 0$ ) термический КПД равен термическому КПД цикла Карно:

$$\eta_t = \frac{\dot{Q}_{1п} - \dot{Q}_{2п}}{\dot{Q}_{1п}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.21)$$

Если КПД записать в виде

$$\eta = \frac{\alpha I (T_1 - T_2) - \dot{Q}_{Дж}}{\dot{Q}_{1п} + \dot{Q}_\lambda - \frac{1}{2} \dot{Q}_{Дж}}, \quad (11.22)$$

то можно заключить, что  $\eta$  тем выше, чем больше  $\alpha$ ,  $I$ ,  $\Delta T$  и чем меньше  $\dot{Q}_\lambda$  и  $\dot{Q}_{Дж}$ . Большие значения  $\dot{Q}_\lambda$  и  $\dot{Q}_{Дж}$  у современных установок не позволяют иметь высокий КПД (он составляет величину порядка 1,2...1,5%). Однако есть надежда, что применение высокотемпературных термоэлектродов на основе боридов и карбидов даст возможность в будущем получить  $\eta=15...20\%$ .

#### Топливный элемент

Топливные элементы (ТЭ) предназначены для получения электрической энергии путем окисления топлива. Еще в 1839 г. английским ученым У. Гроувом (W. Grove) был создан водородно-кислородный топливный элемент. Однако из-за его низкой эффективности (получаемый ток не превышал сотых долей ампера) долгое время это направление преобразования энергии считалось бесперспективным.

С развитием космонавтики встал вопрос о создании надежных бортовых источников электрической энергии. Современные топливные элементы по своим массово-энергетическим характеристикам превосходят серебряно-цинковые и солнечные батареи. На космическом корабле «Аполлон» использовались три топливных элемента высотой 1,12 м, диаметром 0,5 м и массой 110 кг. Они имели КПД 70%. Недостатком ТЭ является высокая стоимость, так как для поддержания химической реакции применяются катализаторы из платины.

Рассмотрим процессы, протекающие в топливном элементе (см. рис. 11.5).

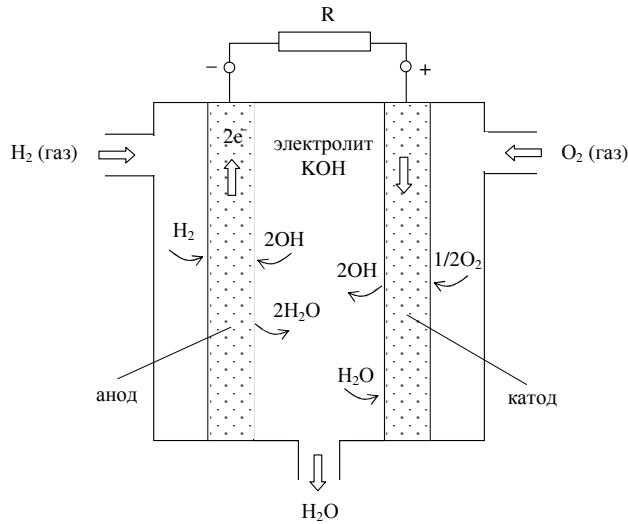
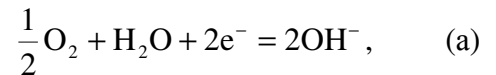
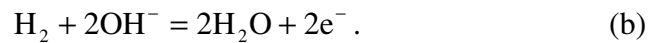


Рис. 11.15

Газообразные кислород и водород под давлением через пористые платиновые электроды поступают в раствор щелочи КОН. Атомы кислорода “захватывают” электроны с поверхности окислительного электрода (катода) и превращаются в отрицательные ионы



которые перемещаются от катода к аноду через электролит. На топливном электроде (аноде) ионы  $\text{OH}^-$  захватываются водородом (происходит процесс окисления водорода)



Складывая (a) и (b), получим реакцию окисления водорода



Используя уравнение Гиббса-Гельмгольца

$$I = \Phi + TS = \Phi - T \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p \quad (\text{формула 7.6})$$

для двух состояний процесса, можно написать

$$\Delta \Phi = \Delta I + T \left( \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial T} \right)_p. \quad (\text{d})$$

Максимальная удельная работа по переносу электрического заряда равна убыли изобарно-изотермического потенциала  $L_{\max p} = -\Delta \Phi$ , но с другой стороны,

$L_{\max p} = n\Phi^* E$ , тогда вместо (a) получим

$$E = T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p - \frac{\Delta I}{n\Phi^*}, \quad (\text{e})$$

где  $E$  – электродвижущая сила топливного элемента, В;  $n$  – валентность;  $\Phi^* = 96487 \cdot 10^3$  (Ампер-сек)/кмоль – постоянная Фарадея.

Для реакции окисления водорода при температуре  $T = 298 \text{ K}$

$\Delta \Phi_{298} = -238 \cdot 10^3 \text{ кДж/кмоль}$ ,  $\Delta I_{298} = -286 \cdot 10^3 \text{ кДж/кмоль}$

(здесь, несмотря на заглавные буквы, все величины отнесены к одному киломолю, кроме

$\dot{Q}$ ,  $N$ ,  $\dot{H}_{B, H_2}^p$ , измеряемых в кВт).

Из (d) следует

$$\left( \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial T} \right)_p = \frac{\Delta \Phi - \Delta I}{T} = 161 \text{ кДж/(кмоль} \cdot \text{K)}.$$

Так как  $\Delta \Phi = -L_{\max p} = -n\Phi^* E$ , то уравнение Гиббса-Гельмгольца может быть записано в двух видах – в форме (d) и в форме



$$\Delta\Phi = \Delta I - n\Phi^* T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p,$$

откуда получим

$$\left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{n\Phi^*} \left( \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial T} \right)_p = -\frac{161}{96487 \cdot 2} = -0,834 \cdot 10^{-3} \text{ В/К}.$$

Подставляя полученные значения в (е), определим максимальную величину ЭДС топливного элемента

$$E = \frac{286 \cdot 10^3}{96487 \cdot 2} - 298 \cdot 0,834 \cdot 10^{-3} = 1,23 \text{ В}.$$

Максимальная идеальная работа по переносу электрического заряда  $n\Phi^*$  равна

$$L_{\max} = n\Phi^* E = -237,4 \text{ МДж/кмоль}.$$

Умножая  $L_{\max}$  на поток молей подведенного топлива ( $\text{H}_2$ )

$$\dot{n} = \frac{p\dot{V}}{R_0 T} \text{ кмоль/с},$$

получим максимальную мощность, развиваемую топливным элементом. Для случая  $\dot{V} = 0,01 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $p = 10^5 \text{ МПа}$ ,  $T = 298 \text{ К}$  будем иметь  $N_{\max} = L_{\max} \cdot \dot{n} = 94,9 \text{ кВт}$ .

Поток молей прореагировавшего топлива обычно составляет около 90% от подведенного, тогда  $N = 0,9N_{\max} = 85,4 \text{ кВт}$ .

Полученный результат показывает, что ТЭ могут развивать значительные мощности.

Из первого закона термодинамики можно определить тепловой поток  $\dot{Q}$ , который необходимо отводить от ТЭ:

$$\dot{H}_{\text{В,Н}_2}^p = 0,9\dot{n}H_{\text{В,Н}_2}^p = \dot{Q} + N, \text{ откуда}$$

$$\dot{Q} = 0,9 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 285,9 \cdot 10^3 - 85,4 = 17,5 \text{ кВт},$$

где  $H_{\text{В,Н}_2}^p$  - высшая теплота сгорания водорода.

Отметим, что отношение  $L_{\max}/H_{\text{В,Н}_2}^p = 0,83$  свидетельствует о высокой степени преобразования высшей теплоты сгорания водорода в идеальную электрическую работу.

Реальные ТЭ в силу необратимости протекающих процессов имеют более низкую эффективность.

На рис. 11.6 представлена вольт-амперная характеристика реального ТЭ – зависимость напряжения на клеммах от плотности тока, где  $F$  – площадь электродов. Как видно, с ростом внешней нагрузки (тока в цепи) происходит падение напряжения на клеммах ТЭ.

Можно предположить, что совершенствование процессов в топливных элементах позволит им в будущем занять достойное место в качестве преобразователей энергии топлива в электрическую - энергию высшего качества (эксергию).

Более подробную информацию о ТЭ и их применении можно найти в [35].

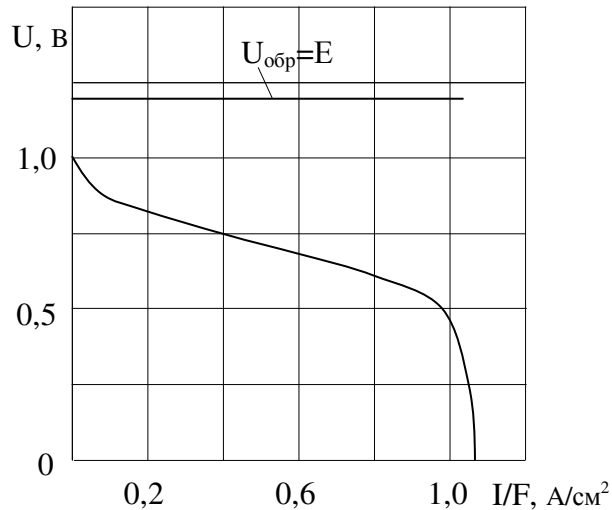


Рис. 11.6

## 12. Циклы холодильных машин и тепловых насосов, ожижение газов

Холодильные машины работают на основе так называемых обратных циклов, в которых процесс расширения в  $p$ - $v$  диаграмме лежит ниже процесса сжатия. Холодильные машины (ХМ) служат для создания и поддержания в холодильной камере (ХК) температуры ниже температуры окружающей среды. По принципу действия различают воздушные, парокompрессионные, парожеткорные и абсорбционные ХМ. В качестве рабочего тела в ХМ (кроме воздушных) используются низкокипящие жидкости: аммиак ( $\text{NH}_3$ ), фреон-12 ( $\text{CCl}_2\text{F}_2$ ), фреон-13 ( $\text{CClF}_3$ ), фреон-14 ( $\text{CF}_4$ ), фреон-22 ( $\text{CHClF}_2$ ) и т.п. Каждый из перечисленных хладагентов имеет свою температуру кипения при данном давлении. Так, при давлении  $p=0,1$  МПа температура кипения  $\text{NH}_3$  равна  $-34^\circ\text{C}$ , фреона-12  $-30^\circ\text{C}$ , фреона-14  $-128^\circ\text{C}$ , что и определяет их применение в зависимости от требуемой температуры в ХК. Однако не все низкокипящие жидкости нашли широкое применение в холодильной технике из-за токсичности и коррозионной активности. Наибольшее распространение в бытовой технике получили фреон-12 и фреон-22. Они являются химически стойкими, нетоксичными и не взаимодействуют с металлическими элементами конструкции.

### Обратный цикл Карно, холодильный коэффициент

Обратимый обратный цикл Карно состоит из двух изоэнтроп и двух обратимых изотерм, когда температуры хладагента  $T_{II}$  и  $T_I$  в процессах 2-3 и 4-1 равны соответственно температуре в холодильной камере и температуре окружающей среды (в этом случае процессы передачи теплоты обратимы, так как отсутствует температурный напор). В действительности, для того чтобы передать заданное количество теплоты через конечные поверхности, необходимо иметь положительные температурные напоры  $\Delta T_I = T_I - T_{oc}$  и  $\Delta T_{II} = T_{xk} - T_{II}$  (см. рис.12.1). Однако наличие температурных напоров порождает внешнюю необратимость, приводящую к снижению холодильного коэффициента. Кроме того, реальные процессы

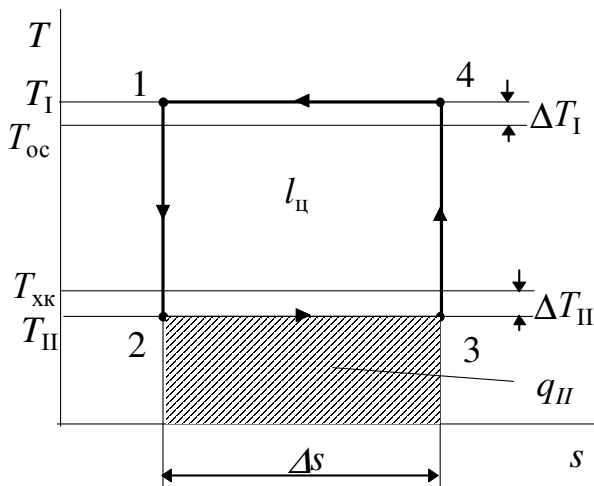


Рис. 12.1

расширения 1-2 и сжатия 3-4 протекают с ростом энтропии, что также отрицательно сказывается на эффективности ХМ.

При рассмотрении холодильных машин вводят понятия хладопроизводительности - количество теплоты, которое получает хладагент в холодильной камере и холодильный коэффициент, характеризующий эффективность ХМ.

Удельную хладопроизводительность для рассматриваемого цикла найдем из выражения

$$q_{II} = i_3 - i_2. \quad (12.1)$$

Под холодильным коэффициентом понимают отношение хладопроизводительности к работе цикла

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{II}}{|N_u|} = \frac{q_{II}}{|l_u|} = \frac{T_{II} \Delta s}{(T_I - T_{II}) \Delta s} = \frac{T_{II}}{T_I - T_{II}}. \quad (12.2)$$

Количество теплоты, которое отдает ХМ окружающей среде, равно

$$q_I = q_{II} + |l_u|. \quad (12.3)$$

Так как работа цикла отрицательна, то для его осуществления необходимо подводить работу извне.

Найдем связь  $\varepsilon = f(\eta_t)$ .

$$\varepsilon = \frac{T_{II}}{T_I - T_{II}}, \quad \eta_t = \frac{T_I - T_{II}}{T_I} \Rightarrow T_I - T_{II} = \eta_t T_I,$$

$$\text{откуда} \quad \varepsilon = \frac{T_{II}}{\eta_t T_I} = \frac{T_I - \Delta T}{\eta_t T_I} = \frac{T_I}{\eta_t T_I} - \frac{T_I - T_{II}}{\eta_t T_I} = \frac{1}{\eta_t} - 1. \quad (12.4)$$

Так, если  $t_{II} = -5^\circ\text{C}$ ,  $t_I = 20^\circ\text{C}$ , то  $\varepsilon = 13,9$ , а  $\eta_t = 0,067$ .

#### Идеальная воздушная холодильная машина (ВХМ)

К достоинствам ВХМ можно отнести использование воздуха в качестве хладагента и возможность создания машины большой хладопроизводительности  $\dot{Q}_{II} = q_{II} \dot{G}_v$ , недостатком является низкий холодильный коэффициент  $\varepsilon_B \approx 2$ .

Воздушная холодильная машина состоит из турбодетандера ТД, холодильной

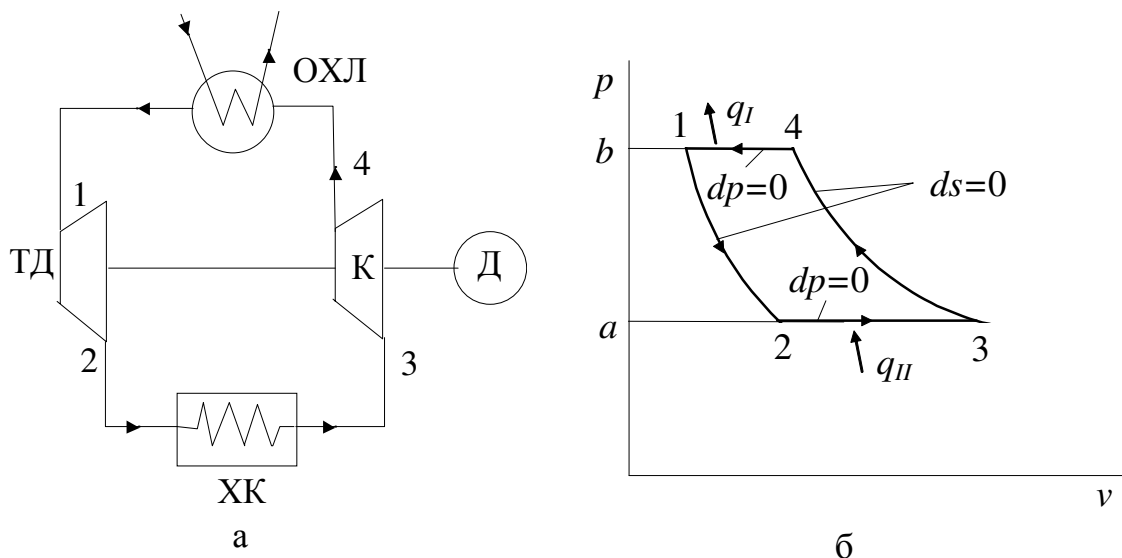


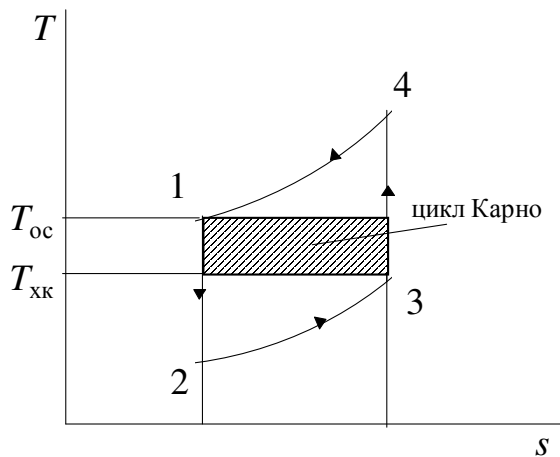
Рис.12.2

камеры ХК, компрессора К, охладителя ОХЛ и двигателя Д (см рис.12.2а). Рассмотрим процессы, протекающие в идеальной воздушной машине: 1-2,  $ds=0$  - изоэнтропийное расширение в турбодетандере; 2-3,  $dp=0$  - подвод теплоты к хладогенту в ХК; 3-4,  $ds=0$  - изоэнтропийное сжатие воздуха в компрессоре; 4-1,  $dp=0$  - отвод теплоты от хладогента к окружающей среде в охладителе.

Определим холодильный коэффициент идеальной ВХМ

$$\varepsilon_{\text{в}} = \frac{q_{\text{н}}}{l_{\text{ц}}} = \frac{i_3 - i_2}{(i_4 - i_1) - (i_3 - i_2)} = \frac{1}{\frac{i_4 - i_1}{i_3 - i_2} - 1} = \frac{1}{\frac{c_p T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{c_p T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} - 1} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (12.5)$$

так как для изоэнтропийных процессов 1-2 и 3-4 справедливо равенство  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$ , откуда  $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ .



В

Рис.12.3

Сравним эффективности цикла воздушной холодильной машины и цикла Карно. В идеальной ВХМ температура воздуха в ХК изменяется от  $T_2$  до  $T_3=T_{\text{хк}}$ , т.е. нижний температурный уровень цикла определяется температурой  $T_3$ , а верхний - температурой  $T_1=T_{\text{ос}}$  ( в точке 1 температурный напор между воздухом и окружающей средой равен нулю). Следовательно, сопоставимый цикл Карно осуществляется в интервале температур  $T_1 - T_3$  и  $\varepsilon = \frac{T_3}{T_1 - T_3}$ . Так как  $T_3 > T_2$ , то  $\varepsilon_{\text{в}} < \varepsilon$ .

#### Парокомпрессионная холодильная установка

С целью повышения эффективности холодильной установки используют парокомпрессионную холодильную машину ( $\varepsilon \approx 5$ ). Установка (рис.12.4а) состоит из компрессора, охладителя,

дроссельного устройства, холодильной камеры и двигателя. В цикле осуществляются следующие процессы:

1-2,  $ds=0$  - повышение давления хладогента в компрессоре,

2-3,  $dp=0$  - отвод теплоты (пл.2-3-d-c-2) в охладителе,

3-4,  $di=0$  - процесс дросселирования ( $i'_3 = i_4$ ),

4-1,  $dp=0$  - подвод теплоты к хладогенту в ХК.

По определению,

$$\varepsilon_{\text{в}} = \frac{q_{\text{н}}}{|l_{\text{ц}}|} = \frac{i_1 - i_4}{i_2 - i_1}, \quad (12.6)$$

где  $i_2 - i_1$  соответствует площади 2-3-a-b-n-1-2, а  $i_1 - i_4$  - площади 4-1-c-t-4.

Если вместо дроссельного устройства применить турбодетандер, работающий на насыщенной жидкости (рис.12.4б, процесс 3-*m*), то работа цикла уменьшится и будет равна  $|l_u| = (i_2 - i_1) - (i_3 - i_m)$ , где  $i_3 - i_m$  - положительная работа турбодетандера, пл. 3-*m-n-b-a-3*, а хладопроизводительность увеличивается на величину площади *m-4-t-d-m*. Все это привело бы к росту холодильного коэффициента

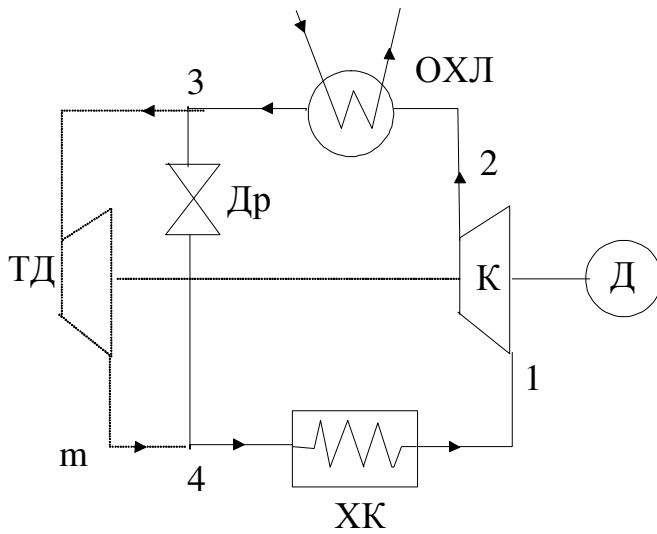


Рис. 32.4а

Однако использование турбодетандера, работающего на насыщенной жидкости, может быть оправдано лишь при значительной  $\dot{Q}_H$  и удовлетворительной его эффективности.

$$\varepsilon = \frac{i_1 - i_m}{(i_2 - i_1) - (i_3 - i_m)}. \quad (12.7)$$

Если в конце сжатия в компрессоре параметры хладагента соответствуют точке 2, которая лежит на верхней пограничной кривой (см. рис.12.4в), то в процессе 2-3 теплота, как и в цикле Карно, отводится при  $dT=0$ . Подвод теплоты к хладагенту также осуществляется при  $dT=0$ , но из-за процесса дросселирования хладопроизводительность (пл.4-1-*c-b-4*) меньше, чем в цикле Карно (пл.4\*-1-*c-a-4\**), на величину  $i_4 - i_{4*}$ , что соответствует площади 4\*-4-*b-a-4\**. Это снижает эффективность парокомпрессионного цикла ХМ по сравнению с циклом Карно. С ростом критической температуры вещества и увеличением теплоты парообразования хладопроизводительность будет возрастать, приближая рассматриваемый цикл к циклу Карно. Так как  $\dot{Q}_H = \dot{G}_{хл} r(T_H)(x_1 - x_4)$ , то для хладагентов с большим значением  $r$  требуется меньший расход  $\dot{G}_{хл}$  при той же хладопроизводительности.

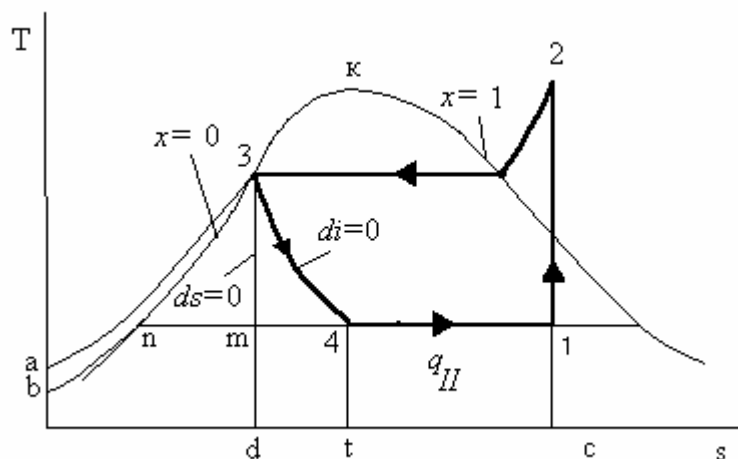


Рис. 12.4б

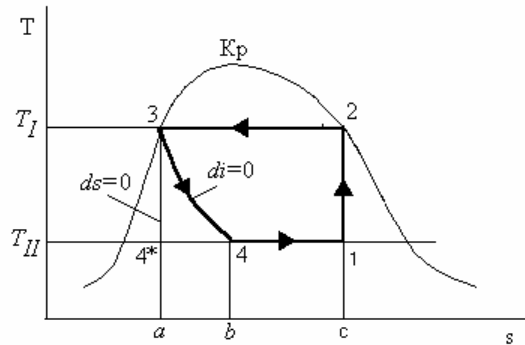


Рис. 12.4в

при смешении потоков в камере смешения инжектора, его эффективность невысока. В качестве рабочего тела, как правило, используется сухой насыщенный или незначительно перегретый водяной пар низких параметров, который поступает в активное сопло эжектора при давлении 0,3...1 МПа. Температура в ХК обычно составляет +3...+10С. Пароэжекторная холодильная установка (рис.12.5а) состоит из эжектора, который включает активное сопло, пассивное сопло, камеру смешения и диффузор, охладителя, насоса, парогенератора, дроссельного устройства и холодильной камеры. Рассмотрим процессы, протекающие в пароэжекторной холодильной установке (рис.12.5б):

1-2,  $ds=0$  - расширение перегретого пара в идеальном активном сопле;

3-4,  $ds=0$  - расширение сухого насыщенного пара в пассивном сопле.

Точка 5 характеризует поток после смешения агентов;

5-6,  $ds=0$  - восстановление давления в идеальном диффузоре;

6-7,  $dp=0$  - отвод теплоты в окружающую среду;

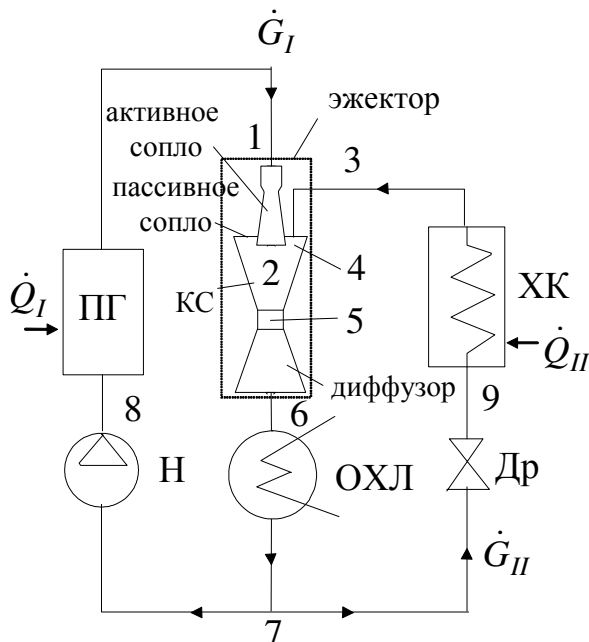


Рис.12.5а

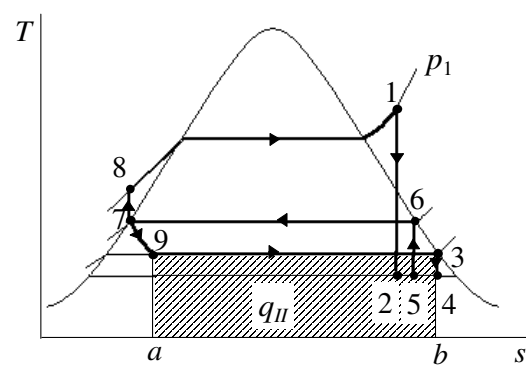


Рис. .12.5б

7-8,  $ds=0$  - повышение давления насыщенной воды в идеальном насосе;

8-1,  $dp=0$  - подвод теплоты в парогенераторе;

7-9,  $di=0$  - процесс дросселирования насыщенной воды;

9-3,  $dp=0$  - подвод теплоты к влажному пару в ХК.

В идеальном разгонном (активном) сопле в результате расширения сухого насыщенного пара происходит увеличение его кинетической энергии  $(c_2^2 - c_1^2)/2 = i_1 - i_2$ . Влажный пар, имеющий на срезе активного сопла скорость  $c_2$ , входит в камеру смешения, где смешивается с потоком, параметры которого характеризуются точкой 4. После смешения состояние потока характеризуются точкой 5 (см. рис.12.5б). Для точки 5 можно написать

$(\dot{G}_I + \dot{G}_{II})i_{cm5} = \dot{G}_I i_2 + \dot{G}_{II} i_4$ , откуда  $i_{cm5} = (\dot{G}_I i_2 + \dot{G}_{II} i_4) / (\dot{G}_I + \dot{G}_{II})$ . В процессе восстановления давления в идеальном диффузоре давление потока увеличивается от  $p_5$  до  $p_6$  (точка б). Далее пар направляется в охладитель, где превращаясь в насыщенную жидкость, отдает окружающей среде поток теплоты  $\dot{Q}_I = (\dot{G}_I + \dot{G}_{II})(i_6 - i_7)$ . В точке 7 поток разделяется: одна часть с расходом  $\dot{G}_I$  поступает к насосу, другая ( $\dot{G}_{II}$ ) - к дросселю. После насоса в парогенераторе к потоку подводится теплота

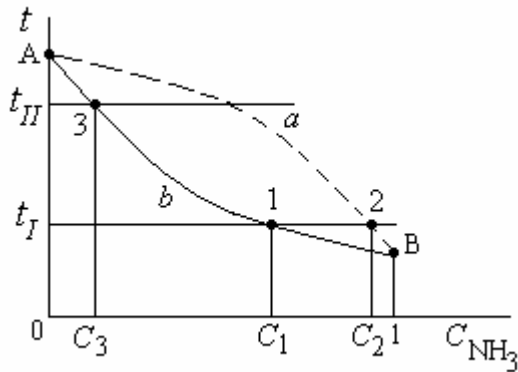


Рис. 12.6

к потоку подводится теплота  $\dot{Q}_0 = \dot{B}_T H_H^p \eta_{пр} = \dot{G}_I (i_1 - i_8)$ . В процессе дросселирования 7-9 насыщенная жидкость превращается во влажный пар, степень сухости которого можно найти из уравнения  $i'_7 = i_9 = i'_9 + rx_9$ . В холодильной камере хладагент получает поток теплоты  $\dot{Q}_{II} = \dot{G}_{II}(i_9 - i_3)$ . В пассивном сопле в процессе расширения срабатывает энтальпия  $i_3 - i_4$  и возрастает кинетическая энергия  $(c_4^2 - c_3^2)/2 = i_3 - i_4$ .

Эффективность парожеторной установки оценивается коэффициентом теплоиспользования

$$\xi = \frac{\dot{Q}_{II}}{\dot{Q}_0} = \frac{(i_3 - i_9)\dot{G}_{II}}{(i_1 - i_8)\dot{G}_I}. \quad (12.8)$$

#### Абсорбционная холодильная установка

Во всех рассмотренных ранее холодильных установках в качестве хладагента использовалось чистое вещество, например, аммиак  $\text{NH}_3$ , и повышение давления с целью передачи теплоты от холодильной камеры на более высокий температурный уровень производилось с помощью компрессора. В абсорбционной установке этот процесс осуществляется термохимическим путем благодаря удивительным свойствам растворов. В растворах используются вещества, температуры кипения которых сильно различаются. Пусть бинарный раствор состоит из воды  $\text{H}_2\text{O}$  и аммиака  $\text{NH}_3$ . Компонент, который имеет более низкую температуру кипения при данном давлении, называется хладагентом ( $\text{NH}_3$ ), вещество с высокой температурой кипения - абсорбентом ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Масса раствора равна сумме масс компонентов  $G_{cm} = G_{\text{NH}_3} + G_{\text{H}_2\text{O}}$ , или в безразмерном виде  $C_{\text{NH}_3} + C_{\text{H}_2\text{O}} = 1$ , где  $C_i = G_i/G_{cm}$  - концентрация  $i$ -го компонента. Рассмотрим  $t-C_{\text{NH}_3}$  диаграмму (рис.12.6).

Кривая А-а-б соответствует насыщенному пару, кривая А-б-В - насыщенному раствору.

Проведем в диаграмме изотерму  $t_I$ . Точки 1 и 2 характеризуют состояние термодинамического равновесия между жидкой и паровой фазами, причем концентрация аммиака в жидкой фазе  $C_1$  меньше, чем в паровой  $C_2$ . Если привести в контакт жидкость с температурой  $t_{II}$  и концентрацией  $C_3 < C_1$  (точка 3) с паром при температуре  $t_I$ , то возникает диффузионный поток конденсирующегося пара. При этом теплота конденсации будет отводиться при  $t_{II} > t_I$ , т.е. будет происходить процесс передачи теплоты от менее нагретого тела (пара) к более нагретому (жидкости).

На рис.12.7 показана принципиальная схема абсорбционной установки, состоящей из следующих основных элементов: дросселей Др1 и Др2, холодильной камеры ХК, абсорбера А, насоса Н, парогенератора ПГ и конденсатора К. Рассмотрим процессы, протекающие в установке.

Жидкий насыщенный аммиак с параметрами  $p_1$  и  $T_1$  в процессе дросселирования (Др1) превращается во влажный пар, имеющий давление  $p_2$  и температуру  $T_2$ . В холодильной камере благодаря подводу теплоты влажный пар  $\text{NH}_3$  превращается в сухой насыщенный пар, который поступает в абсорбер и поглощается раствором. Теплота абсорбции  $\dot{Q}_{\text{абс}}$  отводится охлаждающей водой. Обогащенный раствор, имеющий температуру  $T_{II}$  ( $T_2 < T_{II} < T_1$ ), с помощью насоса подается в генератор аммиачного пара ПГ. В парогенераторе за счет подвода теплоты  $\dot{Q}_{\text{пр}}$  генерируется практически сухой аммиачный пар, так как парциальное давление водяного пара при низких температурах очень мало. Пар  $\text{NH}_3$  из ПГ направляется в конденсатор, где превращается в насыщенную жидкость, а обедненный раствор с низкой концентрацией аммиака - в абсорбер через дроссель Др2 (с падением давления от  $p_1$  до  $p_2$ ), где он обогащается аммиаком за счет абсорбируемого аммиачного пара. Как видим, в данной установке отсутствует компрессор, а его роль выполняет узел, состоящий из парогенератора, дросселя Др2, абсорбера и насоса.

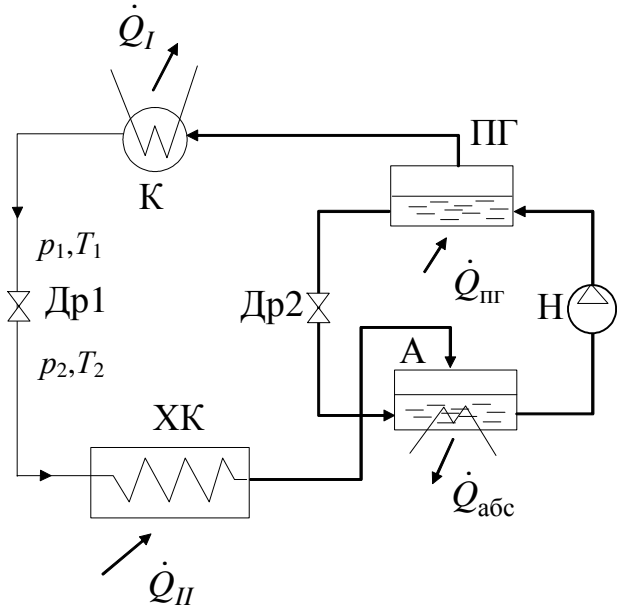


Рис. 12.7

Эффективность абсорбционной установки оценивается коэффициентом использования теплоты  $\xi = \frac{\dot{Q}_{II}}{\dot{Q}_{\text{пр}}}$ .

#### Тепловые насосы

Для отопления зданий и производства горячей воды для бытовых нужд расходуется огромное количество ценного топлива, сжигаемого в районных котельных городах. Однако получение теплоты для бытовых нужд за счет теплоты высокого потенциала, получаемой при сгорании топлива, термодинамически и экономически невыгодно (см. раздел "теплофикационные циклы"). Более рациональным способом решения задачи является применение тепловых насосов, позволяющих использовать теплоту низкого потенциала (теплоту грунта Земли, воды в водоемах, сточных вод). В тепловом насосе температура рабочего тела (например, фреона, изобутана), получающего теплоту низкого потенциала от источника, повышается до необходимого уровня за счет механической работы, подводимой извне, то есть

$$Q_{\text{потр}} = Q_I = Q_{II} + L_{\text{ц}}, \quad (12.9)$$

где  $Q_I$  – теплота, отдаваемая потребителю;  $Q_{II}$  – теплота источника низкого потенциала;  $L_{\text{ц}}$  – работа цикла. При этом величина  $Q_I$  может быть в несколько раз больше величины затраченной работы. На рис.12.8 показана одна из возможных схем теплового насоса, состоящего из следующих основных элементов: I – испаритель, II – компрессор, III – электрический двигатель, IV – конденсатор, V – переохладитель, VI – дроссель, Н – насосы.

Мощные теплонасосные станции с большой производительностью горячей воды состоят из нескольких тепловых насосов, включенных параллельно. Для производства горячей воды с температурой более 100С применяют последовательное соединение агрега-



тов. Рис.12.9 иллюстрирует в  $T-s$  диаграмме процессы, протекающие во внутреннем контуре идеального теплового насоса:

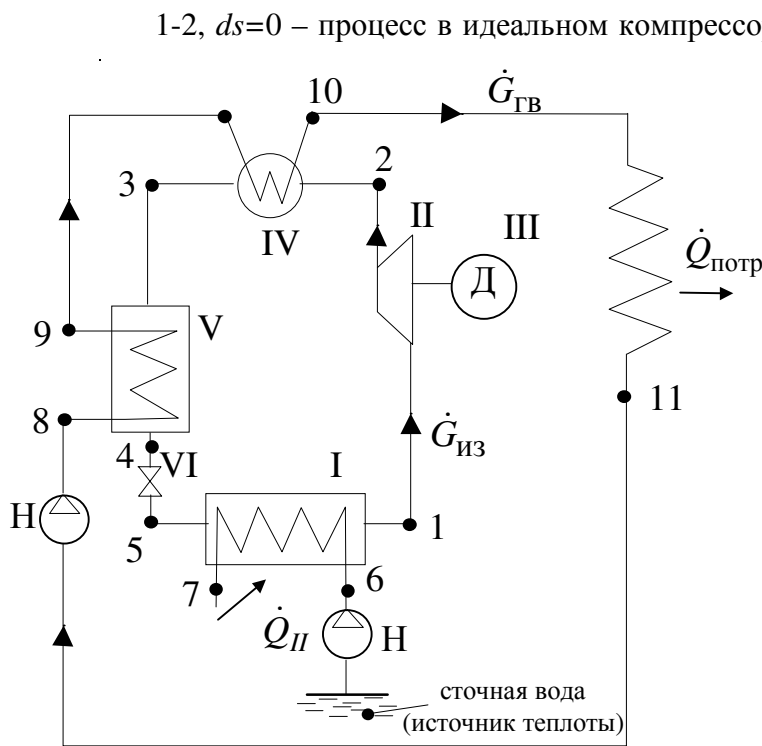


Рис. 12.8

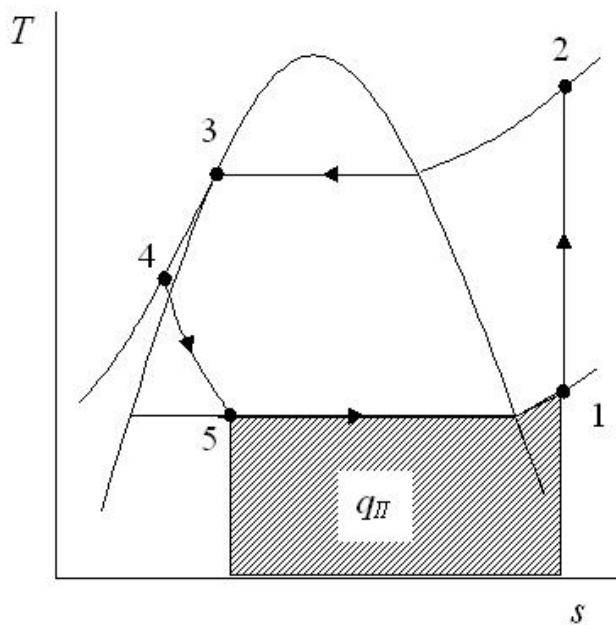


Рис.12.9

1-2,  $ds=0$  – процесс в идеальном компрессоре,  $N_k = \dot{G}_{из}(i_2 - i_1)$ ,  $G_{из}$ - расход хладагента (изобутана); 2-3,  $dp=0$  – процесс конденсации рабочего тела в конденсаторе,  $\dot{Q}_к = \dot{G}_{из}(i_2 - i_3)$ ; 3-4,  $dp=0$  – процесс в переохладителе,  $\dot{Q}_п = \dot{G}_{из}(i_3 - i_4)$ . Применение переохладителя позволяет увеличить разность энтальпий  $(i_1 - i_5)$  и тем самым уменьшить расход  $\dot{G}_{из}$ , а следовательно, и потребляемую компрессором мощность ; 4-5,  $di=0$  – процесс в дроссельном устройстве ; 5-1,  $dp=0$  – процесс в испарителе, где осуществляется подвод теплоты  $\dot{Q}_{II}$  от сточной воды к рабочему телу,  $\dot{Q}_{исп} = \dot{Q}_{II} = \dot{G}_{из}(i_1 - i_5)$ . Отметим, что  $\dot{Q}_I = \dot{Q}_{потр} = \dot{Q}_{II} + \dot{Q}_к$ . Анализ

процессов показывает, что тепловой насос, как и холодильная машина, работает на основе обратного цикла, но в тепловом насосе уровень температуры более высокий. Назначение теплового насоса – получение теплоты высокого потенциала из теплоты низкого потенциала. Холодильная машина служит для создания и поддержания в охлаждаемом объеме температуры ниже температуры окружающей среды. Тепловая эффективность тепловых насосов оценивается отопительным коэффициентом

$$K = \frac{\dot{Q}_I}{N_u} = \frac{\dot{G}_{ГВ}(i_{10} - i_{11})}{N_k + \sum_{i=1}^2 N_{ni}}, \quad (12.10)$$

где  $N_n$  – мощность насоса.

У реальных тепловых насосов  $K \approx 3$ , т.е. при использовании теплового насоса для отопления требуется в три раза меньше электроэнергии, чем при электрообогреве.

Между отопительным и холодильным коэффициентами имеет место связь

$$K = \frac{\dot{Q}_I}{N_u} = \frac{\dot{Q}_{II} + N_u}{N_u} = \frac{\varepsilon N_u + N_u}{N_u} = \varepsilon + 1, \quad (12.11)$$

где  $\varepsilon$  - холодильный коэффициент.

Для идеального теплового насоса, работающего по обратному циклу Карно

$$K_{\text{ид}} = \frac{q_I}{l_{\text{ц}}} = \frac{T_I \Delta s}{(T_I - T_{II}) \Delta s} = \frac{T_I}{T_I - T_{II}}. \quad (12.12)$$

При  $T_{II}=290\text{K}$  и  $T_I=333\text{K}$   $K_{\text{ид}}=7,74$ ; если  $T_I=363\text{K}$ , то  $K_{\text{ид}}=4,97$ .

Из сказанного следует, что широкое применение тепловых насосов для бытовых нужд становится особенно актуальным в условиях роста стоимости топлива и электроэнергии.

Тепловой насос может быть использован не только как источник теплоты для нагрева воздуха в помещении, но и работать в режиме кондиционера, охлаждая в помещении воздух. Данное положение иллюстрируется рис.12.10

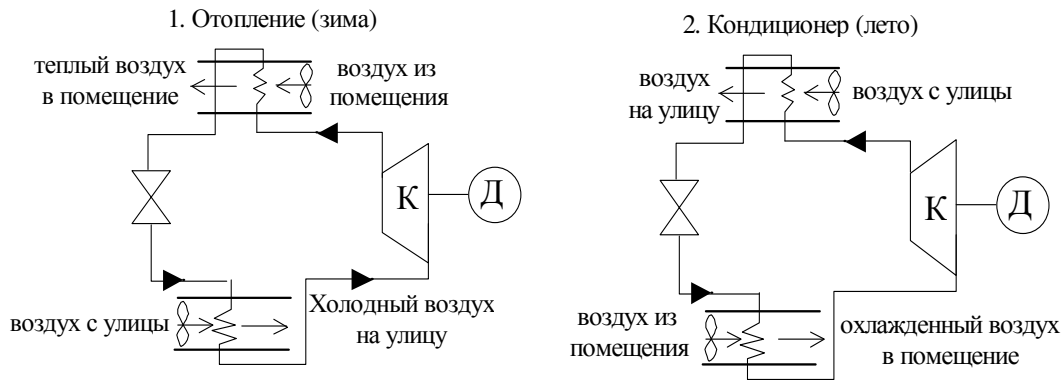


Рис.12.10

### Вихревая труба Ранка.

Получение горячих и холодных потоков возможно за счет придания газу вращательного движения в плоскости, перпендикулярной продольной оси цилиндрического канала. Температура адиабатического потока, на основании уравнения энергий, равна

$T = \left( i^* - \frac{c^2}{2} \right) / c_p$ , откуда следует, что с ростом скорости потока его температура падает.

Не вдаваясь в подробности гидрогазодинамики, отметим, что эпюра скорости потока закрученного вязкого газа имеет вид, показанный на рис.12.11. Из рисунка следует, что в таком потоке имеет место область с пониженной температурой и давлением. При  $R \leq R_{\text{min}}$  изменение скорости описывается законом вращения твердого тела  $c/R = const$ , а при  $R \geq R_{\text{min}}$  - законом потенциального вращения  $c \cdot R = const$ . Впервые способ разделения горячего и холодного потоков был предложен и осуществлен Ранком в 1931 г. На рис.12.12 показана схема вихревой трубы Ранка.

Рассмотрим основные положения математического описания процессов, имеющих место в вихревой трубе с термодинамических позиций. Так как вихревая труба является открытой адиабатической системой, то изменение полной энтальпии потока равно нулю, т.е.  $d\dot{I}_c^* = 0$ , или

$$\dot{I}_c^* = \dot{I}_x^* + \dot{I}_r^*, \quad (12.13)$$

где  $\dot{I}_c^*$  - полная энтальпия потока на входе в сопла,  $\dot{I}_r^*$ ,  $\dot{I}_x^*$  - полные энтальпии горячего и холодного потоков на выходе из вихревой трубы,  $I^* = \dot{G} \left( i + \frac{c^2}{2} \right)$ .

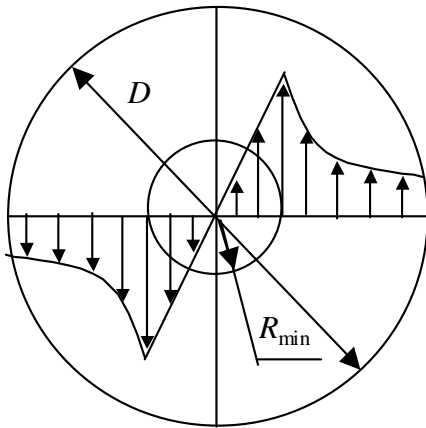


Рис. 14.11

где  $\Delta t_x = t_c - t_x$ .

Перепишем (12.13), пренебрегая кинетической энергией газа:

$$\dot{G}_c i_c = \dot{G}_x i_x + \dot{G}_r i_r. \quad (12.14)$$

Для потока массы запишем очевидное соотношение

$$\dot{G}_c = \dot{G}_x + \dot{G}_r. \quad (12.15)$$

Вводя понятие относительного расхода холодного газа  $u = \dot{G}_x / \dot{G}_c$  и используя уравнения (12.14) и (12.15), получим

$$u c_p (t_c - t_x) = (1 - u) c_p (t_r - t_c), \quad (12.16)$$

откуда найдем температуру горячего газа

$$t_r = t_c + \frac{u \Delta t_x}{1 - u}, \quad (12.17)$$

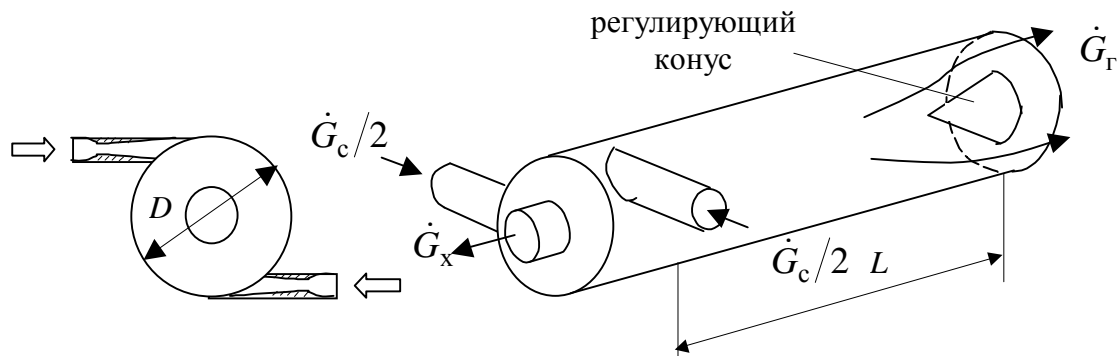


Рис. 12.12

Тепловая эффективность вихревого аппарата оценивается коэффициентом температурной эффективности и адиабатическим КПД. Под коэффициентом температурной эффективности понимают отношение эффекта охлаждения  $\Delta t_x$  к эффекту охлаждения  $\Delta t_s$  при изоэнтропийном расширении газа в сопле от давления  $p_c$  на входе в сопло до давления  $p_x$  холодного потока в вихревой трубе:

$$\varphi_{te} = \frac{\Delta t_x}{\Delta t_s}, \quad (12.18)$$

где  $\Delta t_s = T_c \left( 1 - \frac{1}{\pi_c^{\frac{k-1}{k}}} \right)$ ,  $\pi_c = \frac{p_c}{p_x}$  - степень расширения газа в сопле.

Адиабатический КПД вихревой трубы Ранка определяют по формуле

$$\eta_a = \frac{u \Delta t_x}{\Delta t_s}. \quad (12.19)$$

Лучшие аппараты имеют  $\varphi_{te} \approx 0.7$ ,  $\eta_a \approx 0.32$  и характеризуются следующими параметрами:  $\pi_c = 4 \dots 17$ ,  $L/D = 3 \dots 15$ ,  $u = 0.2 \dots 0.75$ ,  $p_x = 0.1 \dots 0.2$  МПа. Расчет вихревого аппарата по методике А.П. Меркулова при  $\pi_c = 4$ ,  $u = 0.5$ ,  $T_c = 288$  К дает:  $T_r = 334$  К (51С),  $T_x = 242$  К (-31С),  $\dot{G}_c = 3.64$  кг/с,  $\dot{G}_r = 1.82$  кг/с,  $\dot{G}_x = 1.82$  кг/с,  $\varphi_{te} = 0.49$ ,  $\eta_a = 0.246$ .

Экспериментальные исследования вихревых аппаратов на воде, выполненные в последнее время, показывают, что возникновение в потоке кавитации, т.е. образования газопаровых пузырьков в области пониженного давления с последующим их схлопыванием в области высокого давления, приводит к дополнительному локальному выделению теплоты и росту эффективности устройства. Это явление было обнаружено профессором Ю.С. Потаповым [16]. Созданные им вихревые трубы позволяют получить

отопительный коэффициент  $K = \frac{\dot{Q}_{\text{пол}}}{N_{\text{нас}}} = 2.3$ . Здесь  $\dot{Q}_{\text{пол}}$  - тепловой поток, получаемый потребителем,  $N_{\text{нас}}$  - электрическая мощность, потребляемая насосом, обеспечивающим повышенное давление жидкости перед коническими соплами (при работе аппарата на жидкости должны применяться суживающиеся сопла).

#### Методы ожижения газов

В технике для создания и непродолжительного поддержания низких температур в каком-либо небольшом объеме используются сжиженные газы, которые имеют низкую температуру кипения. Так, при атмосферном давлении температура кипения кислорода составляет 90,2К, азота 77,4К, водорода 20,4К, гелия 4,2К.

Для ожижения газов применяют, как правило, три основных метода – каскадный метод Пикте, метод Линде и метод Клода.

В каскадном методе, предложенном швейцарским физиком Пикте в 1887 году, используется несколько каскадов пароконденсационных холодильных установок с разными хладагентами. На рис. 12.13а показана принципиальная схема такой установки, состоящей из трех каскадов с последовательно понижающейся температурой кипения хладагентов. В последнем из них циркулирует газ, который должен быть сжижен. Убыль сжиженного газа  $\dot{G}_{\text{ж}}$  компенсируется хладагентом с расходом  $\dot{G}_{\text{ГК}}$ , вводимым в цикл в газообразном состоянии. На рис.12.13б представлены термодинамические процессы, условно показанные на одной диаграмме. Из рисунка видно, что наличие положительных температурных напоров  $T_{\text{II}} - T_{\text{I}}$  и  $T_{\text{III}} - T_{\text{II}}$  позволяет в конечном итоге передавать теплоту с более низкого температурного уровня на более высокий. После дросселя ДрIII поток газа направляется в сепаратор, где происходит разделение двухфазной смеси на сухой насыщенный пар (процесс 4<sub>III</sub> – 1<sub>III</sub>), который направляется в компрессор и насыщенную жидкость сжиженного газа (процесс 4<sub>III</sub> – 5<sub>III</sub>), сливаемую в сосуд Дьюара. Для получения жидкого азота необходимо иметь четыре каскада. Пять каскадов требуется для получения жидкого водорода и шесть – для сжижения гелия.

Метод Линде является более прогрессивным, так как установка в конструктивном отношении проще и в ней циркулирует лишь ожижаемый газ.

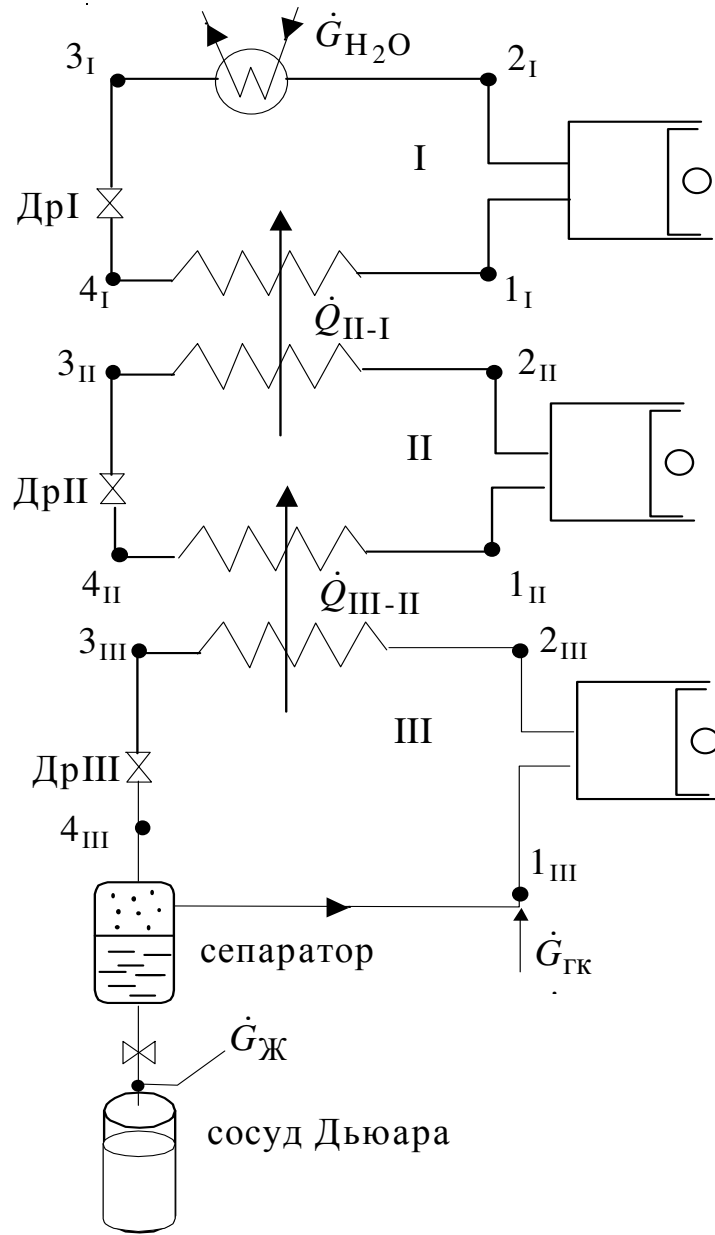


Рис.12.13а

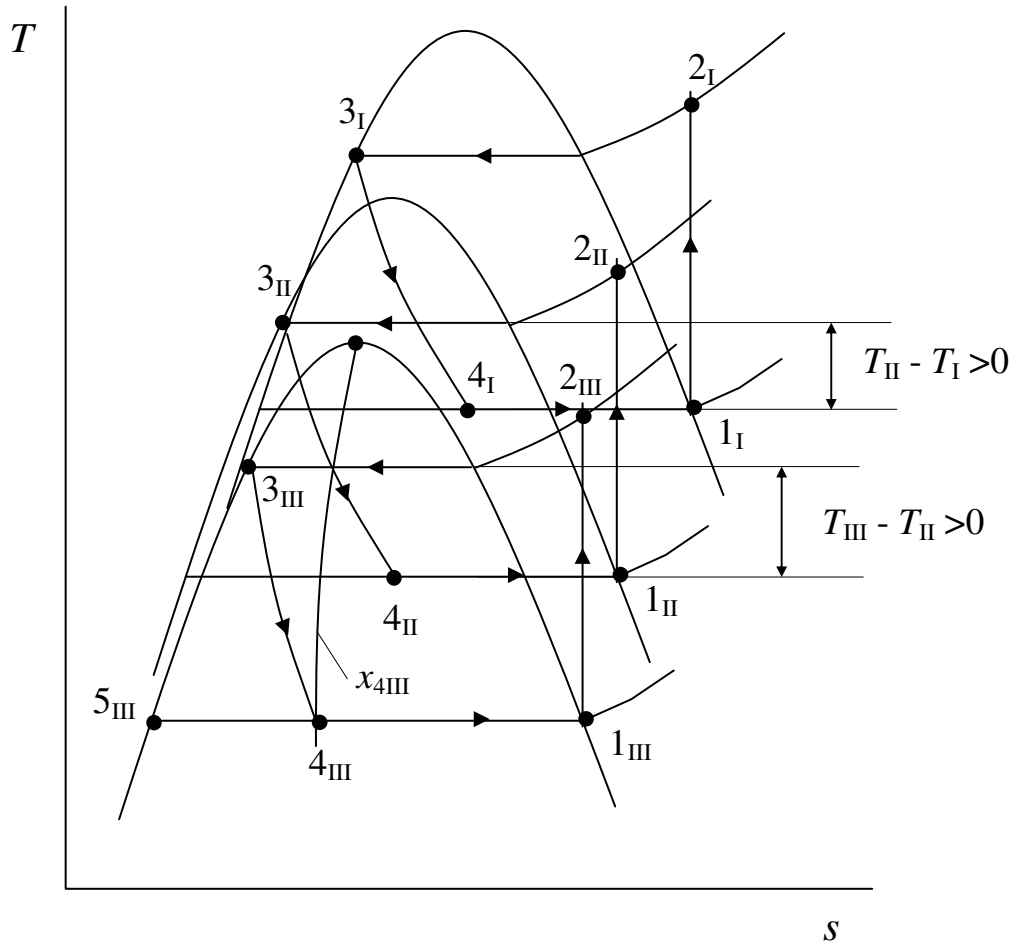


Рис.12.13б

На рис.12.14 показаны принципиальная схема и  $T$ - $s$  диаграмма термодинамических процессов в идеальной установке, работающей по методу Линде. При пуске установки сжимаемый газ имеет температуру и давление окружающей среды  $T_1$  и  $p_1$ , а газовый поток после дросселирования (процесс 4-5) характеризуется состоянием 5 в однофазной области. В процессе выхода установки на стационарный режим происходит "захолаживание" газа и по достижении установившегося режима параметры газа в характерных точках цикла соответствуют состояниям, отмеченным индексом "р" (расчетный режим). Рассмотрим этот режим.

$1_p - 2_p$ ,  $ds=0$  – процесс в идеальном компрессоре;  $2_p - 3_p$ ,  $dp=0$  – охлаждение газа в охладителе;  $3_p - 4_p$ ,  $dp=0$  – охлаждение газа в противоточном теплообменнике;  $4_p - 5_p$ ,  $di=0$  – процесс дросселирования;  $5_p - 1_p$ ,  $dp=0$  – подвод теплоты к газу в теплообменнике. Точка  $5_p$ , характеризующая состояние газа на выходе из дроссельного устройства, находится в двухфазной области, и производительность установки  $\dot{G}_{ж} = \dot{G}_{г} (1 - x_{5p})$ .

Применив метод Линде, английский ученый Дьюар в 1898 г. впервые получил жидкий водород. В 1913 г. голландский физик Камерлинг-Оннес получил жидкий гелий, за что был удостоен Нобелевской премии.

В установке, работающей по методу Клода, вместо дросселя применяется турбодетандер (процесс  $4_p - 5_{рк}$ ), что повышает ее производительность по сравнению с установкой Линде, так как  $x_{5рк} < x_{5p}$  (см. рис.12.14), но при этом установка усложняется. Однако при

низком КПД турбодетандера преимущество этого метода может быть сведено к нулю (в этом случае линия адиабатического расширения приближается к линии  $i=\text{const}$ , см. процесс  $4_p-5_{\text{ркд}}$ ).

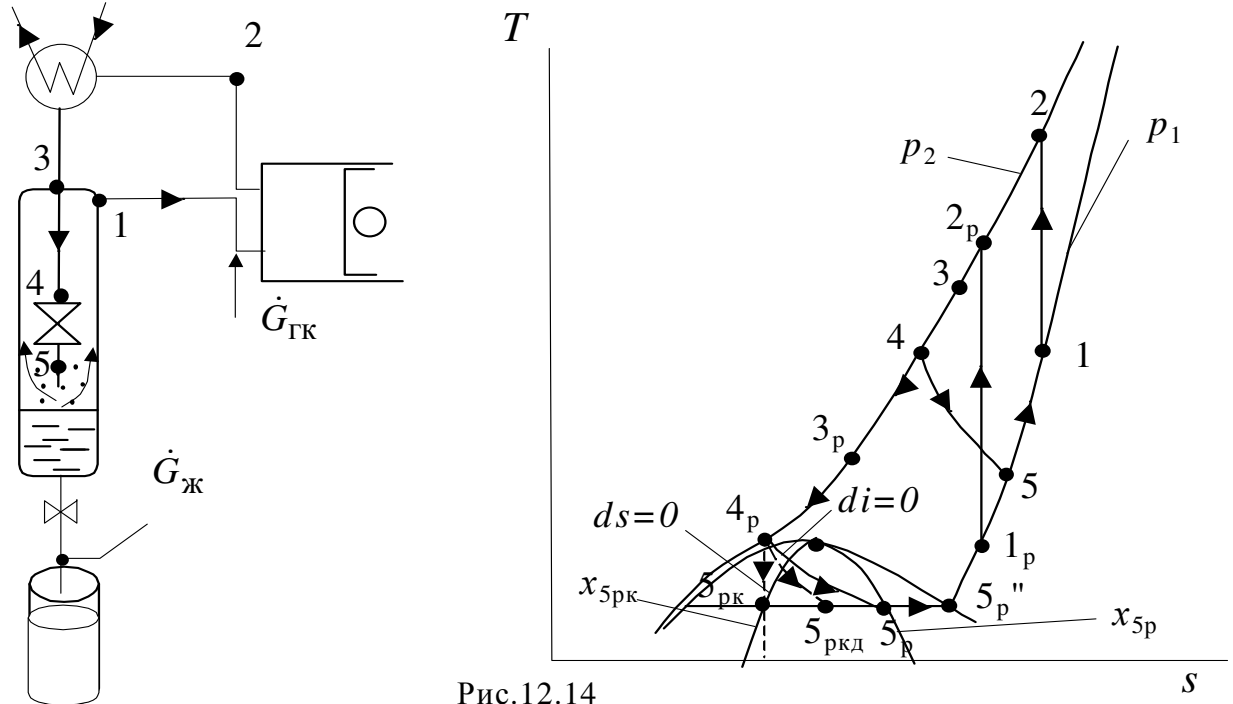


Рис.12.14

### 13. Основы химической термодинамики

#### Общие положения

До сих пор мы рассматривали процессы, осуществляемые либо с чистыми газами, либо с механическими смесями газов (исключение составил лишь пример анализа гальванического элемента). Однако в ряде энергетических установок имеют место химические реакции – процессы превращения одних веществ в другие. Так, в топке парогенератора паросиловой установки протекает реакция окисления, уравнение которой при полном сгорании углерода в среде кислорода имеет вид



где  $Q$  – теплота реакции.

При неполном сгорании углерода –



Следует отметить, что если процесс протекает при значительных температурах (выше 800С), то реакция горения протекает в основном по формуле (13.1) и в результате образуется примерно 80% двуокиси углерода и 20% окиси углерода. При температурах ниже 550С соотношение становится обратным, а реакция описывается уравнением (13.2). Приведенный пример свидетельствует о том, что характер реакции в значительной степени зависит от температуры.

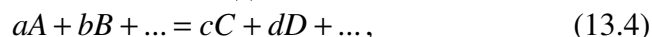
При изучении процессов с химическими реакциями возникают вопросы определения теплового эффекта реакции, работы химической реакции, параметров, от которых зависят скорость реакции и условия наступления динамического равновесия, а также установления возможности протекания конкретной реакции при заданных условиях.

Химические реакции, протекающие в одной фазе, называются гомогенными, например



в разных – гетерогенными (см. ф-лы 13.1, 13.2).

Любая химическая реакция может быть записана в виде



где  $A, B, C, D$  - химические формулы реагентов;  $a, b, c, d$  - стехиометрические числа - количества киломолей веществ.

Концентрация  $i$ -го компонента, которая является параметром состояния, определяется отношением числа киломолей вещества к объему реагирующей системы (смеси):

$$c_i = \frac{n_i}{V_{\text{см}}}. \quad (13.5)$$

Реакции, сопровождающиеся выделением теплоты, называются экзотермическими, а поглощением - эндотермическими.

Если представить, что выделяющаяся в экзотермической реакции теплота немедленно отводится, а в эндотермической - подводится извне, то эти реакции можно свести к изобарно-изотермическим или изохорно-изотермическим реакциям, что существенно упрощает анализ реальных химических процессов.

#### Тепловой эффект химической реакции. Закон Гесса

В химической термодинамике первый закон термодинамики принято записывать в виде

$$U_2 - U_1 = Q + L + L^* . \quad (13.6)$$

Здесь изменение внутренней энергии реагирующей ТС идет на образование теплоты химической реакции  $Q$ , работу против внешних сил  $L = \int_{V_1}^{V_2} p dV$  и работу  $L^*$  против электри-

ческих (в гальванических и топливных элементах), магнитных и прочих сил. Работу  $L^*$  называют полезной работой химической реакции, которая принимает максимальное значение в обратимых процессах при  $Q=L=0$ :

$$U_2 - U_1 = L_{\text{max}}^* .$$

Чтобы сохранить принципы термодинамики, рассматривающей процессы без химических превращений, теплоту экзотермической реакции будем считать отрицательной, так как в этом случае необходимо отводить теплоту от ТС, а эндотермической - положительной. Знак минус в правой части уравнения химической реакции свидетельствует о выделении теплоты и отводе ее в окружающую среду (см. стр. 208). В изохорно-изотермическом процессе при  $L=L^*=0$  теплота химической реакции максимальна и называется тепловым эффектом реакции. В этом случае из (13.6) следует

$$U_2 - U_1 = Q_v . \quad (13.7)$$

Для изобарно-изотермической реакции, используя (13.6) при  $L^*=0$  можно написать  $U_2 - U_1 = Q_p + p(V_2 - V_1)$

$$\text{или} \quad I_2 - I_1 = Q_p . \quad (13.8)$$

Таким образом, тепловой эффект реакции определяется изменением внутренней энергии при  $V, T = \text{const}$  и изменением энтальпии системы при  $p, T = \text{const}$ . Так как  $U$  и  $I$  являются функциями состояния, то  $Q_v$  и  $Q_p$  однозначно определяются начальным и конечным состоянием ТС. Это положение позволило Г.И. Гессу в 1840 г. сформулировать закон, согласно которому тепловой эффект реакции, протекающей при постоянных  $V$  или  $p$ , не зависит от того, происходит ли данное химическое превращение сразу или постепенно, через несколько стадий. Из этого закона следует:

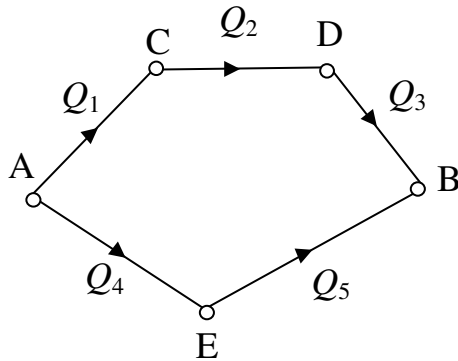
1. Тепловой эффект разложения какого-либо химического соединения до определенных продуктов равен по величине и противоположен по знаку тепловому эффекту образования этого соединения из тех же продуктов, т.е.  $Q_{1-2} = - Q_{2-1}$ .



2. Если химическая система из начального состояния А может быть переведена в состояние В различными химическими процессами, то сумма тепловых эффектов во всех случаях будет одна и та же (см. рис.),

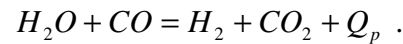
$$\text{т.е. } Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4 + Q_5 . \quad (\text{a})$$

Если, например, тепловой эффект  $Q_1$  не может быть определен экспериментально, то он может быть найден из (a)

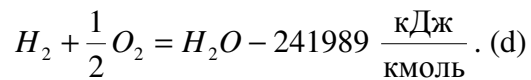
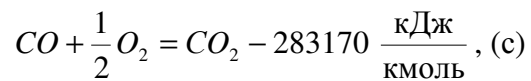


$$Q_1 = Q_4 + Q_5 - (Q_2 + Q_3) . \quad (\text{b})$$

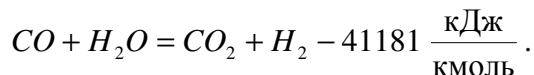
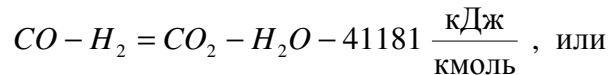
В качестве примера можно привести трудноосуществимую реакцию



Определим тепловой эффект  $Q_p$  этой реакции, используя известные тепловые эффекты следующих реакций:



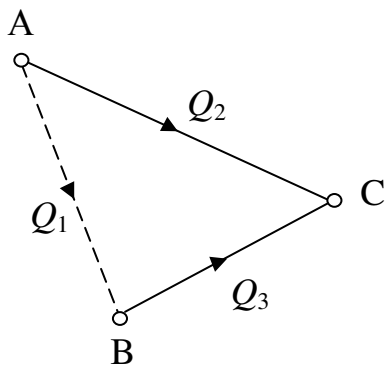
Вычитая почленно (d) из (c), получим



3. Тепловой эффект реакции равен алгебраической сумме теплот образования продуктов реакции за вычетом алгебраической суммы теплот образования исходных веществ

$$Q_p = \sum_{i=1}^n Q_{p,i\text{обр.прод.}} - \sum_{j=1}^m Q_{p,j\text{обр.исх.}} . \quad (13.9)$$

4. Если возможны две реакции, приводящие из различных состояний А и В к одному и тому же состоянию С (см. рис.), то тепловой эффект перехода химической системы из состояния А в состояние В определяется как разность между тепловыми эффектами этих двух реакций  $Q_1 = Q_3 - Q_2$ .



(Гесс Герман Иванович (1802-1850), приехал в Россию с родителями в трехлетнем возрасте из Швейцарии. Являлся профессором горного и педагогического институтов, артиллерийского училища. Внес значительный вклад в исследования природных богатств России, руководил школой русских химиков,

издал в 1831 г. учебник "Основы чистой химии").

Определим связь между  $Q_p$  и  $Q_v$  для идеального газа при  $p=\text{const}$ . Из уравнений состояния

$$pV_1 = n_1 R_0 T , \quad (\text{m})$$

$$pV_2 = n_2 R_0 T . \quad (\text{n})$$

Вычитая (m) из (n), получим

$$p(V_2 - V_1) = (n_2 - n_1) R_0 T , \quad (13.10)$$

Так как

$$Q_p = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1), \quad (13.11)$$

то, подставляя (13.10) в (13.11) с учетом (13.7), получаем искомую связь

$$Q_p = Q_v + \Delta n R_0 T, \quad (13.12)$$

где  $\Delta n = n_2 - n_1$  изменение числа киломолей вещества.

Таким образом, если изменение числа молей  $\Delta n > 0$ , то  $Q_p > Q_v$ , при  $\Delta n < 0$ ,  $Q_p < Q_v$ , если  $\Delta n = 0$ , то  $Q_p = Q_v$ .

Отметим, что при определении числа молей твердые и жидкие (конденсированные) вещества во внимание не принимаются, так для реакции  $C + 0,5O_2 = CO$   $\Delta n = n_2 - n_1 = 1 - 0,5 = 0,5$ .

### Закон Кирхгофа (1858 г.)

Так как внутренняя энергия и энтальпия зависят от температуры и давления, то и теплоты реакции  $Q_p$  и  $Q_v$  также зависят от  $T$  и  $p$ .

Возьмем производную от  $Q_v = U_2 - U_1$  по температуре при  $V = \text{const}$ :

$$\left(\frac{\partial Q_v}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U_2}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial U_1}{\partial T}\right)_V = C_{v2} - C_{v1} = \sum_{j=1}^n (n_j c_{vj})_2 - \sum_{i=1}^m (n_i c_{vi})_1, \quad (13.13)$$

где  $\left(\frac{\partial Q_v}{\partial T}\right)_V$  - температурный коэффициент теплоты реакции.

При  $p = \text{const}$  будем иметь

$$\left(\frac{\partial Q_p}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial I_2}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial I_1}{\partial T}\right)_p = C_{p2} - C_{p1} = \sum_{j=1}^n (n_j c_{pj})_2 - \sum_{i=1}^m (n_i c_{pi})_1. \quad (13.14)$$

Уравнения (13.13) и (13.14) устанавливают зависимость  $Q_p$  и  $Q_v$  от температуры и давления путем записи производных через истинные теплоемкости смесей конечных и исходных компонентов реакции и называются уравнениями Кирхгофа. Внутренняя энергия и энтальпия идеального газа зависят только от температуры, поэтому уравнения (13.13) - (13.14) примут вид

$$\frac{dQ_v}{dT} = \sum_{j=1}^n (n_j c_{vj})_2 - \sum_{i=1}^m (n_i c_{vi})_1, \quad (13.15)$$

$$\frac{dQ_p}{dT} = \sum_{j=1}^n (n_j c_{pj})_2 - \sum_{i=1}^m (n_i c_{pi})_1. \quad (13.16)$$

Из уравнений (13.15) и (13.16) следует, что знак производной  $\frac{dQ}{dT}$  зависит от разности теплоемкостей

$$\sum_{j=1}^n (n_j c_j)_2 - \sum_{i=1}^m (n_i c_i)_1 = C_2 - C_1 = \Delta C.$$

При  $\Delta C > 0$   $\frac{dQ}{dT} > 0$ , если  $\Delta C < 0$ , то и  $\frac{dQ}{dT} < 0$ , при  $\Delta C = 0$  тепловой эффект реакции не зави-

сит от температуры, то есть  $\frac{dQ}{dT} = 0$ . Сказанное иллюстрируется рисунком 13.1. Из рисунка

видно, что если суммарная теплоемкость продуктов реакции  $C_2$  больше суммарной теплоемкости исходных реагентов  $C_1$ , то тепловой эффект реакции увеличивается с ростом температуры. При  $\Delta C < 0$  имеет место обратная картина.

Интегрирование уравнений (13.15) и (13.16) позволяет определить тепловые эффекты реакций. Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то можно написать

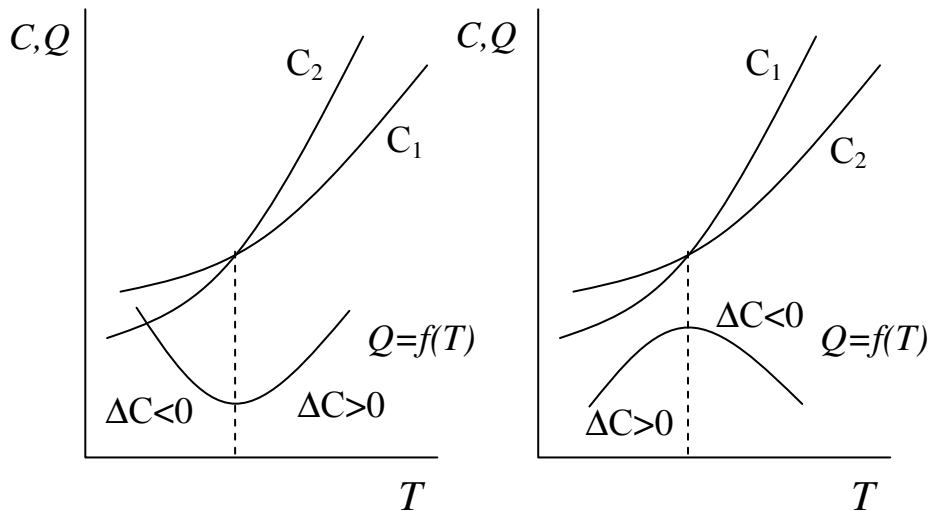
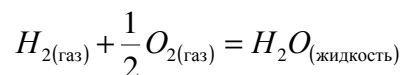


Рис. 13.1

$$Q_v = Q_{v,T_0} + \left( \sum_{j=1}^n \int_{T_0}^T n_j c_{vj} dT \right)_2 - \left( \sum_{i=1}^m \int_{T_0}^T n_i c_{vi} dT \right)_1, \quad (13.17)$$

$$Q_p = Q_{p,T_0} + \left( \sum_{j=1}^n \int_{T_0}^T n_j c_{pj} dT \right)_2 - \left( \sum_{i=1}^m \int_{T_0}^T n_i c_{pi} dT \right)_1, \quad (13.18)$$

где  $Q_{v,T_0}$  и  $Q_{p,T_0}$  - значения стандартных тепловых эффектов химических реакций при температуре  $T_0=298\text{K}$  и  $p_0=1,01325 \cdot 10^5$  Па, которые приводятся в таблицах. Например, для реакции



тепловой эффект  $Q_{v,T_0} = 286021$  кДж/кмоль.

Запишем уравнения (13.15) и (13.16) в общем виде

$$\frac{dQ}{dT} = C_2 - C_1 \quad (a)$$

и покажем, как определяется теплота реакции  $Q = f(T)$  по известным истинным молярным теплоемкостям  $c_i = f(T)$  реагентов (данный пример показывает решение одного из уравнений (13.17) или (13.18)).

Рассмотрим реакцию вида  $n_a A + n_b B = n_c C + n_d D$ . Будем считать, что молярные теплоемкости определяются квадратичными полиномами  $c = a + bT + dT^2$ , тогда суммарные теплоемкости реагентов запишутся в виде:

$$C_1 = n_a (a_a + b_a T + d_a T^2) + n_b (a_b + b_b T + d_b T^2),$$

$$C_2 = n_c (a_c + b_c T + d_c T^2) + n_d (a_d + b_d T + d_d T^2).$$

Теперь вместо (a) можно написать

$$\frac{dQ}{dT} = (n_c a_c + n_d a_d - n_a a_a - n_b a_b) + (n_c b_c + n_d b_d - n_a b_a - n_b b_b)T +$$

$$+ (n_c d_c + n_d d_d - n_a d_a - n_b d_b)T^2 = \alpha + \beta' T + \gamma' T^2, \quad (b)$$

$$\alpha = (n_c a_c + n_d a_d - n_a a_a - n_b a_b) = \sum n_i a_i; \beta' = (n_c b_c + n_d b_d - n_a b_a - n_b b_b) = \sum n_i b_i;$$

$$\gamma' = (n_c d_c + n_d d_d - n_a d_a - n_b d_b) = \sum n_i d_i.$$

Разделим переменные и проинтегрируем (b):  $Q = \alpha T + \frac{\beta'}{2} T^2 + \frac{\gamma'}{3} T^3 + C$ . При  $T=0$  найдем константу интегрирования  $C=Q_0$ , где  $Q_0$  – теплота реакции при  $T=0$  К. Окончательно в традиционном виде можно написать

$$Q = Q_0 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3, \quad (13.18a)$$

$$\text{где } \beta = \frac{\beta'}{2}; \gamma = \frac{\gamma'}{3}.$$

Скорость химической реакции и закон действующих масс. Под истинной скоростью химической реакции понимают предел отношения изменения концентрации  $i$ -го компонента к промежутку времени  $\Delta\tau$ , за которое произошло это изменение, при  $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$W_A = - \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta C_A}{\Delta\tau} \right) = - \frac{dC_A}{d\tau}, \quad (13.19)$$

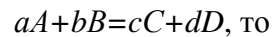
где  $C_A$  – концентрация компонента  $A$ .

С увеличением концентрации вещества реагентов растет число молекул и, следовательно, число их соударений, что приводит к росту скорости химической реакции. Закон действующих масс гласит, что скорость реакции в каждый момент времени пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ. Для реакции  $A+B=C+D$  будем иметь

$$W = K C_A C_B, \quad (13.20)$$

где  $K$  – константа скорости.

Если уравнение реакции имеет вид



$$W = K C_A^a C_B^b. \quad (13.21)$$

Так, для реакции  $2CO + O_2 = 2CO_2$  скорость реакции равна

$$W = K C_{CO}^2 C_{O_2}.$$

Полученные для  $W$  выражения справедливы для веществ, находящихся в газовом состоянии и подчиняющихся уравнению состояния идеального газа. Если в реакции участвуют вещества в твердом или жидком состоянии, то их концентрации не входят в уравнение для скорости реакции (т.е. для них полагают  $C=1$ ). Для реакции окисления твердого углерода  $C + O_2 = CO_2$  скорость реакции определяется выражением  $W = K C_{O_2}$ , так как концентрация и парциальное давление паров углерода над поверхностью твердого тела при  $T=\text{const}$  остаются постоянными и не влияют на скорость реакции.

#### Химическое равновесие. Принцип Ле Шателье - Брауна

Рассмотрим реакцию  $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ .

Скорость прямой реакции

$$W_1 = K_1 C_A^a C_B^b \quad (13.22)$$

с течением времени падает из-за уменьшения концентрации исходных веществ. Скорость обратной реакции

$$W_2 = K_2 C_C^c C_D^d \quad (13.23)$$

в свою очередь, непрерывно растет из-за увеличения концентрации продуктов реакции. Химическое равновесие наступает при  $W_1 = W_2$ . Если  $W_1 \gg W_2$ , то реакция сопровождается практически исчезновением исходных веществ и ее называют необратимой.

Приравнявая (13.22) и (13.23), получим константу равновесия, характеризующую состав равновесной смеси

$$K_c = \frac{K_1}{K_2} = \frac{C_c^c C_D^d}{C_A^a C_B^b}, \quad (13.24)$$

которая, как будет показано ниже, является функцией температуры и давления.

Внешнее воздействие, согласно принципу Ле Шателье - Брауна, смещает равновесие в ту или иную сторону. При этом ТС оказывает противодействие, ослабляя внешнее воздействие. Так, уменьшение температуры в реакционном объеме, обусловленное теплообменом с окружающей средой, в экзотермической реакции смещает равновесие в сторону продуктов реакции и увеличивает тепловыделение. При повышении температуры равновесие смещается влево в сторону исходных продуктов с уменьшением тепловыделения.

Выразим константу равновесия через парциальные давления компонентов исходных и конечных продуктов реакции. Записав уравнение состояния идеального газа через парциальное давление в форме Менделеева-Клапейрона  $p_i V_{\text{см}} = n_i R_0 T_{\text{см}}$ , и вводя концен-

трацию  $c_i = \frac{n_i}{V_{\text{см}}}$ , получим 
$$c_i = \frac{P_i}{R_0 T_{\text{см}}}. \quad (13.25)$$

Подставляя (13.25) для каждого из компонентов в (13.24), найдем, что

$$K_c = \frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b} (R_0 T_{\text{см}})^{-(c+d-a-b)}, \quad (13.26)$$

где  $c + d - a - b = \Delta n$  - изменение числа киломолей газообразных продуктов в результате химической реакции.

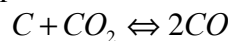
Вводя константу равновесия, выраженную через парциальные давления

$$K_p = \frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b}, \quad (13.27)$$

перепишем (13.26) в окончательном виде

$$K_c = K_p (R_0 T_{\text{см}})^{-\Delta n}. \quad (13.28)$$

Формула (13.28) устанавливает связь между константами равновесия  $K_c$  и  $K_p$ . Следовательно, если  $\Delta n > 0$ ,  $K_c < K_p$ , при  $\Delta n < 0$   $K_c > K_p$ , если  $\Delta n = 0$   $K_c = K_p$ . Так, для гетерогенной системы, например, в случае реакции



будем иметь

$$K_p = \frac{P_{CO}^2}{P_{CO_2}}, \quad \text{а } K_c = \frac{C_{CO}^2}{C_{CO_2}}, \quad K_c = K_p / (R_0 T_{\text{см}}),$$

так как  $\Delta n = 2 - 1 = 1$  (см. стр. 209).

По известным константам равновесия одних реакций можно вычислить неизвестные константы других реакций и состав смеси при химическом равновесии.

Пусть известны константы равновесия  $K'_p$  и  $K''_p$  реакций

$$2CO \rightleftharpoons C + CO_2, \quad C + 2H_2 \rightleftharpoons CH_4: \quad K'_p = \frac{P_{CO_2}}{P_{CO}^2}, \quad K''_p = \frac{P_{CH_4}}{P_{H_2}^2} \quad \text{и требуется определить кон-}$$

станту равновесия реакции

$2CO_2 + 2H_2 \rightleftharpoons CH_4 + CO_2$ . Так как искомая константа равна  $K_p = \frac{P_{CH_4} P_{CO_2}}{P_{CO}^2 P_{H_2}^2}$ , то из сравнения имеющихся выражений для  $K_p$ ,  $K'_p$  и  $K''_p$  получаем  $K_p = K'_p \cdot K''_p$ , то есть константа суммарной реакции равна произведению констант промежуточных реакций.

### Степень диссоциации и ее связь с константой равновесия

Под диссоциацией понимают процесс разложения сложного вещества на более простые, обычно диссоциация происходит при высоких температурах.

Доля исходного вещества  $\alpha$ , которая разложилась к моменту достижения равновесия, называется степенью термической диссоциации. Состав смеси при равновесии зависит от степени диссоциации и, следовательно, константа равновесия, зависящая от полноты реакции, может быть выражена через степень диссоциации  $K=f(\alpha)$ . Рассмотрим реакцию



выражение для константы равновесия которой имеет вид

$$K_p = \frac{P_C^c P_B^b}{P_A^a}, \quad (b)$$

Формуле (a) отвечает, например, химическая реакция



К моменту наступления равновесия число киломолей каждого из веществ составит:  $n_{CO_2} = 2(1-\alpha)$ ,  $n_{CO} = 2\alpha$ ,  $n_{O_2} = \alpha$ .

Таким образом, число киломолей смеси

$$n_{см} = 2(1-\alpha) + 2\alpha + \alpha = 2 + \alpha. \quad (d)$$

В разделе "Газовые смеси" было показано, что объемная доля  $i$ -го компонента  $r_i = \frac{V_i}{V_{см}}$

равна мольной доле  $N_i = \frac{n_i}{n_{см}}$ , тогда  $p_i = r_i p_{см} = N_i p_{см}$ . Выразим парциальные давления

газов через мольные доли и давление смеси:

$$P_{CO_2} = N_i p_{см} = \frac{n_{CO_2}}{n_{см}} p_{см} = \frac{2(1-\alpha)}{2+\alpha} p_{см},$$

$$P_{CO} = \frac{2\alpha}{2+\alpha} p_{см}, \quad P_{O_2} = \frac{\alpha}{2+\alpha} p_{см}.$$

Подставляя парциальные давления в (b), найдем искомую зависимость константы равновесия от степени диссоциации

$$K_p = \frac{P_{см} \alpha^3}{(1-\alpha)^2 (2+\alpha)}. \quad (13.29)$$

Зная константу равновесия, можно определить степень диссоциации. Каждая химическая реакция имеет свою функциональную зависимость  $K=f(\alpha)$ . В рассматриваемом случае число киломолей образовавшихся продуктов реакции  $n_2=3$ , число киломолей исходных веществ  $n_1=2$ , тогда  $\Delta n = n_2 - n_1 = 1$ . На основании формулы (13.28) можно написать

$$K_c = K_p (R_0 T_{см})^{-\Delta n} = \frac{P_{см} \alpha^3}{(1-\alpha)^2 (2+\alpha) T_{см} R_0}. \quad (13.30)$$

Термодинамические условия равновесия химических реакций

В разделе 7 "Термодинамические потенциалы и дифференциальные уравнения термодинамики" были введены в рассмотрение функции свободная энергия  $F = U - TS$  и свободная энтальпия  $\Phi = I - TS$ . Было показано, что при  $T = \text{const}$  сумма работы изменения объема  $L$  и работ, не связанных с изменением объема равна убыли свободной энергии

$$dL + \sum_{i=1}^n dL_{V,i} = dL + dL^* = -dF .$$

В случае изохорно-изотермической реакции при  $dL = pdV = 0$  работа химической реакции также равна убыли свободной энергии

$$dL^* = -dF . \quad (13.31)$$

В процессе перехода системы в равновесное состояние из уравнения  $dF \leq -SdT - pdV$  (см. раздел 8) следует, что при  $dT = dV = 0$  свободная энергия должна уменьшаться, а в состоянии равновесия  $dF = 0$ ,  $d^2F > 0$ ,  $F = F_{\min}$ . Из условия  $dF \leq 0$  также следует, что при протекании обратимых химических реакций свободная энергия остается неизменной, а при необратимых – уменьшается.

Аналогичным образом для изобарно-изотермической реакции можно написать  $dL^* = -d\Phi$ . Так как  $d\Phi \leq -SdT + pdV$ , то при переходе в равновесное состояние изобарно-изотермический потенциал уменьшается ( $d\Phi \leq 0$ ), а в состоянии равновесия  $d\Phi = 0$ ,  $d^2\Phi > 0$ ,  $\Phi = \Phi_{\min}$ . При протекании обратимых реакций  $d\Phi = 0$ , при необратимых равновесие наступает при  $\Phi = \Phi_{\min}$ .

В общем случае свободная энтальпия для химически реагирующей ТС может быть записана в виде

$$\Phi = f(p, T, G_1, G_2 \dots),$$

откуда

$$d\Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{T, G_1, G_2, \dots} dp + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{p, G_1, G_2, \dots} dT + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial G_i} \right)_{p, T, G_{cm}} dG_i .$$

Для изобарно-изотермической системы будем иметь

$$d\Phi_{p, T} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial G_i} \right)_{p, T, G_{cm}} dG_i , \quad (13.32)$$

но  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial G_i} \right)_{p, T, G_{cm}} = \varphi_i$  (см. химический потенциал), таким образом

$$d\Phi_{p, T, G_{cm}} = \sum_{i=1}^n \varphi_i dG_i . \quad (13.33)$$

Если в системе происходят химические превращения, то  $d\Phi < 0$ . При наступлении химического равновесия выделение или поглощение теплоты прекращается и  $d\Phi = 0$ .

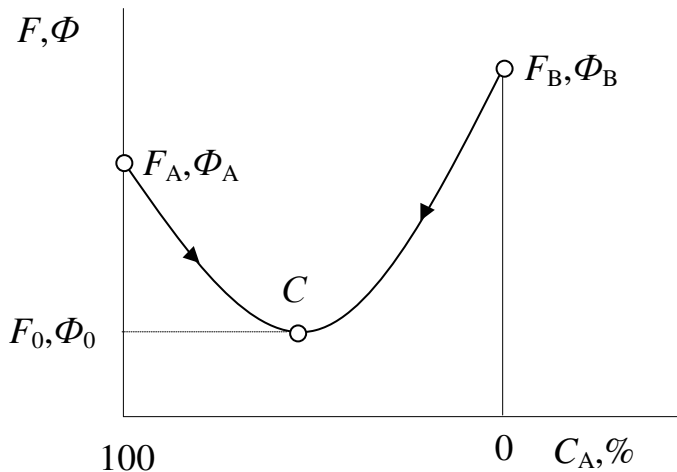
Химическое сродство

Под химическим сродством понимают степень способности различных веществ соединяться друг с другом.

Было показано, что переход изохорно-изотермической системы в равновесное состояние сопровождается уменьшением свободной энергии ( $dF < 0$ ), и в состоянии равновесия  $dF = 0$ ,  $d^2F > 0$ ,  $F = F_{\min}$ . Для изобарно-изотермической системы, соответственно,  $d\Phi < 0$ ,  $d\Phi = 0$ ,  $d^2\Phi > 0$ ,  $\Phi = \Phi_{\min}$ .

Таким образом, возможными являются лишь те реакции, которые приводят к уменьшению свободной энергии или свободной энтальпии, что иллюстрируется рис.13.2.

Из рисунка видно, что протекание прямой и обратной реакций возможно лишь при выполнении условий  $F_0 - F_A < 0$ ,  $\Phi_0 - \Phi_A < 0$  или  $F_0 - F_B < 0$ ,  $\Phi_0 - \Phi_B < 0$ , где  $F_0$  и  $\Phi_0$  – значения потенциалов после реакции. В точке  $C$  имеет место химическое равновесие. Отметим, что в этом состоянии ни одна из концентраций веществ не равна нулю. Чем больше  $F_A - F_0$  или  $\Phi_A - \Phi_0$ , тем больше работа реакции, а следовательно, и химическое сродство. Впервые это положение было высказано русским ученым Н.Н.Бекетовым, а затем Гельмгольцем и Вант-Гоффом.



Уравнение изотермы химической реакции

Получим уравнение, связывающее максимальную работу химической реакции с константой равновесия и начальными давлениями веществ, участвующих в реакции. Это уравнение называется уравнением изотермы химической реакции. Рассмотрим обратимые процессы, протекающие в установке, предложенной Вант-Гоффом в 1884г. (рис.13.3).

Рис. 13.2

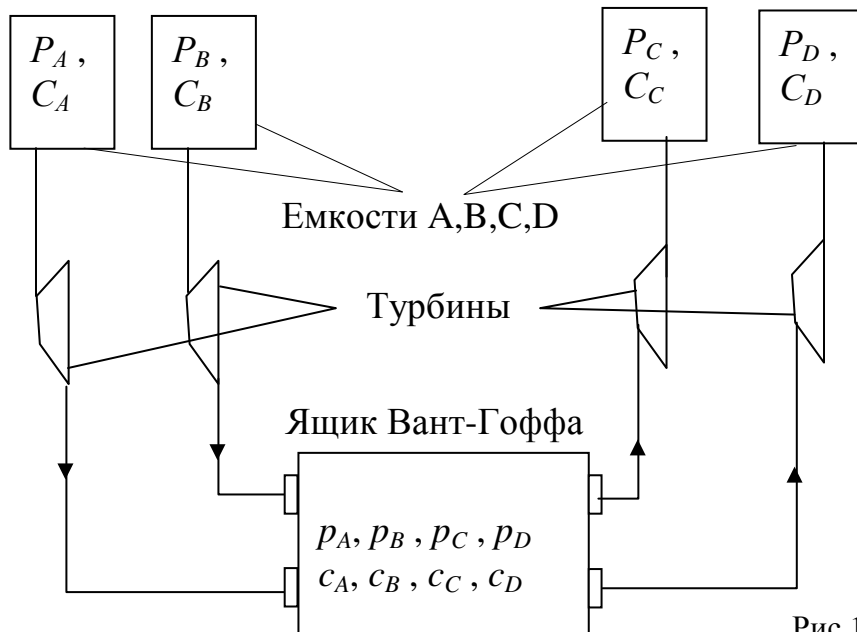


Рис.13.3

Установка Вант-Гоффа состоит из турбин, емкостей А,В,С,Д, в которых находятся компоненты с парциальными давлениями  $P_A, P_B, P_C, P_D$  и концентрациями  $C_A, C_B, C_C, C_D$ , и ящика Вант-Гоффа, содержащего равновесную смесь компонентов и имеющего полупроницаемые перегородки, каждая из которых пропускает только один из компонентов. При этом  $P_A > p_A, P_B > p_B, P_C > p_C, P_D > p_D$ . Работа химической реакции  $L^*$  может быть представлена как алгебраическая сумма работ идеальных турбин, работающих при  $T = \text{const}$ . Так

как работа изотермического расширения равна  $L_T = nR_0T \ln \frac{v_2}{v_1} = nR_0T \ln \frac{P_1}{P_2}$ , то в нашем



случае, складывая работы всех турбин, получаем уравнение изотермы химической реакции

$$\begin{aligned} L_{\max}^* &= R_0 T \left( a \ln \frac{P_A}{p_A} + b \ln \frac{P_B}{p_B} + c \ln \frac{P_C}{p_C} + d \ln \frac{P_D}{p_D} \right) = \\ &= R_0 T \left( a \ln \frac{P_A}{p_A} + b \ln \frac{P_B}{p_B} - c \ln \frac{p_C}{P_C} - d \ln \frac{p_D}{P_D} \right) = \\ &= R_0 T \left( \ln \frac{P_A^a P_B^b}{P_C^c P_D^d} - \ln \frac{p_A^a p_B^b}{p_C^c p_D^d} \right) = R_0 T \left( \ln K_p - \ln \frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b} \right) = -\Delta\Phi, \end{aligned} \quad (13.34)$$

так как по определению  $K_p = \frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b}$ .

Выразив парциальные давления через концентрации компонент, получим

$$L_{\max}^* = R_0 T \left( \ln K_c - \ln \frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b} \right) = -\Delta F. \quad (13.35)$$

Если  $\ln K_c > \ln \frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b}$ , то ТС находится в неравновесном состоянии, работа положительна

и возможна лишь прямая реакция. При  $L^* < 0$  возможна только обратная реакция. Если  $L^* = 0$ , то ТС находится в равновесии и химическая реакция не протекает.

Для сравнительной оценки химического сродства считают, что начальные концентрации и парциальные давления каждого из компонентов соответственно равны одному киломолю или одной физической атмосфере ( $p_i = 1,01325 \cdot 10^5$  Па), то есть  $\frac{P_C^c P_D^d}{P_A^a P_B^b} = 1$ ,  $\frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b} = 1$ , тогда  $L_{\max}^{*0} = R_0 T \ln K_p$  и  $L_{\max}^{*0} = R_0 T \ln K_c$ . В справочниках (см., например, в [36]) приводятся значения теплот образования (тепловой эффект реакции  $\Delta I_0$ , Дж/моль), энтропии  $S_0$ , Дж/(моль К) и теплоемкости  $c_p$ , Дж/(моль К) при  $T_0 = 298$  К, которые позволяют определить изменение изобарно-изотермического потенциала в стандартных условиях  $\Delta\Phi_T^0 = \Delta I_T^0 - T \Delta S_T^0$ .

### Закон Вант-Гоффа

Закон Вант-Гоффа устанавливает зависимость константы равновесия от температуры.

Рассмотрим вначале изохорно-изотермическую систему и получим уравнение Гиббса-Гельмгольца. Свободную энергию  $F = U - TS$  с учетом  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$  (так как  $dF = -SdT - pdV$ ) можно представить в виде

$$F = U + T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V. \quad (13.36)$$

Для начального и конечного состояний системы (до и после химической реакции) можно написать

$$F_1 = U_1 + T \left( \frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_V, \quad (a)$$

$$F_2 = U_2 + T \left( \frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_V. \quad (b)$$

Вычитая (b) из (a), получим уравнение Гиббса-Гельмгольца

$$L_{V,T} = F_1 - F_2 = U_1 - U_2 + T \left( \frac{\partial(F_1 - F_2)}{\partial T} \right)_V = Q_V + T \left( \frac{\partial L_{V,T}}{\partial T} \right)_V. \quad (13.37)$$

Для изобарно-изотермической системы будем иметь

$$L_{p,T} = \Phi_1 - \Phi_2 = I_1 - I_2 + T \left( \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial T} \right)_p = Q_p + T \left( \frac{\partial L_{p,T}}{\partial T} \right)_p, \quad (13.38)$$

так как  $dL_{V,T} = -dF$ , а  $dL_{p,T} = -d\Phi$ .

Возьмем производную от (13.35) по температуре при  $V = \text{const}$

$$\left( \frac{\partial L_{\max}^*}{\partial T} \right)_V = R_0 \left( \ln K_C - \ln \frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b} \right) + R_0 T \left( \frac{\partial \ln K_C}{\partial T} \right)_V$$

и подставим в (13.37):

$$L_{\max}^* = Q_V + TR_0 \left( \ln K_C - \ln \frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b} \right) - R_0 T^2 \left( \frac{\partial \ln K_C}{\partial T} \right)_V, \text{ но } TR_0 \left( \ln K_C - \ln \frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b} \right) = L_{\max}^*,$$

$$\text{следовательно, } Q_V - R_0 T^2 \left( \frac{\partial \ln K_C}{\partial T} \right)_V = 0, \text{ или } \left( \frac{\partial \ln K_C}{\partial T} \right)_V = \frac{Q_V}{R_0 T^2} = \frac{\Delta U}{R_0 T^2}. \quad (13.39)$$

Полученное уравнение называется законом Вант-Гоффа. Для изобарно-изотермической реакции закон будет иметь вид

$$\left( \frac{\partial \ln K_C}{\partial T} \right)_p = \frac{Q_p}{R_0 T^2} = \frac{\Delta I}{R_0 T^2}. \quad (13.40)$$

Так как для экзотермических реакций  $Q < 0$ , то и  $\frac{\partial \ln K_C}{\partial T} < 0$ , то есть с ростом температуры уменьшается и  $d \ln K_C$ , и константа равновесия, при этом реакция смещается в сторону исходных веществ, а количество конечных продуктов реакции уменьшается, так как  $K_C = \frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b}$ . В эндотермических реакциях  $Q > 0$ ,  $\frac{\partial \ln K_C}{\partial T} > 0$  и с ростом температуры ( $dT > 0$ ) значение константы равновесия увеличивается ( $d \ln K_C > 0$ ), химическое равновесие смещается в сторону конечных продуктов, увеличивается средство и выход продуктов реакции.

#### Зависимость скорости реакции от температуры, закон Аррениуса

Было показано, что скорость реакции зависит от концентрации реагентов и константы скорости  $W = K C_A^a C_B^b$ . Увеличение концентраций приводит к росту столкновений между молекулами реагентов в единицу времени, т.е. к росту скорости реакции. Если бы каждое соударение приводило к реакции, то она протекала бы практически мгновенно. Однако протекание реакции возможно лишь при соударении активных молекул, энергия которых больше или равна энергии, необходимой для разрушения внутримолекулярных связей (энергии активации  $E_a$ ). Аррениус, исследуя влияние температуры на константу скорости для бимолекулярных реакций вида  $A+B \rightleftharpoons C+D$ , в которых две молекулы исходных веществ превращаются в одну или несколько молекул других веществ (под молекулярной реакцией понимают реакцию разложения  $A=B+C$ , когда молекула какого-нибудь вещества превращается в несколько молекул других веществ), получил зависимость (закон Аррениуса)

$$K = K_0 \exp\left(-\frac{E_a}{R_0 T}\right), \quad (13.41)$$

где  $K$  – константа скорости,  $K_0$  – эмпирическая константа, характеризующая полное число столкновений молекул реагентов,  $\exp\left(-\frac{E_a}{R_0 T}\right)$  – множитель, отражающий долю столкновений, возникающих между активными молекулами. Уравнение Аррениуса применимо для реакций в газах и растворах. Из уравнения видно, что чем меньше энергия активации, тем больше константа скорости и тем быстрее протекает реакция. В координатах  $K$ - $T$  уравнение (13.41) имеет вид, показанный на рис.13.4.

Взяв вторую производную от (13.41) по температуре и приравняв ее нулю

$$\frac{d^2 K}{dT^2} = K_0 \exp\left(-\frac{E_a}{R_0 T}\right) \cdot \frac{E_a}{R_0 T^3} \left(\frac{E_a}{R_0 T} - 2\right) = 0, \text{ определим точку перегиба кривой Аррениуса}$$

$T_{\text{пер}} = \frac{E_a}{2R_0}$ , выше которой начинает замедляться скорость химической реакции. Так как

$T_{\text{пер}} \approx 10^4 \text{K}$ , то в обычных условиях реакция протекает при температуре  $T < T_{\text{пер}}$ .

Отметим, что иногда закон Аррениуса записывают через скорость химической реакции в виде  $W = W_0 \exp\left(\frac{E_a}{R_0 T}\right)$ , где  $W_0$  – воображаемая скорость, которую имела бы реакция, если бы все сталкивающиеся молекулы мгновенно реагировали.

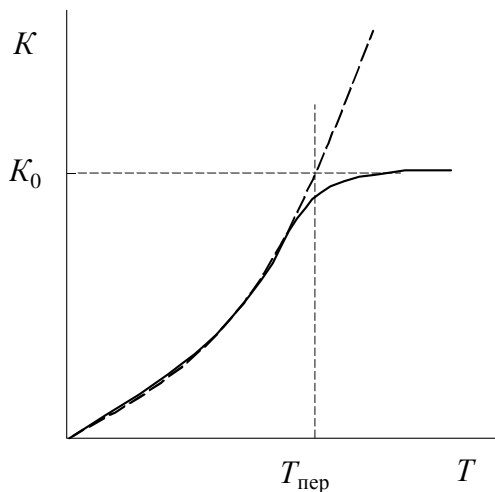


Рис. 53.4

Логарифмируя (13.41), получим

$$\ln K = \ln K_0 - \frac{E_a}{R_0 T}. \quad (13.42)$$

Зависимость (13.42) представлена в графическом виде на рисунке 13.5, где  $\text{tg } \alpha = -\frac{E_a}{R_0}$ .

Зная константы скорости данной реакции при разных температурах, можно определить энергию активации, используя формулу (13.42):

$$\ln K_{T_1} - \ln K_{T_2} = \frac{E_a}{R_0} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

$$\ln \frac{K_{T_1}}{K_{T_2}} = \frac{E_a}{R_0} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}\right), \text{ откуда}$$

$$E_a = R_0 \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}\right) \ln \frac{K_{T_1}}{K_{T_2}}, \text{ Дж/кмоль.} \quad (13.43)$$

$K_{T_1}$  и  $K_{T_2}$  – соответственно константы скорости данной реакции при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Дифференцируя (13.42), получим уравнение Аррениуса в дифференциальной форме

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{E_a}{R_0 T^2}. \quad (13.44)$$

Сравнивая (13.44) с (13.39), приходим к выводу, что уравнения имеют одинаковый вид. Если записать уравнение (13.39) через константы скорости обратной и прямой реакций  $\left(\frac{\partial \ln K_2}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial \ln K_1}{\partial T}\right)_V = \frac{U_2 - U_1}{R_0 T^2}$ , а (13.44) представить в виде

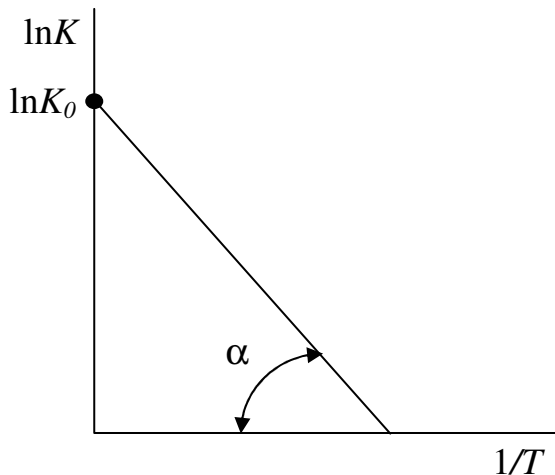


Рис.13.5

$$\left(\frac{\partial \ln K_2}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial \ln K_1}{\partial T}\right)_V = \frac{E_{a2} - E_{a1}}{R_0 T^2},$$

то тепловой эффект реакции можно выразить через разность энергий активации прямой и обратной реакций

$$Q_V = U_2 - U_1 = E_{a2} - E_{a1}. \quad (13.45)$$

### Тепловой закон Нернста

Нернстом было экспериментально установлено, что теплоемкости кристаллических веществ при температурах близких к нулю равны нулю, т.е.  $c_p|_{T \rightarrow 0} = 0$ . Тогда из уравнения Кирхго-

фа (13.14) следует, что  $\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p\right]_{T \rightarrow 0} = 0$ . На осно-

вании этого Нернстом было выдвинуто предпо-

ложение, что при  $T \rightarrow 0$

$$\left[\left(\frac{\partial Q_0}{\partial T}\right)_p\right]_{T \rightarrow 0} = \left[\left(\frac{\partial L_0}{\partial T}\right)_p\right]_{T \rightarrow 0} = 0.$$

Кроме того, из уравнения Гиббса-Гельмгольца

$$L_{p,T} = Q_p + T \left(\frac{\partial L_{p,T}}{\partial T}\right)_p$$

получаем, что максимальная работа реакции при  $T=0$  равна тепловому эффекту, т.е.  $L_0=Q_0$ . Таким образом, при  $T=0$  кривые  $Q=f(T)$  и  $L=\varphi(T)$  не только выходят из одной точки, но и имеют общую касательную, параллельную оси температур. Покажем, что это так. Вблизи абсолютного нуля температуры энтропии всех веществ, находящихся в равновесном состоянии, становятся неизменными и равными между собой, т.е.  $S_{10}=S_{20}=\text{const}$ , где  $S_{10}$  и  $S_{20}$  — энтропии исходных веществ и продуктов реакции при  $T=0\text{K}$ .

Действительно,

$$\left[\left(\frac{\partial L_0}{\partial T}\right)_p\right]_{T \rightarrow 0} = \left[\left(\frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial T}\right)_p\right]_{T \rightarrow 0} = \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial T}\right)_p\right]_{T \rightarrow 0} = S_{20} - S_{10} = 0,$$

что и требовалось доказать (см. рис.13.6). Нернст в 1906 г. сформулировал тепловую теорему, согласно которой при температурах близких к абсолютному нулю свойства конденсированных (твердых) систем перестают зависеть от температуры. В дальнейшем М.Планк, используя уравнение Больцмана  $s=k \ln W$ , показал, что  $s_{10}=s_{20}=0$  (так как термодинамическая вероятность  $W$  при  $T=0$  равна единице) и дал более общую формулировку закона Нернста: энтропии всех тел конечного объема и однородного состава безгранично уменьшаются при температуре, стремящейся к абсолютному нулю. Это означает, что при достижении абсолютного нуля теплообмен полностью прекращается, следовательно, нельзя путем охлаждения тела (отвода теплоты) понизить его температуру до абсолютного нуля.

Зная теплоту реакции  $Q_1$  при  $T_1$ , можно определить  $Q_0$  (а следовательно, и  $L_0$ ) из уравнения (13.18a)  $Q_0 = Q_1 - (\beta T_1^2 + \gamma T_1^3)$  при  $\alpha=0$ , так как  $\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = 0$ . Из уравнения Гиббса-Гельмгольца также можно получить зависимость работы химической реак-

ции от температуры  $L_{p,T} = Q_0 - \beta T^2 - \frac{1}{2} \gamma T^3$ . Планк, как уже отмечалось, предположил, что  $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$ , т.е. при абсолютном нуле температуры энтропия равна нулю. Используя эту гипотезу и зная зависимость истинной теплоемкости от температуры  $c_x = f(T)$ , можно определить абсолютное значение энтропии при температуре  $T$ .

Например, для изобарного процесса

$$s = \int_0^{T_{\text{плавл}}} c_{p\text{тв}} \frac{dT}{T} + \frac{r_{\text{плавл}}}{T_{\text{плавл}}} + \int_{T_{\text{плавл}}}^{T_{\text{кип}}} c_{p\text{ж}} \frac{dT}{T} + \frac{r_{\text{кип}}}{T_{\text{кип}}} + \int_{T_{\text{кип}}}^T c_{p\text{г}} \frac{dT}{T}.$$

В заключение еще раз отметим, что объединенный закон термодинамики является универсальным законом, отражающим наиболее общие процессы в природе. В частности, из него можно получить, например, выражение для химической работы, которая производится термодинамической системой при превращении одних веществ в другие в изобарно-изотермических и изохорно-изотермических процессах.

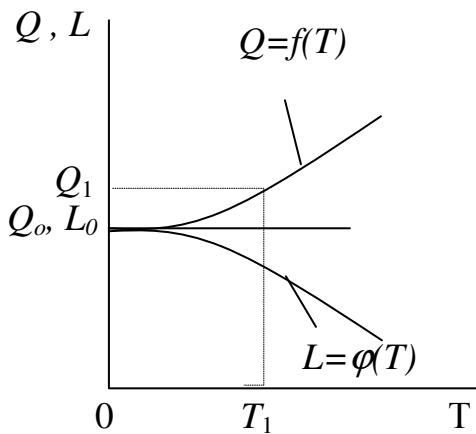


Рис.13.6

Так, разрешая (8.5) относительно элементарной работы химической реакции  $dL^*$  при обратимом процессе, получим:

$$dL^* = TdS - dU - pdV. \quad (a)$$

Интегрируя (a) при  $T=\text{const}$ ,  $V=\text{const}$  и  $G=\text{const}$ , определим максимальную работу изохорно-изотермической реакции

$$L_{T,V,\text{max}}^* = T(S_2 - S_1) - (U_2 - U_1) = (U_1 - TS_1) - (U_2 - TS_2) = F_1 - F_2 \quad (b)$$

Если (a) проинтегрировать при  $T=\text{const}$ ,  $p=\text{const}$  и  $G=\text{const}$ , то получим максимальную работу изобарно-изотермической реакции

$$L_{T,p,\text{max}}^* = T(S_2 - S_1) - (U_2 - U_1) - p(V_2 - V_1) = (U_1 - TS_1 + pV_1) - (U_2 - TS_2 + pV_2) = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (c)$$

Выражение (c) можно получить также и из объединенного закона термодинамики, записанного в виде

$$TdS = -dI - Vdp + dL^*. \quad (d)$$

Действительно, интегрируя (d) при  $T=\text{const}$  и  $p=\text{const}$ , снова получим (c):

$$L_{T,p,\text{max}}^* = T(S_2 - S_1) - (I_2 - I_1) = (I_1 - TS_1) - (I_2 - TS_2) = \Phi_1 - \Phi_2.$$

#### 14. Основные понятия неравновесной термодинамики.

Методы равновесной термодинамики сводятся к описанию свойств термодинамической системы в состоянии равновесия, когда во всех точках системы ее физические свойства одинаковы. Явления необратимости, которые имеют место в реальных адиабатических системах при протекании процессов, проявляются через увеличение энтропии, что дает возможность, согласно теореме Гюи-Стодолы, судить о потере работоспособности (эксергии) термодинамической системы. Развитие процессов во времени в рамках равновесной термодинамики не рассматривается.

В неравновесной термодинамике считают, что термодинамическая система представляет собой совокупность малых, но все еще макрообластей, состояние которых зави-

сит от координат и времени, и к которым могут быть применены законы равновесной термодинамики  $TdS = dU + pdV - \sum_i \mu_i dG_i$ , но между ними отсутствует равновесие (тепловое, механическое или др.). Неравновесность порождает потоки вещества, теплоты, энтропии из-за наличия градиентов концентрации, температуры и т.п. Неравновесная термодинамика, являясь развитием классической термодинамики, позволяет более глубоко изучить явления, имеющие место в макросистемах, выявить новые эффекты, обусловленные наложением различных одновременно протекающих процессов.

Основателем неравновесной термодинамики является Онзагер (1931), который вывел основные уравнения для линейных процессов и получил первые соотношения между кинетическими коэффициентами. По Онзагеру, термодинамические силы – это воздействия, вызывающие необратимые явления – перенос теплоты, вещества и они ничего общего не имеют с Ньютонскими силами. Так, для процесса теплопроводности термодинамическая сила имеет вид

$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_1 = -\frac{1}{T} \text{grad}T, \quad (14.1)$$

а для процесса диффузии

$$\mathbf{X}_D = \mathbf{X}_2 = -T \text{grad} \left( \frac{\mu}{T} \right). \quad (14.2)$$

Согласно линейному закону Онзагера, поток  $\mathbf{J}_i$  пропорционален вызывающим его силам  $\mathbf{X}_k$

$$\mathbf{J}_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} \mathbf{X}_k \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (14.3)$$

где  $L_{ik}$  – линейные коэффициенты. В качестве этих коэффициентов могут выступать, например, коэффициенты теплопроводности или диффузии. Коэффициенты  $L_{ik}$  при  $i \neq k$  связаны с налагающимися явлениями, т.е. при одновременном протекании различных процессов они накладываются друг на друга, порождая новый эффект. Так, если внутри термодинамической системы градиенты температуры и концентрации не равны нулю, то возникает перенос теплоты и вещества, порождающий новое явление – термодиффузию.

Онзагер установил, что при соответствующем выборе потоков  $\mathbf{J}_i$  и сил  $\mathbf{X}_i$  выполняются соотношения взаимности и матрица кинетических коэффициентов является симметричной, т.е.

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (14.4)$$

Согласно (14.3) потоки теплоты  $\mathbf{J}_1$  и вещества  $\mathbf{J}_2$  могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = L_{11} \mathbf{X}_1 + L_{12} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{J}_2 = L_{22} \mathbf{X}_2 + L_{21} \mathbf{X}_1. \end{cases} \quad (14.5)$$

Как видим, на первый поток накладывается процесс переноса вещества  $L_{12} \mathbf{X}_2$ , на второй – процесс переноса теплоты  $L_{21} \mathbf{X}_1$ .

Если в системе протекают три разных связанных друг с другом процесса, то можно написать

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = L_{11} \mathbf{X}_1 + L_{12} \mathbf{X}_2 + L_{13} \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{J}_2 = L_{21} \mathbf{X}_1 + L_{22} \mathbf{X}_2 + L_{23} \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{J}_3 = L_{31} \mathbf{X}_1 + L_{32} \mathbf{X}_2 + L_{33} \mathbf{X}_3. \end{cases} \quad (14.6)$$

Такая система может, например, описывать перенос теплоты и вещества в двухкомпонентной среде. Здесь диагональные кинетические коэффициенты  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ ,  $L_{33}$  соответствуют прямым процессам, а остальные отражают процессы взаимного влияния.

Следуя Онзагеру, получим скорость роста энтропии  $\dot{S}$  и покажем, как определяются потоки и термодинамические силы. Введем в рассмотрение величины отклонений термодинамических параметров текущего состояния адиабатической изолированной системы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  от равновесного состояния  $a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$ :

$$\alpha_i = a_i - a_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В равновесном состоянии  $\alpha_i = 0$ , а  $S = S_{\max}$ . В неравновесном состоянии в первом приближении

$$\Delta S = S - S_0 = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{i,k} \alpha_i \alpha_k, \quad (14.7)$$

где  $L_{ik}$  – положительно определенная матрица кинетических коэффициентов. По Онзагеру, поток  $\mathbf{J}_i = \frac{d\alpha_i}{d\tau}$  – это производная по времени от параметра  $\alpha_i$ , а производная  $\frac{\partial(\Delta S)}{\partial \alpha_i} = \mathbf{X}_i = -\sum_{k=1}^n L_{ik} \alpha_k$  есть термодинамическая движущая сила.

Тогда локальная скорость производства энтропии на основании (14.7) будет иметь вид

$$\dot{S} = \frac{dS}{d\tau} = -\sum_{k=1}^n L_{ik} \frac{d\alpha_i}{d\tau} \alpha_k = \sum_i \mathbf{J}_i \mathbf{X}_i. \quad (14.8)$$

В случае переноса теплоты и вещества можно написать

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = L_{11} \mathbf{X}_1 + L_{12} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{J}_2 = L_{21} \mathbf{X}_1 + L_{22} \mathbf{X}_2 \\ \dot{S} = \mathbf{J}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{X}_2. \end{cases} \quad (14.9)$$

Для анализа необратимых процессов Онзагером были введены две неравновесные потенциальные диссипативные функции, одна из которых имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{i,k} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_k \geq 0. \quad (14.10)$$

Взяв производную  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}_i} = \mathbf{J}_i = \sum_{k=1}^n L_{i,k} \mathbf{X}_k$ , получим линейный закон (см. формулу 14.3).

Вторая производная от (14.10) дает

$$\frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial \mathbf{X}_k} = L_{i,k} = L_{k,i} = \frac{\partial \mathbf{J}_k}{\partial \mathbf{X}_i}, \quad (14.11)$$

то есть равенство вторых производных от диссипативной функции эквивалентно соотношениям взаимности (14.4).

И. Пригожин, развивая теорию Онзагера, ввел принцип минимума производства энтропии: стационарное состояние системы, в которой происходит необратимый процесс, характеризуется тем, что скорость возникновения энтропии имеет минимальное значение при данных внешних условиях, препятствующих достижению системой равновесного состояния.

Установим этот принцип, следуя [19], на примере двухфазной системы. При заданной разности температур ( $\mathbf{X}_1 = \text{const}$ ) состояние системы, состоящей из двух фаз будет стационарным, если  $\mathbf{J}_1 = \text{const}$ , а поток вещества отсутствует, т.е.  $\mathbf{J}_2 = L_{21} \mathbf{X}_1 + L_{22} \mathbf{X}_2 = 0$ .

Тогда с учетом соотношения Онзагера  $L_{12} = L_{21}$  производство энтропии  $\dot{S} = \mathbf{J}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{J}_2 \mathbf{X}_2 = L_{11} \mathbf{X}_1^2 + 2L_{12} \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 + L_{22} \mathbf{X}_2^2 > 0$ , где  $\mathbf{J}_1 = L_{11} \mathbf{X}_1 + L_{12} \mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{J}_2 = L_{21} \mathbf{X}_1 + L_{22} \mathbf{X}_2$ .

Взяв производную  $\left( \frac{\partial \dot{S}}{\partial \mathbf{X}_2} \right)_{\mathbf{X}_1}$  и приравняв ее нулю, получим

$$\left( \frac{\partial \dot{S}}{\partial \mathbf{X}_2} \right)_{\mathbf{X}_1} = 2(L_{21} \mathbf{X}_1 + L_{22} \mathbf{X}_2) = 2\mathbf{J}_2 = 0.$$

Так как  $\dot{S}$  является положительной квадратичной функцией, то данный экстремум соответствует минимуму, что и требовалось доказать.

Далекие от равновесия термодинамические системы рассматриваются в нелинейной неравновесной термодинамике.

Пригожиным И. и Глансдорфом П. теоретически показана возможность самопроизвольного появления в таких системах новых устойчивых в пространстве и времени структур. Согласно критерию эволюции Пригожина-Глансдорфа, в термодинамической системе, параметры которой имеют значительное отклонение от равновесного состояния, скорость производства энтропии уменьшается! Отметим, что в настоящее время принципы нелинейной термодинамики применяются при изучении живых организмов, представляющих собой открытые биологические системы, в которых имеет место существенная неравновесность, а протекающие процессы носят сугубо необратимый характер. Изложенный в данном разделе материал дает представление об основах неравновесной термодинамики. Для более глубокого изучения этой темы отсылаем читателя к литературе [17,18]. Примеры применения методов термодинамики необратимых процессов изложены в [20].



## Часть II. Теория тепло - и массопереноса

### 15. Общие положения и понятия

Цель курса - ознакомить студентов с основными законами тепло- и массопереноса в природе применительно к задачам энергомашиностроения и научить их использовать эти законы и положения при расчете энергетических машин и систем.

#### Передача теплоты в природе. Массоперенос

Теплота может передаваться:

Путем теплопроводности. Для расчета плотности теплового потока при рассмотрении передачи теплоты в твердых телах применяется закон Фурье (1768 – 1830 г.г.)

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad}T \quad \text{Вт/м}^2, \quad (15.1)$$

где  $\vec{q}$  - плотность теплового потока,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К). Закон справедлив и для газов при отсутствии конвекции, т.е. когда передача теплоты осуществляется на молекулярном уровне.

Путем конвекции. В этом случае перенос теплоты всегда связан с движением жидкости или газа. Различают свободную и вынужденную конвекцию. Движение при свободной конвекции обусловлено наличием разности плотностей газа или жидкости в поле массовых сил, а при вынужденной - действием внешних сил. В том и другом случае плотность теплового потока определяется эмпирическим законом Ньютона. Например, при передаче теплоты от стенки к окружающей среде, можно написать

$$q = \bar{\alpha}(T_c - T_{\text{ж}}), \quad (15.2)$$

$T_c > T_{\text{ж}}$ ,  $\bar{\alpha}$  - средний коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Путем лучистой энергии. В основе передачи теплоты лежит закон Стефана - Больцмана, согласно которому лучистая энергия, излучаемая абсолютно черным телом с единицы поверхности, определяется выражением

$$E_0 = \sigma_0 T^4 = c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad \text{Вт/м}^2, \quad (15.3)$$

где  $\sigma_0$  - постоянная Больцмана,  $c_0$  - коэффициент излучения абсолютно черного тела;  $c_0 = 5,67 \text{ Вт/(м}^2\text{K}^4)$ .

Если тело серое, то коэффициент излучения серого тела  $\epsilon = \frac{E}{E_0}$ ,

где  $\epsilon$  - степень черноты, отношение лучистой энергии, отдаваемой серым телом к энергии, которую отдает абсолютно черное тело при той же температуре с единицы поверхности. При передаче теплоты между двумя параллельными пластинами, когда  $F_1 = F_2 = F$ , а расстояние между ними стремится к нулю, можно написать:

$$q_{1-2} = c_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где  $c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}}$  - приведенный коэффициент излучения;

$$c_1 = \epsilon_1 c_0; \quad c_2 = \epsilon_2 c_0; \quad T_1 > T_2.$$

В основе описания массопереноса, который осуществляется на молекулярном уровне, лежит закон Фика

$$\vec{j}_i = -D \text{grad} C_i, \text{ кг/ (м}^2\text{с)}, \quad (15.4)$$

где  $j_i$  - плотность потока массы  $i$ -ого компонента;  $D$ -коэффициент диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $C_i$  - концентрация  $i$ -ого компонента, которая может быть выражена через его парциальное давление  $p_i$

$$V_{\text{см}} p_i = G_i R_i T_{\text{см}} \quad ; \quad \rho'_i = \frac{G_i}{V_{\text{см}}} = C_i \quad ; \quad p_i = C_i R_i T_{\text{см}} \quad ; \quad C_i = \frac{p_i}{R_i T_{\text{см}}}.$$

Например, для системы воздух-вода:

$$D = D_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \frac{p_0}{p}, \text{ где } D_0 - \text{коэффициент диффузии при нормальных условиях}$$

$$p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.} = \frac{760}{750} \cdot 10^5 \text{ Па}; T_0 = 273 \text{ К}; D_0 = 22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; n = 1.5 \dots 2.5.$$

Если кроме того, имеет место конвективный перенос, то

$$\vec{j}_{i\Sigma} = \vec{j}_i + \vec{j}_{\text{конв}} = -D \text{grad} C_i + C_i \vec{w},$$

где  $\vec{w}$  - скорость потока.

Средняя плотность потока массы  $i$ -ой компоненты также может быть записана в виде  $j_{i\Sigma} = \bar{\beta} (C_{iw} - C_{i\infty})$ , где  $C_{iw}, C_{i\infty}$  - концентрации  $i$ -ой компоненты на поверхности тела и на бесконечности;  $\bar{\beta}$ ,  $\text{м/с}$  - средний коэффициент массопереноса, который, например, для пластины при ламинарном режиме течения определяется из критериального уравнения

$$\text{Sh} = 0.646 \text{Re}^{0.5} \text{Sc}^{0.33}, \quad \bar{\beta} = \frac{\text{Sh} \cdot D}{l}.$$

#### Температурное поле

Совокупность значений температур во всех точках изучаемого тела образует температурное поле. Оно может быть стационарным  $t=f(x,y,z)$  и нестационарным, когда температура зависит не только от координат, но и от времени  $t=f(\tau,x,y,z)$ .

Совокупность точек тела с одинаковыми температурами образует изотермическую поверхность. Если эту поверхность рассечь плоскостью, то получим изотерму (естественно, что изотермы не могут пересекаться друг с другом).

#### Градиент температуры

$\text{grad} T$  - это вектор, имеющий направление быстрейшего изменения температуры и направленный в сторону возрастания температуры.

Вектор плотности теплового потока  $\vec{q}$  противоположен  $\text{grad} T$  по направлению и пропорционален ему по величине

$$\text{grad} T = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (15.5)$$

Проектируя градиент температуры на оси в декартовой системе координат, получим

$$(\text{grad} T)_x = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\hat{n}, x) = \frac{\partial T}{\partial x}$$

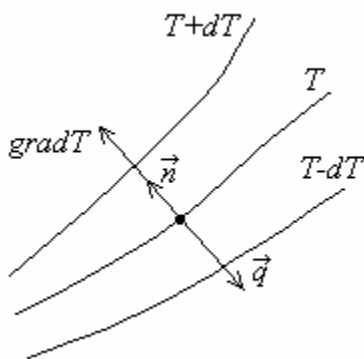


Рис. 15.1

$$(\text{grad}T)_y = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\hat{n}y) = \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$(\text{grad}T)_z = \frac{\partial T}{\partial n} \cos(\hat{n}z) = \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Теперь вместо (15.5) можно написать:

$$\text{grad}T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{или} \quad \text{grad}T = \nabla T,$$

где  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  - дифференциальный оператор или оператор Гамильтона “набла” (символический вектор).

Модуль градиента температуры равен:

$$|\text{grad}T| = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2}.$$

#### Плотность теплового потока, закон Фурье

Согласно закону Фурье, вектор плотности теплового потока

$$\vec{q} = -\vec{n} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \text{grad}T. \quad (15.6)$$

Вектор плотности теплового потока может быть выражен через его проекции

$$\vec{q} = \vec{i} q_x + \vec{j} q_y + \vec{k} q_z, \quad \text{где} \quad q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

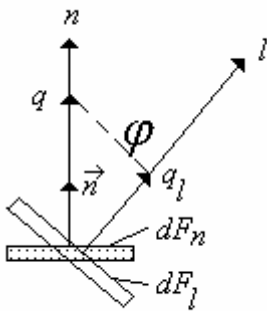


Рис.15.2

Поток теплоты через элементарную площадку  $dF$  не зависит от ее ориентации в пространстве. Действительно,

$$d\dot{Q} = q dF_n = q \cos \varphi \frac{dF_n}{\cos \varphi} = q_1 dF_l,$$

где  $dF_n$  - элементарная площадка, лежащая на изотермической поверхности,  $dF_l$  - элементарная площадка, перпендикулярная произвольному направлению  $l$ , составляющему угол  $\varphi$  с нормалью к изотермической поверхности.

Количество теплоты, прошедшей за время  $\tau$  через изотермическую поверхность  $F$  и поверхность  $F_l$ , равно:

$$Q = - \int_{\tau} \int_{F_n} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF d\tau = - \int_{\tau} \int_{F_l} \lambda \frac{\partial T}{\partial l} dF_l d\tau, \quad \text{Дж.}$$

#### Коэффициент теплопроводности

Отражает теплофизические свойства вещества,  $\lambda = \frac{|q|}{|\text{grad}T|}$ . Численно равен ко-

личеству теплоты, проходящей через единицу изотермической поверхности в единицу времени при  $|\text{grad}T| = 1$ . Типичные значения  $\lambda$  для некоторых веществ:  $\lambda_{\text{Cu}} = 390$  Вт/(мК);  $\lambda_{\text{Fe}} \approx 50$  Вт/(мК);  $\lambda_{\text{Si}} \approx 0.3$  Вт/(мК);  $\lambda_{\text{H}_2\text{O}} \approx 0.6$  Вт/(мК). Для

идеального газа:  $\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho l \bar{C}$ , где  $c$  - плотность;  $l$  - длина свободного пробега мо-

лекул,  $\bar{C} = \sqrt{\frac{3R_0T}{\mu}}$  - средняя скорость хаотического движения молекул. Так как

при изменении давления произведение  $\rho l \approx \text{const}$ , то коэффициент теплопроводности идеального газа практически зависит только от температуры. Для твердых материалов эта зависимость может быть аппроксимирована полиномом  $\lambda = a + bt + ct^2 + \dots + nt^n$ , причем в большинстве случаев  $\lambda = a \pm bt$ .

### Дифференциальное уравнение теплопроводности

Изучение любого физического процесса связано с установлением зависимости между величинами, определяющими это явление. В основе описания явления теплопроводности лежат уравнения математической физики. В этом случае в изучаемом теле выделяют бесконечно малый объем, который мал с точки зрения математики, но еще велик, чтобы в нем выполнялось условие сплошности.

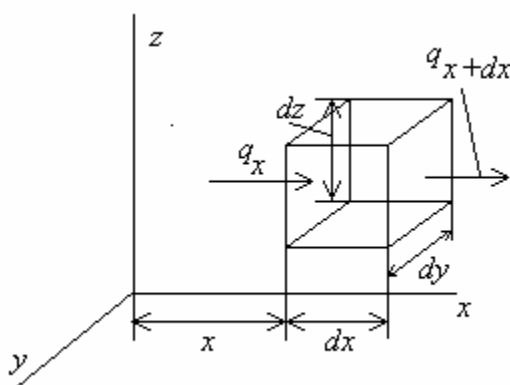


Рис.15.3

Выделим в теле бесконечно малый объем  $dv = dx dy dz$  и рассмотрим тепловые потоки через его грани:

$q_x dy dz$  - тепловой поток, вошедший в объем на координате  $x$ ,  $q_{(x+dx)} dy dz$  - тепловой поток, вышедший из объема на координате  $x+dx$ , где плотность теплового потока может быть записана в виде разложения функции в ряд Тейлора

$$q_{(x+dx)} = q_x + dq_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{2! \partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial^n q_x}{n! \partial x^n} dx^n.$$

Ограничимся двумя членами ряда разложения, тогда:

$$q_{(x+dx)} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx.$$

Будем считать, что количество теплоты  $q_{(x+dx)} dy dz d\tau$  больше  $q_x dy dz d\tau$ . Это должно привести к уменьшению энтальпии в выделенном объеме, т.е.

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} dv d\tau = (q_{(x+dx)} - q_x) dy dz d\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau, \text{ или}$$

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}.$$

Выполнив аналогичные выкладки для других осей, получим:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \text{ или } \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div } \vec{q}. \quad (15.7)$$

Существует и другой вывод дифференциального уравнения теплопроводности. Так как поток теплоты через поверхность тела идет на увеличение его энтальпии, то можно написать:

$-\int_F q_n dF = \int_V \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} dV$  (знак минус в левой части уравнения обусловлен тем, что единичный вектор  $\vec{n}$  и плотность теплового потока  $\vec{q}$  имеют

противоположные направления). По теореме Остроградского-Гаусса, поток вектора через поверхность, ограничивающую объем  $V$ , равен дивергенции этого вектора, взятой по объему, т.е.  $\int_F q_n dF = \int_V \text{div} \vec{q} dV$ . Тогда  $\int_V \left( \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} + \text{div} \vec{q} \right) dV = 0$ .

Так как  $dV \neq 0$ , то получаем (15.7).

В изучаемых телах возможно как выделение, так и поглощение теплоты. В этом случае уравнение теплопроводности примет вид

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{q} + q_v, \quad (15.8)$$

где  $q_v$  - объемная плотность тепловыделения, Вт/м<sup>3</sup>. Будем считать, что  $c_p = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ , тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}.$$

Введем коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho}, \quad \text{м}^2/\text{с}, \quad \text{который характеризует скорость}$$

распространения температурной волны ( $\lambda$  характеризует, насколько хорошо тело проводит тепло;

$c_p \rho$  - показывает, насколько хорошо тело аккумулирует теплоту).

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p \rho}, \quad (15.9)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа.

Уравнение (15.9) позволяет найти значение температуры в заданный момент времени в данной точке исследуемого тела. В цилиндрической системе координат оператор Лапласа от температуры имеет вид

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Частные случаи:

а) при  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, q_v = 0$ , получаем  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$  - уравнение Лапласа.

б) при  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, q_v \neq 0$  (внутренние источники теплоты присутствуют):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad \text{- уравнение Пуассона II порядка.}$$

В общем случае любое дифференциальное уравнение для неизвестной функции  $\varphi$  двух независимых переменных может быть записано в виде:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \varphi = f(x, y),$$

где  $A, B, C, a, b, c$  - константы;  $f$  - заданные функции.

Характер решения этого уравнения в рассматриваемой области определяется знаком дискриминанта  $\delta = AC - B^2$ .

Если  $\delta < 0$  - уравнение гиперболического типа,

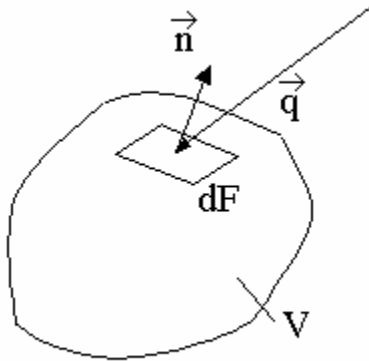


Рис.15.4

при  $\delta=0$  – уравнение параболического типа,  
 при  $\delta>0$  – уравнение эллиптического типа,  
 если  $\delta=\text{var}$ , то имеем уравнение смешанного типа.

### Краевые условия (условия однозначности)

Для того, чтобы решить конкретную задачу, необходимо к исходному уравнению присоединить краевые условия. В эти условия входят геометрические условия (характеризуют форму и размеры тела), физические условия (характеризуют свойства тела, задают распределение внутренних источников теплоты  $q_v$ ), начальные условия (при  $\tau=0$  задается распределение температуры в теле  $T=f(x,y,z)$ ), а также граничные условия (могут быть I,II,III,IV рода).

Граничные условия I рода: на поверхности изучаемого тела задана температура, в любой момент времени  $T_c=f(\tau,x,y,z)$ .

Граничные условия II рода: задана плотность теплового потока на поверхности тела  $q_c=f(\tau,x,y,z)$ .

Граничные условия III рода - задаются условия теплообмена тела с внешней средой  
 $-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0} = \alpha(T_c - T_{ж})$ , откуда можно получить

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0} = -\frac{T_c - T_{ж}}{\lambda/\alpha}. \quad (15.10)$$

Из рис.15.5 видно, что чем выше коэффициент теплоотдачи, тем  $T_c$  ближе к  $T_{ж}$ .

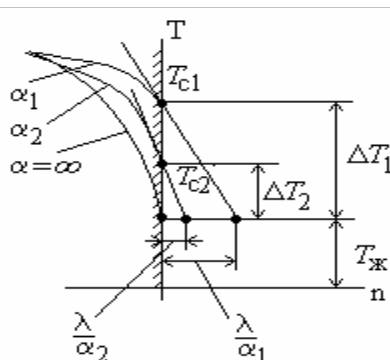


Рис.15.5

Граничные условия IV рода задаются на границе между двумя твердыми телами при отсутствии зазора. Так как плотности потока на границе тел одинаковы,

$$\text{то: } \lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{n=0} = \lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_{n=0}$$

$$\lambda_1 \text{tg } \varphi_1 = \lambda_2 \text{tg } \varphi_2 ; (*)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{tg } \varphi_2}{\text{tg } \varphi_1} = \text{const}. \quad (15.11)$$

При идеальном тепловом контакте оба тела на границе раздела имеют одинаковую температуру, т.е. изотермы непрерывно переходят из одного тела в другое, однако испытывают излом, определяемый уравнением (\*).

## 16. Теплопроводность при стационарном режиме

### Передача теплоты через плоскую стенку при граничных условиях I рода

Рассмотрим уравнение теплопроводности  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p \rho}$  для стационарного случая

случая  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$  при отсутствии внутреннего тепловыделения  $q_v = 0$ :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Если толщина стенки много меньше размеров самой пластины, то можем написать:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \text{ или } \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = 0. \text{ Интегрируя дважды, получим } \frac{dT}{dx} = C_1,$$

$$T = C_1 x + C_2. \quad (16.1)$$

Из граничных условий найдем константы интегрирования:

при  $x=0$   $T_{c1}=C_2$ ,

при  $x=\delta$   $T_{c2}=C_1\delta+C_2$ ,  $C_1 = -\frac{T_{c1}-T_{c2}}{\delta}$ , тогда

$$T = T_{c1} - \left( \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta} \right) x. \quad (16.2)$$

Формула (16.2) позволяет найти значение температуры  $T$  на любой координате  $x$ . Плотность теплового потока через пластину найдем, используя закон Фурье:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda C_1 = \frac{\lambda}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}). \quad (16.3)$$

Зная плотность теплового потока, можем определить тепловой поток  $\dot{Q} = qF$  (Вт) и количество теплоты, прошедшее за время  $\tau$ :  $Q = qF\tau$  (Дж), где  $F$  – площадь поверхности пластины.

Передача теплоты через плоскую стенку при коэффициенте теплопроводности, зависящем от температуры

Пусть  $\lambda$  меняется по линейному закону:  $\lambda = a + bt$ .

Разделив переменные в уравнении  $q = -\lambda \frac{dt}{dx}$ , получим:

$$q dx = -\lambda dt, \text{ или } q dx = -(a + bt) dt.$$

Интегрирование левой части от 0 до  $x$  и правой от  $t_{c1}$  до  $t$  дает:

$$qx = a(t_{c1} - t) + \frac{b}{2}(t_{c1}^2 - t^2). \quad (16.4)$$

При  $x=\delta$  имеем:  $q\delta = a(t_{c1} - t_{c2}) + \frac{b}{2}(t_{c1}^2 - t_{c2}^2),$

$$q = \frac{1}{\delta} \left[ a + \frac{b}{2}(t_{c1} + t_{c2}) \right] (t_{c1} - t_{c2}).$$

Если ввести понятие среднего по толщине коэффициента теплопроводности

$\bar{\lambda} = a + \frac{b}{2}(t_{c1} + t_{c2})$ , то формула для плотности теплового потока приобретает вид,

как при  $\lambda = \text{const}$ :  $q = \frac{\bar{\lambda}}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}). \quad (16.5)$

В общем случае, когда  $\lambda = \lambda(t) \neq a + bt$ , говорят о средне-интегральном значении коэффициента теплопроводности

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{t_{c1} - t_{c2}} \int_{t_{c2}}^{t_{c1}} \lambda(t) dt. \quad (16.6)$$

Передача теплоты через многослойную плоскую стенку  
при граничных условиях I рода

Рассмотрим стационарную задачу для плоской стенки, состоящей из нескольких слоев разной толщины с разными коэффициентами теплопроводности (рис.16.1). Для первого слоя плотность теплового потока равна:  $q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_{c1} - t_{c2})$ .

Для остальных слоев можно написать аналогичные выражения. Разрешая их относительно разностей температур и складывая с учетом того, что при стационарном режиме плотность теплового потока через все слои одна и та же, получим

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\delta_1/\lambda_1 + \delta_2/\lambda_2 + \dots + \delta_n/\lambda_n}, \quad q = \frac{t_{c1} - t_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \delta_i/\lambda_i}, \quad (16.7)$$

где в знаменателе - суммарное внутреннее термическое сопротивление многослойной стенки. Если ввести эквивалентный коэффициент теплопроводности как коэффициент теплопроводности однородной стенки с толщиной и термическим сопротивлением такими же, как у многослойной стенки:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\lambda_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \quad \lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (16.8)$$

то выражение для плотности теплового потока примет такой же вид, как для однородной стенки

$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\sum_{i=1}^n \delta_i} (t_{c1} - t_{c(n+1)}).$$

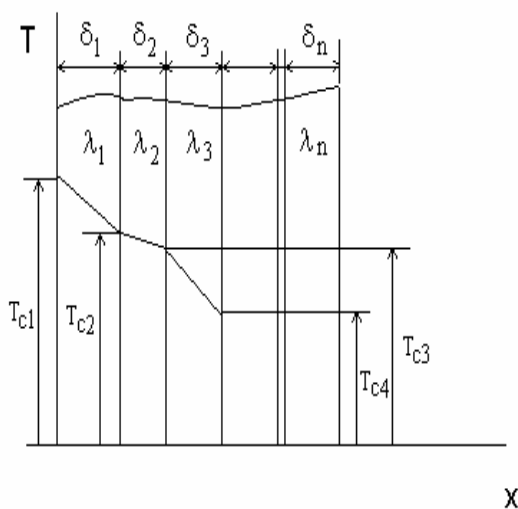


Рис. 16.1

отсутствует, то  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ,  $q_v = 0$ . Плотность теплового потока, передаваемого от горячей жидкости к стенке  $q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1})$ ,

проходящего через стенку -  $q = \lambda / \delta (t_{c1} - t_{c2})$ ,

передаваемого от стенки к холодной жидкости  $q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2})$ .

Выразим из каждого уравнения соответствующий перепад температур и сложим полученные выражения, учитывая, что все рассмотренные плотности теплового потока равны

$$q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}, \text{ откуда}$$

Передача теплоты через плоскую  
стенку при граничных условиях III ро-  
да

Передача теплоты от одной жидкости к другой через твердую стенку называется теплопередачей.

Так как задача стационарна и одномерна, а внутреннее тепловыделение



$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}. \quad (16.9)$$

Здесь  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = R_t$  - полное термическое сопротивление теплопередачи;  $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$  - внешние термические сопротивления;  $\frac{\delta}{\lambda}$  - внутреннее термическое сопротивление. Вводя коэффициент теплопередачи

$$k = \frac{1}{R_t}, \quad (16.10)$$

получим  $q = k(t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (16.11)$

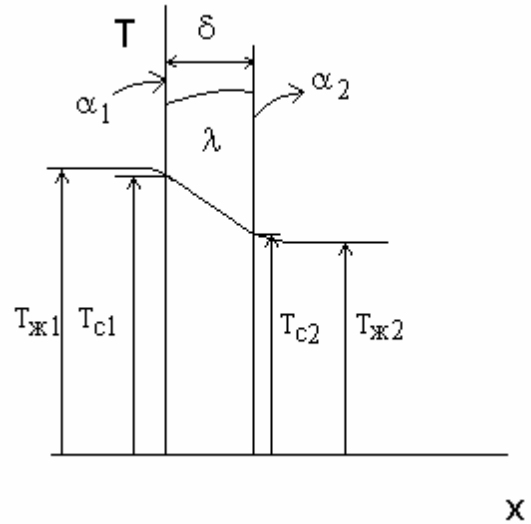


Рис. 16.2

В качестве примера рассмотрим передачу теплоты при граничных условиях III-го рода через трехслойную стенку (рис.16.3):

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\left( \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}, \quad (16.12)$$

температуру на границе слоев 2 и 3 найдем из уравнения

$$t_{с3} = t_{ж1} - q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right), \quad (16.13)$$

или  $t_{с3} = t_{ж2} + q \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right). \quad (16.14)$

Передача теплоты через бесконечную цилиндрическую стенку при граничных условиях I-го рода

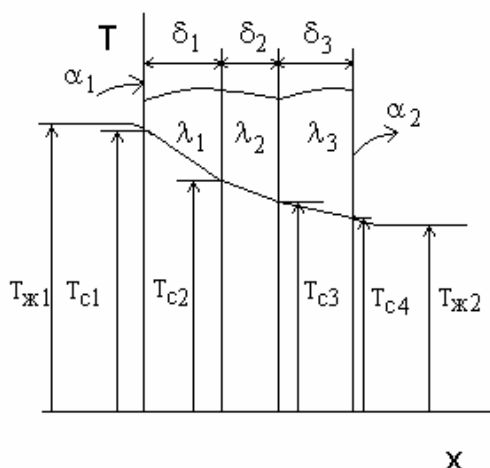
Рассмотрим стационарный случай :  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ . Уравнение теплопроводности

в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right].$$

Так как стенка бесконечна, то  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ . Кроме того, при постоянных значениях температуры на поверхностях стенки  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ , откуда получаем:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (16.15)$$



Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$r \frac{dT}{dr} = C_1, \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}, \quad (16.16)$$

$$dt = C_1 \frac{dr}{r} \Rightarrow t = C_1 \ln r + C_2. \quad (16.17)$$

Из граничных условий находим константы интегрирования.

При  $r=r_1$ :

$$t_{c1} = C_1 \ln r_1 + C_2, \quad (a)$$

при  $r=r_2$ :

$$t_{c2} = C_1 \ln r_2 + C_2. \quad (b)$$

Вычитая (b) из (a), получим

$$t_{c1} - t_{c2} = -C_1 \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right),$$

$$\text{откуда } C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}. \quad (d)$$

Подставим (d) в (a)

$$t_{c1} = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} \cdot \ln r_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = t_{c1} + \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} \ln r_1 \quad (e)$$

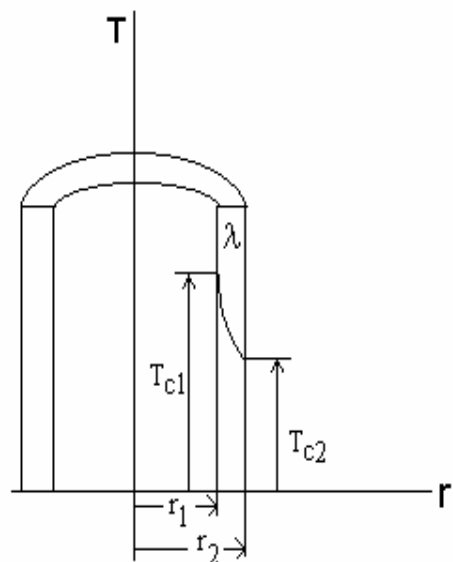


Рис.16.4

После определения констант интегрирования (16.17) примет вид

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} \cdot \ln \frac{r}{r_1}. \quad (16.18)$$

Используя закон Фурье, найдем плотность теплового потока:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dr} = -\lambda \frac{C_1}{r} = \frac{\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{r \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}, \text{ Вт/м}^2. \quad (16.19)$$

Из (16.19) видно, что плотность теплового потока зависит от радиуса.

### Передача теплоты через бесконечную цилиндрическую стенку при граничных условиях III-го рода

Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку, можно записать разными способами:

$$\dot{Q} = \pi D_1 l (t_{ж1} - t_{c1}) \alpha_1, \quad \dot{Q} = q \pi D_1 l = \frac{\lambda (t_{c1} - t_{c2})}{\frac{D_1}{2} \ln \frac{D_2}{D_1}} \pi D_1 l,$$

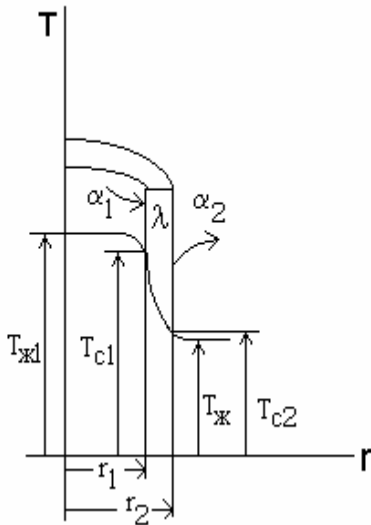


Рис.16.5

$$\dot{Q} = \pi D_2 l (t_{c2} - t_{ж2}) \alpha_2.$$

Выразим перепады температуры из каждого уравнения и сложим их:

$$(t_{ж1} - t_{c1}) = \dot{Q} / \alpha_1 \pi D_1 l; \quad (a)$$

$$(t_{c1} - t_{c2}) = \frac{\dot{Q} \ln \frac{D_2}{D_1}}{2 \lambda \pi l}; \quad (b)$$

$$(t_{c2} - t_{ж2}) = \dot{Q} / \alpha_2 \pi D_2 l. \quad (c)$$

Суммирование (a), (b) и (c) дает:

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \dot{Q} \left( \frac{1}{\alpha_1 \pi D_1 l} + \frac{1}{2 \pi \lambda l} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 \pi D_2 l} \right),$$

откуда находим тепловой поток

$$\dot{Q} = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{\left( \frac{1}{\alpha_1 \pi D_1 l} + \frac{1}{2 \pi \lambda l} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 \pi D_2 l} \right)}, \text{ Вт.} \quad (16.20)$$

Введем плотность теплового потока на единицу длины (линейную плотность):

$$q_l = \frac{\dot{Q}}{l} = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{\left( \frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2 \lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2} \right)}, \text{ Вт/м.} \quad (16.21)$$

Выражение в знаменателе (16.21) есть полное термическое сопротивление единицы длины цилиндрической стенки  $R_{ll} = \frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2 \lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}$ , обратная величина

$$k_l = \frac{1}{R_{ll}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2 \lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}} \quad (16.22)$$

- линейный коэффициент теплопередачи с размерностью Вт/(м·К). С учетом этого можно записать:

$$q_l = \pi k_l (t_{ж1} - t_{ж2}). \quad (16.23)$$

Относя тепловой поток через стенку к площади внутренней или наружной поверхности, получим соответствующие плотности теплового потока в Вт/м<sup>2</sup>:

$$q_1 = \frac{\dot{Q}}{\pi D_1 l} = k_1 (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad q_2 = \frac{\dot{Q}}{\pi D_2 l} = k_2 (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad \text{где } k_1 = \frac{k_l}{D_1}, \quad k_2 = \frac{k_l}{D_2}.$$

С учетом (16.22) получаем:

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{D_1}{2 \lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_1}{\alpha_2 D_2}}, \quad k_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_2}{2 \lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

В случае тонких стенок, когда  $\frac{D_2}{D_1} \rightarrow 1$ , имеем

$$\ln \frac{D_2}{D_1} \approx \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + \dots \approx \frac{2\delta}{D_1}.$$

На практике при  $D_2/D_1 \leq 1,8$  можно вести расчеты цилиндрической стенки по формулам для плоской стенки. Действительно,

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{D_1}{2\lambda} \frac{2\delta}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{D_1}{D_2}} \approx \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k.$$

Если для расчета теплового потока использовать формулу  $\dot{Q} = \pi D_x k (t_{ж1} - t_{ж2}) l$ , в которой определяющий диаметр  $D_x$  равен диаметру стенки со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи, т.е.

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha_2 \ll \alpha_1 \quad D_x &= D_2, \\ \text{при } \alpha_1 \ll \alpha_2 \quad D_x &= D_1, \\ \text{при } \alpha_1 \approx \alpha_2 \quad D_x &= (D_1 + D_2)/2, \end{aligned}$$

то ошибка при определении  $\dot{Q}$ , вызванная применением формулы для плоской стенки, не превысит 4%.

#### Передача теплоты через многослойную цилиндрическую стенку при граничных условиях III-го рода

Аналогично случаю однородной стенки, запишем тепловые потоки со стороны каждой из жидкостей и через каждый из слоев стенки:

$$\dot{Q} = \alpha_1 \pi D_1 l (t_{ж1} - t_{c1}), \quad \dot{Q} = \frac{2\lambda_1}{D_1} \cdot \frac{(t_{c1} - t_{c2})}{\ln \frac{D_2}{D_1}} D_1 \pi l,$$

$$\dot{Q} = \frac{2\lambda_2}{D_2} \cdot \frac{(t_{c2} - t_{c3})}{\ln \frac{D_3}{D_2}} D_2 \pi l, \quad \dot{Q} = \frac{2\lambda_3}{D_3} \cdot \frac{(t_{c3} - t_{c4})}{\ln \frac{D_4}{D_3}} D_3 \pi l, \quad \dots, \quad \dot{Q} = \alpha_2 \pi D_{n+1} l (t_{c(n+1)} - t_{ж2}).$$

Умножим обе части первого из этих уравнений на  $\frac{1}{\alpha_1 \pi D_1 l}$ , второго - на  $\frac{\ln D_2/D_1}{2\lambda_1 \pi l}$ , третьего - на  $\frac{\ln D_3/D_2}{2\lambda_2 \pi l}$ , четвертого - на  $\frac{\ln D_4/D_3}{2\lambda_3 \pi l}$  и последнего - на  $\frac{1}{\alpha_2 \pi D_{n+1} l}$ .

После суммирования получим

$$\dot{Q} \left( \frac{1}{\alpha_1 \pi D_1 l} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i \pi} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i} + \frac{1}{\alpha_2 \pi D_{n+1} l} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}.$$

Плотность теплового потока на единицу длины

$$q_l = \frac{\dot{Q}}{l} = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2}) \pi}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \sum \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i} + \frac{1}{\alpha_2 D_{n+1}}} \quad (16.24)$$

$R_{tl} = \frac{1}{\alpha_1 D_1} + \sum \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i} + \frac{1}{\alpha_2 D_{n+1}}$  - полное термическое сопротивление многослойной стенки.

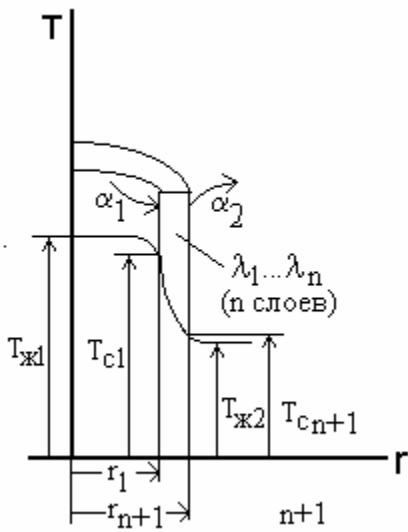


Рис. 16.6

Критический диаметр изоляции.

Запишем выражение для термического сопротивления цилиндрической стенки, покрытой слоем изоляции:

$$R_{тл} = \frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{D_{из}}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D_{из}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Рассмотрим, как меняются слагаемые этого выражения при изменении диаметра  $D_{из}$ . Будем считать, что  $R_1 = const$  и  $R_2 = const$ , а  $R_{3,4} = f(D_{из})$ . Найдем экстремум функции  $R_{тл}(D_{из})$ .

$$\frac{dR_{тл}}{dD_{из}} = \frac{1}{2\lambda_{из}} \frac{1}{D_{кр}} - \frac{1}{\alpha_2 D_{кр}^2} = 0, \text{ откуда получим } D_{кр} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}$$

Таким образом, существует диаметр, при котором  $R_{тл}$  достигает минимума, а потеря теплоты  $q$  - максимума. Если труба имеет наружный диаметр  $D_2 < D_{кр}$ , то изолировать трубу не нужно, так как в этом случае при наложении изоляции плотность теплового потока будет не уменьшаться, а возрастать. Тепловая изоляция будет эффективна только при  $D_2 > D_{кр}$ . В электрических машинах практически всегда  $D_2 < D_{кр}$  и покрытие проводов изоляцией приводит к росту теплоотдачи и улучшению теплового состояния двигателя.

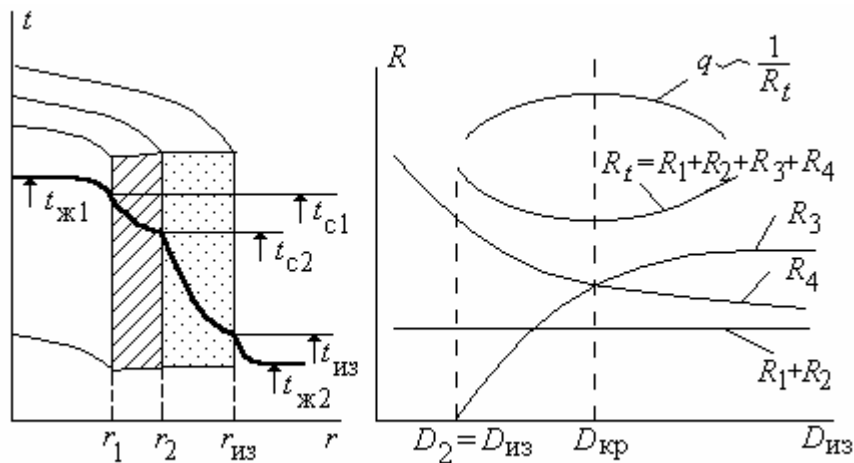


Рис. 16.7

Теплопроводность в пластине при наличии внутренних источников теплоты

Упростим уравнение теплопроводности  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{C\rho}$  для одномерной стационарной задачи:

$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ . Так как пластина бесконечна по осям  $y$  и  $z$ , то:

$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ , тогда  $a \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q_v}{C\rho} = 0$ ,  $a = \frac{\lambda}{C\rho}$ . Введем новую переменную

$\vartheta(x) = T(x) - T_{ж}$ :  $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v}{\lambda}$ . Будем считать, что  $T_{ж} = \text{const}$  и  $q_v = \text{const}$

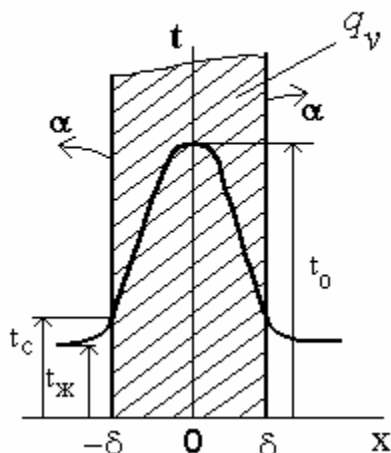


Рис.16.8

Разделим переменные:

$$d\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) = -\frac{q_v}{\lambda} dx$$

и проинтегрируем два раза

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x + C_1 \quad (a)$$

$$\vartheta = -\left(\frac{q_v}{2\lambda}\right)x^2 + C_1 x + C_2 \quad (b)$$

Найдем константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из граничных условий.

При  $x=0$ ,  $\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = 0$ , следовательно,  $C_1=0$ .

При  $x=\delta$  имеем граничные условия третьего рода  $-\lambda\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\delta} = \alpha\vartheta_{x=\delta}$ . Подставим сюда значение

производной из (a)  $\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{q_v \delta}{\lambda}$  и зна-

чение  $\vartheta$  из (b) при

$$x=\delta : q_v \delta = \alpha \left(-\frac{q_v \delta^2}{2\lambda} + C_2\right) \Rightarrow C_2 = \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}. \quad (c)$$

Подставим (c) в (b):  $\vartheta = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} + \frac{q_v \delta}{\alpha}$ , или

$$\vartheta = \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] + \frac{q_v \delta}{\alpha}. \quad (16.25)$$

Проанализируем это выражение.

Пусть  $x=\delta$ , тогда  $\vartheta_{x=\delta} = q_v \frac{\delta}{\alpha}$ , (d)

или  $t_c - t_{ж} = \frac{q_v \delta}{\alpha}$ , откуда  $t_c = t_{ж} + \frac{q_v \delta}{\alpha}$ . Если  $\alpha \rightarrow \infty$ , то  $t_c \rightarrow t_{ж}$ .

Вернемся к выражению (d) и найдем плотность теплового потока на поверхности пластины  $q_{x=\delta} = \alpha\vartheta_{x=\delta} = q_v \delta$ , Вт/м<sup>2</sup>.

Определим, как изменяется плотность теплового потока в зависимости от координаты:

$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = q_v x. \quad (16.26)$$

Для определения разности температур  $t_0 - t_{x=\delta}$  между серединой и поверхностью пластины можно воспользоваться уравнением (16.25), если положить

$$x=0, \text{ а } \alpha=\infty: \quad t_0 - t_{x=\delta} = \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \quad (16.27)$$

Теплопроводность цилиндрического стержня

при наличии внутренних источников теплоты

Так как  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ , то дифференциальное уравнение теплопроводности

примет вид:

$$a \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right) \right) + \frac{q_v}{c\rho} = 0$$

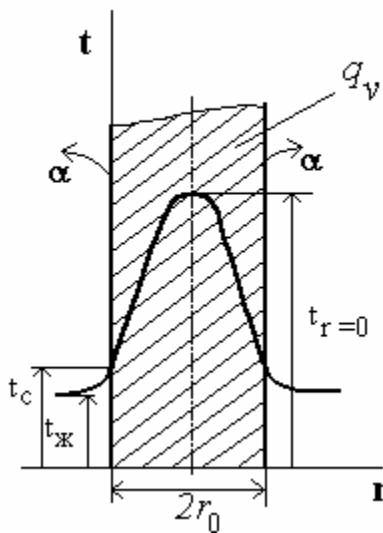


Рис.16.9

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right) = -\frac{q_v}{\lambda}, \text{ где } \vartheta = T(r) - T_{\text{ж}}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав два раза, получим закон изменения температуры в стенке:

$$d \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right) = -\frac{q_v}{\lambda} r dr, \quad r \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_v r^2}{2\lambda} + C_1,$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}, \quad (a)$$

$$\vartheta = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2. \quad (b)$$

При  $r=0$ :  $\left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=0} = 0$  – в силу симметрии задачи  $C_1=0$ .

$$\text{При } r=r_0: -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_0} = \alpha \vartheta_{r=r_0}.$$

Так как  $\left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_0} = -\frac{q_v r_0}{2\lambda}$ , а  $\vartheta_{r=r_0} = -\frac{q_v r_0^2}{4\lambda} + C_2$ , то

$$\frac{q_v r_0}{2} = \alpha \left( -\frac{q_v r_0^2}{4\lambda} + C_2 \right), \Rightarrow C_2 = \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}. \quad (c)$$

Подставляя (c) в (b), получим:  $\vartheta = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_0}{2\alpha}$ , или

$$\vartheta = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) + \frac{q_v r_0}{2\alpha}. \quad (16.28)$$

Найдем плотность теплового потока:

$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dr} = -\lambda \left( -\frac{q_v r}{2\lambda} \right) = \frac{q_v r}{2}. \quad (16.29)$$

На поверхности стержня будем иметь

$$q_{r=r_0} = \frac{q_v r_0}{2}. \quad (16.30)$$

Вернемся к формуле (16.28):  $\vartheta = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) + \frac{q_v r_0}{2\alpha}$ .

При  $r=r_0$  :  $\vartheta_{r=r_0} = \frac{q_v r_0}{2\alpha} = t_c - t_{ж}$ , тогда  $t_c = t_{ж} + \frac{q_v r_0}{2\alpha}$ . Из полученного выраже-

ния видно, что ухудшение теплоотдачи может привести к значительному росту температуры стенки.

Полагая в (16.28)  $r=r_0$  и  $\alpha=\infty$ , получим разность температур между центром и

поверхностью стержня 
$$t_0 - t_{r_0} = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}. \quad (16.31)$$

В самом общем случае  $q_v$  является функцией времени и координат.

### Теплопроводность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников теплоты

Данная задача разбивается на три задачи:

1. Внутренняя стенка теплоизолирована.
2. Наружная стенка теплоизолирована.
3. Имеет место теплоотдача от внутренней и наружной поверхности.

1. Теплота отводится через наружную поверхность (рис.16.10).

Применим полученное выше решение

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}, \quad \vartheta = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \quad (*)$$

с новыми граничными условиями для рассматриваемого случая.

При  $r=r_1$ :  $\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{r=r_1} = -\frac{q_v r_1}{2\lambda} + \frac{C_1}{r_1} = 0$  -внутренняя стенка теплоизолирована

$$C_1 = \frac{q_v r_1^2}{2\lambda}. \quad (a)$$

При  $r=r_2$ :  $-\lambda\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{r=r_2} = \alpha\vartheta_{r=r_2}$ ,

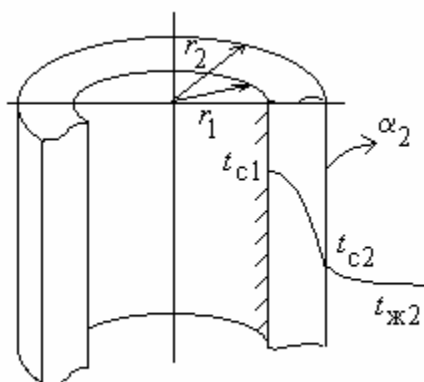


Рис.16.10

$$-\lambda\left(-\frac{q_v r_2}{2\lambda} + \frac{q_v r_1^2}{2\lambda r_2}\right) = \alpha\left(-\frac{q_v r_2^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln r_2 + C_2\right)$$

Отсюда находим  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{q_v r_2}{2\alpha} - \frac{q_v r_1^2}{2\alpha r_2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln r_2.$$

Подставим  $C_1$  и  $C_2$  в (\*):

$$\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln r + \frac{q_v r_2}{2\alpha} - \frac{q_v r_1^2}{2r_2\alpha} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} - \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln r_2; \\ \vartheta &= \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left(1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right) + \frac{q_v r_1^2}{2\lambda} \ln \frac{r}{r_2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (16.32)$$

Плотность теплового потока найдем по формуле



$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dr} = -\lambda \left( -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r} \right) = \frac{q_v r}{2} - \frac{q_v r_1^2}{2r} = \frac{q_v r}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \quad (16.33)$$

2. Тепло отводится через внутреннюю поверхность (рис.16.11).

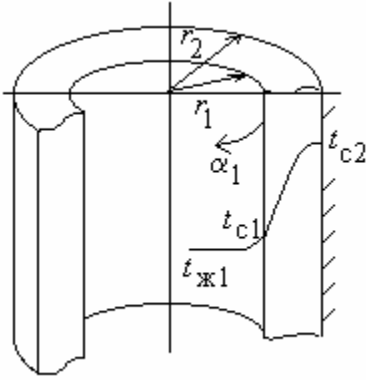


Рис. 16.11

$$\vartheta = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2, \quad (a)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}. \quad (b)$$

Граничные условия:

$$r=r_2, \quad \frac{d\vartheta}{dr} = 0, \quad -\frac{q_v r_2}{2\lambda} + \frac{C_1}{r_2} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q_v r_2^2}{2\lambda},$$

$$r=r_1, \quad -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_1} = \alpha \vartheta_{r=r_1},$$

$$-\lambda \left( -\frac{q_v r_1}{2\lambda} + \frac{q_v r_2^2}{2\lambda r_1} \right) = \alpha \left( -\frac{q_v r_1^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_2^2}{2\lambda} \ln r_1 + C_2 \right),$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{q_v r_1}{2\alpha} - \frac{q_v r_2^2}{2r_1 \alpha} + \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} - \frac{q_v r_2^2}{2\lambda} \ln r_1.$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  в (a), получим:

$$\vartheta = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + \frac{q_v r_2^2}{2\lambda} \ln r + \frac{q_v r_1}{2\alpha} - \frac{q_v r_2^2}{2r_1 \alpha} + \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} - \frac{q_v r_2^2}{2\lambda} \ln r_1, \text{ откуда, группируя слагаемые,}$$

найдем:

$$\vartheta = \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{2\lambda} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right],$$

$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dr} = -\lambda \left( -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{q_v r_2^2}{2\lambda r} \right) = \frac{q_v r}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 \right]. \quad (16.34)$$

3. Тепло отводится через внутреннюю и наружную поверхности

Очевидно, что в случае отвода теплоты с обеих поверхностей трубы, кривая распределения температуры должна иметь максимум при некотором значении радиуса  $r_0$ , следовательно,  $\left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r_0} = 0$ . Таким образом, поверхность при  $r = r_0$

можно считать теплоизолированной и разбить задачу на две уже рассмотренные - в области  $r_1 \leq r \leq r_0$  - с теплоизолированной внешней стенкой и в области  $r_0 \leq r \leq r_2$  - с теплоизолированной внутренней стенкой. Задача сводится к определению неизвестного  $r_0$ .

Решая задачу с теплоизолированной внешней поверхностью, находят распределение температуры между  $r_1$  и  $r_0$ . После этого рассматривают задачу с теплоизолированной внутренней поверхностью для области  $r_0 \leq r \leq r_2$ . Приравнявая значения температуры при  $r = r_0$ , находят радиус  $r_0$ .

### Теплопроводность тонкого стержня

В технике часто встречаются случаи, когда коэффициенты теплоотдачи по разные стороны стенки, разделяющей жидкости или газы, значительно отличаются друг от друга.

Для плоской стенки можно написать

$$q = k(t_{ж1} - t_{ж2}), \text{ Вт/м}^2, \text{ где } k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}};$$

$$\dot{Q} = qF, \text{ Вт}; \quad Q = qF\tau, \text{ Дж.}$$

При  $\frac{\delta}{\lambda} \approx 0$  и  $\alpha_2 \ll \alpha_1$   $k = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \approx \alpha_2$ .

Таким образом, коэффициент теплопередачи приблизительно равен наименьшему коэффициенту теплоотдачи. При заданном тепловом потоке  $\dot{Q}$  это приводит к большим значениям поверхности  $F$ . Применение оребрения позволяет уменьшить термическое сопротивление со стороны наименьшего коэффициента теплоотдачи и тем увеличить коэффициент теплопередачи  $k$ .

Чтобы решать задачи, связанные с отводом или подводом теплоты через ребристые поверхности, необходимо знать закон распределения температуры в тонком стержне, так как ребра, как правило, можно считать тонкими стержнями. Задача стационарная и одномерная, следовательно:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Выделим в стержне с постоянным поперечным сечением  $f$  элементарный объем  $dV = f dx$  (рис.16.12) и рассмотрим для него баланс тепловых потоков

$$q_x f - q_{(x+dx)} f = \alpha \vartheta \Pi dx, \quad (a)$$

где  $q_x f$ ,  $q_{(x+dx)} f$  - соответственно входящий и выходящий тепловые потоки;  $\alpha \vartheta \Pi dx$  - тепловой поток, отдаваемый окружающей среде с элементарной боковой поверхности  $\Pi dx$ , но

$$q_{(x+dx)} = q_x + dq = q_x + \frac{dq}{dx} dx + \dots \quad (b)$$

Подставляя (b) в (a), имеем:  $-\frac{dq}{dx} f dx = \alpha \Pi \vartheta dx$ . (c)

Так как  $q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}$ , то  $\frac{dq}{dx} = -\lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2}$ . (d)

Подставляя (d) в (c), получаем дифференциальное уравнение теплопроводности для стержня:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \Pi}{\lambda f} \vartheta, \quad (16.35)$$

где  $\vartheta = t(x) - t_{ж}$ ;  $t_{ж} = \text{const}$ .

Частное решение этого уравнения имеет вид:  $\vartheta = C e^{mx}$ . (e)

Подставим (e) в (16.35)  $\Rightarrow C m^2 e^{mx} = \frac{\alpha \Pi}{\lambda f} C e^{mx}$ , тогда  $m = \pm \sqrt{\frac{\alpha \Pi}{\lambda f}}$ .

Теперь общее решение:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (16.36)$$

Найдем  $C_1$  и  $C_2$  из граничных условий.

$$\text{При } x = 0 \quad \vartheta_0 = C_1 + C_2, \quad C_2 = \vartheta_0 - C_1;$$

$$\text{при } x = l \quad -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = \alpha_1 \vartheta_{x=l}. \quad (*)$$

Подставим значение  $C_2$  в (16.36):  $\vartheta = C_1 e^{mx} + \vartheta_0 e^{-mx} - C_1 e^{-mx}$ ,

$$\text{откуда } \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l} = C_1 m e^{ml} - \vartheta_0 m e^{-ml} + C_1 m e^{-ml}.$$

Подставим  $\vartheta_{x=l}$  и  $\left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l}$  в (\*) и введем  $n = \frac{\alpha_1}{m\lambda}$ , тогда:

$$\begin{aligned} -\lambda(C_1 m e^{ml} - \vartheta_0 m e^{-ml} + C_1 m e^{-ml}) &= \alpha_1(C_1 e^{ml} + \vartheta_0 e^{-ml} - C_1 e^{-ml}), \\ -C_1 e^{ml} + \vartheta_0 e^{-ml} - C_1 e^{-ml} &= C_1 n e^{ml} + n \vartheta_0 e^{-ml} - C_1 n e^{-ml}, \\ (1-n)\vartheta_0 e^{-ml} &= C_1 e^{ml} + C_1 e^{-ml} + C_1 n e^{ml} - C_1 n e^{-ml}, \\ (1-n)\vartheta_0 e^{-ml} &= C_1(e^{ml} + e^{-ml}) + C_1 n(e^{ml} - e^{-ml}). \end{aligned}$$

Так как  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , а  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  (рис.16.13), то

$(1-n)\vartheta_0 e^{-ml} = 2C_1 \text{ch}(ml) + 2C_1 n \text{sh}(ml)$ , откуда

$$C_1 = \frac{\vartheta_0(1-n)e^{-ml}}{2(n\text{sh}(ml) + \text{ch}(ml))}, \quad C_2 = \vartheta_0 - C_1 = \frac{\vartheta_0(1+n)e^{ml}}{2(n\text{sh}(ml) + \text{ch}(ml))}.$$

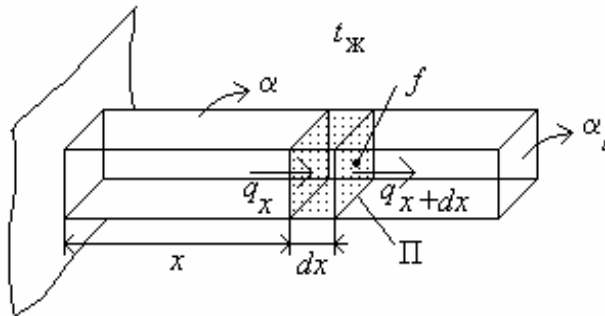


Рис. 16.12

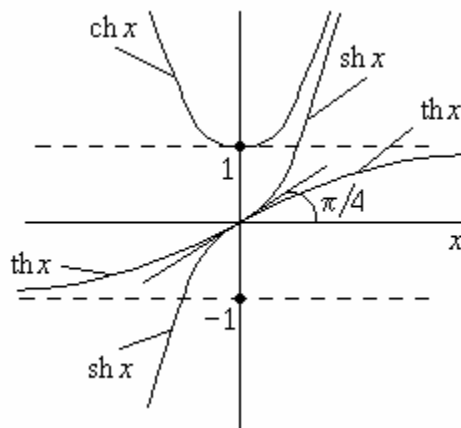


Рис. 16.13

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  в (16.36), найдем закон изменения температуры в стержне:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{(1-n)e^{-m(l-x)} + (1+n)e^{m(l-x)}}{2(n\operatorname{sh}(ml) + \operatorname{ch}(ml))}. \quad (16.37)$$

Определим поток теплоты, отдаваемый ребром окружающей среде (он равен потоку теплоты, проходящему через основание стержня при  $x=0$ ):

$$\dot{Q}_p = -\lambda f \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = \lambda f m \vartheta_0 \frac{n\operatorname{ch}(ml) + \operatorname{sh}(ml)}{n\operatorname{sh}(ml) + \operatorname{ch}(ml)}. \quad (16.38)$$

Вернемся к (16.37). Если пренебречь теплотой, отдаваемой торцом стержня

$$(\alpha_l=0, n=0), \text{ то } \vartheta_{n=0} = \vartheta_0 \frac{e^{-m(l-x)} + e^{m(l-x)}}{2\operatorname{ch}(ml)}. \quad (16.39)$$

Предположим, что стержень бесконечно длинный, тогда:

$$\vartheta_{n=0, l=\infty} = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{ml} + \frac{1}{e^{ml}}} = \vartheta_0 e^{-mx} \quad (16.40)$$

(в формуле 16.40  $\frac{e^{mx}}{e^{ml}} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{e^{ml}} \rightarrow 0$ ), следовательно,  $\vartheta_{n=0, l=\infty} = \vartheta_0 \exp(-mx)$ .

Вернемся к (16.38). Случай, когда торец стержня теплоизолирован:

$$\dot{Q}_{p, n=0} = \lambda f m \vartheta_0 \operatorname{th}(ml). \quad (16.41)$$

#### Плоская ребристая стенка с ребрами постоянного сечения

Преобразуем (16.41) с учетом геометрических размеров ребра

$$f = b \cdot \delta, \quad \Pi = 2(b + \delta)$$

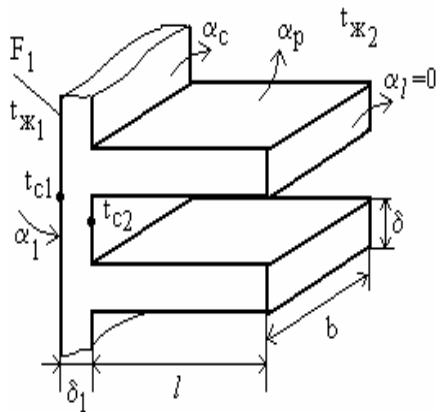


Рис. 16.14

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_p \Pi}{\lambda f}} = \sqrt{\frac{\alpha_p 2b}{\lambda \delta b}} = \sqrt{\frac{2\alpha_p}{\lambda \delta}} \quad (\text{при } b \gg \delta -$$

тонкие ребра,  $\Pi \approx 2b$ ). Умножим и разделим подкоренное выражение на  $\delta$ :

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha_p}{\lambda \delta} \cdot \frac{\delta}{\delta}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}, \text{ тогда}$$

$$\dot{Q}_p = \lambda \delta b \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \cdot \vartheta_0 \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \cdot \frac{l}{\delta} \right)$$

Умножим и разделим на  $\sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}$ :

$$\dot{Q}_p = 2\alpha_p \delta b \vartheta_0 \frac{\operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \cdot \frac{l}{\delta} \right)}{\sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}}.$$

Умножим и разделим на  $l$ :  $\dot{Q}_p = 2\alpha_p l b \vartheta_0 \frac{\operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \cdot \frac{l}{\delta} \right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}}$ ,

где  $F_p = 2bl$  - поверхность ребра;  $\dot{Q}_p = \alpha_p F_p \vartheta_0 E$ ,  
(16.42)

где  $E = \frac{\text{th}\left(\sqrt{\frac{2\alpha_p \delta l}{\lambda \delta}}\right)}{\sqrt{\frac{2\alpha_p \delta l}{\lambda \delta}}}$  - коэффициент эффективности ребра. Из (16.42) следует

$E = \frac{\dot{Q}_p}{\alpha_p F_p \vartheta_0}$ , т.е.  $E$  характеризует отношение теплового потока, отдаваемого

окружающей среде ребром ( $\dot{Q}_p$ ), к тепловому потоку, который отдает идеальное ребро с нулевым термическим сопротивлением ( $\alpha_p F_p \vartheta_0$ ). Обозначим:  $F_{pc}$ - площадь поверхности ребристой стенки,  $zF_p$ - общая площадь поверхности ребер,  $F_c$ - площадь неоробренной поверхности (между ребер).

Введем понятие приведенного коэффициента теплоотдачи

$\dot{Q} = \alpha_{np} F_{pc} \vartheta_0 = \alpha_c F_c \vartheta_0 + \alpha_p F_p z \vartheta_0 E$ , где  $z$  - число ребер.

$$\alpha_{np} = \alpha_c \frac{F_c}{F_{pc}} + \alpha_p z E \frac{F_p}{F_{pc}} \quad ; \quad F_{pc} = F_c + zF_p.$$

Составим уравнение теплового баланса для ребристой стенки

$$\dot{Q} = \alpha_1 F_1 (t_{ж1} - t_{c1}), \quad \dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F_1, \quad \dot{Q} = \alpha_{np} F_{pc} (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Разрешая уравнения относительно разностей температур и складывая их с учетом  $Q = const$ , можно написать

$$\dot{Q} \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{pc}} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}; \quad \dot{Q} = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{pc}}}. \quad (16.43)$$

Найдем плотность теплового потока, отнесенную к неоробренной поверхности:

$$q_1 = \frac{\dot{Q}}{F_1} = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{np} \frac{F_{pc}}{F_1}}}.$$

Введем понятие коэффициента оробрения:

$\beta = \frac{F_{pc}}{F_1} > 1$ , с учетом чего

$$q_1 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{np} \beta}}. \quad (16.44)$$

Так как  $\frac{1}{\alpha_{np} \beta} < \frac{1}{\alpha_c}$ , то применение ребристой поверхности позволяет уменьшить термическое сопротивление со стороны наименьшего коэффициента теплоотдачи, следовательно, для заданного потока теплоты  $\dot{Q}$  потребуется меньшая поверхность  $F_1$ .

Передача теплоты через круглое ребро постоянного сечения

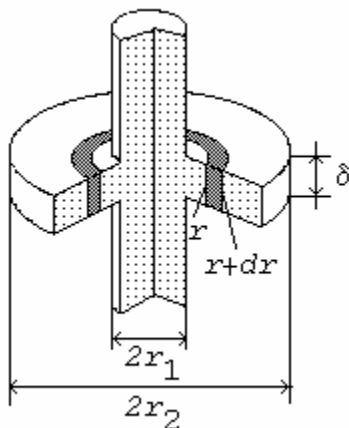


Рис.16.15

Повторяя в целом подход для случая тонкого стержня, получим дифференциальное уравнение теплопроводности для круглого ребра.  $t_{ж} = \text{const}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ ,  $\vartheta = t(r) - t_{ж}$ . Тепловые потоки на радиусах  $r$  и  $r+dr$  соответственно равны

$$\dot{Q}_r = -2\lambda\pi r\delta \frac{d\vartheta}{dr}, \quad (a)$$

$$\dot{Q}_{r+dr} = \dot{Q}_r + \frac{d\dot{Q}}{dr} dr + \dots \quad (b)$$

Вычитая (b) из (a) и приравнявая к потоку теплоты, отдаваемому окружающей среде от элементарной поверхности ребра  $2\pi r dr \cdot 2$ , получим

$$-\frac{d\dot{Q}}{dr} dr = 2\alpha\vartheta\pi r dr \cdot 2 \quad \text{или} \quad 2\lambda\pi\delta \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right) = 4\pi r\alpha\vartheta,$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right) = \frac{2\alpha\vartheta r}{\lambda\delta}, \quad \frac{d\vartheta}{dr} + r \frac{d^2\vartheta}{dr^2} - \frac{2\alpha r}{\lambda\delta} \vartheta = 0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta} \vartheta = 0. \quad (16.45)$$

Решение уравнения (16.45) с учетом обозначения  $\frac{2\alpha}{\lambda\delta} = m^2$  имеет вид

$$\vartheta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr), \quad (16.46)$$

где  $I_0$  - модифицированная функция Бесселя I-ого рода нулевого порядка;  
 $K_0$  - модифицированная функция Бесселя II-ого рода нулевого порядка.

Граничные условия:

$$\text{при } r=r_1: \vartheta_0 = C_1 I_0(mr_1) + C_2 K_0(mr_1), \quad (a)$$

$$\text{при } r=r_2: -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_2} = \alpha\vartheta_{r=r_2}.$$

Пренебрегая тепловым потоком с торцевой поверхности ребра, запишем:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_2} = 0, \quad \text{тогда, взяв производную от (16.46), можно}$$

$$\text{написать } \left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_2} = C_1 m I_1(mr_2) - C_2 m K_1(mr_2) = 0, \quad \text{откуда } C_1 = \frac{C_2 K_1(mr_2)}{I_1(mr_2)}.$$

Подставим  $C_1$  в (a):  $\vartheta_0 = \frac{C_2 K_1(mr_2) I_0(mr_1)}{I_1(mr_2)} + C_2 K_0(mr_1)$  и найдем вторую констан-

ту интегрирования:  $\vartheta_0 I_1(mr_2) = C_2 K_1(mr_2) I_0(mr_1) + C_2 K_0(mr_1) I_1(mr_2)$ ,

$$C_2 = \frac{\vartheta_0 I_1(mr_2)}{K_1(mr_2) I_0(mr_1) + K_0(mr_1) I_1(mr_2)}.$$

Подставляя  $C_2$  в выражение для  $C_1$ , получим:

$$C_1 = \frac{\vartheta_0 K_1(mr_2)}{K_1(mr_2)I_0(mr_1) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}.$$

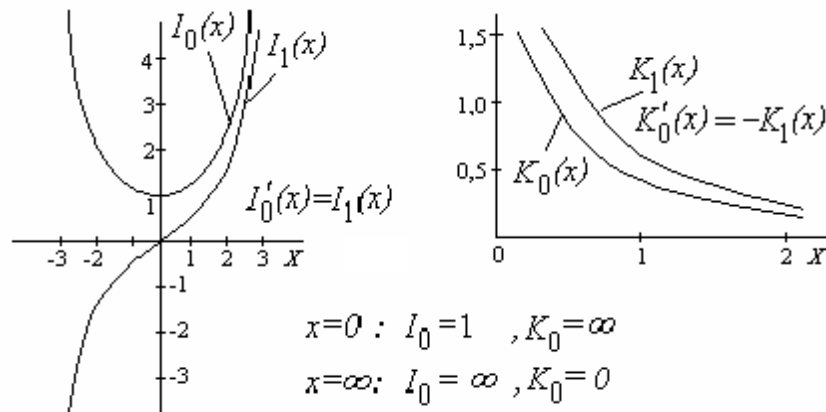


Рис. 16.16

С учетом констант интегрирования (16.46) принимает вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{K_1(mr_2)I_0(mr_1) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}{K_1(mr_2)I_0(mr_1) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}. \quad (16.47)$$

Определим тепловой поток, который отводит круглое ребро постоянного сечения окружающей среде.

$$\dot{Q}_p = -2\lambda\pi r_1 \delta \left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_1}. \quad (16.48)$$

Взяв производную от (16.47) (напомним, что

$I_0'(x) = I_1(x)$ ,  $K_0'(x) = -K_1(x)$ , где  $I_1$ - модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка,  $K_1$ - модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка )

$$\left( \frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_1} = \vartheta_0 m \left[ \frac{K_1(mr_2)I_1(mr_1) - K_1(mr_1)I_1(mr_2)}{K_1(mr_2)I_0(mr_1) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)} \right]$$

и обозначая  $\frac{K_1(mr_2)I_1(mr_1) - K_1(mr_1)I_1(mr_2)}{K_1(mr_2)I_0(mr_1) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)} = -\Psi$ , окончательно

$$\text{получим } \dot{Q}_p = 2\pi\lambda\delta r_1 \vartheta_0 m \Psi, \text{ Вт} \quad (16.49)$$

#### Передача теплоты через трапециевидные и треугольные ребра

Ребра такой формы более эффективны по сравнению с ребрами постоянной толщины. Они близки по свойствам к ребрам с  $q=\text{const}$ . Составим уравнение теплового баланса для элементарного объема, выделенного в трапециевидном ребре (см. рис.16.18). Разность тепловых потоков на координате  $x$  и  $x+dx$  при стационарном режиме равна потоку, отводимому в окружающую среду с боковой поверхности элементарного объема.

$$\dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_x = \alpha\vartheta\Pi \frac{dx}{\cos\varphi}, \quad (a)$$

$$\text{где } \vartheta = t(x) - t_{ж}, \quad \dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx} dx + \dots \quad (b)$$

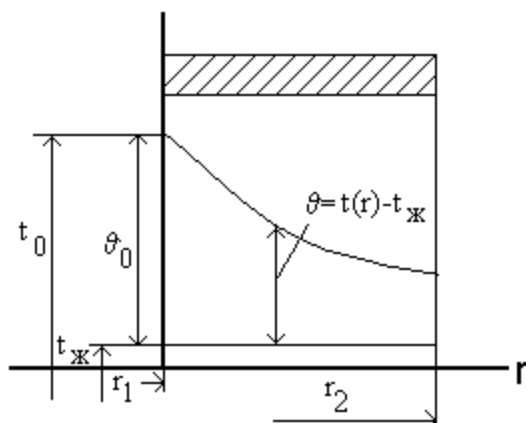


Рис. 16.17

Так как тепловой поток направлен противоположно направлению оси  $x$ , то

$$\dot{Q}_x = \lambda \delta b \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (c)$$

С учетом геометрии ребра выполним ряд преобразований:

$$\Pi = 2(\delta + b) \approx 2b,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2x} \Rightarrow \delta = 2x \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \delta b \frac{d\vartheta}{dx} \right) dx = 2b \alpha \vartheta \frac{dx}{\cos \varphi},$$

$$2\lambda b \operatorname{tg} \varphi \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\vartheta}{dx} \right) dx = 2b \alpha \vartheta \frac{dx}{\cos \varphi},$$

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{d\vartheta}{dx} \right) = \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} \vartheta. \text{ Теперь уравне-}$$

ние теплового баланса примет вид

$$x \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} \vartheta = 0, \text{ или } \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\alpha}{x \lambda \sin \varphi} \vartheta = 0. \quad (d)$$

Введем новую переменную  $z = \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} x$ , тогда  $dz = \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} dx$ ,

$$dz^2 = \left( \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} \right)^2 dx^2, \quad x = \frac{\lambda \sin \varphi}{\alpha} z, \quad dx = \frac{\lambda \sin \varphi}{\alpha} dz, \quad dx^2 = \left( \frac{\lambda \sin \varphi}{\alpha} \right)^2 dz^2.$$

Подставляя  $x$ ,  $dx$  и  $dx^2$  в (d), получим модифицированное дифференциальное уравнение Бесселя для трапециевидного ребра

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \frac{1}{z} \vartheta = 0. \quad (16.50)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\vartheta = C_1 I_0(2\sqrt{z}) + C_2 K_0(2\sqrt{z}). \quad (16.51)$$

Граничные условия:

$$\text{при } x=x_1 \quad \vartheta_0 = C_1 I_0(2\sqrt{z_1}) + C_2 K_0(2\sqrt{z_1}), \quad (*)$$

при  $x=x_2$   $-\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=x_2} = \alpha \vartheta_{x=x_2} = 0$  (здесь мы пренебрегаем теплоотдачей с торцевой поверхности ребра), но  $\left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=x_2} = \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} \left( \frac{d\vartheta}{dz} \right)_{z=z_2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vartheta}{dz} \right)_{z=z_2} &= \frac{C_1 I_1(2\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} - \frac{C_2 K_1(2\sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} = 0, \\ \Rightarrow C_1 &= \frac{C_2 K_1(2\sqrt{z_2})}{I_1(2\sqrt{z_2})}. \quad (**)$$



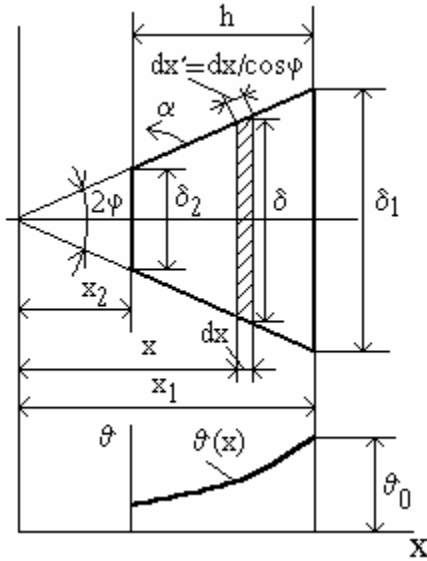


Рис.16.18

Подставим (\*\*\*) в (\*):

$$\vartheta_0 = \frac{C_2 K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z_1})}{I_1(2\sqrt{z_2})} + C_2 K_0(2\sqrt{z_1}),$$

откуда

$$C_2 = \frac{\vartheta_0 I_1(2\sqrt{z_2})}{K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z_1}) + K_0(2\sqrt{z_1}) I_1(2\sqrt{z_2})} \quad (***)$$

С учетом (\*\*\*), выражение (\*\*) примет вид

$$C_1 = \frac{\vartheta_0 K_1(2\sqrt{z_2})}{K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z_1}) + K_0(2\sqrt{z_1}) I_1(2\sqrt{z_2})}$$

Подставляя константы интегрирования в (16.51), получим закон изменения температуры в трапециевидном ребре:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z}) + I_1(2\sqrt{z_2}) K_0(2\sqrt{z})}{K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z_1}) + K_0(2\sqrt{z_1}) I_1(2\sqrt{z_2})}. \quad (16.52)$$

Определим тепловой поток, отдаваемый трапециевидным ребром окружающей среде

$$\begin{aligned} \dot{Q}_p &= \lambda b \delta_1 \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=x_1}, \quad \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=x_1} = \frac{\alpha}{\lambda \sin \varphi} \left( \frac{d\vartheta}{dz} \right)_{z=z_1}, \\ \left( \frac{d\vartheta}{dz} \right)_{z=z_1} &= \vartheta_0 \frac{K_1(2\sqrt{z_2}) I_1(2\sqrt{z_1}) - I_1(2\sqrt{z_2}) K_1(2\sqrt{z_1})}{\sqrt{z_1} [K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z_1}) + K_0(2\sqrt{z_1}) I_1(2\sqrt{z_2})]}, \quad \text{откуда} \\ \dot{Q}_p &= \alpha b \delta_1 \frac{\vartheta_0}{\sqrt{z_1} \sin \varphi} \frac{K_1(2\sqrt{z_2}) I_1(2\sqrt{z_1}) - I_1(2\sqrt{z_2}) K_1(2\sqrt{z_1})}{[K_1(2\sqrt{z_2}) I_0(2\sqrt{z_1}) + K_0(2\sqrt{z_1}) I_1(2\sqrt{z_2})]}. \quad (16.53) \end{aligned}$$

Для треугольного ребра  $x_2=0$ , поэтому  $I_1(2\sqrt{z_2})=0$ . Следовательно,

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{I_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1})}, \quad (16.54)$$

$$\dot{Q}_{p\Delta} = \frac{\alpha b \delta_1 \vartheta_0}{\sqrt{z_1} \sin \varphi} \frac{I_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1})}. \quad (16.55)$$

Существует оптимальное соотношение между толщиной основания ребра и высотой, обеспечивающее максимальный тепловой поток через треугольное ребро:

$$\text{по: } \frac{h}{\delta_1/2} = 1,309 \left( \frac{2\lambda}{\alpha \delta_1} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

#### Ребро постоянного теплового напряжения

У ребер постоянного сечения плотность теплового потока и тепловой поток вдоль продольной оси уменьшаются. Найдем форму ребра, у которого плотность теплового потока не будет изменяться, т.е.

$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = \text{const}$ , или  $\frac{q}{\lambda} = -\frac{d\vartheta}{dx} = \text{const}$ , что обеспечивает более высокую эффективность ребра.

Из последнего уравнения видно, что температура вдоль ребра в этом случае подчиняется линейному закону.

Исходное уравнение теплового баланса имеет вид

$$-\frac{d}{dx}(fq)dx = \alpha\vartheta\Pi dS,$$

где  $\vartheta = t(x) - t_{ж}$ ,  $\Pi = 2(b + \delta) \approx 2b$  - периметр,  $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2} dx$ .

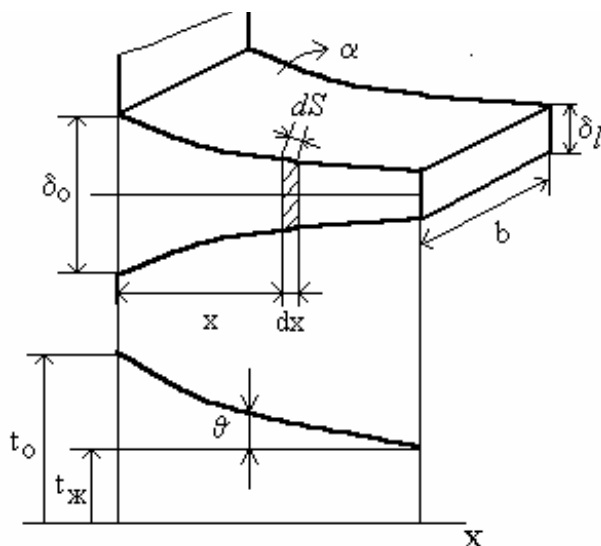


Рис.16.19

Для тонких ребер

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2 \approx 0, \Rightarrow dS \approx dx,$$

$f = \delta b$ , откуда

$$bq \frac{d\delta}{dx} dx = -2\alpha\vartheta b dx, \text{ или}$$

$$q \frac{d\delta}{dx} = -2\alpha\vartheta. \quad (a)$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение Фурье

$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}, \text{ найдем закон изменения}$$

избыточной температуры по координате  $x$ :

$$q dx = -\lambda d\vartheta, \quad qx|_0^x = -\lambda\vartheta|_{\vartheta_0}^{\vartheta},$$

(\*)

$$qx = \lambda(\vartheta_0 - \vartheta), \quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{qx}{\lambda}. \quad (16.56)$$

Подставим (16.56) в (a) и разделим переменные:

$$qd\delta = -2\alpha\left(\vartheta_0 - \frac{qx}{\lambda}\right)dx,$$

проинтегрируем:

$$q\delta|_{\delta_0}^{\delta} = -2\alpha\left(\vartheta_0 x|_0^x - \frac{qx^2}{2\lambda}|_0^x\right),$$

$$q(\delta - \delta_0) = -2\alpha\vartheta_0 x + \frac{q\alpha}{\lambda} x^2$$

и получим закон изменения толщины ребра по длине при условии  $q = \text{const}$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{2\alpha\vartheta_0 x}{\delta_0 q} + \frac{\alpha x^2}{\delta_0 \lambda}. \quad (16.57)$$

Вернемся к уравнению (\*) и проинтегрируем левую часть от 0 до  $l$ , а правую от  $\vartheta_0$  до  $\vartheta_l$ :

$$ql = \lambda(\vartheta_0 - \vartheta_l) \Rightarrow q = \frac{\lambda(\vartheta_0 - \vartheta_l)}{l}. \quad (b)$$

Подставим (b) в (16.57), тогда :

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{2\alpha x l}{\lambda \left(1 - \frac{\vartheta_l}{\vartheta_0}\right) \delta_0} + \frac{\alpha x^2}{\delta_0 \lambda}. \quad (16.58)$$

Для случая, когда температурный напор на конце ребра равен нулю ( $\vartheta_l = 0$ ):

$$\frac{\delta}{\delta_0} \Big|_{\vartheta_l} = 1 - \frac{2\alpha x l}{\delta_0 \lambda} + \frac{\alpha x^2}{\delta_0 \lambda}, \quad (16.59)$$

Второе и третье слагаемые в правой части (16.58) умножим и разделим на  $\delta_0$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{2\alpha x l \delta_0}{\delta_0^2 \lambda \left(1 - \frac{\vartheta_l}{\vartheta_0}\right)} + \frac{\alpha x^2 \delta_0}{\delta_0^2 \lambda}.$$

Так как  $\frac{\alpha \delta_0}{\lambda} = \frac{\delta_0}{\frac{\lambda}{\alpha}} = \text{Bi}_0$  ( $\text{Bi}_0$  - критерий Био - отношение внутреннего термического сопротивления к внешнему термическому сопротивлению, является определяющим критерием), то окончательно можно написать

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{2 \text{Bi}_0}{\delta_0^2 \left(1 - \frac{\vartheta_l}{\vartheta_0}\right)} x + \frac{x^2 \text{Bi}_0}{\delta_0^2}. \quad (16.60)$$

Тепловой поток определим по формуле

$$\dot{Q}_p = q b \delta_0. \quad (16.61)$$

Подставляя (в) в (16.61), получим выражение для теплового потока, отдаваемого ребром постоянного теплового напряжения в окружающую среду через разность температур в основании ребра и на его конце:

$$\dot{Q}_p = \frac{\lambda (\vartheta_0 - \vartheta_l) b \delta_0}{l}. \quad (16.62)$$

При  $\vartheta_l = 0$  будем иметь

$$\dot{Q}_p \Big|_{\vartheta_l=0} = \frac{\lambda \vartheta_0 b \delta_0}{l}. \quad (16.62a)$$

### Пористое охлаждение бесконечной пластины

В энергоустановках, работающих на газе с высокой температурой, часто используют пористое охлаждение для защиты стенок конструкции. К пористым материалам в этом случае предъявляются жесткие требования - у них должна быть равномерная пористость по всему объему. Кроме того, теплоносители, которые "продавливаются" через пористую стенку, должны иметь высокую степень очистки. Невыполнение этих условий может привести к тепловому разрушению стенок. Определим пористость  $p$  как отношение объема пор тела к общему

объему:  $p = \frac{V_{\text{п}}}{V} = \frac{f_{\text{п}}}{f}$ . Будем считать, что температуры жидкости в порах и

твердого "скелета" равны.

Составим уравнение теплового баланса

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = \dot{G}_{\text{ж}} c_{\text{рж}} dt, \quad (a)$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx} dx + \dots, \quad (b)$$

$$\text{где } \dot{Q}_x = -\lambda_m(1-p)f \frac{dt}{dx} \quad (c)$$

- тепловой поток, проходящий через материал самой пластины. Такая запись уравнения (c) предполагает, что пористый материал имеет значительно больший коэффициент теплопроводности, чем жидкость ( $\lambda_m \gg \lambda_j$ ). Подставим (b) в (a) с учетом (c):

$$\lambda_m(1-p) \frac{d^2 t}{dx^2} dx = \frac{\dot{G}_j}{f} c_{pж} dt, \text{ или, вводя плотность}$$

потока жидкости  $j_j = \frac{\dot{G}_j}{f}$  и обозначая

$$\frac{j_j c_{pж}}{\lambda_m(1-p)} = n_c :$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - n_c \frac{dt}{dx} = 0. \quad (16.63)$$

Решение уравнения (16.63) имеет вид

$$t = c_1 e^{n_c x} + c_2, \quad (16.64)$$

которое справедливо для  $0 \leq x \leq \delta$ .

Для жидкости слева от стенки (см. рис.16.20) можно аналогично получить:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - n_j \frac{dt}{dx} = 0, \quad (16.65)$$

где  $n_j = \frac{j_j c_{pж}}{\lambda_j}$ . Тогда имеем  $t_j = c_3 e^{n_j x} + c_4$ ,

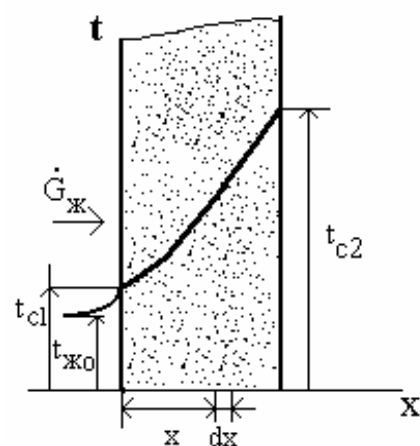


Рис.16.20

(16.65a)

при  $-\infty \leq x \leq 0$ .

Найдем постоянные интегрирования в уравнении (16.64).

$$\text{При } x = 0, \quad t_{c1} = c_1 + c_2, \quad (a)$$

$$\text{при } x = \delta, \quad t_{c2} = c_1 e^{n_c \delta} + c_2. \quad (b) \text{ Вычтем (a) из (b)}$$

$$t_{c2} - t_{c1} = c_1 (e^{n_c \delta} - 1), \text{ откуда } c_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{(e^{n_c \delta} - 1)} \quad (e)$$

подставим (e) в (a)

$$t_{c1} = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{n_c \delta} - 1} + c_2, \text{ тогда } c_2 = t_{c1} - \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{n_c \delta} - 1} \quad (d)$$

Подставив  $c_1$  и  $c_2$  в (16.64), найдем закон изменения температуры в стенке

$$t = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{n_c \delta} - 1} e^{n_c x} + t_{c1} - \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{n_c \delta} - 1} \quad \text{или} \quad t = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{e^{n_c \delta} - 1} (e^{n_c x} - 1) + t_{c1}. \quad (16.66)$$

Вернемся к уравнению (16.65a).

При  $x = -\infty, t_{ж0} = C_4$ ; при  $x = 0, t_{c1} = C_3 + C_4, \Rightarrow C_3 = t_{c1} - t_{ж0} (*)$ .

Подставляя  $C_3$  и  $C_4$  в (16.65a), получим

$$t = (t_{c1} - t_{ж0}) e^{n_j x} + t_{ж0}. \quad (16.67)$$

Чтобы найти  $t_{c1}$ , запишем граничные условия при  $x=0$ :

$$\lambda_{\text{ж}} \left( \frac{dt_{\text{ж}}}{dx} \right)_{x=0} = \lambda_{\text{м}} (1-p) \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=0},$$

$$\lambda_{\text{ж}} n_{\text{ж}} (t_{\text{с1}} - t_{\text{ж0}}) = \lambda_{\text{м}} (1-p) \left( \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{с1}}}{e^{n_c \delta} - 1} \right) n_c,$$

откуда с учетом  $n_{\text{ж}}$  и  $n_c$ :  $t_{\text{с1}} - t_{\text{ж0}} = \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{с1}}}{e^{n_c \delta} - 1} = C_3$ , (см. (\*)).

Подставим  $C_3$  и  $C_4$  в (16.65a): 
$$t_{\text{ж}} = \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{с1}}}{e^{n_c \delta} - 1} e^{n_c x} + t_{\text{ж0}}.$$

При  $x=0$   $t_{\text{ж}} = t_{\text{с1}} \Rightarrow t_{\text{с1}} = t_{\text{ж0}} + (t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}) e^{-n_c \delta}$ .

(16.68)

Подставляя (16.68) в (16.66), получим окончательное уравнение для определения температуры в пористой стенке:

$$t = t_{\text{ж0}} + (t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}) e^{-n_c \delta} + \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}} - (t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}) e^{-n_c \delta}}{e^{n_c \delta} - 1} (e^{n_c x} - 1),$$

$$t - t_{\text{ж0}} = (t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}) e^{-n_c \delta} + \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}} - (t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}) e^{-n_c \delta}}{e^{n_c \delta} - 1} (e^{n_c x} - 1),$$

$$\theta = \frac{t - t_{\text{ж0}}}{t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}} = e^{-n_c \delta} + \frac{1 - e^{-n_c \delta}}{e^{n_c \delta} - 1} (e^{n_c x} - 1) = e^{-n_c \delta} + \frac{1 - e^{-n_c \delta}}{e^{n_c \delta} - 1} (e^{n_c x} - 1) =$$

$$= e^{-n_c \delta} + \frac{e^{n_c x} - 1}{e^{n_c \delta}} = e^{-n_c \delta} + e^{-n_c \delta} (e^{n_c x} - 1) = e^{-n_c \delta} e^{n_c x} = e^{-n_c (\delta - x)}.$$

$$\theta = \frac{t - t_{\text{ж0}}}{t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}} = \exp(-n_c (\delta - x)) \quad (16.69)$$

Используя (16.69), найдем среднюю температуру стенки

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \theta dx = \frac{1}{n_c \delta} (1 - e^{-n_c \delta}), \quad (16.70)$$

где  $\bar{\theta} = \frac{\bar{t} - t_{\text{ж0}}}{t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}}$ . Плотность теплового потока определим по формуле

$$q = \lambda_{\text{м}} (1-p) \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=0} = \lambda_{\text{м}} (1-p) n_c \left( \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{с1}}}{e^{n_c \delta} - 1} \right). \quad (16.71)$$

С учетом (16.68) получим

$$q = \lambda_{\text{м}} (1-p) n_c \frac{t_{\text{с2}} - t_{\text{ж0}}}{e^{n_c \delta}}. \quad (16.72)$$

Если со стороны газа ( $t_{\text{ж2}}$ ) задан коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$ ,

то  $t_{\text{с2}} = t_{\text{ж2}} - \frac{q}{\alpha_2}$ , а (16.72) примет вид

$$q = \frac{\lambda_{\text{м}} (1-p) n_c (t_{\text{ж2}} - t_{\text{ж0}})}{e^{n_c \delta} + \frac{\lambda_{\text{м}} (1-p) n_c}{\alpha_2}}. \quad (16.73)$$

Для случая, когда охлаждающая жидкость испаряется на поверхности пористой пластины ( $x=\delta$ ), граничные условия третьего рода запишутся так:

$$\alpha_1(t_{c1} - t_{ж0}) = \lambda_m(1-p) \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=0},$$

$$\alpha_2(t_{ж2} - t_{c2}) - jr = \lambda_m(1-p) \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=\delta},$$

где  $r$  - удельная теплота парообразования.

### Двумерная стационарная теплопроводность

Рассмотрим плоскую пластину шириной  $\delta$  с  $\lambda = \text{const}$  и неограниченным размером по оси  $OZ$ . В этом случае уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{C\rho} \quad \text{при} \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad q_v = 0$$

будет иметь вид  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ . Введем  $\vartheta = T(x, y) - T_1$ , где

$$T_1 = \text{const}, \quad \text{тогда можно написать} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{а})$$

Решение будем искать в виде произведения  $\vartheta = \varphi(x)\psi(y)$ , подставляя  $\vartheta$  в (а), получим дифференциальное уравнение  $\varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0$ .

После разделения переменных получим:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \text{const}.$$

Так как левая и правая части уравнения одинаковы, то их можно приравнять постоянной, обозначив ее через  $-k^2$ . Теперь уравнение распалось на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0 \quad (\text{б})$$

$$\psi''(y) - k^2\psi(y) = 0. \quad (\text{с})$$

Решение первого уравнения имеет вид:

$$\varphi(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

$$\psi(y) = C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}, \quad \text{тогда}$$

$$\vartheta = (C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx))(C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}).$$

Найдем константы интегрирования из граничных условий:

при  $x=0$ :  $\vartheta=0$ , при  $x=\delta$ :  $\vartheta=0$ , при  $y=\infty$ :  $\vartheta=0$ , при  $y=0$ :  $\vartheta=F(x)$ . Чтобы  $\vartheta=0$  при  $x=0$  и  $y=\infty$ , необходимо положить соответственно  $C_1=0$  и  $C_3=0$ , тогда  $C=C_2C_4$ , а уравнение будет иметь вид

$$\vartheta = Ce^{-ky} \sin(kx). \quad (16.74)$$

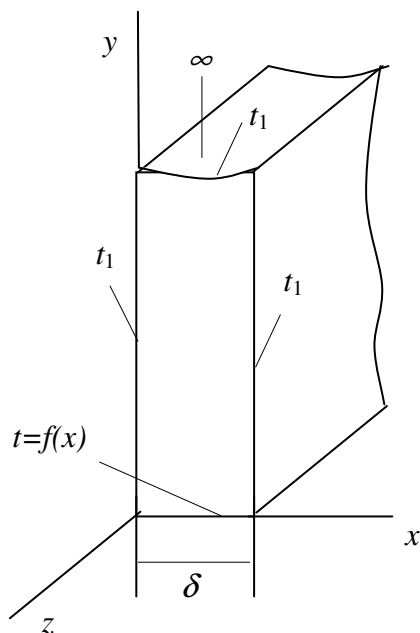


Рис.16.21

второго -

Для того чтобы полученное уравнение удовлетворяло  $\vartheta = 0$  при  $x = \delta$  необходимо, чтобы  $\sin(kx)_{x=\delta} = 0$ ,  $k\delta = \pi n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $k = \frac{\pi n}{\delta}$

$$\vartheta = C e^{-\frac{\pi n}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right). \quad (16.75)$$

Мы получили частное решение. Общее решение записывается в виде бесконечно-

$$\text{го ряда: } \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\pi n}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) \quad (16.76)$$

Положим  $y=0$ , тогда будем иметь:  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right)$ , а это есть разложение функции  $F(x)$  в ряд Фурье по синусам, в котором константа интегрирования определяется из выражения:

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) dx.$$

Решение в окончательном виде запишется так:

$$\vartheta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) dx. \quad (16.77)$$

Рассмотрим частный случай; будем считать, что  $\vartheta_{y=0} = t_2 - t_1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) dx &= (t_2 - t_1) \int_0^{\delta} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) dx = \frac{(t_2 - t_1)\delta}{\pi n} \int_0^{\delta} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) d\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) = \\ &= \frac{(t_2 - t_1)\delta}{\pi n} \left( -\cos\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right) \Big|_0^{\delta} \right) = \frac{2(t_2 - t_1)\delta}{\pi n}, \text{ тогда} \end{aligned}$$

$$\vartheta = \frac{4(t_2 - t_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right)}{n} \quad \text{или}$$

$$\theta = \frac{t(x, y) - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{\pi n}{\delta} y} \sin\left(\frac{\pi n}{\delta} x\right), \text{ где } n=1, 3, 5, \dots \quad (16.78)$$

Определив  $\theta$ , найдем искомую температуру

$$\theta = \frac{t(x, y) - t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow t(x, y) = t_1 + \theta(t_2 - t_1).$$

### 17. Нестационарные процессы теплопроводности

С задачами нестационарной теплопроводности мы встречаемся в энергетических машинах во время их пуска и остановки и при изменении режима работы энергоустановок, когда температура зависит не только от координат, но и от времени.

#### Охлаждение (нагревание) бесконечной пластины

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho} \quad (a)$$

для бесконечной в направлениях  $z$  и  $y$  пластины без внутренних источников теплоты, т.е. при условиях  $\frac{dT}{dy} = \frac{dT}{dz} = 0$ ,  $q_v = 0$  принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (b)$$

или, после введения избыточной температуры  $\vartheta = T - T_{ж}$ ,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (c)$$

Решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, другая - от координаты

$$\vartheta = \varphi(\tau)\psi(x). \quad (d)$$

Подставляя  $\vartheta$  в (c), получаем соотношение

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

Так как оно должно выполняться при любых значениях независимых переменных  $\tau$  и  $x$ , то каждая из дробей равна некоторой константе, которую обозначим  $-k^2$ :

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -k^2.$$

Знак “минус” выбирается с целью получения ограниченных решений при  $\tau \rightarrow \infty$ , т.е. рассматриваются системы, стремящиеся к состоянию термодинамического равновесия. Таким образом, исходное уравнение (c) в частных производных свелось к системе двух обыкновенных дифференциаль-

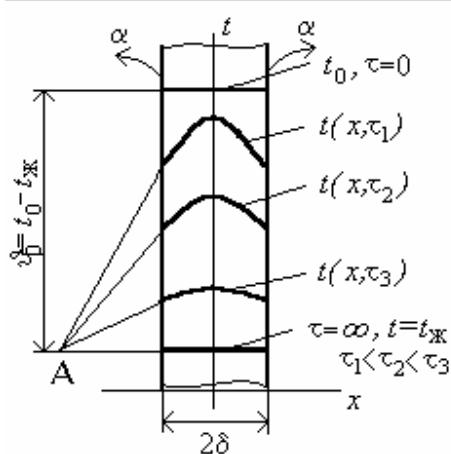


Рис.17.1

ных уравнений

$$\varphi'(\tau) + ak^2\varphi(\tau) = 0, \quad (e)$$

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0. \quad (f)$$

Частное решение уравнения (e) имеет вид:  $\varphi(\tau) = c_1 e^{-ak^2\tau}$ , а уравнения (f) -  $\psi(x) = c_2 \sin(kx) + c_3 \cos(kx)$ . Следовательно, частным решением уравнения (d) будет:

$$\vartheta = c_1 e^{-ak^2\tau} (c_2 \sin(kx) + c_3 \cos(kx)).$$

Найдем постоянные интегрирования:

$$\text{при } x = 0 \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = c_1 e^{-ak^2\tau} (c_2 k \cos(kx) - c_3 k \sin(kx)) \Big|_{x=0} = 0.$$

Из условия симметричности граничных условий относительно оси  $x=0$  следует:  $c_2=0$ , тогда  $\vartheta = c_1 c_3 e^{-ak^2\tau} \cos(kx)$ , или обозначая  $c = c_1 c_3$ ,

$$\vartheta = c e^{-ak^2\tau} \cos(kx).$$

$$\text{При } x = \delta: \quad -\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\delta} = \alpha \vartheta_{x=\delta} \quad (\text{граничные условия третьего рода):}$$

$$\lambda c e^{-ak^2\tau} \cdot k \sin(k\delta) = \alpha c e^{-ak^2\tau} \cdot \cos(k\delta).$$



Обозначим  $k\delta = \mu, \Rightarrow k = \frac{\mu}{\delta}$ , тогда  $\lambda \frac{\mu}{\delta} \sin(\mu) = \alpha \cos(\mu)$ ,

$\frac{\mu}{\delta\alpha} = \text{ctg}(\mu)$  или  $\text{ctg}(\mu) = \frac{\mu}{\text{Bi}}$ . Последнее выражение является характеристическим уравнением трансцендентного типа с бесконечным числом корней  $\mu_n$ ,  $n=1 \dots \infty$ , где  $\frac{\delta\alpha}{\lambda} = \text{Bi}$  - критерий Био.

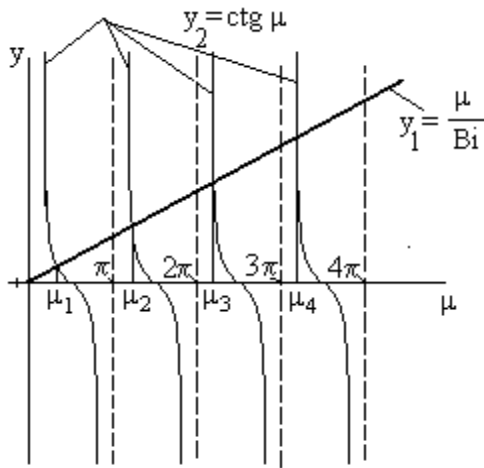


Рис.17.2

Таким образом, общее решение уравнения (с) представляется в виде суммы бесконечного ряда

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right). \quad (17.1)$$

Для определения коэффициентов ряда  $c_n$  воспользуемся начальным условием при  $\tau=0$ :

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \quad (*)$$

Умножим правую и левую части (\*) на

$$\cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \text{ и проинтегрируем по } x \text{ от } -\delta$$

до  $+\delta$ :

$$\begin{aligned} \vartheta_0 \int_{-\delta}^{+\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx &= \int_{-\delta}^{+\delta} c_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx + \\ &+ \int_{-\delta}^{+\delta} c_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx + \dots + \int_{-\delta}^{+\delta} c_n \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx. \quad (**) \end{aligned}$$

Для левой части уравнения можно написать

$$\vartheta_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \frac{\vartheta_0 \delta}{\mu_n} \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) d\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) = \frac{2\vartheta_0 \delta}{\mu_n} \sin \mu_n. \quad (g)$$

В правой части (\*\*) значения всех интегралов, кроме последнего, равны нулю, так как подинтегральные функции - нечетные. Возьмем этот интеграл с учетом ра-

венств  $2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$ ,  $\sin(-x) = -\sin(x)$  и  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{+\delta} c_n \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx &= c_n \left( \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{+\delta} dx + \frac{1}{4} \frac{\delta}{\mu_n} \int_{-\delta}^{+\delta} \cos\left(2\mu_n \frac{x}{\delta}\right) d\left(2\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \right) = \\ &= c_n \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \frac{\delta}{\mu_n} \sin\left(2\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \right) \Big|_{-\delta}^{\delta} = c_n \left( \delta + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_n} \sin(2\mu_n) \right) = \\ &= c_n \left( \delta + \frac{\delta}{\mu_n} \sin(\mu_n) \cos(\mu_n) \right). \quad (h) \end{aligned}$$

Приравняем (g) и (h): 
$$\frac{2\vartheta_0 \delta \sin \mu_n}{\mu_n} = c_n \left( \delta + \frac{\delta}{\mu_n} \sin(\mu_n) \cos(\mu_n) \right),$$

$$\frac{2\vartheta_0 \delta \sin(\mu_n)}{\mu_n} = \frac{c_n \delta (\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n))}{\mu_n}, \Rightarrow c_n = \frac{2\vartheta_0 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)}.$$

Подставим  $c_n$  в (17.1) и получим окончательное выражение для определения избыточной температуры пластины в зависимости от  $x$  и  $\tau$ :

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\vartheta_0 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)} e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right). \quad (17.2)$$

Введем безразмерное время (критерий Фурье Fo) и безразмерную температуру  $\theta$ , тогда:

$$\theta = \frac{t(x, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \cos(\mu_n X), \quad (17.3)$$

где  $X = \frac{x}{\delta}$ ;  $\mu = f(\text{Bi})$ ;  $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$ .

При  $\text{Bi} = \infty$ ,  $\alpha = \infty$ ,  $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ ; при  $\text{Bi} = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\mu_n = (n-1)\pi$ .

Если в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) задан закон распределения температуры  $\vartheta = F(x)$ , то избыточная температура определится по формуле

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \cos \mu_n \cdot \sin \mu_n)} \left( \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx \right) \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \cdot e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau}. \quad (17.4)$$

#### Анализ полученного решения

Расчет показывает, что при  $Fo > 0,3$  ряд быстро сходится и достаточно первого члена ряда, чтобы с высокой точностью определить значение температуры в данной точке в данное время. Тогда выражение для избыточной температуры принимает вид

$$\vartheta = \frac{2\vartheta_0 \sin(\mu_1)}{\mu_1 + \cos(\mu_1) \sin(\mu_1)} e^{-a \frac{\mu_1^2}{\delta^2} \tau} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right), \quad \vartheta = c_1 \cdot \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \cdot e^{-a \frac{\mu_1^2}{\delta^2} \tau}.$$

Прологарифмировав последнее выражение, получим

$\ln \vartheta = \ln\left(c_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right)\right) - Fo \mu_1^2$ , откуда видно, что в полулогарифмических координатах зависимость  $\ln \vartheta$  от числа Фурье носит линейный характер.

Рассмотрим частные случаи.

1.  $\text{Bi} \rightarrow \infty$  ( $\text{Bi} \geq 100$ ),  $Fo \geq 0,3$ . Уравнение

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_1}{(\mu_1 + \cos \mu_1 \sin \mu_1)} e^{-a \frac{\mu_1^2}{\delta^2} \tau} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right)$$

с учетом корней характеристического уравнения  $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$  и  $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$  принимает вид

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{4}{\pi} e^{-a \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{\delta}\right).$$

$$\text{При } x=0 \quad \theta_{|x=0} = \frac{\vartheta_{|x=0}}{\vartheta_0} = \frac{4}{\pi} e^{-a \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau}, \quad (17.5)$$

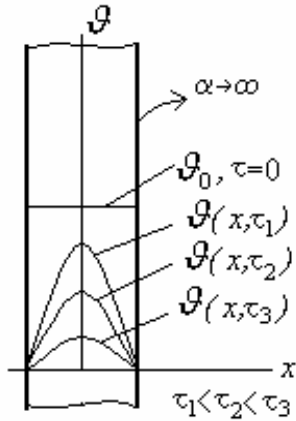


Рис.17.3

при  $x = \delta$   $\theta = 0$ . При очень интенсивном теплообмене ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) изменение температуры в теле не зависит от внешних условий, а зависит от физических свойств тела.

Преобразуем (17.5):

$$\frac{\theta \pi}{4} = e^{-a \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\delta^2} \tau}, \quad \frac{4}{\theta \pi} = e^{a \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\delta^2} \tau},$$

$$a \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\delta^2} \tau = \ln \left( \frac{4}{\theta \pi} \right).$$

Эту формулу можно использовать, например, для определения времени, необходимого для охлаждения или нагрева середины пластины до заданной температуры:

$$\tau = \frac{4\delta^2}{a\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\theta_{x=0}\pi} \right). \quad (17.6)$$

2.  $Bi \rightarrow 0$  ( $Bi < 0,1$ ),  $Fo > 0,3$  При  $Bi \rightarrow 0$  решением уравнения  $\frac{\mu}{Bi} = ctg\mu$  будет  $\mu = \sqrt{Bi}$  (т.к. при  $\mu \rightarrow 0$   $\sin \mu \approx \mu$ ,  $\cos \mu \approx 1$ ,

тогда  $\frac{\mu}{Bi} = \frac{1}{\mu}$ ), следовательно, из исходного уравнения

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_1}{(\mu_1 + \cos \mu_1 \sin \mu_1)} e^{-a \frac{\mu_1^2}{\delta^2} \tau} \cos \left( \mu_1 \frac{x}{\delta} \right) \text{ получим}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{2\mu_1}{(\mu_1 + \mu_1)} e^{-a \frac{Bi}{\delta^2} \tau} \cos \left( \sqrt{Bi} \frac{x}{\delta} \right), \text{ или}$$

$$\theta = e^{-BiFo} \cos \left( \sqrt{Bi} \frac{x}{\delta} \right). \quad (17.7)$$

При  $x=0$ ,  $\theta_{x=0} = e^{-BiFo}$ , (а) при  $x=\delta$ ,  $\theta_{x=\delta} = e^{-BiFo} \cos(\sqrt{Bi})$ . (в)

Разделив (в) на (а), получим отношение температур на поверхности и в центре пластины  $\frac{\theta_{x=\delta}}{\theta_{x=0}} = \cos(\sqrt{Bi}) \approx 1$ . Как видим, температура в теле практически постоянна, не зависит от физических свойств тела и определяется исключительно условиями внешнего теплообмена.

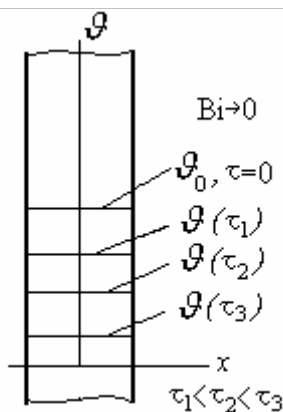


Рис.17.4

Количество теплоты отдаваемое пластиной  
окружающей среде  
в процессе охлаждения

Теплота, отданная пластиной, нагретой до температуры  $t_0$ , при постоянной теплоемкости  $C$ , равна убыли энтальпии пластины за время от  $\tau_0$  до  $\tau_\infty$ :

$$Q_0 = \rho CV(t_0 - t_{жс}), \quad (a)$$

где  $\rho$  и  $V$  - плотность и объем пластины.

Теплота, отданная пластиной за время от  $\tau$  до  $\tau_\infty$ :

$$Q(\tau) = \rho CV(\bar{t}(\tau) - t_{жс}), \quad (b)$$

где  $\bar{t}(\tau)$  - средняя по толщине температура пластины в момент времени  $\tau$ . Тогда разницa (a)-(b) даст количество теплоты, переданное окружающей среде за время от 0 до  $\tau$ :

$$Q_{oc} = \rho CV(t_0 - t_{жс}) - \rho CV(\bar{t}(\tau) - t_{жс}) = \rho CV(t_0 - t_{жс}) \left[ 1 - \frac{\bar{t}(\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} \right].$$

Так как  $\bar{\theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$ , то можно записать

$$Q_{oc} = Q_0(1 - \bar{\theta}) = \rho CV(t_0 - t_{жс})(1 - \bar{\theta}). \quad (17.8)$$

Учитывая выражение для локальной избыточной температуры

$$\vartheta = \sum \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n)} e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right),$$

найдем среднюю по толщине избыточную температуру пластины, а затем среднюю безразмерную температуру  $\bar{\theta}$ :

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sum \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n)} e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx,$$

$$\int_0^\delta \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \frac{\delta}{\mu_n} \int_0^\delta \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) d\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) = \frac{\delta}{\mu_n} \sin\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \Big|_0^\delta = \frac{\delta}{\mu_n} \sin(\mu_n) \text{ следовательно}$$

$$\text{но, } \bar{\vartheta} = \sum_1^\infty \vartheta_0 \frac{2 \sin^2 \mu_n}{(\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n) \mu_n} e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau},$$

$$\bar{\theta} = \sum_1^\infty \frac{2 \sin^2 \mu_n}{(\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n) \mu_n} e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau}. \quad (17.9)$$

Охлаждение (нагревание) бесконечно длинного цилиндра

Запишем уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах при условиях  $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ ,  $q_v = 0$ . Вводя, кроме того, избыточную температуру

$$\vartheta = T(r, \tau) - T_{жс},$$

получим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right). \quad (a)$$

Как и в случае с пластиной, решение ищем в виде произведения двух функций:

$$\vartheta = \varphi(\tau) \psi(r). \quad (b)$$

Подставим (b) в (a):

$$\frac{1}{a} \varphi'(\tau) \psi(r) = \varphi(\tau) \psi''(r) + \frac{1}{r} \varphi(\tau) \psi'(r).$$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} + \frac{1}{r} \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = -k^2,$$

$$\varphi'(\tau) + ak^2 \varphi(\tau) = 0, \quad (c)$$

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + k^2 \psi(r) = 0. \quad (d)$$

Решение первого уравнения  $\varphi(\tau) = C_1 e^{-ak^2 \tau}$ ; второго:  $\psi(r) = C_2 J_0(kr) + C_3 Y_0(kr)$ , где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $Y_0$  – функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Частное решение уравнения (a) будет иметь вид:

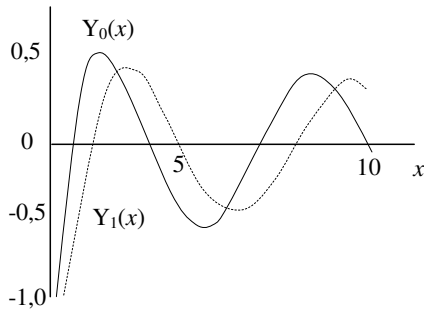
$$\vartheta = C_1 e^{-ak^2 \tau} (C_2 J_0(kr) + C_3 Y_0(kr)). \quad (e)$$

Граничные условия:

При  $r=0$   $\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=0} = k C_1 e^{-ak^2 \tau} (-C_2 J_1(k \cdot 0) + C_3 Y_1(k \cdot 0)) = 0.$

Так как  $Y_1(0) = -\infty$ , а  $J_1(0) = 0$ , то  $C_3 = 0$ . Обозначая  $C = C_1 C_2$ , получим

$$\vartheta = C e^{-ak^2 \tau} J_0(kr). \quad (k)$$



При  $r=r_0$  имеем граничные условия третьего рода

$$-\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \alpha \vartheta_{r=r_0}.$$

С учетом того, что  $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$ ,

$$\text{где } J_0(kr) = 1 - \frac{(kr)^2}{2^2} + \frac{(kr)^4}{2^2 4^2} - \frac{(kr)^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots;$$

$$J_1(kr) = \frac{kr}{2} - \frac{(kr)^3}{2^2 4} + \frac{(kr)^5}{2^2 4^2 6} - \dots \text{ можно написать}$$

$$-\lambda C e^{-ak^2 \tau} (-kJ_1(kr_0)) = \alpha C e^{-ak^2 \tau} J_0(kr_0),$$

$$\lambda k J_1(kr_0) = \alpha J_0(kr_0).$$

Вводя новую переменную  $\mu = kr_0$ , получим характеристическое уравнение в

виде  $\lambda \frac{\mu}{r_0} J_1(\mu) = \alpha J_0(\mu)$ ,  $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{\alpha r_0 / \lambda}$  или  $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}$ .

Отношение  $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)}$  напоминает поведение котангенсоиды с убывающим периодом (рис.17.5). Окончательно, общее решение уравнения (a) будет иметь вид:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a \frac{\mu_n^2}{r_0^2} \tau} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right). \quad (17.10)$$

Запишем решение при  $\tau=0$ :  $\vartheta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right).$

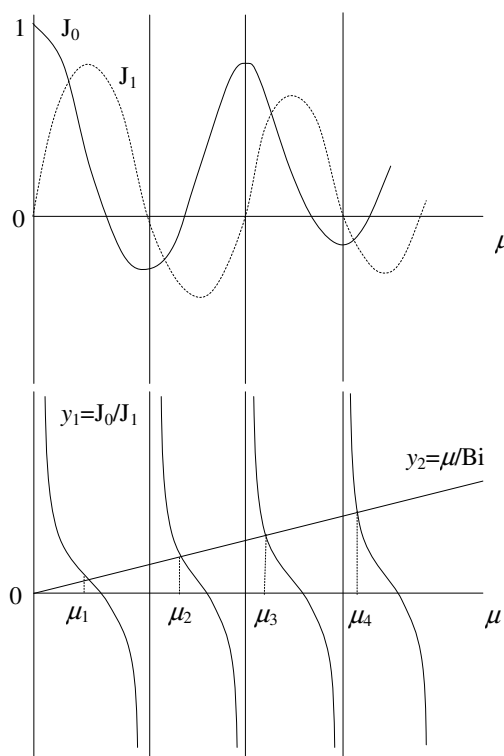


Рис.17.5

Умножим левую и правую части на

$r J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)$  и проинтегрируем от 0 до  $r_0$ .

Для левой части уравнения можно написать:

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} \vartheta_0 r J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr &= \frac{\vartheta_0 r_0}{\mu_n} \int_0^{r_0} r J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \cdot d\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) = \\ &= \frac{\vartheta_0 r_0^2}{\mu_n} J_1(\mu_n), \end{aligned} \quad (a)$$

для правой:

$$\begin{aligned} &\int_0^{r_0} c_1 r J_0\left(\mu_1 \frac{r}{r_0}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr + \\ &+ \int_0^{r_0} c_2 r J_0\left(\mu_2 \frac{r}{r_0}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr + \\ &\dots + \int_0^{r_0} c_n r J_0^2\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr = \frac{r_0^2 c_n}{2} (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)) \end{aligned} \quad (b)$$

(здесь все члены ряда, кроме последнего,

из-за ортогональности подинтегральных функций равны нулю, а интеграл

$$\int_0^x x J_0^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} (J_0^2(ax) + J_1^2(ax)), \text{ см. [31], стр. 120, ф-ла (19)).}$$

Приравняем (а) и (б)

$$\frac{\vartheta_0}{\mu_n} J_1(\mu_n) = \frac{c_n}{2} (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)), \text{ откуда } c_n = \frac{2\vartheta_0 J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))}.$$

Подставляя эту константу в (17.10), получим

$$\theta = \frac{t(r, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} \exp(-\mu_n^2 Fo) J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right). \quad (17.11)$$

На поверхности цилиндра ( $r=r_0$ ) имеем

$$\theta_{r=r_0} = \frac{t(r_0, \tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo) J_0(\mu_n), \quad (17.12)$$

в середине ( $r=0$ ):

$$\theta_{r=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (17.13)$$

Количество теплоты, отдаваемое цилиндром в процессе охлаждения

Выполнив выкладки, аналогичные случаю с пластиной, получим:

$$Q_{oc} = Q_0 \left(1 - \frac{\bar{t}(\tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}\right) = Q_0 (1 - \bar{\theta}), \text{ где } Q_0 = c\rho V(t_0 - t_{ж}) = c\rho\pi r_0^2 l(t_0 - t_{ж}),$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \theta 2\pi r dr = \frac{4}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \sum \frac{J_1(\mu_n) \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \pi r dr. \quad (e)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{r_0} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) \pi r dr = \frac{r_0}{\mu_n} \int_0^{r_0} \pi J_0 r \left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) d\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) = \frac{r_0^2 \pi}{\mu_n} J_1(\mu_n). \quad (k)$$

Подставим (k) в (е)

$$\bar{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_1^2(\mu_n) \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\mu_n^2 (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))}. \quad (17.14)$$

Полученные решения для пластины и цилиндра могут быть использованы для определения температуры в данной точке в данное время как при нагревании, так и при охлаждении тел.

### Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров

а. Охлаждение (нагревание) параллелепипеда.

Так как параллелепипед может рассматриваться как результат пересечения трех бесконечных пластин (рис.17.6), то можно доказать, что решением для параллелепипеда является произведение решений для бесконечных пластин с толщинами  $2\delta_x$ ,  $2\delta_y$  и  $2\delta_z$ :

$$\theta = \frac{t(x,y,z,\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \theta_x \cdot \theta_y \cdot \theta_z. \quad (17.15)$$

Решения для бесконечных пластин имеют вид:

$$\theta_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n e^{-Fo_x \mu_n^2}}{\mu_n + \cos\mu_n \sin\mu_n} \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta_x}\right), \quad Fo_x = \frac{a\tau}{\delta_x^2}, \mu = f(Bi_x), Bi_x = \frac{\alpha\delta_x}{\lambda},$$

$$\theta_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\mu_n) e^{-Fo_y \mu_n^2}}{\mu_n + \cos\mu_n \cdot \sin\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta_y}\right), \quad Fo_y = \frac{a\tau}{\delta_y^2}; \mu = f(Bi_y); Bi_y = \frac{\alpha\delta_y}{\lambda},$$

$$\theta_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\mu_n) e^{-Fo_z \mu_n^2}}{\mu_n + \cos\mu_n \cdot \sin\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{z}{\delta_z}\right); Fo_z = \frac{a\tau}{\delta_z^2}; \mu = f(Bi_z); Bi_z = \frac{\alpha\delta_z}{\lambda},$$

тогда 
$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n e^{-Fo_x \mu_n^2}}{\mu_n + \cos\mu_n \sin\mu_n} \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta_x}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\mu_n) e^{-Fo_y \mu_n^2}}{\mu_n + \cos\mu_n \cdot \sin\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{y}{\delta_y}\right) \times$$

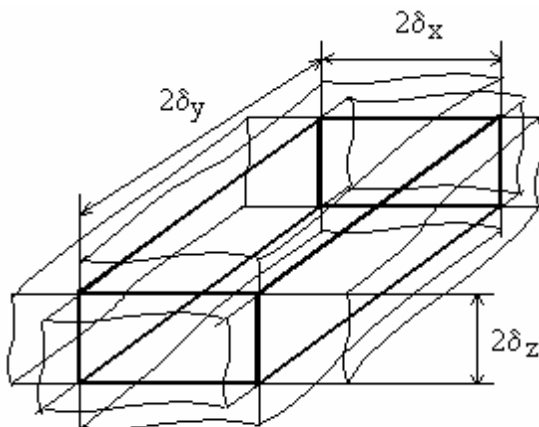


Рис.17.6

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\mu_n) e^{-Fo_z \mu_n^2}}{\mu_n + \cos\mu_n \cdot \sin\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{z}{\delta_z}\right). \quad (17.16)$$

Среднее значение температуры также определяется произведением средних температур для бесконечных пластин (см. формулу (17.9)):

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \bar{\theta}_x \cdot \bar{\theta}_y \cdot \bar{\theta}_z.$$

б. Охлаждение (нагревание) цилиндра.

Для цилиндра (рис.17.7) можно написать:

$$\theta = \frac{t(r,z,\tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \theta_r \cdot \theta_z, \quad (17.17)$$

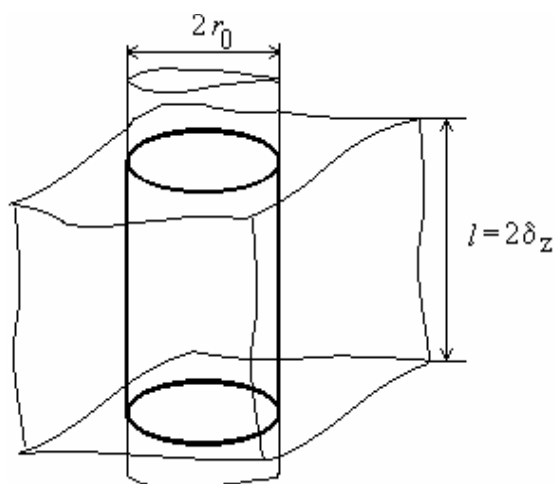


Рис.17.7

$$\text{где } \theta_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n) e^{-Fo_r \mu_n^2}}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right);$$

$$Fo_r = \frac{a\tau}{r_0^2}; \quad \mu = f(Bi_r); \quad Bi_r = \frac{\alpha r_0}{\lambda};$$

$$\theta_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\mu_n) e^{-Fo_z \mu_n^2} \cos\left(\mu_n \frac{z}{\delta_z}\right)}{\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n};$$

$$Fo_z = \frac{a\tau}{\delta_z^2}; \quad \mu = f(Bi_z). \quad (17.18)$$

Среднюю температуру цилиндра конечных размеров находим по формуле  $\bar{\theta} = \frac{\bar{t}(\tau) - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \bar{\theta}_z \cdot \bar{\theta}_r$ .

### Регулярный режим

В процессе охлаждения любого тела можно выделить три стадии: начальную, когда скорость изменения температуры внутри тела зависит от начального распределения температуры в теле, условий теплообмена и физических свойств тела; стадию охлаждения, когда процесс определяется только условиями теплообмена на границе тела и среды, физическими свойствами тела и его геометрической формой и размерами; стадию установления теплового равновесия с окружающей средой. Анализируя решения для пластины и цилиндра видим, что они могут быть представлены в виде:  $\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n e^{-m\tau}$ , где под

$$U_n \text{ понимается } \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \text{ или } J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right); \quad m = \frac{a\mu_n^2}{\delta^2}.$$

$$\text{При } Fo > 0,3 \text{ достаточно первого члена ряда: } \vartheta = c_1 U_1 e^{-m\tau} \quad (a).$$

Прологарифмируем и продифференцируем (a) по времени:

$$\ln \vartheta = \ln(c_1 U_1) - m\tau, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (\ln \vartheta) = -m, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -m, \quad (17.19)$$

где  $m$  - скорость изменения относительной температуры во времени, или темп охлаждения. Вторая стадия охлаждения, которая характеризуется одинаковым темпом охлаждения для всех точек тела, называется регулярным режимом. Из (17.19) следует, что  $m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}$ . Темп охлаждения при регулярном режиме не зави-

сит от начального распределения температуры, а определяется условиями теплообмена, физическими свойствами, геометрическими размерами и формой тела. Определим зависимость темпа охлаждения тела от его физических свойств, геометрической формы, размеров и условий теплообмена.

Напишем два уравнения:

$$dQ = c\rho V \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \tau} d\tau \quad (a)$$

- количество теплоты, которое идет на увеличение энтальпии,

$$dQ = \bar{\alpha} F \bar{\vartheta}_F d\tau \quad (b)$$



-количество теплоты, которое получило (отдало) тело за  $d\tau$ .

Здесь  $\bar{\vartheta}_V$  - температура, осредненная по объему;  $\bar{\vartheta}_F$  - температура, осредненная по поверхности. Приравнявая (а) и (б), получим:

$C \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} = \bar{\alpha} F \bar{\vartheta}_F$ ,  $C = \rho c V$ , откуда  $\frac{1}{\bar{\vartheta}_V} \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} = \frac{\bar{\alpha} F \bar{\vartheta}_F}{C \bar{\vartheta}_V}$ , или  $m = \frac{\bar{\alpha} F \bar{\vartheta}_F}{C \bar{\vartheta}_V}$ . Введем понятие

коэффициента неравномерности распределения температуры  $\psi = \frac{\bar{\vartheta}_F}{\bar{\vartheta}_V}$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$ .

Тогда 
$$m = \frac{\bar{\alpha} F \psi}{C} \quad (17.20)$$

- первая теорема Кондратьева. Из (17.20) видно, какие величины влияют на темп охлаждения. Рассмотрим случай, когда  $Bi \rightarrow \infty$  (практически  $Bi > 100$ ). Для пластины можно написать:

$$m|_{Bi \rightarrow \infty} = \frac{a \mu_1^2}{\delta^2} = \frac{a \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{2\delta}{\pi}\right)^2}, \quad \text{где } \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Вводя понятие коэффициента формы тела для пластины

$$k = \left(\frac{2\delta}{\pi}\right)^2, \quad \text{получаем: } m_\infty = \frac{a}{k}; \quad a = m_\infty k \quad (17.21)$$

- вторая теорема Кондратьева.

Для шара коэффициент формы имеет вид  $k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r_0}\right)^2}$ ,

для конечного цилиндра  $k = \frac{1}{\left(\frac{2,405}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}$ ,

для параллелепипеда  $k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3}\right)^2}$ .

Вторая теорема Кондратьева часто используется для определения теплофизических свойств различных материалов.

## 18. Численные методы решения задач теплопроводности

### Методы решения задач теплопроводности

Определение температуры в теле даже простой формы связано с определенными математическими трудностями (см. 2-х мерная стационарная теплопроводность). Задача еще более усложняется, если речь идет о телах сложной формы. В этом случае для решения задачи используются численные методы. Суть численного метода заключается в том, что дифференциальные уравнения записываются в конечноразностной форме.

Рассмотрим тело (пластину) и разобьем его на ячейки, причем будем считать, что масса сосредоточена в узлах, а передача теплоты происходит по нитям (рис.18.1). Рассмотрим сначала внутренний узел.

Для стационарной задачи сумма тепловых потоков к данной ячейке от соседних узлов равна нулю.

$$\sum \dot{Q}_{i \rightarrow 0} = 0 \quad . \quad (18.1)$$

Так как  $\dot{Q} = -\lambda F \text{grad} T$ , то тепловой поток, который получил узел "0" от узла "1":

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 0} = \lambda b \Delta y \left( \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) \quad (a)$$

(в (a) дифференциал  $\frac{dT}{dx}$  заменен конечной разностью). Аналогично,

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 0} = \lambda b \Delta x \left( \frac{T_2 - T_0}{\Delta y} \right), \quad (b)$$

$$\dot{Q}_{3 \rightarrow 0} = \lambda b \Delta y \left( \frac{T_3 - T_0}{\Delta x} \right), \quad (c)$$

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow 0} = \lambda b \Delta x \left( \frac{T_4 - T_0}{\Delta y} \right). \quad (d)$$

Представим, что в узле "0" есть внутренний источник теплоты, тогда:

$$\dot{Q}_v = q_v b \Delta x \Delta y. \quad (e)$$

Для простоты положим, что  $\Delta x = \Delta y$ . Сложим уравнения (a,b,c,d,e) и приравняем сумму нулю:

$$T_1 - T_0 + T_2 - T_0 + T_3 - T_0 + T_4 - T_0 + \frac{q_v \Delta x^2}{\lambda} = 0,$$

$$4T_0 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \frac{q_v \Delta x^2}{\lambda},$$

тогда температуру в искомом узле найдем из выражения:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \frac{q_v \Delta x^2}{\lambda}}{4}. \quad (18.2)$$

При  $q_v=0$  получаем:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}. \quad (18.2a)$$

Чем меньше размер ячейки ( $\Delta x \times \Delta y$ ), тем точнее будет результат. Пусть теперь узел находится на поверхности тела (рис.18.2).

Положим, что  $\Delta x = \Delta y$ , тогда

$$\begin{aligned} & \lambda b \Delta y \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta x} + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_2 - T_0)}{\Delta y} + \\ & + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_3 - T_0)}{\Delta y} + \alpha b \Delta y (T_{\text{жс}} - T_0) = 0, \end{aligned}$$

$$2(T_1 - T_0) + T_2 - T_0 + T_3 - T_0 + \frac{2\alpha \Delta x}{\lambda} (T_{\text{жс}} - T_0) = 0.$$

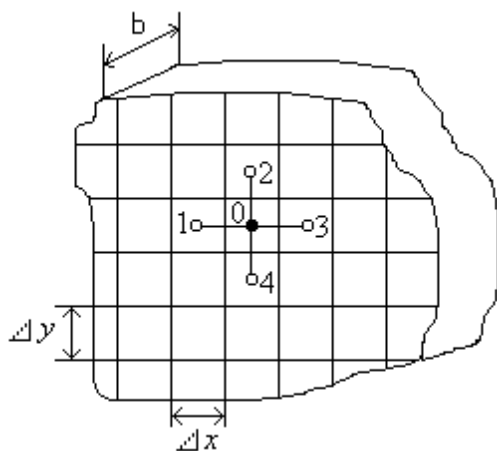


Рис.18.1

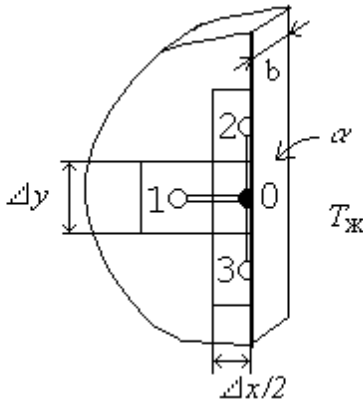


Рис.18.2

$$\begin{aligned}
 & 2T_1 - 2T_0 + T_2 - T_0 + T_3 - \\
 & - T_0 + 2BiT_{ж} - 2BiT_0 = 0, \\
 & 4T_0 + 2BiT_0 = 2T_1 + T_2 + T_3 + 2BiT_{ж}, \\
 & T_0 = \frac{2T_1 + T_2 + T_3 + 2BiT_{ж}}{2(2 + Bi)}. \quad (18.3)
 \end{aligned}$$

Узел находится на вершине внешнего угла ( $\Delta x = \Delta y$ ) (рис.18.3).

$$\begin{aligned}
 & \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta x} + \alpha b \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) (T_{ж} - T_0) + \\
 & + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_2 - T_0)}{\Delta x} = 0,
 \end{aligned}$$

$$T_1 - T_0 + \frac{2\alpha \Delta x}{\lambda} (T_{ж} - T_0) + T_2 - T_0 = 0,$$

$$T_1 - T_0 + 2BiT_{ж} - 2BiT_0 + T_2 - T_0 = 0,$$

$$2T_0 + 2BiT_0 = T_1 + T_2 + 2BiT_{ж}, \quad T_0 = \frac{T_1 + T_2 + 2BiT_{ж}}{2(1 + Bi)}.$$

Если бы угол был теплоизолирован, т.е.  $\alpha = 0$ , тогда  $Bi=0$ , а  $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ .

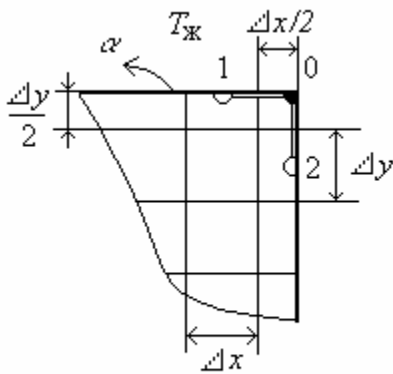


Рис.18.3

Узел находится в вершине внутреннего угла

$$\begin{aligned}
 & \Delta x = \Delta y, \quad \sum \dot{Q}_{i \rightarrow 0} = 0, \\
 & \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_2 - T_0)}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_3 - T_0)}{\Delta x} + \\
 & + \frac{\lambda b \Delta x}{2} \frac{(T_4 - T_0)}{\Delta x} + \alpha b \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) (T_{ж} - T_0) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_1 - T_0 + 2T_2 - 2T_0 + 2T_3 - 2T_0 + T_4 - \\
 & - T_0 + 2BiT_{ж} - 2BiT_0 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 6T_0 + 2BiT_0 = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4 + 2BiT_{ж}, \\
 & T_0 = \frac{T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4 + 2BiT_{ж}}{2(3 + Bi)} \quad (18.4)
 \end{aligned}$$

Для теплоизолированного внутреннего угла (рис.18.4) будем иметь

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{(T_1 + T_4) + T_2 + T_3}{3}.$$

Возможные способы численного решения задач теплопроводности рассмотрим на примере расчетной области с небольшим числом узлов. Пусть требуется рассчитать распределение температуры в плоском квадратном теле, одна из сторон которого теплоизолирована, на двух заданы граничные условия первого рода, на четвертой - условия третьего рода (см. рис.18.5).

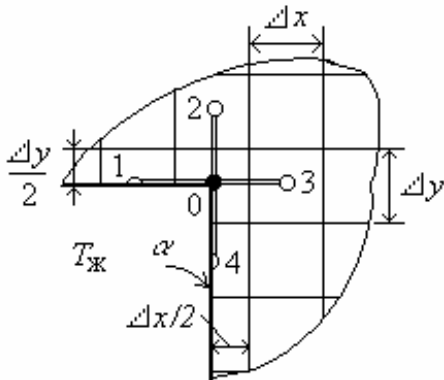


Рис.18.4

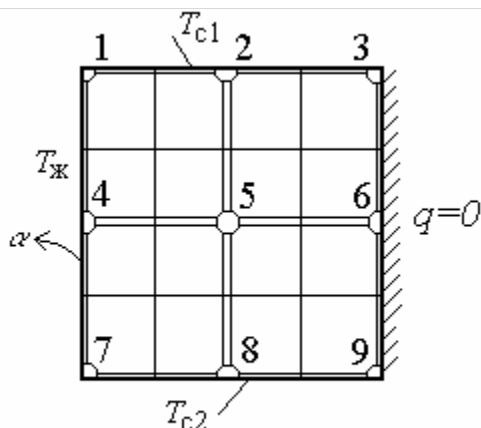


Рис.18.5

1. Итерационный метод.

Для каждого узла составляется уравнение вида (18.2)...(18.4), которое разрешается затем относительно температуры в текущем узле. Так, для узла 5 имеем:

$$T_4 + T_2 + T_6 + T_8 - 4T_5 = 0,$$

$$T_5 = \frac{T_4 + T_2 + T_6 + T_8}{4}.$$

Значения температур в соседних узлах берутся с предыдущей итерации. В начале счета во внутренних узлах принимаются, как правило, нулевые значения температуры. Процесс счета продолжается до тех пор, пока температуры во всех узлах расчетной сетки не совпадут с заданной точностью со значениями на предыдущей итерации. Этот метод называется методом Гаусса.

Число итераций может быть уменьшено, если применить метод Гаусса - Зейделя, в котором при определении температуры в очередном узле используется температура, только что найденная в соседнем узле.

2. Релаксационный метод.

Записав уравнения для каждого узла, вместо нуля в правой части следует поставить остаточный член

$$T_4 + T_2 + T_6 + T_8 - 4T_5 = R_5.$$

Исходя из общих представлений о процессе, задаем начальные значения температур в узлах, подставляем их в уравнения и определяем остаточные члены. Находим узел, в котором остаточный член имеет наибольшую величину и изменяем температуру в узле так, чтобы остаточный член стремился к нулю, при этом изменятся температуры в соседних узлах. Снова ищется уравнение с наибольшим остаточным членом, и т.д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока максимальное значение остаточного члена не станет равным нулю с заданной погрешностью.

3. Матричный метод. Суть метода - обращение матрицы на основе уравнений, записанных для каждого узла расчетной сетки

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 + \dots + a_{1n}t_n = b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 + \dots + a_{2n}t_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + a_{n3}t_3 + \dots + a_{nn}t_n = b_n. \end{cases}$$

В матричном виде:

$$AT = B, \text{ где } A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}; \quad T = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \dots \\ t_n \end{Bmatrix}; \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

Решение в матричной форме имеет вид  $T = A^{-1} B = CB,$

где  $C = A^{-1} = \begin{Bmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \cdots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \cdots c_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1}c_{n2}c_{n3} \cdots c_{nn} \end{Bmatrix}$  - обращенная матрица,  $c_{ij}$  - элементы обра-

щенной матрицы.

Искомые температуры находятся из уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + c_{13}b_3 + \cdots c_{1n}b_n = t_1 \\ c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + c_{23}b_3 + \cdots c_{2n}b_n = t_2 \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + c_{n3}b_3 + \cdots c_{nn}b_n = t_n. \end{cases}$$

Отметим, что существуют стандартные программы обращения матриц, написанные для основных языков программирования (см. Приложение II).

### Явный метод решения задач нестационарной теплопроводности

#### Критерий устойчивости

##### а. Узел находится внутри тела.

Если при рассмотрении стационарной теплопроводности сумма тепловых потоков от соседних узлов к текущему равна нулю  $\sum \dot{Q}_{i \rightarrow 0} = 0$ , то при нестационарном режиме поступающий в узел тепловой поток идет на изменение энтальпии вещества во времени  $\sum \dot{Q}_{i \rightarrow 0} = \frac{\partial I_0}{\partial \tau}$ . Переходя от дифференциального уравнения к записи в конечных разностях при  $\Delta x = \Delta y$ , получим (см. рисунки предыдущего параграфа)

$$\lambda b \Delta x \frac{(T_1 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_2 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_3 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_4 - T_0)^\tau}{\Delta x} = c \rho b \Delta x^2 \frac{(T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau)}{\Delta \tau}$$

где надстрочный индекс  $\tau$  определяет момент времени.

Разделим уравнение на  $\lambda$ :

$$(T_1 - T_0)^\tau + (T_2 - T_0)^\tau + (T_3 - T_0)^\tau + (T_4 - T_0)^\tau = \frac{c \rho}{\lambda \Delta \tau} \Delta x^2 (T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau).$$

Вводя критерий Фурье  $\frac{c \rho}{\lambda \Delta \tau} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\frac{\lambda}{c \rho} \cdot \Delta \tau} = \frac{1}{\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2}} = \frac{1}{Fo}$   $\left( a = \frac{\lambda}{c \rho} \right)$ , получим

$$(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)^\tau \cdot Fo - 4Fo T_0^\tau = T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau.$$

Последнее уравнение разрешим относительно температуры в узле на новом временном шаге  $\tau+\Delta\tau$

$$T_0^{\tau+\Delta\tau} = (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)^\tau \cdot Fo + T_0^\tau (1 - 4Fo). \quad (18.5)$$

Искомая температура будет отвечать реальному значению, если коэффициент при  $T_0^\tau$  положителен или равен нулю, т.е.  $Fo \leq \frac{1}{4}$ . Последнее неравенство можно

рассматривать как критерий устойчивости численного решения.

##### б. Узел находится на поверхности

$$\lambda b \Delta x \frac{(T_1 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_2 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_3 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \alpha b \Delta x (T_{\text{ж}} - T_0)^\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= c\rho b \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{(T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau)}{\Delta\tau} \cdot \\
&(T_1 - T_0)^\tau + \frac{1}{2}(T_2 - T_0)^\tau + \frac{1}{2}(T_3 - T_0)^\tau + \frac{\alpha\Delta x}{\lambda}(T_{\text{ж}} - T_0)^\tau = \frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau}{\Delta\tau} \right), \\
&2T_1^\tau - 2T_0^\tau + T_2^\tau - T_0^\tau + T_3^\tau - T_0^\tau + 2\text{Bi}T_{\text{ж}}^\tau - 2\text{Bi}T_0^\tau = \frac{(T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau)}{\text{Fo}}, \\
&(2T_1 + T_2 + T_3)^\tau \text{Fo} - 4\text{Fo}T_0^\tau + 2\text{BiFo}T_{\text{ж}}^\tau - 2\text{BiFo}T_0^\tau + T_0^\tau = T_0^{\tau+\Delta\tau}, \\
&T_0^{\tau+\Delta\tau} = (2T_1 + T_2 + T_3 + 2\text{Bi}T_{\text{ж}})^\tau \cdot \text{Fo} + (1 - 2\text{Fo}(2 + \text{Bi}))T_0^\tau. \quad (18.6)
\end{aligned}$$

Для узлов этого типа критерий устойчивости имеет вид  $\text{Fo}(2 + \text{Bi}) \leq \frac{1}{2}$ .

Если поверхность теплоизолирована, то в уравнении (18.6) следует положить  $\text{Bi}=0$ .

в. Узел образует внешний угол при граничных условиях III рода

$$\begin{aligned}
\lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_1 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \alpha b \Delta x (T_{\text{ж}} - T_0)^\tau + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_2 - T_0)^\tau}{\Delta x} &= \frac{1}{4} c\rho \Delta x^2 b \frac{(T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau)}{\Delta\tau} \\
(T_1 - T_0)^\tau + (T_2 - T_0)^\tau + 2\text{Bi}(T_{\text{ж}} - T_0)^\tau &= \frac{1}{2} \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\Delta x^2}{\Delta\tau} (T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau), \\
(T_1 + T_2 + 2\text{Bi}T_{\text{ж}})^\tau - 2T_0^\tau - 2\text{Bi}T_0^\tau &= \frac{T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau}{2\text{Fo}} \\
T_0^{\tau+\Delta\tau} = 2\text{Fo}(T_1 + T_2 + 2\text{Bi}T_{\text{ж}})^\tau - 4\text{Fo}T_0^\tau - 4\text{Fo}\text{Bi}T_0^\tau + T_0^\tau &= \\
= 2\text{Fo}(T_1 + T_2 + 2\text{Bi}T_{\text{ж}})^\tau + T_0^\tau(1 - 4\text{Fo}(1 + \text{Bi})). &\quad (18.7)
\end{aligned}$$

Чтобы решение было устойчивым, необходимо выполнение условия  $\text{Fo}(1 + \text{Bi}) \leq \frac{1}{4}$ .

г. Узел находится в вершине внутреннего угла при граничных условиях III рода

$$\begin{aligned}
\lambda b \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_1 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_2 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \lambda b \Delta x \frac{(T_3 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \\
+ \frac{\lambda b \Delta x}{2} \frac{(T_4 - T_0)^\tau}{\Delta x} + \alpha b \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) (T_{\text{ж}} - T_0)^\tau &= \frac{3}{4} c\rho b \Delta x^2 \frac{(T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau)}{\Delta\tau} \\
(T_1 - T_0)^\tau + 2(T_2 - T_0)^\tau + 2(T_3 - T_0)^\tau + (T_4 - T_0)^\tau + \\
+ 2\text{Bi}(T_{\text{ж}} - T_0)^\tau &= \frac{3(T_0^{\tau+\Delta\tau} - T_0^\tau)}{2\text{Fo}} \\
2\text{Fo}(T_1 + T_4 + 2(T_2 + T_3))^\tau + 4\text{BiFo}T_{\text{ж}}^\tau - 12T_0^\tau \text{Fo} - 4\text{BiFo}T_0^\tau &= 3T_0^{\tau+\Delta\tau} - 3T_0^\tau \\
T_0^{\tau+\Delta\tau} = \frac{2}{3} \text{Fo}(T_1 + T_4 + 2(T_2 + T_3))^\tau + \frac{4}{3} \text{BiFo}T_{\text{ж}}^\tau + T_0^\tau \left( 1 - 4\text{Fo} \left( 1 + \frac{1}{3} \text{Bi} \right) \right) &\quad (18.8) \\
\text{Fo} \left( 1 + \frac{1}{3} \text{Bi} \right) &\leq \frac{1}{4}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Если внутренний угол теплоизолирован, то необходимо положить  $\text{Bi}=0$ . Применение уравнения (18.8) для узла в момент  $(\tau + \Delta\tau)$  реали зует явный метод. При решении задачи явным методом необходимо выполнять условие

устойчивости (\*), если это условие не выполняется, то полученные значения температур не будут отвечать действительным.

### Неявный метод решения задач нестационарной теплопроводности

В этом методе разностные уравнения записываются для температур в момент  $(\tau + \Delta\tau)$ .

Рассмотрим, например, узел на поверхности тела при граничных условиях III рода:

$$\lambda b \Delta x \left( \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right)^{\tau + \Delta\tau} + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{T_2 - T_0}{\Delta x} \right)^{\tau + \Delta\tau} + \lambda b \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{T_3 - T_0}{\Delta x} \right)^{\tau + \Delta\tau} + \\ + \alpha b \Delta x (T_{жс} - T_0)^{\tau + \Delta\tau} = \frac{1}{2} c \rho b \Delta x^2 \frac{(T_0^{\tau + \Delta\tau} - T_0^\tau)}{\Delta\tau}.$$

Так как значения температур на шаге  $\tau + \Delta\tau$  неизвестны, то для того, чтобы задача была замкнутой, следует решать систему с числом уравнений, равным числу узлов. Неявный метод всегда устойчив, точность определения температуры зависит от выбора шагов  $\Delta x$  и  $\Delta\tau$ .

## 19. Конвективный теплообмен в однородной среде

### Основные понятия и определения

Теория конвективного теплообмена изучает теплоотдачу между телом и окружающей его жидкостью при их движении. В основе описания теплоотдачи лежит эмпирический закон Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha(T_c - T_\infty), \text{ Вт/м}^2,$$

где под  $T_\infty$  понимается температура жидкости в невозмущенном потоке.

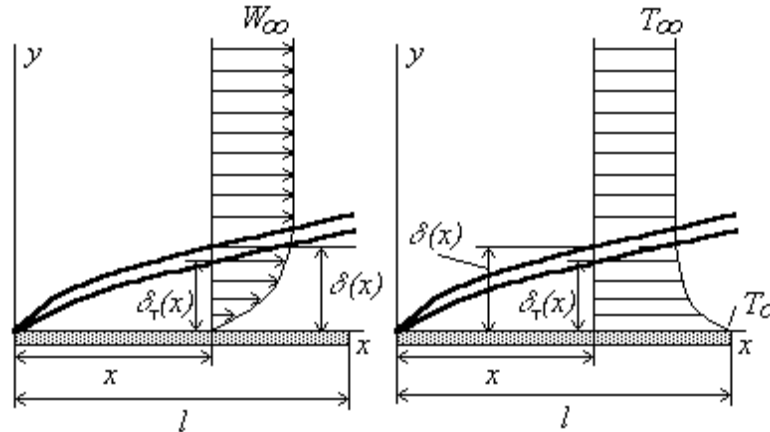


Рис.19.1

Около обтекаемого жидкостью тела (рис.19.1) образуется гидродинамический пограничный слой, в котором скорость потока жидкости меняется от значения скорости на бесконечности  $W_\infty$  до  $W = 0$  на поверхности (так называемый эффект прилипания). Практически считают, что толщина пограничного слоя  $\delta(x)$  равна расстоянию от стенки, на котором скорость жидкости составляет  $0,99 W_\infty$ .

Аналогично гидродинамическому, вводят понятие теплового пограничного слоя, внутри которого температура меняется от  $t_\infty$  до  $t_c$ . Вне теплового пограничного слоя  $\frac{\partial t}{\partial y} = 0$ .

Если в твердых телах плотность теплового потока определяется законом Фурье  $\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$ , то в движущихся средах необходимо учесть, кроме того, перенос теплоты потоком

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T + \rho i \vec{w}, \text{ Вт/м}^2,$$

где первое слагаемое описывает перенос теплоты теплопроводностью (на молекулярном уровне), а второе - конвекцией (поток вещества переносит энтальпию).

На теплоотдачу оказывают влияние коэффициент объемного расширения и коэффициент изотермического сжатия жидкости.

Коэффициент объемного расширения: 
$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (19.1)$$

для идеального газа: 
$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{p}{RT^2}. \quad (a)$$

Подставим (a) в (19.1): 
$$\beta = \frac{RT}{p} \frac{p}{RT^2} = \frac{1}{T} \text{ К}^{-1}, \quad \text{то есть } \beta_{\text{ид.газа}} = \frac{1}{T}.$$

Коэффициент изотермического сжатия: 
$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \text{ Па}^{-1}. \quad (19.2)$$

Для воды  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ . У воздуха при нормальных условиях  $\varepsilon = 10 \cdot 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$ . Таким образом, сжимаемость воздуха больше сжимаемости воды в 20 тысяч раз. Если скорость газа не больше 0,3 термодинамической скорости звука, то поток можно считать несжимаемым.

### Основные уравнения сохранения

#### Уравнение сплошности

Получим уравнение сплошности для однородной среды. Выделим в бесконечной изотропной среде неподвижный объем  $V$  (рис.19.2).

Изменение плотности  $\rho$  в фиксированном объеме в единицу времени  $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV$  возможно за счет потока вещества через поверхность  $F$ , ограничивающую объем  $V$ , то есть:  $-\int_F \vec{w} \cdot \vec{n} \rho dF$ , здесь знак “-” обусловлен тем, что вектор  $\vec{w}$  имеет направление, противоположное направлению единичного вектора  $\vec{n}$  элементарной площадки  $dF$ .

Таким образом,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV = -\int_F \vec{w} \cdot \vec{n} \rho dF, \quad \text{или} \quad -\int_F \rho w_n dF = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV. \quad (a)$$

По теореме Остроградского-Гаусса поток вектора через поверхность  $F$  равен дивергенции этого вектора, взятой по объему, ограниченному данной поверхностью

$$\int_F \rho w_n dF = \int_V \text{div}(\rho \vec{w}) dV. \quad (b)$$

Подставим (b) в (a): 
$$-\int_V \text{div}(\rho \vec{w}) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV, \quad \text{или} \quad \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{w}) \right) dV = 0.$$

Приравнивая нулю подынтегральное выражение (т.к.  $dV \neq 0$ ), получаем искомое уравнение сплошности в дифференциальном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{w}) = 0. \quad (19.3)$$



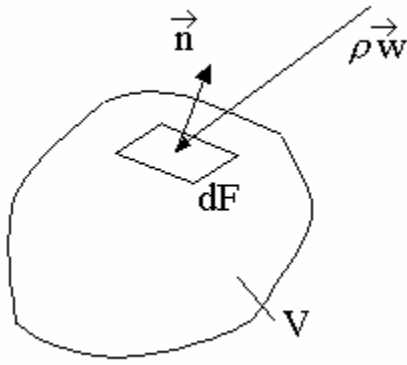


Рис.19.2

следует найти все составляющие скорости (в декартовой системе координат это  $w_x$ ,  $w_y$  и  $w_z$ ), а для этого следует записать проекции уравнения движения на координатные оси.

Так как в общем случае  $\vec{w} = f(\tau, x, y, z)$ , запишем  $d\vec{w}$  как дифференциал функции четырех

переменных  $d\vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} dz$ , тогда выражение для полной или

субстанциональной производной принимает вид

$\frac{D\vec{w}}{d\tau} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vec{w}}{\partial z}$ . Здесь  $\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau}$  характеризует локальное изменение

скорости как функцию времени, остальные слагаемые определяют конвективное изменение скорости, связанное с движением частицы в пространстве.

Представим уравнение (19.4) после деления на  $\rho$  в виде системы трех уравнений - проекций на оси декартовых координат:

проекция на ось x

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) + g_x,$$

проекция на ось y

$$\frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) + g_y,$$

проекция на ось z

$$\frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) + g_z.$$

Запись в виде уравнений в проекциях на оси выбранной системы координат используется при решении уравнения движения, например, одним из численных методов.

### Уравнение движения

В курсе гидрогазодинамики на основе положения о том, что сила инерции элементарного объема уравнивается суммой всех действующих на него внешних сил, выводится уравнение движения, векторная форма записи которого имеет вид

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} + \vec{F}. \quad (19.4)$$

Первое слагаемое в правой части описывает силы давления, второе - силы вязкости, третье - объемные (массовые) силы. Однако векторная форма есть лишь краткая форма записи уравнения. Чтобы решить его,

### Уравнение энергии

При рассмотрении задач теплопроводности, мы получили уравнение энергии в виде:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{q} . \quad (19.5)$$

В задачах конвективного теплообмена плотность теплового потока имеет две составляющие - за счет теплопроводности и за счет конвекции

$$\vec{q} = \vec{q}_\lambda + \vec{q}_k = -\lambda \operatorname{grad} T + i \rho \vec{w} . \quad (19.6)$$

Запишем дивергенцию вектора  $\vec{q}$

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} . \quad (a)$$

С учетом (19.6) при постоянных  $\lambda$  и  $\rho$ :

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho i w_x , \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho i w_y , \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \rho i w_z ,$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} &= -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho \left( i \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial q_y}{\partial y} &= -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \rho \left( i \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (b)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \rho \left( i \frac{\partial w_z}{\partial z} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{q} &= -\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \rho \left[ i \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \left( w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) \right] . \end{aligned} \quad (c)$$

Уравнение сплошности  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div} (\rho \vec{w}) = 0$  при  $\rho = \text{const}$  принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 . \quad (d)$$

Подставим (c) в (19.5) с учетом (d):

$$\rho \left( \frac{\partial i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

или в векторной форме  $\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} + \rho (\vec{w} \cdot \nabla) i = \lambda \nabla^2 T , \quad (19.7)$

где  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} , \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$

При  $c_p = \text{const}$ , уравнение (19.7) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla) T = a \nabla^2 T , \quad (19.8)$$

или с учетом выражения для полной производной  $\frac{DT}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla) T$

окончательно получим 
$$\frac{DT}{d\tau} = a \nabla^2 T \quad (19.9)$$

#### Уравнение теплоотдачи

Из граничных условий III-го рода  $\alpha(T_w - T_\infty) = -\lambda(\partial T / \partial n)_{n=0}$

получим уравнение теплоотдачи 
$$\alpha = -\frac{\lambda(\partial T / \partial n)_{n=0}}{T_w - T_\infty}. \quad (19.10)$$

#### Краевые условия ( условия однозначности )

Чтобы решить конкретную задачу, к дифференциальным уравнениям сохранения следует присоединить условия однозначности - геометрические (характеризующие форму и размеры тела), физические (характеризующие свойства потока), начальные и граничные (распределение полей скорости и температуры потока на входе в канал, условия теплообмена на поверхности тела). Часто поставить граничные условия можно лишь в результате решения внешней и внутренней задач. Например, при обтекании трубы газом, внутри которой движется поток, температуры поверхностей не могут быть назначены произвольно, а определяются из уравнения теплового баланса, составленного для двух сред, с учетом теплопроводности стенки.

#### Особенности теплообмена при турбулентном течении

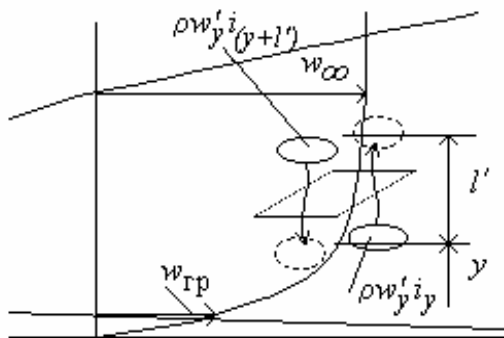


Рис.19.3

Исследования показывают, что в неподвижной точке турбулентного потока мгновенная скорость  $w$  пульсирует около среднего во времени значения скорости  $\bar{w}$ , то есть  $w = \bar{w} + w'$ , где  $w'$  - пульсационная скорость ;

$$\bar{w} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} w(\tau) d\tau; \quad \Delta\tau - \text{промежуток времени,}$$

который значительно больше чем время периода  $\tau_n$ . Аналогичное выражение можно написать для температуры

$$T = \bar{T} + T', \quad \bar{T} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} T(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим процесс передачи теплоты в турбулентном пограничном слое. Мысленно выделим в нем элементарную площадку, параллельную поверхности обтекаемой пластины и рассмотрим потоки энтальпии через нее (рис.19.3). На координате  $y$  в направлении от стенки имеем:  $w'_y \rho i_y$ , на координате  $y + l'$  в обратном направлении:

$w'_y \rho i_{(y+l')}$ , где  $l'$  - длина пути смешения

(такая запись предполагает равенство пульсационных скоростей и плотности на соответствующих координатах). Результирующий поток, равный разности этих потоков, определит плотность теплового потока

$$\begin{aligned}
q_T &= -(w'_y \rho i_y - w'_y \rho i_{(y+l')}) = \\
&= -w'_y \rho (i_y - i_{(y+l')}) = \\
&= -w'_y \rho \frac{\partial \bar{i}}{\partial y} l' = -c_p \rho w'_y l' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (19.11)
\end{aligned}$$

где  $\lambda_T = c_p \rho w'_y l'$  - коэффициент турбулентной теплопроводности, который зависит не только от теплофизических свойств жидкости ( $c_p, \rho$ ), но и режимных параметров

потока ( $w'_y, l'$ ). В общем случае  $q = -(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ . Так как пульсационная

составляющая скорости  $w'_y \approx l' \frac{\partial w_x}{\partial y}$ , то вместо (19.11) можно записать

$$q_T = -c_p \rho l'^2 \left( \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right), \quad (19.11a)$$

где  $l' = ky$ ;  $k \approx 0,4$ .

## 20. Подобие и моделирование процессов конвективного теплообмена

### Критерии подобия и критериальные уравнения

Рассмотрим теплоотдачу около вертикальной стенки.

Запишем уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

в безразмерном виде, введя безразмерные величины путем деления на соответствующие масштабы ( $l$  - масштаб длины,  $w_\infty$  - масштаб скорости):

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l}, \quad \bar{w}_x = \frac{w_x}{w_\infty}, \quad \bar{w}_y = \frac{w_y}{w_\infty}.$$

Тогда  $x = \bar{x}l$ ,  $y = \bar{y}l$ ,  $w_x = \bar{w}_x \cdot w_\infty$ ,  $w_y = \bar{w}_y \cdot w_\infty$  и подстановка в (a) дает

$$\frac{w_\infty}{l} \left( \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (20.1)$$

Из (20.1) видно, что приведение уравнения сплошности к безразмерной форме не изменило его. Обезразмерим уравнение движения для стационарного режима

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) + g \vartheta \beta, \quad (20.2)$$

вводя безразмерные переменные  $\vartheta_w = T_w - T_\infty$ ,  $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_w} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$ ,  $\bar{p} = \frac{p}{p_\infty}$ :

$$\frac{w_\infty^2}{l} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{p_\infty}{\rho l} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{w_\infty}{l^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} \right) + g \beta \vartheta_w \theta.$$

Разделим все члены уравнения на комплекс  $\frac{\nu w_\infty}{l^2}$ , тогда:

$$\frac{w_{\infty} l}{\nu} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{p_{\infty} l}{\rho w_{\infty} \nu} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{g \beta \vartheta_w \theta l^2}{\nu w_{\infty}},$$

$$\frac{p_{\infty} l}{w_{\infty} \nu \rho} \cdot \frac{w_{\infty}}{w_{\infty}} = \frac{p_{\infty}}{\rho w_{\infty}^2} \cdot \frac{w_{\infty} l}{\nu} = \text{EuRe},$$

$$\frac{g \beta \vartheta_w l^2}{\nu w_{\infty}} \cdot \frac{l}{l} \cdot \frac{\nu}{\nu} = \frac{g \beta \vartheta_w l^3}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\frac{w_{\infty} l}{\nu}} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}}.$$

$$\text{Re} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} \right) = -\text{EuRe} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \cdot \theta \quad (20.3)$$

Уравнение движения в безразмерном виде содержит три безразмерных критерия подобия:

$\text{Re} = \frac{w_{\infty} l}{\nu}$  - критерий Рейнольдса - характеризует соотношение между силами инерции и силами вязкости,

$\text{Eu} = \frac{p_{\infty}}{\rho w_{\infty}^2}$  - критерий Эйлера - соотношение между силами статического давления и

удвоенным динамическим напором  $\left( \text{часто он записывается в виде } \text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho w_{\infty}^2} \right)$ .

$\text{Gr} = \frac{\beta g \vartheta_w l^3}{\nu^2}$  - критерий Грасгофа - характеризует соотношение между подъемными силами и силами вязкости.

Обезразмерим уравнение энергии. Для стационарного режима можно написать:

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Вводя обозначения  $\vartheta = T - T_{\infty}$ ,  $\vartheta_w = T_w - T_{\infty}$ ,  $\bar{w}_x = \frac{w_x}{w_{\infty}}$ ,  $\bar{w}_y = \frac{w_y}{w_{\infty}}$ ,  $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_w}$ , получим

безразмерную форму

$$\frac{w_{\infty} \vartheta_w}{l} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) = a \frac{\vartheta_w}{l^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right).$$

Разделим обе части на комплекс  $a \frac{\vartheta_w}{l^2}$ :

$$\frac{w_{\infty} l}{a} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2}.$$

$$\text{Введем критерий Пекле } \text{Pe} = \frac{w_{\infty} l}{a} = \frac{w_{\infty} l C_p \rho}{\lambda} \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta} = \frac{w_{\infty} C_p \rho \vartheta}{\lambda \frac{\vartheta}{l}},$$

где выражение в числителе характеризует конвективный теплоперенос, а в знаменателе – перенос теплопроводностью.

$$\text{Pe} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \quad (20.4)$$

Число Пекле можно записать в виде произведения двух других безразмерных критериев и тем самым исключить из числа переменных задачи:

$$Pe = \frac{wl}{a} \cdot \frac{\nu}{\nu} = \frac{wl}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} = Re \cdot Pr,$$

где  $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu C_p \rho}{\rho \lambda} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$  - критерий Прандтля, характеризующий соотношение между теплотой, выделившейся в результате трения, и теплотой, переданной за счет теплопроводности.

Обезразмерим уравнение теплоотдачи.

$$\alpha = -\frac{\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{T_w - T_\infty}, \quad \alpha = -\frac{\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}}{\vartheta_w}, \quad \alpha = -\frac{\lambda \vartheta_w \left( \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0}}{\vartheta_w l},$$

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = -\left( \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} = Nu. \quad (20.5)$$

Здесь Nu - критерий Нуссельта (безразмерный коэффициент теплоотдачи).

Таким образом,  $\bar{x}, \bar{y}, Re, Pr, Pe, Gr, \theta, Eu, Nu, \bar{w}_x, \bar{w}_y$  могут считаться новыми переменными, которые можно разделить на независимые  $\bar{x}, \bar{y}$  и зависимые  $\theta, \bar{w}_x, \bar{w}_y$  переменные и постоянные для данной задачи при постоянных физических условиях величины: Eu, Re, Pr, Pe, Gr, Nu. Последние, в свою очередь, разделяются на определяемые критерии Nu, Eu и определяющие Re, Pr, Pe, Gr.

Полученные безразмерные уравнения теплоотдачи, движения и энергии содержат меньше переменных, чем исходные размерные, что облегчает их анализ и решение, а также обобщение результатов расчетов или экспериментов. Уравнения, записанные через новые переменные, называются критериальными уравнениями:

$$Nu = \varphi(\bar{x}_c, \bar{y}_c, Re, Pr, Gr), \quad (20.6)$$

$$\bar{w}_x = \psi(\bar{x}, \bar{y}, Re, Pr, Gr), \quad (20.7)$$

$$\theta = f(\bar{x}, \bar{y}, Re, Pr, Gr). \quad (20.8)$$

Критериальные уравнения являются основой для обработки опытных данных в безразмерном виде.

#### Уравнения сохранения для пограничного слоя

Применим полученные уравнения сохранения к пограничному слою. Для этого сделаем оценку величины слагаемых, входящих в уравнения сплошности  $\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} = 0$  и

движения  $Re \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2}$ . Так как в уравнении сплошности

$\bar{w}_x$  и  $\bar{x}$  имеют порядок равный единице (они изменяются от нуля до единицы), а  $\bar{y}$  - порядок  $\bar{\delta} = \delta/l_0$ , то и  $\bar{w}_y$  имеет порядок  $\bar{\delta}$ . Исходя из этого в уравнении движения

$\frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} \ll \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2}$ , и оно для пластины принимает вид:

$$Re \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} \quad (20.9).$$

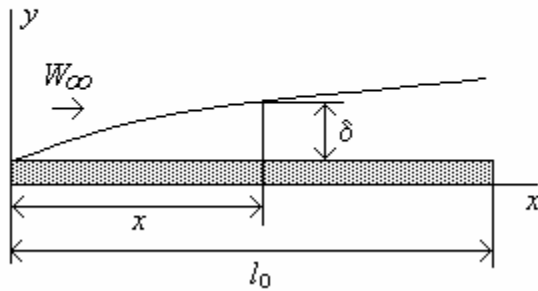


Рис.20.1

Рассмотрим уравнение энергии:

$$\text{Re} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2},$$

Аналогично уравнению движения, здесь

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} \ll \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \quad (\theta = 0 \dots 1) \text{ и можно написать:}$$

$$\text{Re} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \quad (20.10)$$

Условия подобия физических процессов

Рассматривая уравнения движения и энергии, записанные для пограничного слоя на пластине при стационарном режиме, мы видим, что они имеют одинаковую форму

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}.$$

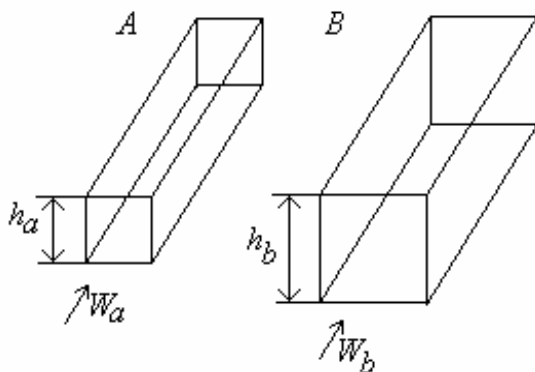
Если  $\nu = a$ , то имеется подобие между полями скоростей и температур. Таким образом, критерий Прандтля  $\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$  можно рассматривать как меру подобия полей скоростей и температур при одинаковых условиях однозначности.

Чтобы процессы были подобны, должны выполняться три условия:

1. Физические явления должны быть одинаковыми и описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями.
2. Условия однозначности должны быть одинаковы во всем, кроме размерных постоянных, содержащихся в этих условиях. Если уравнения и условия однозначности написаны в безразмерном виде, то одинаковыми должны быть как уравнения, так и условия однозначности.
3. Определяющие критерии должны быть одинаковы - idem, ( $\text{Re}_a = \text{Re}_b$ ).

Следствия из условий подобия. Пусть имеются два подобных процесса (А и В) при течении

жидкости в каналах (рис.20.2). В качестве масштаба линейных размеров выберем их высоты  $h_a$  и  $h_b$ .



$$\text{Тогда } \bar{x}_a = \frac{x_a}{h_a}; \bar{x}_b = \frac{x_b}{h_b}; \bar{y}_a = \frac{y_a}{h_a}; \bar{y}_b = \frac{y_b}{h_b}.$$

Если выполняется условие  $\bar{x}_a = \bar{x}_b$  и т.д., то говорят, что точки, удовлетворяющие этим равенствам, называются сходственными точками. Между сходственными точками существует однозначная связь. Так как по

$$\text{определению } \frac{x_a}{h_a} = \frac{x_b}{h_b}, \text{ то } x_a = \frac{h_a}{h_b} x_b = C_l x_b,$$

Рис.20.2

где  $C_l = \frac{h_a}{h_b}$  - константа геометрического подобия.

В сходственных точках, если процессы подобны, должно выполняться и кинематическое подобие, то есть:

$$\begin{aligned}\bar{w}_{ax} &= \frac{w_{ax}}{w_a}; \bar{w}_{bx} = \frac{w_{bx}}{w_b}; \bar{w}_{ax} = \bar{w}_{bx}; \\ \frac{w_{ax}}{w_a} &= \frac{w_{bx}}{w_b}; w_{ax} = \frac{w_a}{w_b} w_{bx}; w_{ax} = C_w w_{bx},\end{aligned}$$

здесь  $C_w$  - константа кинематического подобия. В общем случае, для любой физической величины, характеризующей подобные процессы, условие подобия имеет вид

$$\varphi_a = C_\varphi \varphi_b, \quad (20.11)$$

где  $C_\varphi$  - соответствующая константа подобия.

Покажем, что константы подобия не могут быть выбраны произвольно, между ними существует однозначная связь. Пусть, например, для двух подобных процессов

$$\text{выполняется условие } Re_a = Re_b, \text{ тогда } \frac{w_a h_a}{\nu_a} = \frac{w_b h_b}{\nu_b}.$$

С учетом равенств  $w_a = C_w w_b$ ,  $h_a = C_l h_b$ ,  $\nu_a = C_\nu \nu_b$  ( $C_\nu$  - константа подобия вязкости) получаем связь между  $C_w$ ,  $C_l$  и  $C_\nu$ :

$$\frac{C_w w_b C_l h_b}{C_\nu \nu_b} = \frac{w_b h_b}{\nu_b}, \text{ откуда } \frac{C_w C_l}{C_\nu} = 1.$$

Если в подобных процессах равны определяющие критерии, то равны и определяемые критерии. Например, из критериального уравнения  $Nu = f(Re, Pr)$ , следует, что при  $Re=idem$ ,  $Pr=idem$ , должно выполняться равенство  $Nu_a = Nu_b$ , откуда следует связь между соответствующими константами подобия

$$\frac{\alpha_a h_a}{\lambda_a} = \frac{\alpha_b h_b}{\lambda_b}, \frac{\alpha_b C_\alpha C_l h_b}{C_\lambda \lambda_b} = \frac{\alpha_b h_b}{\lambda_b}, \frac{C_\alpha C_l}{C_\lambda} = 1.$$

Существование такой связи накладывает жесткие ограничения на процесс моделирования физических процессов с помощью моделей меньшего размера. Применение масштабной модели влечет за собой определенное изменение скоростей потоков и часто даже использование других жидкостей для моделирования реальных явлений.

#### Метод размерностей, $\pi$ - теорема

В предыдущем параграфе критерии подобия были получены из уравнений сохранения путем их обезразмеривания, однако в ряде случаев при исследовании новых явлений составление этих уравнений представляет значительные трудности. В этом случае используют метод размерностей.

Получим критериальное уравнение  $Nu = A Re^c Pr^f$  для теплоотдачи в трубе с помощью метода размерностей.

Из математической формулировки задачи конвективного теплообмена в размерном виде следует, что коэффициент теплоотдачи в трубе зависит от шести величин - диаметра трубы, скорости потока и физических свойств жидкости (плотности, вязкости, теплопроводности и изобарной теплоемкости):

$$\alpha = f(D, w, \rho, \mu, \lambda, c_p).$$

Запишем неизвестную функцию  $f$  в правой части в виде степенной формулы

$$\alpha = A D^a w^b \rho^c \mu^d \lambda^e c_p^f. \quad (a)$$



Очевидно, что размерности правой и левой частей выражения должны быть одинаковыми. Используем это положение для нахождения показателей степени  $a, b, c, d, e, f$ . Выразим размерности всех физических величин через размерности так называемых первичных величин. Для системы СИ это длина  $L$ , время  $\tau$ , масса  $G$ , температура  $T$  (здесь перечислены только те величины, которыми мы будем пользоваться).

Имеем:

$$[\alpha] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}, \Rightarrow [\alpha] = G \tau^{-3} T^{-1} [D] = \text{м}, \Rightarrow [D] = L;$$

$$[w] = \text{м/с}, \Rightarrow [w] = L \tau^{-1} [\rho] = \text{кг/м}^3, \Rightarrow [\rho] = G L^{-3};$$

$$[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}}, \Rightarrow [\mu] = G \tau^{-1} L^{-1};$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}, \Rightarrow [\lambda] = G L \tau^{-3} T^{-1};$$

$$[c_p] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}, \Rightarrow [c_p] = L^2 \tau^{-2} T^{-1}.$$

Подставим физические величины, выраженные через первичные переменные, в (а)

$$G \tau^{-3} T^{-1} = A \cdot L^a \cdot L^b \tau^{-b} \cdot G^c L^{-3c} \cdot G^d \tau^{-d} L^{-d} \cdot G^e L^e \tau^{-3e} T^{-e} \cdot L^{2f} \tau^{-2f} T^{-f}.$$

Приравнивая показатели степени при первичных величинах слева и справа, получим уравнения, связывающие  $a, b, c, d, e$  и  $f$

$$L: 0 = a + b - 3c - d + e + 2f, \quad (b)$$

$$\tau: -3 = -b - d - 3e - 2f, \quad (c)$$

$$G: 1 = c + d + e, \quad (d)$$

$$T: -1 = -e - f. \quad (e)$$

Мы получили 4 уравнения и 6 неизвестных. Будем считать, что  $c$  и  $f$  известны и выразим через них все другие показатели:

$$e = 1 - f, \quad (k)$$

$$\text{Подставим (k) в (d): } 1 = c + d + 1 - f, \text{ откуда } d = f - c, \quad (m)$$

теперь (k) и (m) подставим в (c)

$$-3 = -b - f + c - 3 + 3f - 2f, \text{ отсюда } b = c.$$

Подставляя (k) и (m) в (b), получим

$$0 = a + c - 3c - f + c + 1 - f + 2f, \Rightarrow a = c - 1.$$

Возвращаясь к (а), имеем:

$$\alpha = A D^{c-1} w^c \rho^c \mu^{f-c} \lambda^{-f} c_p^f.$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\alpha = A \frac{D^c}{D} w^c \rho^c \frac{\mu^f}{\mu^c} \frac{\lambda}{\lambda^f} c_p^f$$

и сгруппируем члены с одинаковыми степенями

$$\frac{\alpha D}{\lambda} = A \left( \frac{wD}{\mu} \right)^c \cdot \left( \frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^f.$$

С учетом того, что  $\frac{wD}{\mu} = \frac{wD}{\nu} = \text{Re}$ ,  $\frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = \text{Pr}$ ,  $\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda}$  получаем искомое

критериальное уравнение

$$Nu = A \cdot Re^c \cdot Pr^f \quad (20.12)$$

$\pi$  - теорема гласит: число определяющих критериев равно разности между общим числом физических величин задачи и числом первичных физических величин. В рассмотренном нами случае  $6 - 4 = 2$ , поэтому в уравнении (20.12) два определяющих критерия -  $Re$  и  $Pr$ . В других случаях число физических величин, а следовательно, и определяющих критериев, может быть другим. В частности, когда влияние вынужденной и свободной конвекции соизмеримо,  $Nu = f(Re, Gr, Pr)$ .

**21. Обработка результатов экспериментальных исследований**

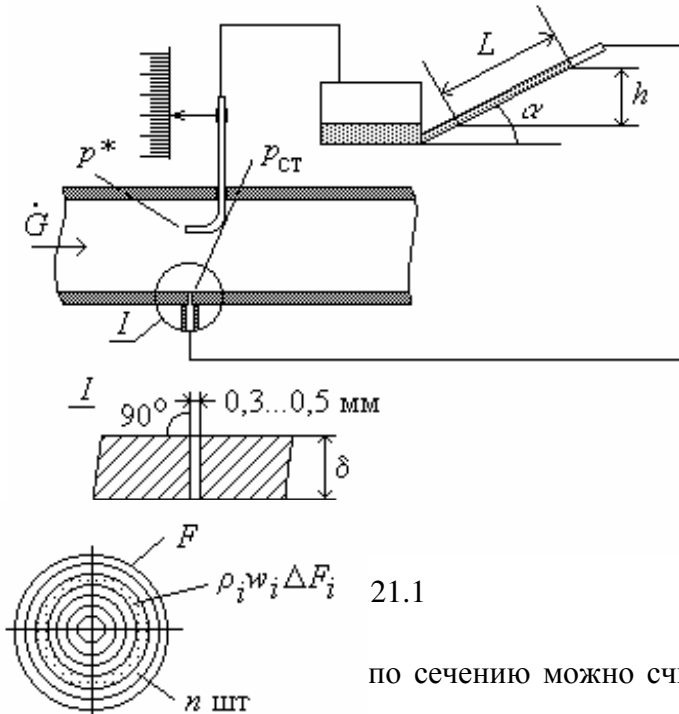
Определение средней по сечению канала скорости потока

В общем случае скорость потока переменна по сечению. Простейшая схема установки для определения локальной и средней скоростей представлена на рисунке. Микроманометром измеряется так называемый динамический напор - разность между полным давлением  $p^*$  и статическим давлением  $p_{ст}$ :  $p^* - p_{ст} = \rho_{ж}gh$ , где  $h = L \sin \alpha$

(рис.21.1). С другой стороны, согласно уравнению Бернулли,  $p^* - p_{ст} = \frac{\rho w^2}{2}$ , где  $w$  - локальная скорость в данной точке рассматриваемого сечения. Приравнявая правые части, решим уравнение относительно  $w$  и получим формулу для расчета скорости по показаниям микроманометра:  $w = \sqrt{2 \frac{\rho_{ж}}{\rho} gh}$ . На практике по результатам тарировки

трубки вводят поправочный коэффициент  $\xi$  для определения действительной скорости

$$w_d = \xi w, \quad 0 < \xi < 1.$$



Среднемассовая скорость потока  $\bar{w}$  в сечении определяется исходя из равенства записей

массового расхода через сечение  $\dot{G} = \bar{\rho} \bar{w} F$  и локальные величины

$$\dot{G} = \lim_{\substack{\Delta F_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum w_i \rho_i \Delta F_i = \int_F w \rho dF$$

(см.рис.21.2), откуда

$$\bar{w} = \frac{1}{\bar{\rho} F} \int_F w \rho dF .$$

Число Рейнольдса, как правило, рассчитывают по средней скорости

потока  $Re = \frac{\bar{w} D}{\nu}$ . Если плотность

по сечению можно считать постоянной ( $\rho \approx \bar{\rho}$ ), то выражение

для средней скорости упрощается:  $\bar{w} = \frac{1}{F} \int_F w dF .$

Рис.21.2

Определение средней по сечению температуры  
в обогреваемом канале

Для определения теплоты, получаемой потоком на участке между сечениями 1 и 2, необходимо знать средние по сечению скорости и температуру:

$$\dot{Q} = \dot{G} c_p (\bar{T}_2 - T_1).$$

Полная энтальпия, переносимая потоком в единицу времени, может быть выражена как через средние, так и локальные величины

$$\dot{I}^* = \dot{G} i^* = \dot{G} \left( i + \frac{w^2}{2} \right).$$

С учетом практически всегда выполняющегося условия

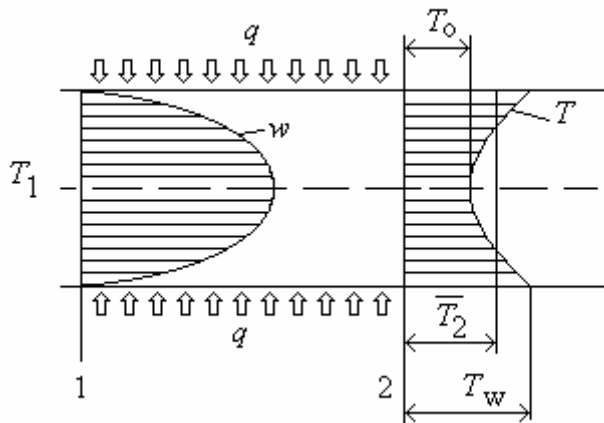


Рис.21.3

$i \gg \frac{w^2}{2}$  получаем  $i^* \approx i$ . Так как

энтальпия обладает свойством аддитивности, то

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{G} i = \bar{\rho} F \bar{c}_p \bar{T} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta F_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum w_i \rho_i c_{pi} T_i \Delta F_i = \\ &= \int_F w \rho c_p T dF, \end{aligned}$$

$$\text{откуда } \bar{T} = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{c}_p F} \int w \rho c_p T dF. \quad (21.1)$$

При постоянных по сечению плотности

и теплоемкости ( $\bar{\rho} = \rho$ ,  $\bar{c}_p = c_p$ ) имеем:

$$\bar{T} = \frac{1}{wF} \int wT dF.$$

Как видим, для определения средней по сечению температуры в обогреваемом канале необходимо знать локальные значения не только температуры, но и скорости.

Температурный напор при  $q_w = const$ .

Найдем закон изменения температуры вдоль канала при постоянном тепловом потоке через его стенки. Случай, когда  $q_w = const$  встречается, например, при электрическом или лучистом обогреве.

Согласно первому закону термодинамики, теплота, полученная потоком, идет на увеличение его энтальпии. Следовательно, для элементарного объема (см.рис.21.4) уравнение теплового баланса имеет вид

$$q_w \pi D dx = \dot{G} di^*. \quad (21.2)$$

Учет выражений  $i^* = i + \frac{w^2}{2}$ ,  $di = c_p dT$  и условия  $\frac{w^2}{2} \ll i$  приводит к дифференциальному уравнению для нахождения распределения температуры усредненной по сечению вдоль канала:

$$q_w \pi D dx = \dot{G} c_p dT, \text{ откуда } dT = \frac{q_w \pi D}{\dot{G} c_p} dx.$$

Проинтегрируем уравнение  $\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_0^l \frac{q_w \pi D}{\dot{G} c_p} dx$ ,

$$T_2 - T_1 = \frac{q_w \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} l, \tag{21.3}$$

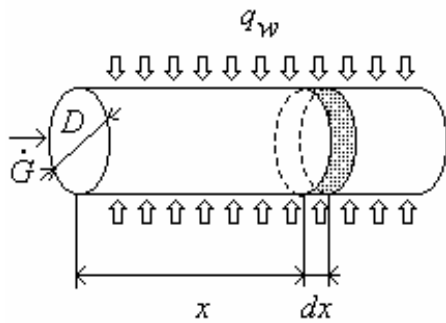


Рис.21.4

где  $\bar{c}_p = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$  - средняя изобарная

теплоемкость в интервале температур от  $T_1$  до  $T_2$ . Из (21.3) видно, что  $T$  изменяется по линейному закону

$$T = T_1 + \frac{q_w \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} x. \tag{21.4}$$

Так как закон линейный, то средняя по длине канала температура

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2} = T_1 + \frac{q_w \pi D l}{2 \dot{G} \bar{c}_p}.$$

Средняя температура стенки находится по формуле:

$$\bar{T}_w = \frac{1}{l} \int_0^l T_w(x) dx, \text{ для чего необходимы термопары,}$$

установленные на стенке трубы. Температурный напор между стенкой и потоком определяется как разность между средними температурами стенки и потока  $\Delta \bar{T} = \bar{T}_w - \bar{T}$ .

Зная, например, тепловой поток  $\dot{Q} = U \cdot I$  при электрическом нагреве трубы, можно определить средний по длине канала коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx, \text{ по формуле } \bar{\alpha} = \frac{\dot{Q}}{\Delta \bar{T} \pi D l}. \tag{21.5}$$

Температурный напор при  $T_w = const$ .

Постоянство температуры стенки обеспечивается паровым обогревом канала (см. рис.21.5), когда при конденсации пара поддерживается температура, приблизительно равная температуре насыщения  $T_S$ , зависящей от давления в паровой рубашке. Для элементарного объема с поверхностью  $\pi D dx$  уравнение, аналогичное (21.2), имеет вид

$$\alpha(T_w - T) \pi D dx = \dot{G} c_p dT. \tag{21.6}$$

Разделим переменные и проинтегрируем левую часть от  $T_1$  до  $T_2$ , а правую - от 0 до  $l$ :

$$\ln(T - T_w) \Big|_{T_1}^{T_2} = - \frac{\bar{\alpha} \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} x \Big|_0^l, \quad \ln \left( \frac{T_2 - T_w}{T_1 - T_w} \right) = - \frac{\bar{\alpha} \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} l,$$

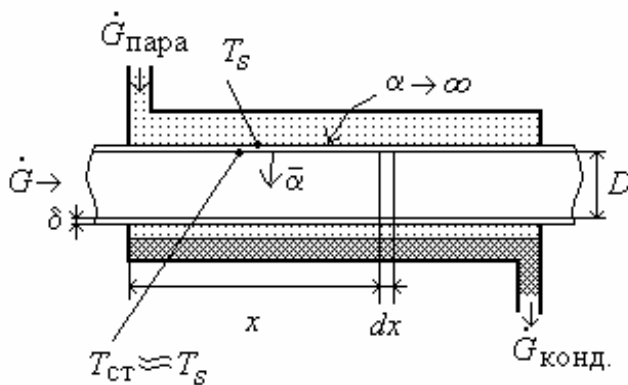


Рис.21.5

$$\ln \left( \frac{T_w - T_1}{T_w - T_2} \right) = \frac{\bar{\alpha} \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} l. \tag{21.7}$$

Интегрирование от 0 до  $x$  и от  $T_1$  до  $T$  дает закон изменения температуры по длине канала:

$$\ln \left( \frac{T_w - T_1}{T_w - T} \right) = \frac{\bar{\alpha} \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} x, \text{ откуда}$$

$$\frac{T_w - T_1}{T_w - T} = \exp \left( \frac{\bar{\alpha} \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} x \right),$$

$$T = T_w - (T_w - T_1) e^{- \left( \frac{\bar{\alpha} \pi D}{\dot{G} \bar{c}_p} x \right)} \tag{21.8}$$

Умножая левую и правую часть (21.7) на  $\frac{\dot{G}\bar{c}_p(T_2 - T_1)}{\ln\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right)}$ , получим:

$$\dot{Q} = \dot{G}\bar{c}_p(T_2 - T_1) = \bar{\alpha}\pi D l \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right)},$$

$$\text{где } \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right)} = \Delta T_{\text{лог}} \quad (\text{a})$$

- среднелогарифмический температурный напор.

Тепловой поток, переданный от пара к потоку в трубе, можно выразить через средний коэффициент теплоотдачи, площадь поверхности, участвующей в теплообмене, и логарифмический температурный напор

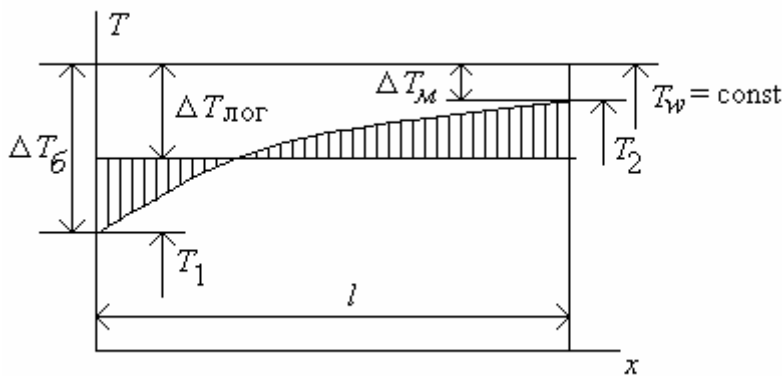
$$\dot{Q} = \bar{\alpha}\pi D l \Delta T_{\text{лог}}. \quad (21.9)$$

Преобразуем выражение для  $\Delta T_{\text{лог}}$ :

$T_2 - T_1 = (T_w - T_1) - (T_w - T_2)$ , тогда (a) перепишем в виде:

$$\Delta T_{\text{лог}} = \frac{(T_w - T_1) - (T_w - T_2)}{\ln\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right)}, \text{ или}$$

$$\Delta T_{\text{лог}} = \frac{\Delta T_{\delta} - \Delta T_{\text{м}}}{\ln\left(\frac{\Delta T_{\delta}}{\Delta T_{\text{м}}}\right)}, \quad (21.10)$$



где  $\Delta T_{\delta}$  и  $\Delta T_{\text{м}}$  - наибольший и наименьший перепады температур между стенкой и потоком (рис.21.6).

Формула (21.10) применима как для прямоточных, так и для противоточных схем.

Рис.21.6

#### Получение эмпирических уравнений в критериальном виде

Теория подобия может дать только общий вид критериального уравнения, т.е. определяет форму, в которой следует проводить обобщение экспериментальных данных. Например, для теплоотдачи в трубе при развитом турбулентном режиме теория подобия дает  $Nu = f(Re, Pr)$ . Обычно подобные функциональные зависимости аппроксимируются степенными функциями, то есть полагают  $Nu = C Re^m Pr^n$ . Определение входящих в формулу постоянных коэффициентов  $C$ ,  $m$  и  $n$  - задача экспериментального исследования. В качестве примера рассмотрим способ получения критериального уравнения для теплоотдачи при развитом турбулентном течении в трубе ( $Re \gg Re_{\text{кр}} = 2300$ ).

Пусть для какого-либо конкретного режима 1 определен расход жидкости  $\dot{G}_1 = \bar{w}_1 \rho F$ ,  $F = \frac{\pi D^2}{4}$ . Будем полагать, что жидкость несжимаема,  $\rho = \text{const}$ . Для этого режима найдем число Рейнольдса  $Re_1 = \frac{\bar{w}_1 D}{\nu}$ ;  $\bar{v} = f(\bar{T})$  по средней скорости потока

$$\bar{w}_1 = \frac{\dot{G}_1}{\rho F} = \frac{4\dot{G}_1}{\rho \pi D^2}; \quad Re_1 = \frac{4\dot{G}_1 D \rho}{\mu \rho \pi D^2} = \frac{4\dot{G}_1}{\mu \pi D}, \quad (21.11)$$

где  $\bar{\mu} = f(\bar{T})$ . Чтобы определить число Нуссельта  $Nu_1 = \frac{\bar{\alpha} D}{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda} = f(\bar{T})$ , необходимо экспериментально найти средний коэффициент теплоотдачи. Для этого воспользуемся уравнением  $\dot{Q}_1 = \bar{\alpha} \pi D L (\bar{T}_w - \bar{T})$ , где  $\dot{Q}_1 = UI$  - тепловой поток от электронагревателя к потоку.

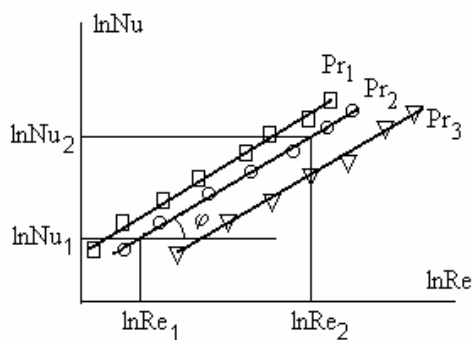


Рис. 21.7

Тогда  $\bar{\alpha}_1 = \frac{UI}{\pi D L (\bar{T}_w - \bar{T})}$ , где  $\bar{T}_w = \frac{1}{l} \int_0^l T_w(x) dx$ .

Изменяя расход и тепловую нагрузку, построим график в координатах  $\ln Nu - \ln Re$ . Обработка точек методом наименьших квадратов дает экспериментальную прямую (см. рис.21.7). Тангенс угла наклона этой прямой определяет величину показателя степени  $m$  при числе Рейнольдса в критериальном уравнении:

$$m = \frac{\ln Nu_2 - \ln Nu_1}{\ln Re_2 - \ln Re_1} = \text{tg } \varphi$$

Если в эксперименте число Прандтля можно считать постоянным (для многих газов  $Pr \approx 0,7 \approx \text{const}$ ), то его исключают из числа аргументов:

$$Nu = C Re^m.$$

Коэффициент  $C$  определяется отношением  $C = \frac{Nu}{Re^m}$ , вычисленным в любой точке

полученной прямой, например  $C = \frac{Nu_1}{Re_1^m}$ .

В диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = (5 \dots 7) \cdot 10^5$  рассмотренный подход дает следующее критериальное уравнение (формула Михеева М.А.) при развитом турбулентном течении в трубах:

$$Nu = \frac{\bar{\alpha} D}{\lambda} = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,43}. \quad (21.12)$$

## 22. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости

Приближенный метод расчета теплоотдачи на плоской пластине при ламинарном режиме течения.

### Интегральное соотношение Кармана

Выделим в пограничном слое элементарный объем 1-2-3-4 (см.рис.22.1) и запишем для него уравнения сохранения массы и количества движения. Через грань 1-2 за время  $d\tau$  переносится масса

$$\left( \int_0^{\delta} \rho w_x(y) \cdot 1 \cdot dy \right) d\tau = \left( \rho \int_0^{\delta} w_x(y) dy \right) d\tau \quad (a)$$

и количество движения

$$\left( \rho \int_0^{\delta} w_x^2(y) dy \right) d\tau, \quad (b)$$

через грань 3-4, соответственно

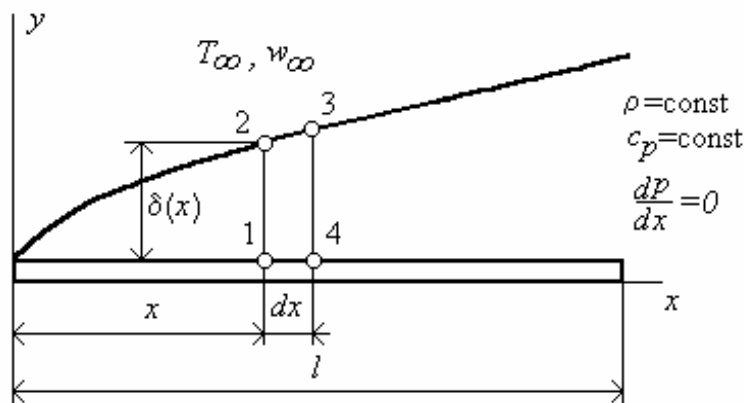


Рис.22.1

$$\left[ \rho \int_0^{\delta} w_x(y) dy + \frac{d}{dx} \left( \rho \int_0^{\delta} w_x(y) dy \right) dx \right] d\tau, \quad (c)$$

$$\text{и} \left[ \rho \int_0^{\delta} w_x^2(y) dy + \frac{d}{dx} \left( \rho \int_0^{\delta} w_x^2(y) dy \right) dx \right] d\tau. \quad (d)$$

Массу газа, которая втекла в объем через границу слоя 2-3, определим вычитанием (a) из (c):

$$dG = \frac{d}{dx} \left( \rho \int_0^{\delta} w_x(y) dy \right) dx d\tau. \quad (e)$$

Количество движения, которое вошло через грань 2-3, определяется произведением  $w_{\infty} dG$

$$w_{\infty} \frac{d}{dx} \left( \rho \int_0^{\delta} w_x(y) dy \right) dx d\tau. \quad (k)$$

Определим изменение количества движения. В элементарный объем вошло количество движения (b) +(k) , вышло (d):

$$\begin{aligned} dK &= \left( \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} w_{\infty} w_x(y) dy \right) dx - \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} w_x^2(y) dy \right) dx \right) d\tau = \\ &= \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} (w_{\infty} w_x(y) - w_x^2(y)) dy \right) dx d\tau. \end{aligned} \quad (n)$$

Из курса гидрогазодинамики известно, что скорость изменения количества движения равна сумме действующих на объем внешних сил (закон сохранения количества движения)  $\frac{d\bar{K}}{d\tau} = \sum \bar{R}$ . Результирующая сила статического давления при отсутствии продольного градиента давления равна нулю, поэтому  $R = \tau_w \cdot 1 \cdot dx$ , т.е. изменение количества движения обусловлено силами трения.

Возьмем производную от (n) по времени и приравняем ее силам трения, действующим на поток со стороны поверхности:

$$\rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} (w_{\infty} - w_x) w_x \right) dy dx = \tau_w \cdot 1 \cdot dx.$$

Сократив на  $dx$  и разделив обе части последнего уравнения на  $\rho w_{\infty}^2$ , получим интегральное соотношение Кармана

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{w_x}{w_{\infty}} \right) \frac{w_x}{w_{\infty}} dy \right] = \frac{\tau_w}{\rho w_{\infty}^2}. \quad (22.1)$$

Введем обозначения:  $\delta^{**} = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{w_x}{w_{\infty}} \right) \frac{w_x}{w_{\infty}} dy$  - толщина потери импульса и

$\delta^* = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{w_x}{w_{\infty}} \right) dy$  - толщина вытеснения. Соотношение Кармана тогда приобретает более

компактный вид :

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho w_{\infty}^2}. \quad (22.1a)$$

В случае градиентных течений ( $dp/dx \neq 0$ ), например, когда поток обтекает изогнутую поверхность, вместо (22.1a) имеем:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{w_{\infty}} \cdot \frac{dw_{\infty}}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho w_{\infty}^2}. \quad (22.2)$$

Решим уравнение (22.1). Для вычисления интеграла  $\int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{w_x}{w_{\infty}} \right) \frac{w_x}{w_{\infty}} dy$  зададимся видом

профиля скорости  $w_x(y) = a + by + cy^2 + dy^3$  и подчиним закон изменения скорости граничным условиям. Тогда для нахождения неизвестных коэффициентов полинома можно составить следующую систему уравнений

$$w_x(y) = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (a)$$

$$\frac{dw_x}{dy} = b + 2cy + 3dy^2, \quad (b)$$

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = 2c + 6dy, \quad (c)$$



$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \quad w_x &= 0, \Rightarrow a=0, \\ \text{при } y=\delta \quad w_\infty &= b\delta + c\delta^2 + d\delta^3. \end{aligned} \quad (d)$$

$$\text{Кроме того, при } y=\delta \quad \left( \frac{dw}{dy} \right)_{y=\delta} = 0, \Rightarrow b + 2c\delta + 3d\delta^2 = 0. \quad (e)$$

Запишем уравнение движения вдоль пластины для стационарного режима в виде:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

При  $y=0$ :  $w_x = 0, w_y = 0$ , поэтому  $\left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$ , тогда из (с) следует, что  $c=0$ . Кроме

того, при  $y=\delta$

$$w_\infty = b\delta + d\delta^3, \quad (k)$$

$$b + 3d\delta^2 = 0 \quad (\text{см. (e)}). \quad (m)$$

Подставим (m) в (k) тогда  $w_\infty = -3d\delta^3 + d\delta^3$ , откуда

$$d = -0,5 \frac{w_\infty}{\delta^3}. \quad (p)$$

Подставляя (p) в (m), получим  $b = 1,5 \frac{w_\infty}{\delta}$ .

Таким образом, закон изменения скорости в пограничном слое имеет вид

$$w_x(y) = 1,5 w_\infty \frac{y}{\delta} - 0,5 w_\infty \left( \frac{y}{\delta} \right)^3, \quad (22.3)$$

$$\text{или} \quad \frac{w_x(y)}{w_\infty} = 1,5 \frac{y}{\delta} - 0,5 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (22.3a)$$

Подстановка полученного профиля скорости в интеграл толщины потери импульса дает

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{w_x}{w_\infty} \right) \frac{w_x}{w_\infty} dy \approx 0,139 \delta, \quad (22.4)$$

$$\text{тогда} \quad 0,139 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho w_\infty^2}. \quad (*)$$

Так как  $\left( \frac{dw_x}{dy} \right)_{y=0} = 1,5 \frac{w_\infty}{\delta}$ , то из соотношения для напряжения трения  $\tau_w = \mu \left( \frac{dw_x}{dy} \right)_{y=0}$ ,

$$\text{получим} \quad \tau_w = \frac{1,5 \mu w_\infty}{\delta}. \quad (**)$$

Подставим (\*\*) в (\*):

$$0,139 \frac{d\delta}{dx} = 1,5 \frac{\mu w_\infty}{\delta \rho w_\infty^2}, \quad \delta d\delta = \frac{1,5}{0,139} \cdot \frac{\mu}{\rho w_\infty} dx,$$

или  $\frac{\delta^2}{2} = \frac{1,5}{0,139} \cdot \frac{\mu}{\rho w_\infty} x$ , откуда видно, что  $\delta(x) \sim x^{0,5}$ , т.е. толщина пограничного слоя

пропорциональна квадратному корню расстояния от начала пластины. Переписав последнее выражение в виде  $\delta^2 = \frac{3}{0,139} \cdot \frac{x^2 \rho}{x w_\infty \mu}$ , получим закон изменения толщины

гидродинамического пограничного слоя вдоль пластины

$$\delta(x) = \frac{4,65x}{\text{Re}_x^{0,5}}, \quad (22.5)$$

где  $\text{Re}_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$ . Найдем значение локального коэффициента трения  $c_f$ , учитывая выражение для касательного напряжения трения

$$\tau_w = c_f \frac{\rho w_\infty^2}{2}; \quad c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho w_\infty^2}{2}} = \frac{1,5\mu w_\infty}{\frac{\delta \rho w_\infty^2}{2}},$$

$$c_f = \frac{3\mu}{\delta \rho w_\infty} = \frac{3\mu \text{Re}_x^{0,5}}{4,65x \rho w_\infty} = 0,645 \frac{\text{Re}_x^{0,5}}{\text{Re}_x},$$

или 
$$c_f = \frac{0,645}{\text{Re}_x^{0,5}}. \quad (22.6)$$

Сила аэродинамического сопротивления пластины

$$F_{\text{сопр}} = 2\bar{\tau}_w lb, \quad (22.7)$$

где  $\bar{\tau}_w = \bar{c}_f \frac{\rho w_\infty^2}{2}$  - среднее напряжение трения,  $l$  - длина,  $b$  - ширина пластины.

Средний по длине коэффициент трения определим по формуле

$$\bar{c}_f = \frac{1}{l} \int_0^l c_f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{0,645}{\left(\frac{w_\infty x}{\nu}\right)^{0,5}} dx = \frac{1,29}{\text{Re}^{0,5}}, \quad (22.8)$$

где число Рейнольдса подсчитано по скорости невозмущенного потока и длине пластины  $\text{Re} = \frac{w_\infty l}{\nu}$ .

#### Тепловой пограничный слой. Уравнение Кружилина

Составим уравнение теплового баланса для неподвижного элементарного объема 1-2-3-4, выделенного в тепловом пограничном слое. Будем полагать, что  $\text{Pr} > 1$ , т.е. тепловой слой лежит внутри гидродинамического,  $h = \frac{\delta_t}{\delta} < 1$  (рис.22.2). Запишем потоки энтальпии, переносимые через грани выделенного элементарного объема на единицу ширины потока.

Грань 1-2 :  $\int_0^{\delta_r} \rho w_x(y) c_p T \cdot 1 dy$ , при  $\rho = \text{const}$ ,  $c_p = \text{const}$  получаем  $\rho c_p \int_0^{\delta_r} w_x T dy$ . (a)

Поток энтальпии, которую внесет невозмущенный поток через грань 2-3:

$$T_\infty c_p \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta_r} w_x dy \right) dx, \quad (b)$$

энтальпия, которую вынесет поток через грань 3-4

$$\rho c_p \int_0^{\delta_r} w_x T dy + \rho c_p \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta_r} w_x T dy \right) dx. \quad (c)$$

Будем считать, что  $T_w > T_\infty$ , т.е. через грань 1-4 от стенки к элементарному объему подводится тепловой поток  $q_w \cdot 1 \cdot dx$ , тогда уравнение теплового баланса (a)+(b)-(c)+ $q_w dx = 0$  принимает вид

$$\rho c_p \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta_r} w_x T dy \right) dx - T_\infty c_p \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta_r} w_x dy \right) dx = q_w dx,$$

или  $\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} (w_x T - T_\infty w_x) dy = \frac{q_w}{\rho c_p}$ . Переписав последнее уравнение в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} (T - T_\infty) w_x dy = \frac{q_w}{\rho c_p}, \tag{22.9}$$

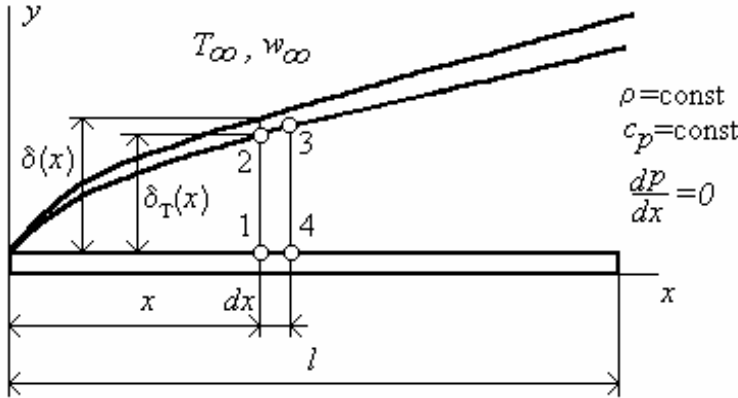


Рис.22.2

получим уравнение Кружилина. Вводя избыточную температуру  $\vartheta = T - T_w$ , преобразуем (22.9) к безразмерной форме:

$$T - T_\infty = (T - T_w) - (T_\infty - T_w) = \vartheta - \vartheta_\infty,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} - 1 \right) w_x dy = \frac{q_w}{\rho c_p \vartheta_\infty},$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} \left( \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} - 1 \right) \frac{w_x}{w_\infty} dy = \frac{q_w}{\rho c_p \vartheta_\infty w_\infty}. \tag{22.10}$$

Так как  $q_w = -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0}$ , то

уравнение (22.10) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} \left( 1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} \right) \frac{w_x}{w_\infty} dy = \frac{\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0}}{\rho c_p \vartheta_\infty w_\infty}. \tag{d}$$

Перепишем безразмерные уравнения движения (19.9) и энергии (19.10) для пограничного слоя на пластине:

$$\text{Re} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial y^2},$$

$$\text{Pe} \left( \bar{w}_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}.$$

Так как  $\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$ , то при  $\text{Pr} = 1$  получаем  $\text{Pe} = \text{Re}$ . Следовательно, записанные выше уравнения для  $\bar{w}_x(y)$  и  $\theta(y)$  идентичны и распределение температуры в тепловом пограничном слое подобно распределению скорости в динамическом пограничном слое. Тогда можно записать аналогично (22.3):

$$\vartheta(y) = 1,5 \frac{y}{\delta_r} \vartheta_\infty - 0,5 \left( \frac{y}{\delta_r} \right)^3 \vartheta_\infty. \tag{22.11}$$

Возьмем производную от (22.11) при  $y=0$ :  $\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = 1,5 \frac{\vartheta_\infty}{\delta_r}$ . Теперь правую часть (d)

можно переписать в виде  $1,5 \frac{a}{w_\infty \delta_r}$ . Взяв интеграл в левой части уравнения (d), получим

$$\int_0^{\delta_T} \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}\right) \frac{w_x}{w_\infty} dy \approx 0,15 \delta h^2, \quad (e)$$

где  $h = \frac{\delta_T}{\delta}$ . Подставив значения интеграла и производной  $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0}$  в (d) найдем, что

$$0,15 \frac{d(\delta h^2)}{dx} = 1,5 \frac{a}{w_\infty h \delta}.$$

После выполнения дифференцирования, можно написать  $h\delta(h^2 d\delta + 2h\delta dh) = 10 \frac{a}{w_\infty} dx$ . Если тепловой и гидродинамический слои зарождаются в одной точке при  $x=0$ , то  $\frac{dh}{dx} = 0$ , тогда

$$\frac{h^3 \delta d\delta}{dx} = 10 \frac{a}{w_\infty}. \quad (f)$$

При выводе уравнения Кармана было показано, что  $\frac{\delta d\delta}{dx} = \frac{1,5}{0,139} \frac{\mu}{\rho w_\infty} \approx 10 \frac{\mu}{\rho w_\infty}$ , тогда (f)

примет вид  $h^3 \frac{\mu}{\rho} = a$ , откуда  $h = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}$ . Так как  $\delta_T = h\delta$ , то с учетом (22.11), получим

$$\delta_T(x) = \frac{4,65 x}{\text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33}}. \quad (22.12)$$

#### Теплоотдача от плоской пластины при ламинарном режиме течения

Воспользуемся граничными условиями III рода для определения коэффициента теплоотдачи на пластине

$$\begin{aligned} \alpha_x (T_w - T_\infty) &= -\lambda \left( \frac{d(T - T_w)}{dy} \right)_{y=0}, \\ -\alpha_x (T_\infty - T_w) &= -\lambda \left( \frac{d(T - T_w)}{dy} \right)_{y=0}, \\ \alpha_x \vartheta_\infty &= \lambda \left( \frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0}, \quad \text{но} \quad \left( \frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} = 1,5 \frac{\vartheta_\infty}{\delta_T}, \quad \text{тогда} \\ \alpha_x &= 1,5 \frac{\lambda}{\delta_T}. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Подставляя (22.12) в (22.13), получим зависимость локального коэффициента теплоотдачи от режимных параметров потока и физических свойств жидкости

$$\alpha_x = \frac{1,5 \lambda \text{Re}_x^{0,5}}{4,65 x} \text{Pr}^{0,33}, \quad \text{или в критериальном виде}$$

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0,323 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33}. \quad (22.14)$$

Критериальное уравнение справедливо при  $\text{Re}_x < \text{Re}_{\text{кр}} = (1 \dots 2) \cdot 10^5$ .

Определим среднее значение коэффициента теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1,5\lambda \left( \frac{w_\infty x}{\nu} \right)^{0,5}}{4,65x} \text{Pr}^{0,33} dx = 2\alpha_{x=l}, \text{ откуда}$$

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} = 0,646 \text{Re}^{0,5} \text{Pr}^{0,33}, \quad (22.15)$$

где  $\text{Re} = \frac{W_\infty l}{\nu}$ .

Отметим, что формула для  $\alpha_x$  при  $x=0$  дает бесконечное значение коэффициента теплоотдачи:  $\alpha_{x=0} = \infty$ .

Тепловой поток, отдаваемый пластиной окружающей среде, определим из уравнения  $\dot{Q} = 2\bar{\alpha}(T_w - T_\infty)lb$ .

#### Связь между коэффициентами теплоотдачи и трения, аналогия Рейнольдса

Введем критерий Стентона как соотношение между тепловыми потоками, переносимыми поперек и вдоль течения:  $\text{St}_x = \frac{\alpha_x}{c_p \rho w_\infty}$ .

Умножим числитель и знаменатель на произведение  $x\lambda\mu$ :

$$\text{St}_x = \frac{\alpha_x}{c_p \rho w_\infty} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\mu} = \frac{\frac{\alpha_x x}{\lambda}}{\frac{\rho w_\infty x}{\mu} \cdot \frac{c_p \mu}{\lambda}} = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}}.$$

Таким образом, 
$$\text{St}_x = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}}.$$

Подставляя значение числа  $\text{Nu}_x$  из критериального уравнения теплоотдачи для пластины, получим

$$\text{St}_x = \frac{0,323 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{1/3}}{\text{Re}_x \text{Pr}} = \frac{0,323}{\text{Re}_x^{0,5}} \text{Pr}^{-2/3},$$

но  $\frac{0,323}{\text{Re}_x^{0,5}} = \frac{c_{f_x}}{2}$  (см. формулу (22.6)). Тогда  $\text{St}_x = \frac{c_{f_x}}{2} \text{Pr}^{-2/3}$  (22.16)

Таким образом, установлена связь между локальными коэффициентами теплоотдачи и трения для пластины, получившая название аналогии Рейнольдса

$$\frac{\alpha_x}{c_p \rho w_\infty} = \frac{c_{f_x}}{2} \text{Pr}^{-2/3}.$$

Аналогия Рейнольдса позволяет по известным гидродинамическим характеристикам течения определять его тепловые характеристики. Зная коэффициент трения из гидродинамического исследования, можно найти коэффициент теплоотдачи.

#### Турбулентный пограничный слой

При обтекании пластины жидкостью вначале формируется ламинарный пограничный слой, в котором теплота передается за счет теплопроводности (на молекулярном уровне). На некоторой координате, когда  $\text{Re}=\text{Re}_{\text{кр}}$ , он теряет устойчивость и переходит в турбулентный пограничный слой с ламинарным подслоем, где скорость меняется по линейному закону. Выделим мысленно в

турбулентной части пограничного слоя элементарную площадку (см. гл.18, рис.19.3) и рассмотрим процесс передачи теплоты через нее.

Напряжение трения, действующее на площадку, и плотность теплового потока запишем в виде

$$\tau_{\text{тб}} = \rho w'_y (\bar{w}_{xl} - \bar{w}_x) , \quad (\text{a})$$

$$q_{\text{тб}} = \rho w'_y c_p (\bar{T} - \bar{T}_l) \quad (\text{b})$$

(здесь температура и скорость осреднены по времени,  $\bar{w}_x, \bar{T}$  и  $\bar{w}_{xl}, \bar{T}_l$  - скорость и температура соответственно на координате  $y$  и  $y + l'$ ).

Выразим из (а):  $\rho w'_y = \frac{\tau_{\text{тб}}}{(\bar{w}_{xl} - \bar{w}_x)}$  и подставим в (в)

$$q_{\text{тб}} = \frac{\tau_{\text{тб}}}{(\bar{w}_{xl} - \bar{w}_x)} c_p (\bar{T} - \bar{T}_l), \text{ откуда} \quad (\text{d})$$

$$\bar{T} - \bar{T}_l = \frac{q_{\text{тб}} (\bar{w}_{xl} - \bar{w}_x)}{\tau_{\text{тб}} c_p} . \quad (\text{e})$$

Рассмотрим ламинарный подслой:

$$\tau_{\text{лп}} = \mu \frac{dw_x}{dy} = \mu \frac{w_x}{y} = \text{const} , \quad (\text{k})$$

$$q_{\text{лп}} = -\lambda \frac{dT}{dy} = \frac{\lambda}{y} (T_w - T) = q_w = \text{const} . \quad (\text{m})$$

Для границы между ламинарной и турбулентной частями пограничного слоя со стороны ламинарного подслоя можно написать:

$$\delta_{\text{лп}} = \frac{\mu w_{\text{гп}}}{\tau_w}, \quad q_w = \frac{\lambda \tau_w}{\mu w_{\text{гп}}} (T_w - T_{\text{гп}}),$$

$$T_w - T_{\text{гп}} = \frac{q_w \mu w_{\text{гп}}}{\lambda \tau_w} . \quad (\text{n})$$

Мысленно будем передвигать площадку вниз до тех пор, пока  $w_x$  не станет равной  $w_{\text{гп}}$ , а  $T = T_{\text{гп}}$ , тогда вместо (е) можно написать:

$$T_{\text{гп}} - \bar{T}_l = \frac{q_w (\bar{w}_{xl} - w_{\text{гп}})}{\tau_w c_p} . \quad (\text{p})$$

Сложим (н) и (р)

$$T_w - \bar{T}_l = \frac{q_w \mu w_{\text{гп}}}{\lambda \tau_w} + \frac{q_w (\bar{w}_{xl} - w_{\text{гп}})}{\tau_w c_p} .$$

Умножим левую и правую части уравнения на  $\alpha_x$ , а затем разделим на  $q_w$

$$\alpha_x (T_w - \bar{T}_l) = \frac{q_w \mu w_{\text{гп}}}{\lambda \tau_w} \alpha_x + \frac{q_w (\bar{w}_{xl} - w_{\text{гп}})}{\tau_w c_p} \alpha_x, \quad 1 = \frac{\mu w_{\text{гп}}}{\lambda \tau_w} \alpha_x + \frac{(\bar{w}_{xl} - w_{\text{гп}})}{\tau_w c_p} \alpha_x ,$$

$$1 = \frac{\bar{w}_{xl} \alpha_x}{\tau_w c_p} \left[ \frac{\mu w_{\text{гп}} c_p}{\bar{w}_{xl} \lambda} + 1 - \frac{w_{\text{гп}}}{\bar{w}_{xl}} \right], \quad 1 = \frac{\bar{w}_{xl} \alpha_x}{\tau_w c_p} \left[ (\text{Pr} - 1) \frac{w_{\text{гп}}}{\bar{w}_{xl}} + 1 \right], \text{ но } \tau_w = c_{f,x} \frac{\rho \bar{w}_{xl}^2}{2},$$

тогда

$$1 = \frac{\bar{w}_{xl} \alpha_x}{c_{f,x} \rho \frac{\bar{w}_{xl}^2}{2} c_p} \left[ (\text{Pr} - 1) \frac{w_{\text{гп}}}{\bar{w}_{xl}} + 1 \right], \quad \frac{c_{f,x}}{2} = \frac{\alpha_x}{\rho \bar{w}_{xl} c_p} \left[ (\text{Pr} - 1) \frac{w_{\text{гп}}}{\bar{w}_{xl}} + 1 \right], \quad \frac{c_{f,x}}{2} = \text{St}_x \left[ (\text{Pr} - 1) \frac{w_{\text{гп}}}{\bar{w}_{xl}} + 1 \right],$$

$$\text{или} \quad St_x = \frac{c_{f,x}}{2} \left[ (\text{Pr}-1) \frac{w_{\text{гр}}}{w_{xl}} + 1 \right]^{-1}, \quad (22.17)$$

$$\text{где } St_x = \frac{\alpha_x}{c_p \rho w_{xl}}; \quad \frac{w_{\text{гр}}}{w_{xl}} \approx \frac{1}{3}, \quad \text{при } \text{Pr} = 1 \quad St_x = \frac{c_{f,x}}{2}.$$

Таким образом, установлена связь между коэффициентом теплоотдачи и трения в турбулентном пограничном слое.

### Обтекание пластины при турбулентном режиме течения

Рассмотрим интегральное соотношение Кармана

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_{\text{тб}}} \left( 1 - \frac{w_x}{w_\infty} \right) \frac{w_x}{w_\infty} dy = \frac{\tau_w}{\rho w_\infty^2}. \quad (\text{a})$$

В дальнейших выкладках опустим знак осреднения, все параметры будем считать осредненными по времени.

Закон изменения скорости в турбулентном пограничном слое может быть представлен формулой

$$\left( \frac{w_x}{w_\infty} \right) = \left( \frac{y}{\delta_{\text{тб}}} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{b})$$

$n = 7 \dots 9$ , чем выше число  $Re$ , тем больше  $n$ .

Так как напряжение трения на стенке связано с производной скорости

$$\tau_w = (\mu + \mu_{\text{тб}}) \left. \frac{dw_x}{dy} \right|_{y=0}, \quad \text{то при использовании профиля (b) получается}$$

$\tau_w = \infty$ , что не отвечает действительности. Поэтому  $\tau_w$  берут из опытных данных. В частности, Блазиус получил, что при  $Re_x = \frac{w_\infty x}{\nu_\infty} = 10^5 \dots 10^7$

$$\tau_w = 0,0228 \rho w_\infty^2 \left( \frac{1}{Re_\delta} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{d})$$

где  $Re_\delta = \frac{w_\infty \delta_{\text{тб}}}{\nu_\infty}$ . Полагая  $n=7$ , находим

$$\int_0^{\delta_{\text{тб}}} \left( 1 - \frac{w_x}{w_\infty} \right) \frac{w_x}{w_\infty} dy = \frac{7}{72} \delta_{\text{тб}}. \quad (\text{e})$$

$$\text{Подставим (d) и (e) в (a):} \quad \frac{7}{72} \frac{d\delta_{\text{тб}}}{dx} = \frac{0,0228 \rho w_\infty^2}{\rho w_\infty^2} \left( \frac{\nu_\infty}{w_\infty \delta_{\text{тб}}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим закон изменения толщины турбулентного динамического пограничного слоя по длине пластины

$$\int_0^{\delta_{\text{тб}}} \delta_{\text{тб}}^{\frac{1}{4}} d\delta_{\text{тб}} = \int_0^x \frac{72 \cdot 0,0228}{7} \left( \frac{\nu_\infty}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} dx, \quad \frac{4}{5} \delta_{\text{тб}}^{\frac{5}{4}} = 0,235 \left( \frac{\nu_\infty}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} x,$$

$$\delta_{\text{тб}}^{\frac{5}{4}} = 0,235 \cdot \frac{5}{4} \left( \frac{\nu_\infty}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} x, \quad \delta_{\text{тб}} = \left[ 0,293 \left( \frac{\nu_\infty}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} x \right]^{\frac{4}{5}}.$$

Из формулы видно, что толщина турбулентного динамического пограничного слоя растет быстрее, чем ламинарного т.к.  $\delta_x \sim x^{0,8}$ . Представим закон нарастания толщины в виде зависимости от локального числа Рейнольдса :

$$\delta_{\tau_6} = 0,37 \left[ \left( \frac{v_\infty}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} x \right]^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} = 0,37 \left( \frac{v}{w_\infty x} \right)^{\frac{1}{5}} x, \quad \delta_{\tau_6}(x) = \frac{0,37x}{\text{Re}_x^{0,2}}. \quad (22.18)$$

Определим локальный коэффициент трения  $c_{fx}$

$$\begin{aligned} \tau_w = c_{f_x} \frac{\rho w_\infty^2}{2} \Rightarrow c_{f_x} &= \frac{2\tau_w}{\rho w_\infty^2} = \frac{2 \cdot 0,0228 \rho w_\infty^2}{\rho w_\infty^2} \left( \frac{v_\infty}{w_\infty \delta_{\tau_6}} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ c_{f_x} &= 0,046 \left( \frac{v_\infty}{w_\infty \delta_{\tau_6}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,046 \left( \frac{v_\infty}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\text{Re}_x^{\frac{1}{5}}}{0,37x} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,046}{0,37^{\frac{1}{4}}} \left( \frac{v_\infty}{w_\infty} \left( \frac{w_\infty x}{v_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ c_{f_x} &= 0,0592 \left[ \left( \frac{w_\infty x}{v_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{v_\infty}{w_\infty x} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad c_{f_x} = \frac{0,0592}{\text{Re}_x^{0,2}}. \end{aligned} \quad (22.19)$$

Найдем среднее по длине пластины значение коэффициента трения:

$$\bar{c}_f = \frac{1}{l} \int_0^l c_{f_x}(x) dx = \frac{5}{4} c_{f_x} \Big|_{x=l} = \frac{0,074}{\text{Re}^{0,2}}. \quad (22.20)$$

Сила сопротивления пластины турбулентному потоку  $T = 2l \cdot \bar{c}_f \frac{\rho w_\infty^2}{2}$ . Учитывая

соотношение  $\text{St}_x = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}}$ , получим критериальное уравнение для локальной теплоотдачи

при турбулентном обтекании пластины:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x = \text{St}_x \text{Re}_x \text{Pr} &= \frac{c_{f_x}}{2} \text{Pr}^{\frac{2}{3}} \text{Re}_x \text{Pr} = \frac{0,0592}{2 \text{Re}_x^{\frac{1}{5}}} \text{Re}_x \text{Pr}^{\frac{1}{3}} = 0,0296 \text{Re}_x^{\frac{4}{5}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}, \\ \text{Nu}_x &= 0,0296 \text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{0,33}. \end{aligned} \quad (22.21)$$

Вводя средний коэффициент теплоотдачи  $\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{5}{4} \alpha_{x=l}$  и число Рейнольдса

$\text{Re} = \frac{w_\infty l}{v_\infty}$ , подсчитанное по длине пластины и скорости набегающего потока, получим

критериальное уравнение для определения среднего коэффициента теплоотдачи

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda_\infty} = 0,037 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,33}. \quad (22.22)$$

Допустим, что  $T_w > T_\infty$ , тогда тепловой поток, передаваемый пластиной потоку жидкости

$$\dot{Q} = 2\bar{\alpha} lb(T_w - T_\infty), \text{ Вт.}$$

Количество теплоты, отданное за время  $\tau$

$$Q = \dot{Q} \tau, \text{ Дж.}$$



Течение в трубах

Связь между коэффициентами трения и сопротивления

Рассматривая уравнение движения

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} + g\rho$$

для безинерционного течения, т.е. когда  $\frac{D\vec{w}}{d\tau} = 0$ , и пренебрегая гравитационными силами,

запишем уравнение силового баланса для элементарного объема  $\mu \nabla^2 w = \nabla p$  (рис.22.3),

откуда для течения в трубе получим  $\frac{\pi D^2}{4} dp = \tau_w \pi dx D$ . Согласно формуле Дарси,

$$dp = \xi \frac{dx \rho \bar{w}^2}{D} . \text{ Учитывая, что } \bar{w} = \frac{G}{F\rho}, F = \frac{\pi D^2}{4}, \tau_w = c_f \frac{\rho \bar{w}^2}{2},$$

получаем 
$$c_f = \frac{\xi}{4}, \quad (22.23)$$

где  $\xi$  - коэффициент сопротивления. Таким образом, из формулы видно, что коэффициент трения меньше коэффициента сопротивления в четыре раза.

Теплоотдача в трубе при ламинарном режиме течения

При входе потока в трубу формируется пограничный слой. Рост толщины пограничного слоя приводит к тому, что на некотором расстоянии от входа пограничные слои смыкаются на оси трубы, условно разделяя течение на так называемый начальный и основной участки (см. рис.22.4) с различным видом профиля скорости. Разные профили скорости приводят и к разным законам теплоотдачи. Рассмотрим теплоотдачу на основном участке при ламинарном режиме течения ( $Re < Re_{кр} = 2300$ ) при  $q_w = \text{const}$ .

Выделим в потоке кольцевой элемент (рис.22.4) и составим уравнение теплового баланса. На координате  $R$  будем иметь:

$$\dot{Q}_R = -2\pi\lambda R \left( \frac{\partial T}{\partial R} \right) dx, \quad (a)$$

на  $R+dR$ : 
$$\dot{Q}_{R+dR} = \dot{Q}_R + d\dot{Q}, \quad (b)$$

где  $d\dot{Q} = \dot{Q}_R + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} dR$ .

Вычитая (b) из (a) получим: 
$$d\dot{Q} = \frac{\partial}{\partial R} \left( 2\pi R \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial R} \right) dx \right) dR . \quad (n)$$

На координате  $x$  энтальпия потока 
$$\dot{I}_x = c_p T \rho W_x 2\pi R dx,$$

на  $x+dx$ : 
$$\dot{I}_{x+dx} = \dot{I}_x + d\dot{I} = \dot{I}_x + \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} dx,$$
 тогда

$$d\dot{I} = \frac{\partial}{\partial x} (c_p T \rho W_x 2\pi R dx). \quad (e)$$

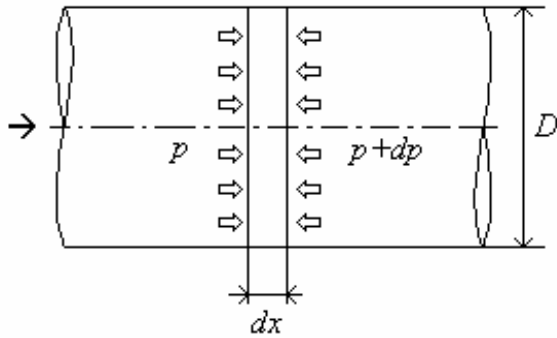


Рис. 22.3

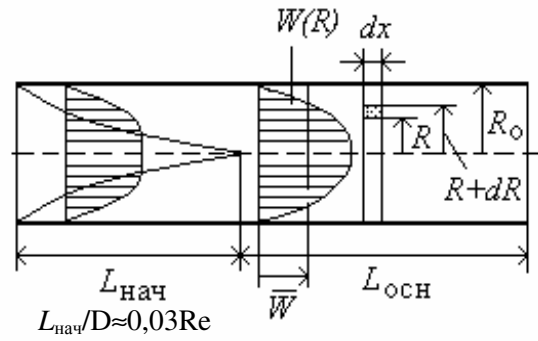


Рис.22.4

Так как тепловой поток, переданный за счет теплопроводности, идет на увеличение энтальпии жидкости в выделенном элементарном объеме, то приравняем (н) и (е):

$$2\pi\lambda \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial T}{\partial R} \right) dR dx = c_p \rho W_x 2\pi R \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dR dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = \frac{c_p \rho W_x R}{\lambda} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

При ламинарном режиме закон изменения скорости по радиусу находится по формуле:

$$W_x(R) = W_{\max} \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right), \text{ тогда } \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = \frac{c_p \rho W_{\max}}{\lambda} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right) R, \text{ но при}$$

$$q_w = \text{const} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \text{const}. \text{ Обозначим: } \frac{c_p \rho W_{\max}}{\lambda} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = A, \text{ тогда}$$

$$\frac{d}{dR} \left( R \frac{dT}{dR} \right) = A \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right) R. \tag{22.24}$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$d \left( R \frac{dT}{dR} \right) = A \left( 1 - \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \right) R dR,$$

$$R \frac{dT}{dR} = A \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R_0^2} \right) + C_1,$$

$$\frac{dT}{dR} = A \left( \frac{R}{2} - \frac{R^3}{4R_0^2} \right) + \frac{C_1}{R}. \tag{a}$$

Используем граничные условия для определения констант интегрирования:

$$\text{при } R=0 \quad \left( \frac{dT}{dR} \right)_{R=0} = 0 \Rightarrow C_1=0,$$

$$\text{при } R=R_0 \quad \left( \frac{dT}{dR} \right)_{R=R_0} = \frac{1}{4} A R_0. (*)$$

Проинтегрируем (а) с учетом  $C_1=0$ :

$$T = A \left( \frac{R^2}{4} - \frac{1}{16} \frac{R^4}{R_0^2} \right) + C_2 . \quad (b)$$

при  $R = R_0$ :  $T = T_w$ , тогда из (b)  $T_w = A \left( \frac{R_0^2}{4} - \frac{R_0^2}{16} \right) + C_2$ ,

$$T_w = A \frac{3R_0^2}{16} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_w - \frac{3}{16} AR_0^2 .$$

Подставляя константу  $C_2$  в (b), получим закон распределения температуры по радиусу трубы

$$T = A \left( \frac{R^2}{4} - \frac{1}{16} \frac{R^4}{R_0^2} \right) + T_w - \frac{3}{16} AR_0^2 \quad \text{или}$$

$$T = \frac{AR_0^2}{4} \left( \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{R_0} \right)^4 - \frac{3}{4} \right) + T_w . \quad (22.25)$$

Определим коэффициент теплоотдачи, используя граничные условия III рода

$$\alpha(T_w - T_o) = -\lambda \left( \frac{dT}{dR} \right)_{R=R_0} . \quad (c)$$

Из (22.25) при  $R=0$  следует:  $T_o - T_w = -\frac{3}{16} AR_0^2$ , тогда с учетом (\*) имеем

$$\frac{3}{16} AR_0^2 \alpha = \frac{1}{4} \lambda AR_0 , \quad (22.26)$$

откуда  $\alpha = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{R_0} = \frac{8}{3} \frac{\lambda}{D}$ . Таким образом, на основном (стабилизированном) участке

течения коэффициент теплоотдачи увеличивается с уменьшением диаметра трубы, так как уменьшается термическое сопротивление пограничного слоя.

Подставляя  $\alpha$  в выражение для числа Нуссельта, получаем для основного участка

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = \frac{8}{3} = 2,67 . \quad (22.27)$$

Если коэффициент теплоотдачи определять по перепаду между температурой стенки и средней по сечению температурой потока

$$\bar{T} = \frac{1}{F \bar{w}_{(F)}} \int w T dF , \quad \text{то } \text{Nu} = 4,36. \quad (22.28)$$

Подвод теплоты к капельной жидкости или отвод теплоты от газовой среды приводит к образованию более заполненного профиля скорости по сравнению с изотермическим течением, и наоборот (см. рис.22.5 для случая капельной жидкости), что сказывается на теплоотдаче.

В инженерной практике при расчете теплоотдачи используются критериальные уравнения, полученные разными авторами на основании экспериментальных исследований. Так, в (22.29) учитывается влияние свободной конвекции (множитель

$(\text{Gr Pr})^{0,1}$ ) и длина начального участка с помощью коэффициента  $\varepsilon_l = f\left(\frac{l}{D}\right)$ :

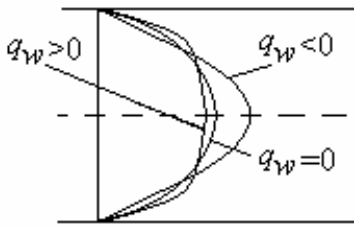


Рис.22.5

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha}D}{\lambda} = 0,15 Re^{0,32} Pr^{0,33} (Gr Pr)^{0,1} \varepsilon_l. \quad (22.29)$$

Обычно безразмерная длина начального участка при ламинарном режиме определяется зависимостью

$$\frac{l_n}{D} = 0,03 Re. \text{ Существуют и другие формулы, например,}$$

$$Nu = 1,55 \left( Pe \frac{D}{l} \right)^{0,33} \varepsilon_l. \quad (22.30)$$

Следует помнить, что критериальные уравнения можно использовать только в том диапазоне изменения определяющих критериев, для которого они были получены.

#### Теплоотдача в трубах с прямолинейной осью при турбулентном движении

Для определения коэффициента теплоотдачи воспользуемся аналогией Рейнольдса. Так, при  $Re=10^5 \dots 10^7$  коэффициент сопротивления определяется по формуле

$$\xi = 0,184 Re^{-0,2}. \quad (22.31)$$

Используя (22.31) и соотношения  $Nu = St \cdot Re \cdot Pr$ ,  $St = \frac{c_f}{2} Pr^{-2/3}$ ,  $c_f = \frac{\xi}{4}$ ,

можно получить:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,33}, \quad (22.32)$$

где  $Nu = \frac{\bar{\alpha}D}{\lambda}$ ,  $Re = \frac{\bar{w}D}{\nu}$ .

Чтобы учесть изменение теплофизических свойств потока при подводе или отводе теплоты, формулу (22.32) записывают в виде:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,43} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \varepsilon_l \quad (22.33)$$

- формула Михеева. Здесь  $Pr_f$  рассчитан по параметрам жидкости при средней температуре жидкости,  $Pr_w$  - по параметрам жидкости при температуре стенки. Поправку  $\varepsilon_l = 1 + 2/(L/D)$  вводят для коротких труб, когда  $L/D < 50$ . Формула (22.34) позволяет более точно учесть изменение коэффициента теплоотдачи при изменении направления теплового потока. Так, при нагреве капельной жидкости показатель степени  $n=0,11$ , при охлаждении  $n=0,25$ :

$$Nu = \frac{\frac{\xi}{8} Re Pr}{1,07 + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left( Pr^{2/3} - 1 \right)} \left( \frac{\mu_f}{\mu_w} \right)^n, \quad (22.34)$$

где  $\xi = \frac{1}{(1,82 \lg Re - 1,64)^2}$ .

Приведенные выше формулы позволяют рассчитывать теплоотдачу и в каналах некруглого сечения путем введения понятия эквивалентного диаметра  $D_{\text{эКВ}} = \frac{4F}{\Pi}$ , где  $F$  - площадь поперечного сечения канала, а  $\Pi$  - смоченный периметр.

Теплоотдача в изогнутых и шероховатых трубах

При движении жидкости в изогнутых трубах возможно возникновение зон отрыва потока, то есть появление так называемых вторичных течений. В точке отрыва касательное трение на стенке  $\tau_w$  становится равным нулю, т.к.  $\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{n=0} = 0$ .

Условия для отрыва потока создаются при его торможении по какой-либо причине, т.е. при  $\frac{\partial w}{\partial l} < 0$ . Вторичная циркуляция возникает при  $Re \geq Re'_{кр}$ . Например, для

течения жидкости в винтовых змеевиках при  $D/R \geq 8 \cdot 10^{-4}$   $Re'_{кр} = \frac{16,4}{\sqrt{D/R}}$ , где  $D$ -диаметр

трубы,  $R$ - радиус змеевика. Отметим, что  $Re'_{кр}$  меньше значения  $Re_{кр} = 2300$  для гладких прямых труб. Переход к турбулентному режиму происходит при  $Re''_{кр} > Re_{кр}$ :

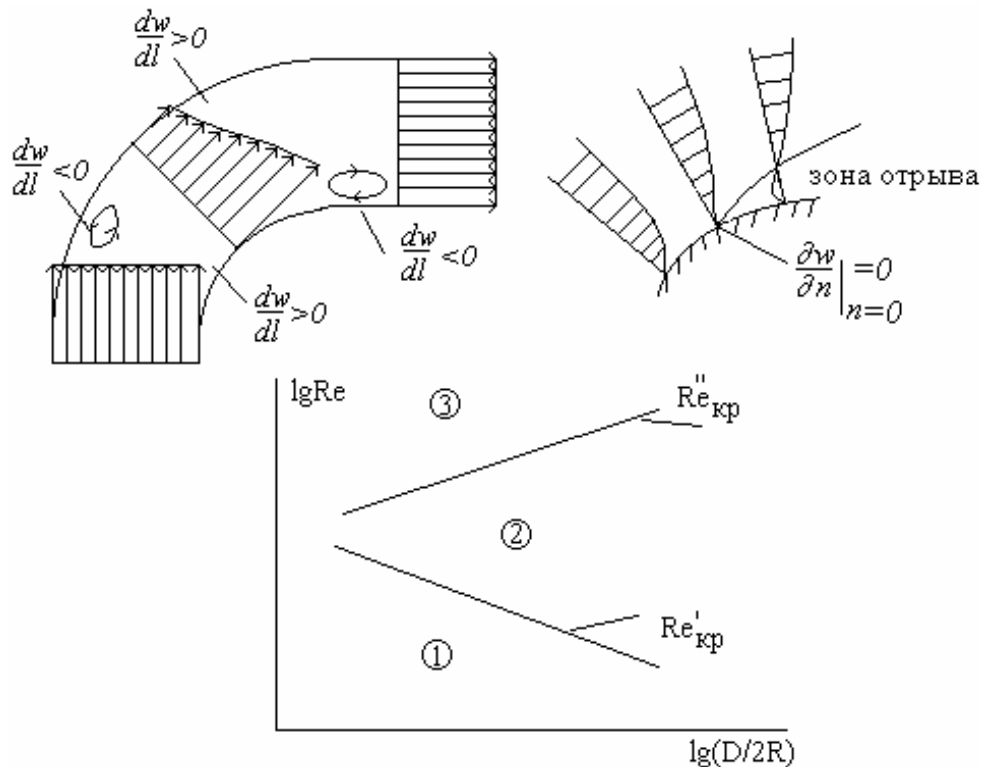


Рис. 22.6

$Re''_{кр} = 18500 (D/2R)^{0,28}$ . Области существования упомянутых режимов течения представлены на графике: 1- режим без вторичной циркуляции, 2- ламинарный режим с вторичной циркуляцией, 3- турбулентный режим при наличии вторичной циркуляции.

Вторичные течения приводят к увеличению гидродинамического сопротивления и росту коэффициента теплоотдачи, для определения которого можно пользоваться формулой Михеева с поправкой  $\epsilon_{из}$

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,43} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \epsilon_l \epsilon_{из}, \text{ где } \epsilon_{из} = 1 + 1,8 \frac{D}{R}. \quad (22.35)$$

Наличие шероховатости приводит к интенсификации теплоотдачи при турбулентном движении в том случае, когда высота бугорков шероховатости больше толщины ламинарного подслоя и появляются отрывные зоны (см.рис.22.7).

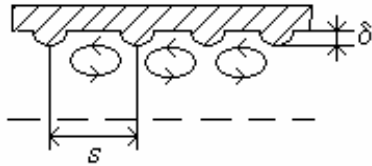


Рис.22.7

При ламинарном режиме течения увеличение интенсивности теплоотдачи обусловлено увеличением поверхности теплообмена за счет шероховатости. Шероховатость может увеличивать коэффициент теплоотдачи в 2...3 раза по сравнению с гладкой поверхностью. Однако при слишком больших бугорках возможно образование за ними застойных зон, что может даже уменьшить  $\alpha$ . Следовательно, существует оптимальное соотношение между шагом  $s$  и высотой бугорков шероховатости  $\delta$ . Исследования показали, что

$(s/\delta)_{\text{опт}} = 12...14$ . Для шероховатых труб применяется формула

$$Nu = 0,023Re^{0,8} Pr^{0,47} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \epsilon_{ш},$$

где  $\epsilon_{ш} = \exp \left[ 0,85 \left( \frac{s}{\delta} \right) / \left( \frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}} \right]$  при  $\left( \frac{s}{\delta} \right) < \left( \frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}}$ ,

$\epsilon_{ш} = \exp \left[ 0,85 \left( \frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}} / \left( \frac{s}{\delta} \right) \right]$  при  $\left( \frac{s}{\delta} \right) > \left( \frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}}$ ,  $\left( \frac{s}{\delta} \right)_{\text{опт}} = 13, Pr=1...80$ .

Теплоотдача при поперечном обтекании труб

Плавное, безотрывное обтекание трубы имеет место при  $Re = \frac{w_{\infty} D}{\nu_{\infty}} \leq 5$ . При  $Re > 5$  пограничный слой отрывается от поверхно-

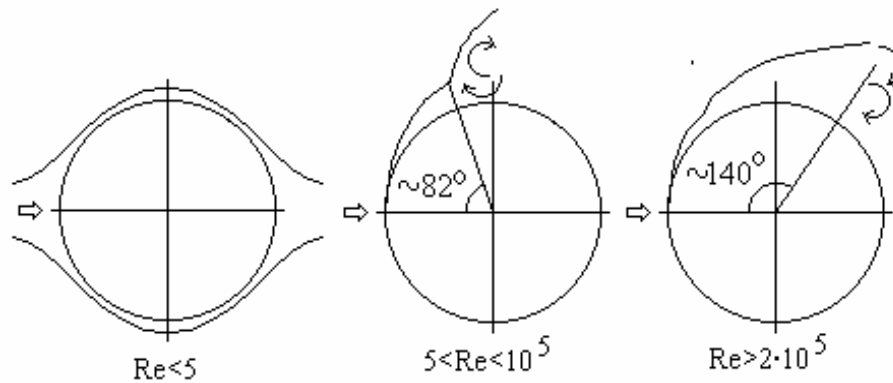


Рис.22.8

сти, причем с ростом числа Рейнольдса частота отрыва вихрей  $f$  возрастает примерно до  $Re=10^3$ , после чего становится почти постоянной величиной, характеризуемой числом

Струаля  $Sh = \frac{fD}{w_{\infty}} = 0,2$ , где  $f$  - частота отрыва вихрей, 1/с.

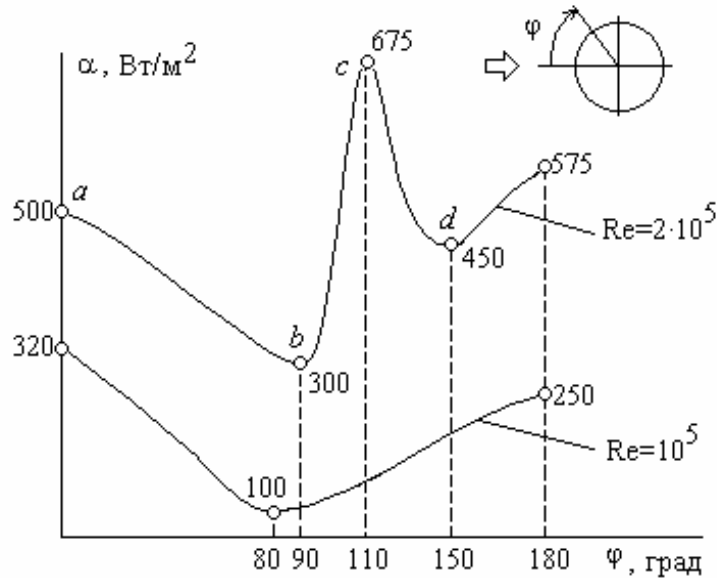


Рис.22.9

Рассмотрим характер изменения локального коэффициента теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра ( $Re=2 \cdot 10^5$ ), рис.22.9. На участке  $ab$  имеет место ламинарный погранслои, из-за роста его толщины  $\alpha$  падает. Участок  $bc$  - процесс перехода к турбулентному режиму, что сопровождается интенсификацией теплоотдачи. На участке  $cd$  с ростом толщины уже турбулентного пограничного слоя  $\alpha$  снова начинает уменьшаться. В точке  $d$  поток отрывается от поверхности, погранслои разрушается, что приводит к увеличению коэффициента теплоотдачи. Из рисунка видно, что при  $Re=10^5$  зависимость коэффициента теплоотдачи от угла несколько иная: вначале  $\alpha$  падает из-за роста толщины ламинарного пограничного слоя, а затем растет в зоне отрывного течения.

В результате исследований теплоотдачи при поперечном обтекании одиночных цилиндров были получены критериальные уравнения:

$$Nu = 0,5 Re^{0,5} Pr^{0,38} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad Re = 5 \dots 1000, \quad (22.36)$$

$$Nu = 0,25 Re^{0,6} Pr^{0,38} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad Re = 10^3 \dots 2 \cdot 10^5, \quad (22.37)$$

$$\text{где } Nu = \frac{\bar{\alpha}D}{\lambda_\infty}; \quad Re = \frac{w_\infty D}{\nu_\infty}.$$

Теплоотдача при поперечном обтекании труб зависит от степени турбулентности набегающего потока, под которой понимают отношение

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left( \overline{w_x'^2} + \overline{w_y'^2} + \overline{w_z'^2} \right)}}{\overline{w_\infty}}.$$

При  $Tu \leq 0,14$  и  $Re Tu = 10^2 \dots 10^4$  справедлива формула

$$Nu_{\text{турб}} = Nu_0 \left( 1 + 0,09(Re Tu)^{0,2} \right), \quad (22.38)$$

где  $Nu_0$  - число Нуссельта, определенное по формуле (22.37).

Если поток обтекает трубу не по нормали, а под каким-то углом (рис.22.10), то

$$\bar{\alpha}_\psi = \bar{\alpha}|_{\psi=90^\circ} (1 - 0,54 \cos^2 \psi), \text{ при } \psi = 30^\circ \dots 90^\circ. \quad (22.39)$$

### Теплоотдача при поперечном обтекании

#### пучков труб

Большинство теплообменных аппаратов состоят из пучков труб (оребранных или гладких), поэтому рассмотрим особенности теплообмена при внешнем обтекании пучков труб потоком. Применяются два основных типа пучков: коридорные и шахматные. Характерными геометрическими параметрами являются относительные шаги между осями труб  $s_1/d$  и  $s_2/d$ . В коридорном пучке (рис.22.11) максимальное значение локального коэффициента теплоотдачи достигается при угле  $\phi=50^\circ$ . Переход к турбулентному течению происходит при  $Re_{\text{кр}} \approx 10^5$ ,  $Re = \frac{wd}{\nu}$ , где  $w$ - скорость в самом узком сечении пучка.

При  $Re = 10^3 \dots 10^5$  справедлива формула

$$Nu = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = 0,26 Re^{0,65} Pr^{0,33} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \epsilon_s \epsilon_i, \quad (22.40)$$

где  $\epsilon_s = \left( \frac{s_2}{d} \right)^{-0,15}$  - коэффициент влияния шага вдоль

потока, коэффициент  $\epsilon_i$  учитывает номер ряда в пучке. С увеличением номера ряда  $i$  коэффициент теплоотдачи возрастает, так как первые ряды действуют как турбулизаторы и увеличивают интенсивность теплообмена и максимальное значение  $\alpha$  практически достигается уже к третьему ряду (см. рис.22.12). Детальное изучение течения показывает, что 90% стабилизация потока происходит после 4-го ряда и полностью завершается после 14-го ряда. Для определения коэффициента теплоотдачи всего пучка в целом производится осреднение по всем рядам:

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \bar{\alpha}_i F_i}{\sum F_i}, \quad (22.41)$$

где  $\bar{\alpha}_i, F_i$ - соответственно средний коэффициент теплоотдачи и суммарная поверхность трубок  $i$ -го ряда. Число Рейнольдса подсчитывается по скорости в наиболее сжатом сечении пучка.

Для шахматных пучков (рис.22.13) применяется та же формула, но с другими постоянными коэффициентами:

$$Nu = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = 0,41 Re^{0,6} Pr^{0,33} \left( \frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \epsilon_s \epsilon_i, \text{ Re} = 10^3 \dots 10^5, \quad (22.42)$$

при  $\frac{s_1}{s_2} < 2$   $\epsilon_s = \left( \frac{s_1}{s_2} \right)^{\frac{1}{6}}$ , при  $\frac{s_1}{s_2} \geq 2$   $\epsilon_s = 1,12$ .

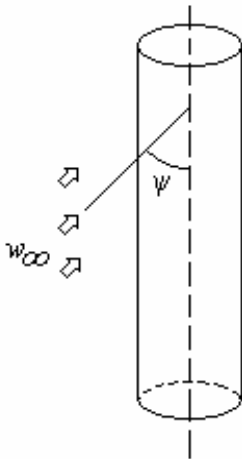


Рис.22.10



В отличие от коридорных, в шахматных пучках максимальный локальный коэффициент теплоотдачи имеет место при  $\varphi=0$ .

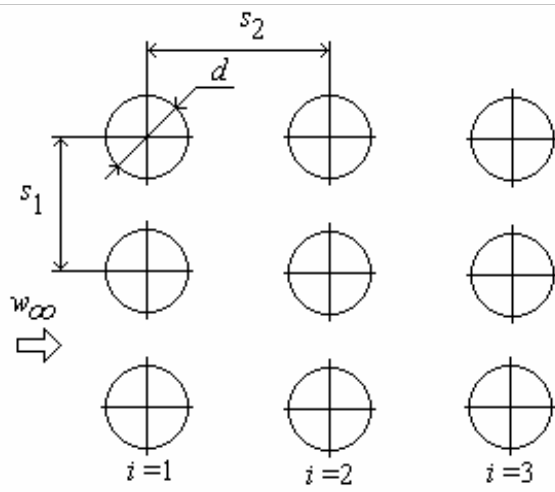


Рис.22.11

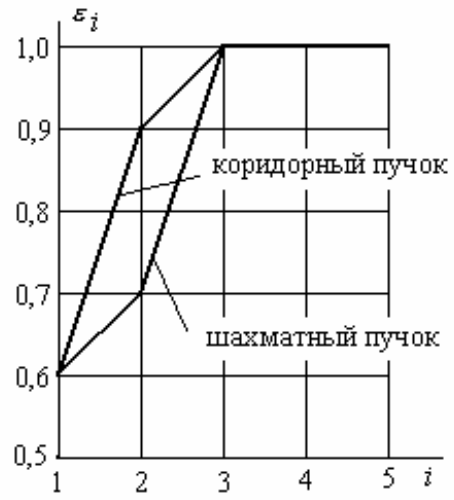


Рис.22.12

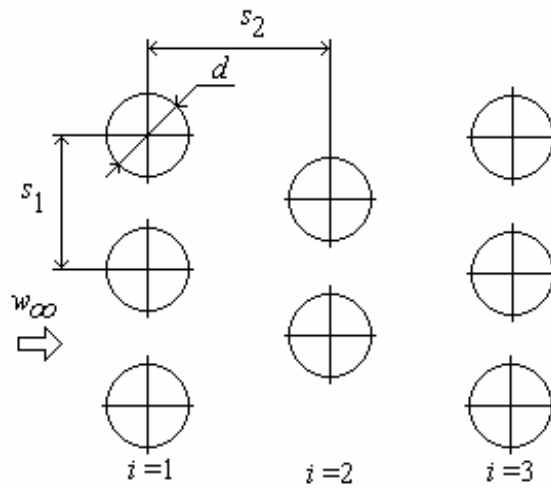


Рис.22.13

### 23. Теплоотдача при свободном движении жидкости

#### Теплоотдача от вертикальной стенки

Рассмотрим ламинарный пограничный слой у вертикальной пластины (рис.23.1)

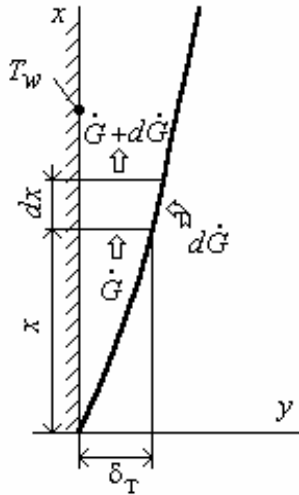


Рис.23.1

при условиях  $T_w = \text{const}$  ;  $\frac{dp}{dx} = 0$  . Теплофизические свойства

жидкости будем считать постоянными за исключением плотности, которая зависит от температуры:  $\rho = \rho_\infty(1 - \beta\vartheta)$  ,  $\vartheta = T - T_\infty$  . Считая, кроме того, что силы инерции пренебрежимо малы, т.е. преобладают подъемные и вязкостные силы, из уравнения движения получим:

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} + g(\rho_\infty - \rho) = 0 . \quad (23.1)$$

Экспериментальные исследования показали, что закон изменения избыточной температуры в тепловом пограничном слое описывается выражением

$$\vartheta = \vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^2 . \quad (a)$$

Найдем связь между толщиной пограничного слоя и коэффициентом теплоотдачи, для чего воспользуемся граничными условиями III рода:

$\alpha_x \vartheta_w = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)_{y=0}$  . С учетом (a) имеем:

$$\left.\frac{d\vartheta}{dy}\right|_{y=0} = \left[2\vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right) \left(-\frac{1}{\delta_T}\right)\right]_{y=0} ,$$

тогда  $\alpha \vartheta_w = \left[2\lambda \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right) \left(-\frac{1}{\delta_T}\right) \vartheta_w\right]_{y=0}$  , следовательно,

$$\alpha_x = \frac{2\lambda}{\delta_T} . \quad (23.2)$$

При  $\delta_T = 0$   $\alpha = \infty$  - нет термического сопротивления.

Проинтегрируем уравнение движения (23.1) с учетом (23.2) и (a):

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} + g \rho_\infty \beta \vartheta = 0, \quad \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} + g \rho_\infty \beta \vartheta_w \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{g \rho_\infty \beta \vartheta_w}{\mu} \left(1 - 2\frac{y}{\delta_T} + \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2\right) .$$

Введем обозначение  $\frac{g \rho_\infty \beta \vartheta_w}{\mu} = A$  , разделим переменные и дважды проинтегрируем:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dw_x}{dy}\right) = -A \left(1 - 2\frac{y}{\delta_T} + \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2\right), \quad \frac{dw_x}{dy} = -A \left(y - \frac{y^2}{\delta_T} + \frac{1}{3} \frac{y^3}{\delta_T^2}\right) + C_1,$$

$$w_x = -A \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3\delta_T} + \frac{1}{12} \frac{y^4}{\delta_T^2}\right) + C_1 y + C_2 . \quad (b)$$

Найдем постоянные интегрирования. При  $y = 0: w_x(y) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ ,

при  $y = \delta_T: w_x(\delta_T) = 0$ , тогда  $-A \left( \frac{\delta_T^2}{2} - \frac{\delta_T^2}{3} + \frac{\delta_T^2}{12} \right) + C_1 \delta_T = 0$ ,  $\Rightarrow C_1 = \frac{1}{4} A \delta_T$ . Подставляя  $C_1$

в (b), получим закон изменения скорости по толщине теплового пограничного слоя

$$w_x(y) = A \left( \frac{y^3}{3\delta_T} + \frac{1}{4} \delta_T y - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{12} \frac{y^4}{\delta_T^2} \right). \quad (23.3)$$

Используя (23.3) и условие  $\frac{dw_x(y)}{dy} = 0$ , можно найти расстояние от стенки, на котором

скорость в пограничном слое максимальна:  $w_x = w_{x\max}$  при  $y \approx \frac{1}{3} \delta_T$  (рис.23.2). Напишем

уравнение теплового баланса для выделенного неподвижного элемента:

$$\alpha_x \vartheta_w \cdot 1 \cdot dx = c_p \bar{\vartheta} d\dot{G}, \quad (c)$$

$$d\dot{G} = d(\bar{w} \rho_\infty \delta_T \cdot 1), \quad (d)$$

Средние по толщине пограничного слоя скорость и температуру найдем, подставляя в интегралы выражения (23.3) и (a):

$$\bar{w}_x = \frac{1}{\delta_T} \int_0^{\delta_T} w_x(y) dy = \frac{A \delta_T^2}{40}, \quad (e)$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\delta_T} \int_0^{\delta_T} \vartheta(y) dy = \frac{\vartheta_w}{3}. \quad (f)$$

Подставим (d), (e) и (f) в (c):

$\alpha_x \vartheta_w dx = \frac{\vartheta_w}{3} c_p \rho_\infty \frac{A}{40} d\delta_T^3$ , а с учетом (23.2) и выражения для  $A$

$$\frac{2\lambda}{\delta_T} dx = \frac{c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w}{120\mu} d(\delta_T^3),$$

$$\frac{2\lambda}{\delta_T} dx = \frac{c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w}{120\mu} 3\delta_T^2 d\delta_T.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{80\lambda\mu}{c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w} dx = \delta_T^3 d\delta_T, \quad \frac{\delta_T^4}{4} = \frac{80\lambda\mu}{c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w} x.$$

Таким образом, закон изменения толщины теплового пограничного слоя, развивающегося у вертикальной пластины, имеет вид

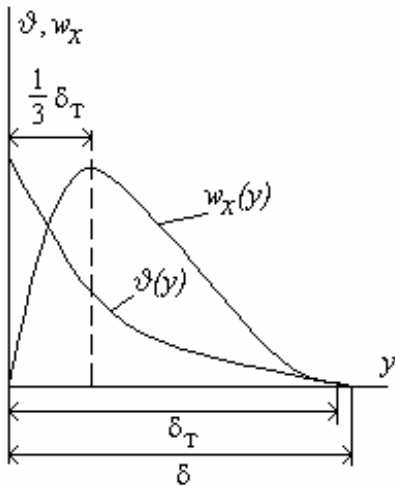
$$\delta_T = \sqrt[4]{\frac{320\lambda\mu x}{c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w}}. \quad (23.4)$$

Определим теперь локальный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_x = \frac{2\lambda}{\delta_T} = \left( \frac{16\lambda^4 c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w}{320\lambda\mu x} \right)^{0,25} = 0,473 \left( \frac{\lambda^3 c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w}{\mu x} \right)^{0,25}$$

и локальное число Нуссельта

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,473 \left( \frac{x^3}{\lambda} \cdot \frac{c_p \rho_\infty^2 g \beta \vartheta_w}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu} \right)^{0,25}.$$



Учитывая, что  $Gr_x = \frac{g\beta x^3 \vartheta_w}{\nu^2}$ ,  $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ , получаем критериальное уравнение теплоотдачи

$$Nu_x = 0,473 (Gr_x Pr)^{0,25}. \tag{23.5}$$

Средний по длине пластины коэффициент теплоотдачи равен

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha(x) dx = \frac{4}{3} \alpha|_{x=H}, \text{ а среднее число Нуссельта}$$

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{\alpha} H}{\lambda} = 0,63 (Gr \cdot Pr)^{0,25}.$$

В случае постоянной плотности теплового потока на стенке  $q_w = \text{const}$ :

$$Nu_x = 0,6 (Gr_x Pr)^{0,25}, \quad \bar{\alpha} = \frac{5}{4} \alpha|_{x=H}, \quad \bar{Nu} = 0,75 (Gr \cdot Pr)^{0,25}.$$

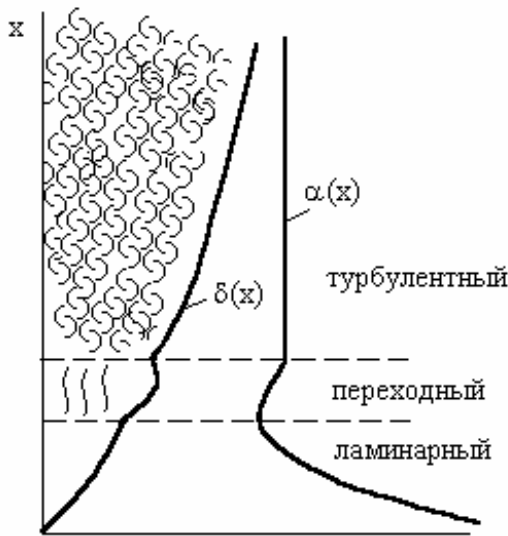


Рис.23.3

Приведенные формулы справедливы в диапазоне  $(Gr \cdot Pr) = 10^3 \dots 10^9$ , когда режим течения является ламинарным. Критическое значение для перехода к турбулентному режиму -  $(Gr \cdot Pr)_{кр} \approx 6 \cdot 10^{10}$ . При турбулентном режиме справедливы следующие зависимости:

$$Nu_x = 0,15 (Gr_x \cdot Pr)^{1/3}, \text{ или}$$

$$\frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0,15 \lambda \left( \frac{g\beta \vartheta_w x^3 c_p \mu}{\nu_\infty^2 \lambda} \right)^{1/3}, \text{ откуда видим, что}$$

при турбулентном режиме коэффициент теплоотдачи не зависит от координаты  $x$ :

$$\alpha_x = 0,15 \lambda \left( \frac{g\beta \vartheta_w c_p \mu}{\nu_\infty^2 \lambda} \right)^{1/3} \text{ (см.рис.23.3).}$$

Теплоотдача от горизонтальных труб и проволочек при свободной конвекции

Характер свободного движения около горячих горизонтальных труб представлен на рис.23.4. Чем больше диаметр трубы, тем более вероятно разрушение ламинарного пограничного слоя. У труб малого диаметра турбулентное течение может возникать вдали от трубы. Средние коэффициенты теплоотдачи при свободной конвекции около горизонтальных труб при  $Gr \cdot Pr = 10^3 \dots 10^6$  определяются по формуле

$$Nu = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = 0,5 (Gr \cdot Pr)^{0,25} \left( \frac{Pr_\infty}{Pr_w} \right)^{0,25}. \tag{23.6}$$

Около тонких проволочек диаметром  $d = 0,2 \dots 2$  мм образуется неподвижная пленка нагретой жидкости.

Такой режим называется пленочным, теплообмен осуществляется теплопроводностью. При пленочном режиме  $Gr \cdot Pr \leq 1$ ,  $Nu = 0,5$ . Определяющей температурой является средняя температура  $\bar{T} = \frac{T_\infty + T_w}{2}$ .

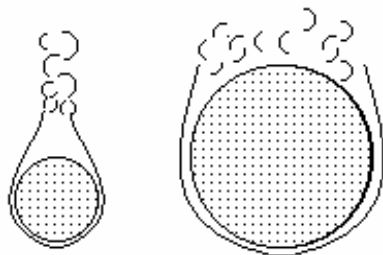


Рис.23.4

## 24. Отдельные задачи конвективного теплообмена

### Теплоотдача жидких металлов

Применение жидких металлов, таких как калий, натрий, цезий позволяет создавать высокотемпературные компактные теплообменные аппараты. Достоинство жидкометаллических теплоносителей в том, что высокая температура теплоносителей обеспечивается при низких давлениях, однако применение большинства жидких металлов требует для выполнения пожарной безопасности абсолютной герметичности ТА.

Для указанных теплоносителей характерны высокие значения коэффициента теплопроводности  $\lambda=50\ldots 90$  Вт/(м·К) и очень малые числа Прандтля  $Pr=0,005\ldots 0,05$ , поэтому в передаче теплоты существенную роль играет теплопроводность.

Для определения теплоотдачи в трубах при турбулентном режиме течения можно использовать формулы:

$$Nu = 7 + 0,025 Pe^{0,8} \text{ при } q_w = \text{const}, \quad (24.1)$$

$$Nu = 5 + 0,025 Pe^{0,8} \text{ при } T_w = \text{const}, \quad (24.2)$$

где  $Pe = Re \cdot Pr$ .

Наличие окислов на границе стенка-металл приводит к увеличению термического сопротивления и уменьшению коэффициента теплоотдачи по сравнению с величинами, определяемыми по формулам (24.1) и (24.2).

Опытное исследование позволило получить критериальное уравнение вида

$$Nu = (3,3 + 0,014 Pe^{0,8}) \varepsilon_l, \text{ где } \varepsilon_l = 1,72 \left( \frac{d}{l} \right)^{0,16} \text{ при } l/d < 30, 0 \leq Pe \leq 8 \cdot 10^3.$$

Исследование теплоотдачи при поперечном обтекании пучков труб показало, что теплоотдача в первом пучке на 20% ниже, чем в последующих. Для глубинных пучков была получена формула

$$Nu = Pe_{\text{ж}}^{0,5}.$$

Влияния расположения труб в пучке не было обнаружено. Потерю давления в трактах при течения жидких металлов определяют по традиционным формулам.

### Теплоотдача при движении газа с большой скоростью

До сих пор мы считали, что поток несжимаем, т.е.  $\rho = \text{const}$ . Это справедливо для газовых сред при сравнительно небольших скоростях, когда  $M = \frac{w}{a} = \frac{w}{\sqrt{kRT}} \leq 0,3$ . Если  $M > 0,3$ , не-

обходимо учитывать сжимаемость, а также диссипацию кинетической энергии. Тепловой пограничный слой формируется не только в результате теплообмена, но и за счет диссипации кинетической энергии движущегося с большой скоростью потока.

Получим уравнение энергии для этого случая. Сообщаемая единице массы потока теплота складывается из теплоты  $dq$ , подведенной извне теплопроводностью, и теплоты трения  $dq_{\text{тр}}$ . Согласно первому закону термодинамики, можно записать

$$dq + dq_{\text{тр}} = di - v dp, \text{ или } dq + dq_{\text{тр}} = di - \frac{1}{\rho} dp.$$

Дифференцирование последнего выражения по времени

$$\frac{dq}{d\tau} + \frac{dq_{\text{тр}}}{d\tau} = \frac{di}{d\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\tau}$$

и перегруппировка членов приводит к дифференциальному уравнению

$$\rho \frac{di}{d\tau} - \frac{dp}{d\tau} = \rho \frac{dq}{d\tau} + \rho \frac{dq_{\text{тр}}}{d\tau}.$$

Из уравнения теплопроводности следует  $\rho \frac{dq}{d\tau} = \lambda \nabla^2 T$ . Слагаемое  $\rho \frac{dq_{тр}}{d\tau}$  выразим через  $\mu\Phi$ , где  $\mu\Phi$  - диссипативная функция Рейля,

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div} \vec{w})^2 .$$

С учетом сказанного, уравнение энергии для высокоскоростного потока при отсутствии внутреннего тепловыделения ( $q_v=0$ ) принимает вид

$$\rho \frac{di}{d\tau} - \frac{dp}{d\tau} = \lambda \nabla^2 T + \mu\Phi . \quad (24.3)$$

Два новых члена уравнения  $dp/d\tau$  и  $\mu\Phi$  учитывают, соответственно, работу расширения и диссипацию кинетической энергии.

Сжимаемость потока оказывает влияние и на уравнение движения:

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} + \vec{g}\rho + \frac{1}{3} \mu \text{grad}(\text{div} \vec{w}) . \quad (24.4)$$

Уравнение сплошности остается неизменным

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{w}) = 0 .$$

Из курса гидрогазодинамики известно, что энтальпия и температура торможения определяются выражениями

$$i^* = i + \frac{w^2}{2}, \quad T^* = T_\infty \left( 1 + \frac{w^2}{2c_p T} \right) = T_\infty \left( 1 + \frac{(k-1)w^2}{2kRT} \right) .$$

Так как  $a^2 = kRT$  ( $a$  - термодинамическая скорость звука в идеальном газе), то

$$T^* = T_\infty \left( 1 + \frac{(k-1)w^2}{2a^2} \right) = T_\infty \left( 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right) .$$

Выражение для температуры адиабатической стенки отличается от температуры торможения коэффициентом восстановления  $r$ :

$$T_{aw} = T_\infty \left( 1 + r \frac{(k-1)M^2}{2} \right) , \quad (24.5)$$

где  $r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T^* - T_\infty}$  - коэффициент восстановления температуры (энтальпии). Адиабатной называется температура, которую показал бы неподвижный теплоизолированный термометр, находящийся в высокоскоростном потоке жидкости.

Термометр показал бы температуру  $T_\infty$  только в том случае, если бы он двигался вместе с потоком. Если  $r > 1$ , то интенсивность выделения теплоты трения преобладает над интенсивностью отвода теплоты в газ, если  $r < 1$ , то преобладает отвод теплоты.

При ламинарном режиме обтекания пластины

$$r = \sqrt{\text{Pr}} , \quad (24.6)$$

при турбулентном

$$r = \sqrt[3]{\text{Pr}} . \quad (24.7)$$

Физические свойства газа для вычисления числа Прандтля должны определяться при так называемой эталонной температуре, введенной Эккертом:

$$T_{эТ} = T_\infty + 0,5(T_w - T_\infty) + 0,22(T_{aw} - T_\infty) . \quad (24.8)$$

Рассмотрим изменение температуры в пограничном слое, представленное на рис.24.1. Кривая 2 соответствует случаю теплоизолированной стенки ( $T_w = T_{aw}$ ). Повышение темпе-

ратуры газа относительно  $T_\infty$  вызвано выделением теплоты в пограничном слое, причем отвод теплоты происходит только в газ. Кривая 3 отражает случай, когда выделившаяся теплота отводится как в поток, так и в стенку, что приводит к уменьшению температуры стенки по сравнению с адиабатической ( $T_w < T_{aw}$ ). В случае, когда тепловой поток направлен от стенки в газ,  $T_w > T_{aw}$  (кривая 1). Таким образом, в быстродвижущемся газе тепловой поток направлен от стенки в газ, если  $T_w > T_{aw}$  и от газа в стенку - при  $T_w < T_{aw}$ . Поэтому для определения плотности теплового потока в уравнение Ньютона-Рихмана следует вместо температуры

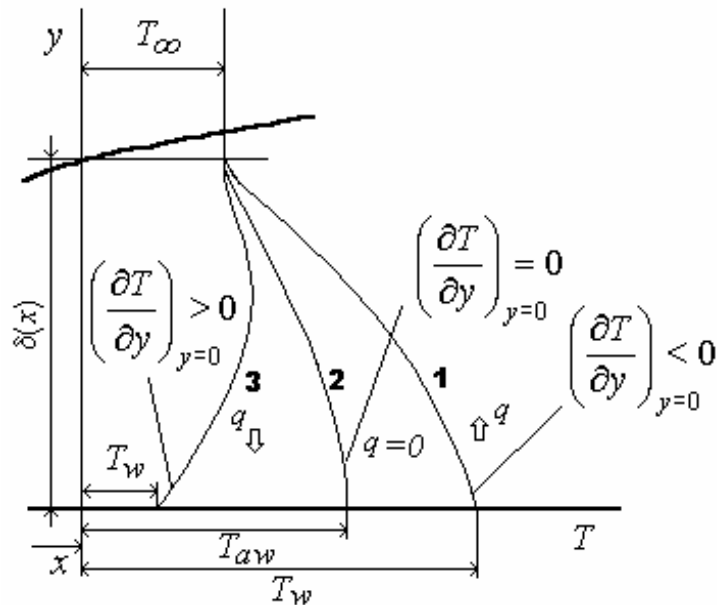


Рис. 24.1

невозмущенного потока  $T_\infty$  ввести температуру адиабатической стенки  $T_{aw}$ :  
 $q = \alpha(T_w - T_{aw})$ . (24.9)

Коэффициент теплоотдачи при охлаждении турбулентного потока воздуха, движущегося в трубе со сверхзвуковой скоростью ( $M > 1$ ), может быть определен, например, из уравнения

$$\text{Nu} = 0,022 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,43} \left( \frac{T_f}{T^*} \right)^{0,42} \varepsilon_l, \quad (24.10)$$

где  $T_f$  - средняя по сечению термодинамическая температура газа;

$$\varepsilon_l = 1,38 \left( \frac{d}{x} \right)^{0,12} \text{ при } \frac{x}{d} < 15.$$

## 25. Теплообмен при фазовых превращениях

### Теплообмен при конденсации пара

#### Основные положения

Во многих теплообменных аппаратах имеют место фазовые переходы. При конденсации чистого пара на поверхности возможны две ситуации: поверхность смачивается жидкостью (плёночная конденсация), или не смачивается (капельная конденсация). Коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации больше,  $\alpha_{\text{кап}} > \alpha_{\text{плён}}$ . Все конденсаторы паровых турбин рассчитываются в предположении, что поверхности труб смачиваются. Рассмотрим поверхность, на которой происходит капельная конденсация жидкости.

Смачиваемость характеризуется краевым углом  $\theta$ , образованным касательной, проведенной к поверхности жидкой фазы через точку касания трех сред, и поверхностью твердого тела. Краевой угол всегда отсчитывается через жидкость (см. рис.25.1). Вводя коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ , Н/м, составим уравнение силового баланса

$$\sigma_{1-3} = \sigma_{1-2} + \sigma_{2-3} \cos \theta, \quad (25.1)$$

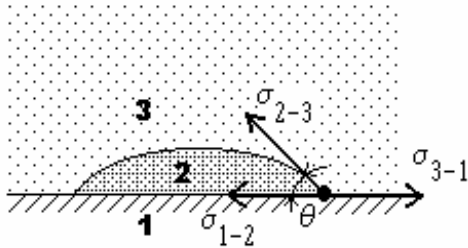


Рис. 25.1

$\sigma_{1-3} - \sigma_{1-2} - \sigma_{2-3} \geq 0$  - условие смачиваемости. При  $\theta = 0^\circ$  поверхность обладает абсолютной смачиваемостью, при  $\theta = 180^\circ$  поверхность абсолютно не смачивается данной жидкостью. Рассмотрим конденсацию неподвижного чистого пара на вертикальной стенке при  $T_w < T_s$ . Поток пара, конденсирующегося на поверхности пленки обозначим  $j_{п-пл}$ , а поток пара от жидкости -  $j_{пл-п}$ . Тогда результирующий поток массы пара равен  $\Delta j = j_{п-пл} - j_{пл-п} = (\rho_{п} w_{п})_{T_s} - (\rho_{п} w_{п})_{T_{пл}}$ . Подставляя

сюда выражение для плотности пара из уравнения Клапейрона  $\rho_{п} = \frac{p_{п}}{R_{п} T_{п}}$  и средней скорости молекул пара, определенной по кинетической теории газов  $w_{п} = \sqrt{\frac{R_{п} T_{п}}{2\pi}}$ , получим формулу Герца-Кнудсена

$$\Delta j = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_{п}}} \left( \frac{p_s}{\sqrt{T_s}} - \frac{p_{п}(T_{пл})}{\sqrt{T_{пл}}} \right). \quad (25.2)$$

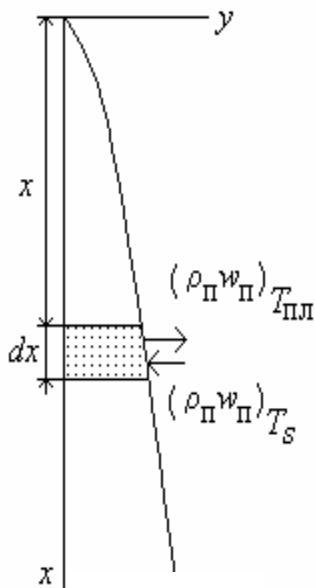


Рис. 25.2

Действительный результирующий поток массы между паром и пленкой отличается от подсчитанного по формуле (25.2):

$\Delta j_d = \Delta j \chi$ , где  $\chi$  - коэффициент конденсации, определяемый отношением количества захваченных пленкой молекул пара к количеству молекул, ударившихся о поверхность пленки -

$\chi = \frac{n_{захв}}{n_{удар}}$ . Более поздние исследования показали, что

$$\Delta j_d = \Delta j f(\chi), \text{ где } f(\chi) = \frac{\chi}{1 - 0,4\chi}; \chi = \frac{35}{p_s^{0,56}}.$$

Чем больше ударившихся молекул отражается от поверхности пленки, тем больше скачок температур (см. рис.25.3) в кнудсеновском слое, равном длине свободного пробега молекулы. Таким образом, термическое сопротивление при передаче теплоты от пара к стенке складывается из сопротивления пленки и сопротивления на границе раздела фаз.



Зависимость  $\Delta T_{ск} = f(\chi, p_s)$  характеризуется уменьшением скачка температуры при стремлении  $\chi$  к единице и с увеличением давления насыщения.

Следует особо отметить, что при конденсации пара критерий  $Re$  выполняет две функции. С одной стороны, он характеризует режим течения, например, при

$$Re_{пл} = \frac{\bar{w}_{пл} \delta_{пл}}{\nu_{ж}} > 5 \quad \text{начинается}$$

волновое, а при  $Re_{пл} \geq 400$  - турбулентное течение пленки конденсата, с другой - интенсивность теплоотдачи. Покажем это. Выделим элемент пленки длиной  $dx$  и запишем уравнение теплового баланса:

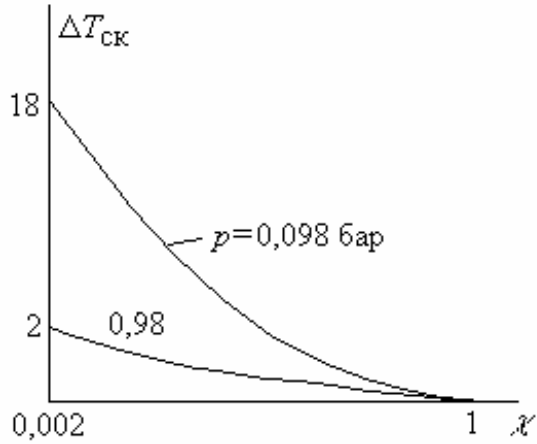


Рис.25.3

$$\alpha (T_s - T_w) dx \cdot 1 = r \cdot d\dot{G}_{пл}, \quad (a)$$

где  $\dot{G}_{пл} = \bar{w} \delta_{пл} \rho_{ж} \cdot 1$ .

Проинтегрируем (a) от 0 до  $x$   $\bar{\alpha} \Delta T \cdot x = r \bar{\delta}_{пл} \bar{w} \rho_{ж}$ , и выразим среднюю толщину пленки:

$$\bar{\delta}_{пл} = \frac{\bar{\alpha} \Delta T \cdot x}{r \bar{w} \rho_{ж}}. \quad \text{Теперь число Рейнольдса можно переписать в виде:}$$

$$Re_{пл} = \frac{\bar{w} \delta_{пл} \rho_{ж}}{\mu_{ж}} = \frac{\bar{w} \bar{\alpha} \Delta T x \rho_{ж}}{\mu_{ж} r \bar{w} \rho_{ж}} = \frac{\bar{\alpha} \Delta T x}{\mu_{ж} r}. \quad (25.3)$$

Число Рейнольдса при пленочной конденсации становится определяемым критерием, характеризующим интенсивность теплоотдачи, так как в него входит искомый коэффициент теплоотдачи.

Теплоотдача при конденсации неподвижного чистого пара на вертикальной стенке при ламинарном режиме течения пленки. (задача Нуссельта, 1916 г.)

Сделаем следующие допущения:

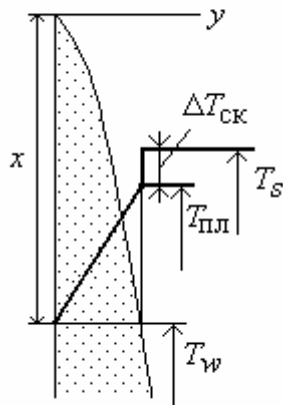


Рис.25.4

1.  $\frac{dp}{dx} = 0$  - течение пленки безградиентное;
2.  $\frac{dT}{dx} = 0$  - перенос теплоты осуществляется только поперек пленки;
3. физические свойства  $c_{рж}, \lambda_{ж}, \mu_{ж}, \rho_{ж}, \rho_{п}$  - функции температуры сухого насыщенного пара;
4. пар неподвижный и чистый;
5.  $\rho_{ж} \gg \rho_{п}''$ ;
6.  $T_{пл,y=\delta} = T_s$ , то есть  $\Delta T_{ск} = 0$ .

Найдем распределение скорости в пленке. Уравнение движения Навье-Стокса для пленки в пренебрежении силами инерции и при  $\frac{dp}{dx} = 0$  имеет вид:

$$\mu_{ж} \frac{d^2 w}{dy^2} = \rho_{ж} g \delta \sin \alpha$$

$$\mu_{\text{ж}} \frac{d^2 w_x(y)}{dy^2} + g(\rho_{\text{ж}} - \rho'') = 0, \quad (25.4)$$

или, с учетом допущения 5:  $\frac{d^2 w_x}{dy^2} + \frac{g\rho_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} = 0$ .

Обозначим  $B = \frac{g\rho_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}}$ . Интегрируя уравнение  $\frac{d}{dy} \left( \frac{dw_x}{dy} \right) = -B$  дважды, получаем

$$\frac{dw_x}{dy} = -By + c_1, \quad (a)$$

$$w_x = -\frac{1}{2}By^2 + c_1y + c_2. \quad (b)$$

Найдем постоянные  $c_1$  и  $c_2$ . При  $y = \delta_{\text{пл}}$ , так как пар неподвижен

$$\left( \frac{dw_x}{dy} \right)_{y=\delta_{\text{пл}}} = 0 \Rightarrow c_1 = B\delta_{\text{пл}}.$$

При  $y = 0$ :  $w_x = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ .

Теперь закон изменения скорости поперек пленки можно записать в виде:

$$w_x(y) = -\frac{By^2}{2} + B\delta_{\text{пл}}y. \quad (25.5)$$

Найдем закон изменения температуры пленки: так как  $\frac{d^2T}{dy^2} = 0$ , то после интегрирования

получим  $T = c_1y + c_2$ .

При  $y=0$ :  $T=T_w \Rightarrow c_2 = T_w$ ,

$$y = \delta, \quad T_s = c_1\delta_{\text{пл}} + T_w \quad (T=T_s), \quad c_1 = \frac{T_s - T_w}{\delta_{\text{пл}}}, \quad T(y) = \frac{T_s - T_w}{\delta_{\text{пл}}}y + T_w, \quad (25.6)$$

$$\frac{dT}{dy} = c_1 = \frac{T_s - T_w}{\delta_{\text{пл}}}.$$

Связь между коэффициентом теплоотдачи и толщиной пленки  $\delta_{\text{пл}}$  найдем из граничных условий III-го рода:

$$\alpha \Delta T = -\lambda \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\delta_{\text{пл}}}. \quad (25.7)$$

Запишем уравнение теплового баланса для элемента пленки

$$\alpha (T_s - T_w) dx \cdot 1 = r \cdot d\dot{G}_{\text{пл}}, \quad (*)$$

где  $d\dot{G}_{\text{пл}} = d(\bar{w}_{\text{пл}} \rho_{\text{ж}} \delta_{\text{пл}} \cdot 1)$ . Используя (25.5), найдем среднее значение скорости по толщине пленки

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{пл}} &= \frac{1}{\delta_{\text{пл}}} \cdot \int_0^{\delta_{\text{пл}}} w_x(y) dy = \frac{1}{\delta_{\text{пл}}} \cdot \int_0^{\delta_{\text{пл}}} \left( -\frac{By^2}{2} + B\delta_{\text{пл}}y \right) dy = \\ &= \frac{B}{\delta_{\text{пл}}} \left( -\frac{\delta_{\text{пл}}^3}{6} + \frac{\delta_{\text{пл}}^3}{2} \right) = \frac{B\delta_{\text{пл}}^2}{3}. \end{aligned} \quad (25.8)$$

Вернемся к (\*), с учетом (25.7) можно написать:

$$\frac{\lambda}{\delta_{\text{пл}}} \Delta T dx = \frac{r \rho_{\text{ж}} B}{3} d(\delta_{\text{пл}}^3) = r \rho_{\text{ж}} B \delta_{\text{пл}}^2 d\delta_{\text{пл}}, \text{ или } \delta_{\text{пл}}^3 d\delta_{\text{пл}} = \frac{\lambda \Delta T \mu_{\text{ж}}}{r \rho_{\text{ж}}^2 g} dx. \text{ Интегрируя}$$

уравнение в пределах  $0-\delta, 0-x$ , получим:

$$\frac{\delta_{\text{пл}}^4}{4} = \frac{\lambda_{\text{ж}} \Delta T \mu_{\text{ж}}}{r \rho_{\text{ж}}^2 g} x \text{ или } \delta_{\text{пл}} = \left( \frac{4 \lambda_{\text{ж}} \Delta T \mu_{\text{ж}} x}{r \rho_{\text{ж}}^2 g} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (25.9)$$

- зависимость толщины пленки от координаты  $x$ . Зная  $\delta_{\text{пл}}$ , можно найти локальный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_x = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta_{\text{пл}}} = \left( \frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g \lambda_{\text{ж}}^3}{4 \Delta T \mu_{\text{ж}} x} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (25.10)$$

Запишем (25.10) в безразмерном виде, выполнив ряд преобразований:

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda_{\text{ж}}} = \left( \frac{r \rho_{\text{ж}}^2 g x^3}{4 \lambda_{\text{ж}} \Delta T \mu_{\text{ж}}} \cdot \frac{\mu_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \cdot \frac{c_{\text{рж}}}{c_{\text{рж}}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,707 \left( \frac{r}{c_{\text{рж}} \Delta T} \cdot \frac{g x^3}{v_{\text{ж}}^2} \cdot \frac{c_{\text{рж}} \mu_{\text{ж}}}{\lambda_{\text{ж}}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,707 (\text{KGa}_x \text{Pr}_{\text{ж}})^{0,25}, \quad (25.11)$$

где  $\text{Ga}_x = \frac{g x^3}{v_{\text{ж}}^2}$  - число Галилея,  $\text{K} = \frac{r}{c_{\text{рж}} \Delta T}$  - критерий фазового перехода.

Найдем среднее значение коэффициента теплоотдачи при конденсации неподвижного чистого пара:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha(x) dx = \frac{4}{3} \alpha_{x=H}, \text{ тогда}$$

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} H}{\lambda_{\text{ж}}} = 0,943 \cdot (\text{K GaPr}_{\text{ж}})^{0,25}, \quad (25.12)$$

где  $\text{Ga} = \frac{g H^3}{v_{\text{ж}}^2}$ ;  $H$  - высота вертикальной стенки.

Тепловой поток, переданный стенке при конденсации насыщенного пара, определим по формуле  $\dot{Q} = \bar{\alpha} \cdot (T_s - T_w) F$  Вт, где  $F$  - площадь поверхности стенки. С другой стороны, этот же тепловой поток можно представить в виде  $\dot{Q} = r \cdot \dot{G}_{\text{конд}}$ , откуда можно найти расход сконденсировавшегося пара (конденсата):  $\dot{G}_{\text{конд}} = \frac{\bar{\alpha} \cdot (T_s - T_w) F}{r}$ .

В действительности на коэффициент теплоотдачи оказывают влияние как изменение теплофизических свойств жидкости, так и характер течения пленки (например, при  $\text{Re} > 5$  появляются волны), поэтому необходимо ввести поправки:

$$\bar{\alpha}_d = \bar{\alpha}_{\text{Nu}} \cdot \varepsilon_t \cdot \varepsilon_v \cdot \varepsilon_w, \quad (25.13)$$

где  $\varepsilon_t = \left[ \left( \frac{\lambda_{\text{ж}}(T_w)}{\lambda_{\text{ж}}(T_s)} \right)^3 \cdot \frac{\mu_{\text{ж}}(T_s)}{\mu_{\text{ж}}(T_w)} \right]^{\frac{1}{8}}$  - учитывает переменность теплофизических свойств;

$\varepsilon_v = \text{Re}_{\text{пл}}^{0,04}$  - учитывает волновой характер движения пленки;  $\varepsilon_w$  - учитывает инерционность пленки.

Д.А.Лабунцов, изучая теплоотдачу при конденсации пара, использовал не число Нуссельта, а число Рейнольдса

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\text{пл}} &= \frac{\bar{\alpha} \Delta T \cdot H}{\mu_{\text{ж}} r} \cdot \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\lambda_{\text{ж}}} \cdot \frac{c_{\text{рж}}}{c_{\text{рж}}} = \frac{\bar{\alpha} H}{\lambda_{\text{ж}}} = \frac{\text{Nu}}{\text{Pr}_{\text{ж}} \text{K}} = \\ &= 0,943 \frac{(\text{Ga Pr}_{\text{ж}} \text{K})^{\frac{1}{4}}}{\text{K Pr}_{\text{ж}}} = 0,943 \frac{\text{Ga}^{\frac{1}{4}}}{(\text{K Pr}_{\text{ж}})^{\frac{3}{4}}} = 0,943 \left( \frac{\text{Ga}^{\frac{1}{3}}}{\text{K Pr}_{\text{ж}}} \right)^{\frac{3}{4}} = 0,943 Z^{0,75}, \end{aligned} \quad (25.14)$$

где  $Z = \frac{\text{Ga}^{\frac{1}{3}}}{\text{K Pr}_{\text{ж}}}$ .

Теплоотдача при конденсации чистого пара на вертикальной стенке  
при турбулентном режиме течения пленки

При турбулентном режиме течения плотность теплового потока можно записать в виде:

$$\begin{aligned} q &= -(\lambda_{\text{ж}} + \lambda_{\text{тб}}) \frac{dT}{dy} = -(\lambda_{\text{ж}} + \rho_{\text{ж}} c_{\text{рж}} \varepsilon_q) \frac{dT}{dy} = \\ &= -\lambda_{\text{ж}} \left( 1 + \frac{\rho_{\text{ж}} c_{\text{рж}} \varepsilon_s}{\lambda_{\text{ж}} \text{Pr}_{\text{тб}}} \cdot \frac{\mu_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \right) \frac{dT}{dy} = -\lambda_{\text{ж}} \left( 1 + \frac{\text{Pr}_{\text{ж}} \varepsilon_s}{\text{Pr}_{\text{тб}} \nu_{\text{ж}}} \right) \frac{dT}{dy}, \end{aligned} \quad (25.15)$$

где  $\varepsilon_q$  - кинематический коэффициент турбулентного переноса теплоты;  $\varepsilon_s$  - кинематический коэффициент турбулентного переноса количества движения;  $\text{Pr}_{\text{тб}} = \varepsilon_s / \varepsilon_q$  - турбулентное число Прандтля.

Лабунцов, сделав допущение, что  $\varepsilon_s = \varepsilon_q = \varepsilon$ ,  $\text{Pr}_{\text{тб}} = 1$ , проинтегрировал (25.15)

$$\int_{T_c}^{T_s} dT = T_s - T_c = \alpha (T_s - T_c) \int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda_{\text{ж}} \left( 1 + \text{Pr}_{\text{ж}} \frac{\varepsilon}{\nu_{\text{ж}}} \right)}, \text{ откуда } \alpha = \frac{1}{\int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda_{\text{ж}} \left( 1 + \text{Pr}_{\text{ж}} \frac{\varepsilon}{\nu_{\text{ж}}} \right)}}$$

Результаты интегрирования в пределах  $1 \leq \text{Pr}_{\text{ж}} \leq 25$ ,  $1,5 \cdot 10^3 \leq \text{Re}_{\text{ж}} \leq 6,9 \cdot 10^4$  были аппроксимированы уравнением

$$\frac{\alpha_x}{\lambda_{\text{ж}}} \left( \frac{\nu_{\text{ж}}^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,0325 \text{Re}_{\text{пл}x}^{\frac{1}{4}} \text{Pr}_{\text{ж}}^{\frac{1}{2}}. \quad (25.16)$$

Покажем, что  $\frac{\alpha_x}{\lambda_{\text{ж}}} \left( \frac{\nu_{\text{ж}}^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{d \text{Re}_{\text{пл}x}}{dZ}$ . Так как теплота конденсации передается

стенке за счет теплопроводности пленки, то для элементарной поверхности  $1 \cdot dx$  можно написать

$$d\dot{Q}_c = \frac{\lambda_{\text{ж}}}{\delta_{\text{пл}}} (T_s - T_c) \cdot 1 \cdot dx = r d\dot{G}_{\text{пл}} = r d(\rho_{\text{ж}} \bar{w}_{\text{пл}} \delta_{\text{пл}} \cdot 1),$$

откуда  $\frac{d}{dx} (\rho_{\text{ж}} \bar{w}_{\text{пл}} \delta_{\text{пл}}) = \frac{\lambda_{\text{ж}} \Delta T}{r \delta_{\text{пл}}}. \quad (\text{a})$

Умножим выражение в скобках на  $\frac{v_{жс}}{v_{жс}}$ , тогда

$$\frac{d}{dx} \left( \rho_{ж} \bar{w}_{пл} \delta_{пл} \frac{v_{жс}}{v_{жс}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \text{Re}_{пл,x} \rho_{жс} v_{жс} \right), \quad (b)$$

где  $\text{Re}_{пл,x} = \frac{\bar{w}_{пл} \delta_{пл}}{v_{жс}}$ .

Перепишем (a) с учетом (b)

$$\frac{d \text{Re}_{пл,x}}{dx} = \frac{\lambda_{жс} \Delta T}{r \delta_{пл} \rho_{жс} v_{жс}}, \quad (c)$$

раскроем комплекс  $Z = \frac{\text{Ga}^{1/3}}{\text{KPr}_{ж}} = \left( \frac{g x^3}{v_{жс}^2} \right)^{1/3} \frac{c_{рж} \Delta T}{r} \frac{a_{ж}}{v_{ж}}$  и продифференцируем полученное вы-

ражение по  $x$ :  $dZ = \frac{g^{1/3} c_{рж} \Delta T a_{ж}}{r v_{жс}^{5/3}} dx$ , откуда  $dx = \frac{r v_{жс}^{5/3}}{g^{1/3} c_{рж} \Delta T a_{ж}} dZ$ .

Подставив  $dx$  в (c), найдем

$$\frac{d \text{Re}_{пл,x}}{dZ} = \frac{\alpha_x}{\lambda_{жс}} \left( \frac{v_{жс}^2}{g} \right)^{1/3}, \quad (d)$$

но  $\delta_{пл} = \lambda_{жс} / \alpha_x$ , тогда вместо (d) окончательно можно написать

$$\frac{d \text{Re}_{пл,x}}{dZ} = \frac{\alpha_x v_{жс}^{2/3}}{\lambda_{жс} g^{1/3}} = \frac{\alpha_x}{\lambda_{жс}} \left( \frac{v_{жс}^2}{g} \right)^{1/3}, \quad (25.17)$$

что и требовалось доказать.

Приравнявая (25.16) и (25.17), приходим к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d \text{Re}_{пл,x}}{dZ} = 0,0325 \text{Re}_{пл,x}^{0,25} \text{Pr}_{ж}^{0,5}. \quad (25.18)$$

Интегрируя (25.18), можно написать:

$$\frac{4}{3} \text{Re}_{пл,x}^{0,75} \Big|_{\text{Re}_{пл,кр}}^{\text{Re}_{пл}} = 0,0325 \cdot \text{Pr}_{ж}^{0,5} Z \Big|_{z_{кр}}^z, \quad \text{Re}_{пл,x}^{0,75} \Big|_{\text{Re}_{пл,кр}}^{\text{Re}_{пл}} = 0,024 \text{Pr}_{ж}^{0,5} Z \Big|_{z_{кр}}^z,$$

$$\text{Re}_{пл}^{0,75} - \text{Re}_{пл,кр}^{0,75} = 0,024 \text{Pr}_{ж}^{0,5} (Z - Z_{кр}),$$

$$\text{Re}_{кр}^{0,75} = 400^{0,75} = 89, \quad Z_{кр} = 2300, \text{ тогда}$$

$$\text{Re}_{пл} = \left[ 89 + 0,024 \text{Pr}_{ж}^{0,5} \cdot (Z - 2300) \right]^{4/3}, \quad (25.19)$$

где  $\text{Re} = \frac{\bar{\alpha} \Delta T \cdot H}{\mu r}$ .

Формула (25.19) позволяет определить средний по высоте вертикальной стенки коэффициент теплоотдачи при конденсации неподвижного чистого пара и учитывает теплоотдачу как на ламинарном, так и на турбулентном участках течения. Следует отметить, что она не учитывает влияние конвективной составляющей в уравнении энергии и инерционной в уравнении движения, но как показал Д.А. Лабунцов, при  $K > 5$  и  $\text{Pr}_{ж} > 1$  их влиянием можно пренебречь. Чтобы учесть зависимость теплофизических свойств от температуры, правую часть уравнения (25.19) следует умножить на  $(\text{Pr}_H / \text{Pr}_c)^{0,25}$ .

### Теплоотдача на горизонтальных трубах и внутри труб

Для определения коэффициента теплоотдачи при конденсации пара на горизонтальных трубах и ламинарном режиме течения пленки конденсата используются следующие критериальные уравнения:

$$\text{при } T_w = \text{const} \quad \text{Nu} = \frac{\bar{\alpha}D}{\lambda_{\text{ж}}} = 0,728 (\text{KGa Pr}_{\text{ж}})^{0,25}, \quad (25.20)$$

$$\text{при } q_w = \text{const} \quad \text{Nu} = \frac{\bar{\alpha}D}{\lambda_{\text{ж}}} = 0,693 (\text{KGa Pr}_{\text{ж}})^{0,25}, \quad (25.21)$$

где  $\text{Ga} = \frac{D^3 g}{\nu_{\text{ж}}^2}$ . При движении двухфазного потока внутри труб используется формула:

$$\text{Nu} = C \text{Re}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + x_1 \left( \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{п}}} - 1 \right)} + \sqrt{1 + x_2 \left( \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{п}}} - 1 \right)} \right], \quad (25.22)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – степени сухости пара на входе и выходе из трубы,

$x = \frac{\dot{G}_{\text{п}}}{\dot{G}_{\text{п}} + \dot{G}_{\text{ж}}}$ . Физические параметры определяются по температуре насыщения. Для железа (*Fe*)-  $C=0,024$ , для меди (*Cu*)-  $C=0,032$ .

Определяющим размером в числах Нуссельта и Рейнольдса является внутренний диаметр

трубы:  $\text{Nu} = \frac{D_{\text{вн}} \bar{\alpha}}{\lambda_{\text{ж}}}$ ,  $\text{Re} = \frac{4\dot{G}_{\text{см}}}{\pi D_{\text{вн}} \mu_{\text{ж}}}$ ,  $\dot{G}_{\text{см}} = \dot{G}_{\text{п}} + \dot{G}_{\text{ж}}$ . Формула (25.22) получена при

$\text{Re} \geq 5 \cdot 10^3$ , когда положение трубки в пространстве не сказывается на  $\bar{\alpha}$ .

### Теплообмен при кипении однородной жидкости

#### Режимы кипения.

Рассмотрим кипение в большом объеме. Процесс кипения возможен в том случае, если температура поверхности тела (стенки) выше температуры насыщения при данном давлении. Различают два основных режима кипения - пузырьковый и пленочный. Кипение, при котором пар образуется в виде отдельных отрывающихся от поверхности нагрева пузырьков, называется пузырьковым. Режим, характеризующийся наличием на поверхности пленки пара, отделяющей ее от жидкости, называется пленочным. Так как пленка пара представляет собой значительное термическое сопротивление, то интенсивность теплоотдачи при пленочном кипении существенно ниже, чем при пузырьковом. Все парогенераторы рассчитываются так, чтобы режим кипения был пузырьковый.

Опытные исследования показывают, что коэффициент теплоотдачи при кипении обратно пропорционален разнице между температурой поверхности нагрева и температурой насыщения жидкости:

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_s} = \frac{q}{\Delta T_{\text{пж}}}.$$

С увеличением перегрева поверхности относительно  $T_s$  наблюдаются следующие режимы (рис.25.5): I – конвективное перемешивание, II – мелкопузырьковое кипение, III – крупнопузырьковое кипение, IV – пленочное кипение.

При плотности теплового потока  $q_{\text{кр}} = (1,2 \dots 1,6) \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$  и атмосферном давлении происходит переход к пленочному режиму кипения воды, при этом  $\alpha_{\text{кр}} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$ .

Кривую кипения можно получить при паровом подогреве, при  $q_w = \text{const}$  ее получить не удастся. Так, при увеличении плотности теплового потока выше

$q_{кр1} = 8,3 \cdot 10^5$  пузырьковый режим кипения скачком переходит в пленочный (см. точку *a* на рис.25.6). При уменьшении  $q$  ниже  $q_{кр2} = 2 \cdot 10^5$  пленочный режим переходит в пузырьковый, который отвечает точке *b*. Между точками *A* и *B* на одной и той же поверхности возможно устойчивое существование двух режимов кипения. Так как  $q_{кр1} \neq q_{кр2}$ , то говорят, что имеет место гистерезис.

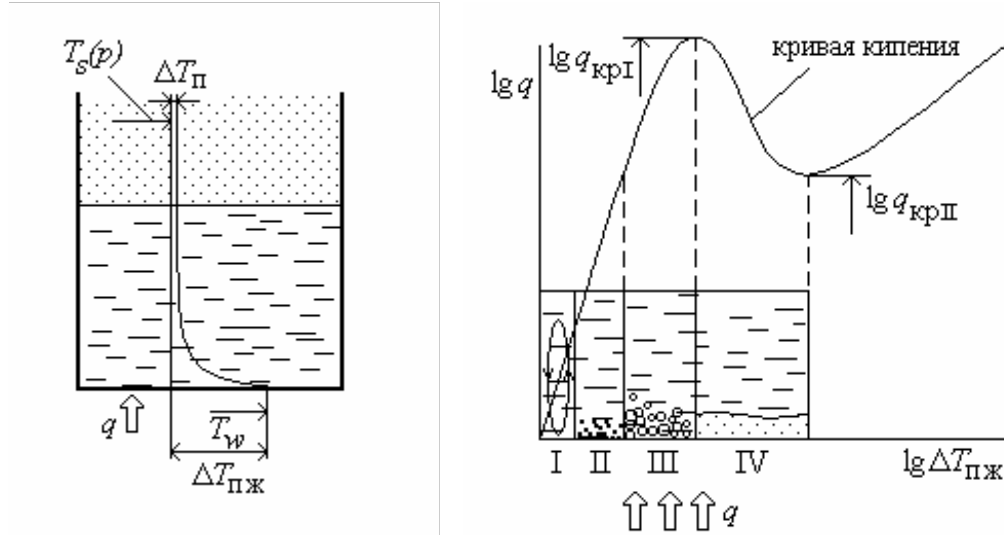


Рис.25.5

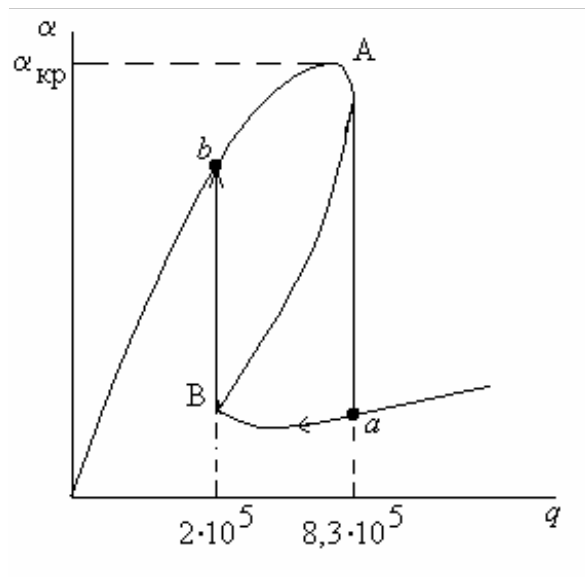


Рис.25.6

Условия зарождения парового пузырька

Зарождение парового пузырька в жидкости требует выполнения двух условий - наличия центров парообразования и перегрева жидкости относительно температуры насыщения при данном давлении. Первое условие выполняется, если в жидкости есть посторонние частицы, пузырьки газа или если стенки сосуда имеют микровпадины.

Рассмотрим более детально второе условие, используя для этой цели  $p - t$  диаграмму. В  $p - t$  диаграмме изображены три кривые (см. рис.25.7). Нижняя кривая характеризует давление пара над вогнутой поверхностью

жидкости  $p_{вог} = p_s - \frac{2\sigma}{R} \left( \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \right)$ , средняя -

давление пара над плоской поверхностью  $p_s = f(t_s)$ , верхняя - давление пара в пузырьке,

находящемся в механическом равновесии с жидкостью  $p_{п} = p_s + \frac{2\sigma}{R_{п}}$ . При тем-

пературе, равной  $T_s$ , имеем  $p_{вог} < p_s < p_{п}$ . Для того чтобы давление пара над вогнутой поверхностью стало равным  $p_s$ , жидкость необходимо перегреть относительно температуры насыщения  $T_s$  на  $\Delta T_{пж1}$ , а чтобы оно достигло  $p_{п}$ , необходимо еще перегреть ее на  $\Delta T_{пж2}$ .

Так как жидкость находится при давлении  $p_s$ , то точка *B* будет определять состояние перегретой жидкости вблизи пузырька, а точка *A* - состояние пара в пузырьке.

Связь между критическим радиусом пузырька и перегревом жидкости

Под критическим радиусом пузырька понимают такой радиус, при котором термодинамическая система жидкость - пузырь находится в неустойчивом равновесии (см. стр.95). Считают, что если в жидкости образовался пузырь радиусом меньше  $R_{кр}$ , то он гибнет. Способными к росту являются лишь те пузыри, у которых  $R > R_{кр}$ .

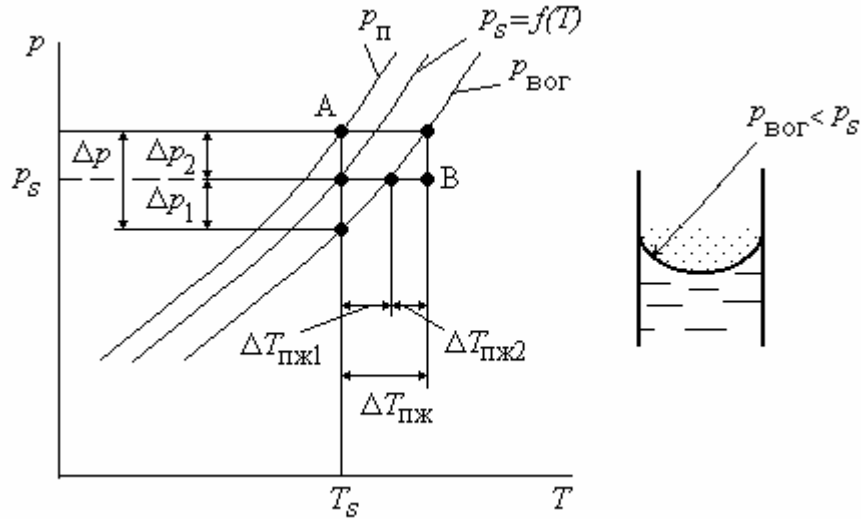


Рис. 25.7

Чтобы установить связь между критическим радиусом пузырька и перегревом жидкости, воспользуемся выражением

$$\Delta T_{\text{пж}} = \frac{dT}{dp} \Delta p, \quad (\text{a})$$

предполагая в интервале  $\Delta T_{\text{пж}}$  зависимость  $T(p)$  линейной. Перепад давления (см. рис.25.7)

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = (p_s - p_{\text{вог}}) + (p_{\text{п}} - p_s) = \frac{2\sigma}{R_{\text{п}}} \left( \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \right) + \frac{2\sigma}{R_{\text{п}}} = \frac{2\sigma}{R_{\text{п}}} \left( \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \right). \quad (\text{b})$$

Из уравнения Клапейрона-Клаузиуса  $(s'' - s')dT = (v'' - v')dp$  имеем

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v'' - v'}{s'' - s'}, \quad s'' - s' = \frac{r}{T_s}, \quad \frac{dT}{dp} = \frac{(v'' - v')T_s}{r}, \quad \text{или с учетом } v = \frac{1}{\rho},$$

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\left( \frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'} \right) T_s}{r} = \frac{(\rho' - \rho'') T_s}{\rho' \rho'' r}. \quad (\text{c})$$

Подставляя (b) и (c) в (a), получим связь между температурой перегрева жидкости и критическим радиусом пузырька:

$$\Delta T_{\text{пж}} = \frac{2\sigma T_s}{R_{\text{пкр}} \rho'' r}. \quad (25.23)$$

Исследования показывают, что критический радиус пузырька оценивается величиной  $R_{\text{пкр}} \approx 10^{-8}$  м. Расчетный перегрев жидкости при таком радиусе должен составлять несколько сот градусов. Однако в реальных системах перегрев значительно меньше определяемого по формуле (25.23). Это обусловлено наличием растворенных газов, твердых примесей, шероховатостью поверхности.



### Работа образования пузырька критического размера

Работа образования пузырька критического размера складывается из работы образования объема и работы против сил поверхностного натяжения:

$$W_{\text{пкр}} = -\Delta p V_{\text{пкр}} + \sigma F_{\text{пкр}} = -\frac{2\sigma}{R_{\text{пкр}}} \frac{4}{3} \pi R_{\text{пкр}}^3 + 4\sigma\pi R_{\text{пкр}}^2 = \frac{4}{3} \sigma\pi R_{\text{пкр}}^2. \quad (25.24)$$

Подставляя сюда выражение  $R_{\text{кр}}$  из (25.23), получим

$$W_{\text{пкр}} = \frac{4}{3} \sigma\pi \left( \frac{2\sigma T_s}{\Delta T_{\text{пж}} \rho'' r} \right)^2 = \frac{16}{3} \sigma^3 \pi \left( \frac{T_s}{\Delta T_{\text{пж}} \rho'' r} \right)^2, \quad (25.25)$$

откуда видно, что работа образования пузырька обратно пропорциональна  $\Delta T_{\text{пж}}^2$ .

### Интенсивность образования пузырьков критического размера

Исследования показывают, что интенсивность образования пузырьков  $J$  зависит от работы образования пузырька критического размера. Часто используется зависимость вида

$$J = A \exp\left(-\frac{W_{\text{пкр}}}{kT_s}\right), \quad 1/(\text{м}^3\text{с}),$$

где  $A = NB$ ;  $N \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$  - число молекул в единице объема жидкости;  $B \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$  - кинетический множитель ( $\ln A = 89,8$ );  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  - постоянная Больцмана. Согласно опытам В.П.Скрипова и его сотрудников, изучавших образование новой фазы в перегретых жидкостях, для воды, находящейся в большом объеме, справедлива формула

$$\ln J = 91 \left( \frac{W_{\text{пкр}}}{kT_s} \right). \quad (25.26)$$

### Скорость роста пузырька

Составим уравнение теплового баланса для растущего пузырька, считая, что подведенная к нему теплота идет на испарение окружающей жидкости  $\alpha(T_{\text{ж}} - T_{\text{п}})\pi D_{\text{п}}^2 d\tau = rdG_{\text{п}}$ .

Раскрывая  $G_{\text{п}}$ :  $\alpha\Delta T_{\text{п}}\pi D_{\text{п}}^2 d\tau = r\rho'' d\left(\frac{\pi D_{\text{п}}^3}{6}\right)$  и дифференцируя, получим

$$\alpha\Delta T_{\text{п}}\pi D_{\text{п}}^2 d\tau = \frac{r\rho''}{2} D_{\text{п}}^2 \pi d(D_{\text{п}}), \quad \text{или} \quad \frac{d(R_{\text{п}})}{d\tau} = \frac{\alpha\Delta T_{\text{п}}}{r\rho''}. \quad (25.27)$$

Так как рост пузыря связан с перегревом жидкости, то вводят критерий Якоба  $Ja$ , характеризующий соотношение между теплотой, идущей на перегрев единицы объема жидкости, и объемной теплотой парообразования

$$Ja = \frac{c_{\text{пж}} \Delta T_{\text{п}} \rho'}{r \rho''}. \quad (25.28)$$

Исследования показали, что при  $p > p_{\text{ос}}$  ( $p_{\text{ос}}$  - давление окружающей среды) значение  $Ja < 20$  и зависимость радиуса пузыря от критерия Якоба и времени выражается формулой

$$R_{\text{п}} = \sqrt{2\beta Ja} \sqrt{a_{\text{ж}} \tau}. \quad (25.29)$$

В этом случае рост пузырька происходит в основном за счет теплоты, поступающей от поверхности нагрева к его основанию через тонкий слой жидкости.

При  $p < p_{\text{ос}}$  -  $Ja > 20$ , теплота к пузырьку передается через межфазную поверхность, тогда

$$R_{\text{п}} = 2\gamma Ja \sqrt{a_{\text{ж}} \tau}. \quad (25.30)$$

В общем случае

$$R_{\text{п}} = \left( \gamma \text{Ja} + \sqrt{(\gamma \text{Ja})^2 + 2\beta \text{Ja}} \right) \sqrt{a_{\text{ж}} \tau}, \quad (25.31)$$

где  $\gamma = 0,1 \dots 0,49$ ;  $\beta = 6$ ;  $\theta = 40 \dots 90^\circ$ . Зависимость (25.31) получена для давлений  $p = (0,1 \dots 100) \cdot 10^5$  Па и  $\text{Ja} = 0,1 \dots 1000$ .

#### Отрывной диаметр пузырька

Запишем уравнение силового баланса для пузырька, приравняв подъемную силу силе, удерживающей его на поверхности (зависящей от коэффициента поверхностного натяжения и краевого угла):

$$\frac{\pi D_{\text{по}}^3}{6} g(\rho' - \rho'') = \pi D_{\text{по}} \sigma f(\theta),$$

где  $f(\theta)$  – некоторая функция от краевого угла, откуда с учетом опытных данных отрывной диаметр пузыря

$$D_{\text{по}} = k\theta \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}}, \quad (25.32)$$

где  $k=0,02$ , а  $\theta$  выражается в градусах.

В движущихся кипящих средах отрывной диаметр пузыря меньше, чем при кипении в большом объеме, так как в этом случае на него действуют кроме гравитационных и гидродинамические силы.

#### Пузырьковый режим кипения

Так как в парогенераторах и теплообменных аппаратах реализуется, как правило, пузырьковый режим кипения, то необходимо изучить его более подробно.

Теплообмен при пузырьковом режиме кипения в большом объеме определяется в основном съемом теплоты жидкостью, интенсивность движения которой обусловлена всплывающими пузырьками.

Запишем основные уравнения сохранения.

Уравнение движения жидкости:

$$\frac{\partial \vec{w}_{\text{ж}}}{\partial \tau} + (\vec{w}_{\text{ж}} \cdot \nabla) \vec{w}_{\text{ж}} = -\frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \nabla p + \nu_{\text{ж}} \nabla^2 \vec{w}_{\text{ж}} + \vec{g}.$$

Уравнение энергии жидкости:

$$\frac{\partial T_{\text{ж}}}{\partial \tau} + (\vec{w}_{\text{ж}} \cdot \nabla) T_{\text{ж}} = a_{\text{жс}} \nabla^2 T_{\text{ж}}.$$

Уравнение сплошности:

$$\text{div } \vec{w}_{\text{ж}} = 0.$$

Уравнение теплообмена на границе «пузырь-жидкость»:

$$-\int_{F_{\text{п}}} \lambda_{\text{ж}} \left( \frac{\partial T_{\text{ж}}}{\partial n} \right)_{n=0} dF = r \frac{d}{d\tau} (G_{\text{п}}), \quad G_{\text{п}} = \frac{\pi D_{\text{п}}^3}{6} \rho_{\text{п}}.$$

Уравнение движения пузыря:

$$\frac{\pi D_{\text{п}}^3}{6} g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}}) = c_x \frac{\pi D_{\text{п}}^2}{8} \rho_{\text{ж}} (w_{\text{п}} - w_{\text{ж}})^2,$$

где  $c_x = f(\text{Re}_{\text{п}})$  - коэффициент сопротивления,  $\text{Re}_{\text{п}} = \frac{D_{\text{п}} |w_{\text{п}} - w_{\text{ж}}|}{\nu_{\text{ж}}}$ .

Число центров парообразования:  $z = f(R_{\text{п.кр}}, D_{\text{п0}})$ , где  $R_{\text{п.кр}}$  - критический радиус пузырька;  $D_{\text{п0}}$  - отрывной диаметр пузырька.

Анализ уравнений после приведения их к безразмерному виду показывает, что  $Nu = \frac{\bar{\alpha} D_{п0}}{\lambda_{ж}} = f\left(\frac{c_{pж} \Delta T_{пер.ж}}{r}, \frac{\rho_{ж}}{\rho_{п}}, \frac{v_{ж}}{a_{ж}}, \frac{R_{п.кр}}{D_{п0}}\right)$ . Однако при  $\theta = const$   $D_{п0}$  пропорциона-

лен капиллярной постоянной  $\delta = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_{ж} - \rho_{п})}}$  (м). С учетом этого, обработка опытных данных в критериальной форме приводит к уравнению

$$Nu = \frac{\bar{\alpha} \delta}{\lambda_{ж}} = 0,082 k_z^{0,33} k_q^{0,7} Pr_{ж}^{-0,45}, \quad (25.33)$$

где  $k_z$  - характеризует число центров, на которых образуются пузырьки;

$k_q$  - характеризует частоту отрыва пузырей;

$$k_q = \frac{q \delta^2}{a_{ж} r \rho_{п} l_*}; \quad l_* = \frac{R_{п.кр}}{2} Ja; \quad k_z = \frac{R_{п.кр}}{2\delta} Ja; \quad Pr_{ж} = \frac{v_{ж}}{a_{ж}}; \quad a_{ж} = \frac{\lambda_{ж}}{\rho_{ж} c_{pж}}.$$

$$q = \bar{\alpha} (T_w - T_s) = \bar{\alpha} \Delta T_{пер.ж}$$

При развитии пузырькового режиме ориентация в пространстве тела, на котором происходит кипение, не влияет на теплообмен. В этом случае можно использовать формулу

$$Nu_* = C Re_*^n Pr_{ж}^{0,33}, \quad (25.34)$$

где  $Nu_* = \frac{\bar{\alpha} l_*}{\lambda_{ж}}$ ;  $Re_* = \frac{w_* l_*}{v_{ж}}$ ;  $w_* = \frac{q}{r \rho_{п}}$ .

При  $Re_* < 0,01$   $C = 0,0625$ ,  $n = 0,5$ , при  $Re_* \geq 0,01$   $C = 0,125$ ,  $n = 0,65$ .

Формула (25.34) получена для случая, когда

$$Re_* = 10^{-5} \dots 10^4, \quad w_* \leq 7 \frac{M}{c}, \quad Pr_{ж} = 0,86 \dots 7,6.$$

Кроме этих формул, существуют эмпирические формулы например:

$$\bar{\alpha} = 3q^{0,7} p^{0,15}, \quad (25.35)$$

или

$$\bar{\alpha} = 38,7 \Delta T_{пж}^{2,33} p^{0,5} \quad (25.36)$$

(давление подставляется в барах, диапазон  $p = 1 \dots 40$  бар).

### Кризис кипения первого рода

При создании аппаратов, где имеет место кипение, нужно, чтобы  $q \leq q_{кр}$ . Если это условие не будет выполнено, то возможно возникновение пленочного режима кипения, при котором резко ухудшается теплоотдача, что может привести к перегреву и разрушению стенки, через которую передается теплота.

Существует несколько моделей для определения  $q_{кр}$ . Модель С.С. Кутателадзе хорошо описывает опытные данные, поэтому ее мы и рассмотрим. Согласно модели, кинетическая энергия струй пара идет на работу отторжения жидкости от стенки. В этом случае можно написать

$$\frac{\rho_{п} w_{п}^2}{\delta g (\rho_{ж} - \rho_{п})} = const \quad (a), \quad \text{но } w_{п} = \frac{q_{кр}}{\rho_{п} r} \quad (b), \quad \delta = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_{ж} - \rho_{п})}} \quad (c),$$

$r$  - удельная теплота парообразования.

Подставим (b) и (c) в (a)

$$\frac{\rho_{\text{п}} q_{\text{кр}}^2}{\rho_{\text{п}}^2 r^2 \sqrt{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})}} = \text{const}, \quad \frac{q_{\text{кр}}^2}{\rho_{\text{п}} r^2 \sqrt{\sigma g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})}} = \text{const},$$

откуда получим  $q_{\text{кр}} = k r \sqrt{\rho_{\text{п}}} \sqrt[4]{\sigma g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})}$ , (25.37)  
 где на основании опытных данных (рис.25.8)  $k=0,14\dots 0,16$ .

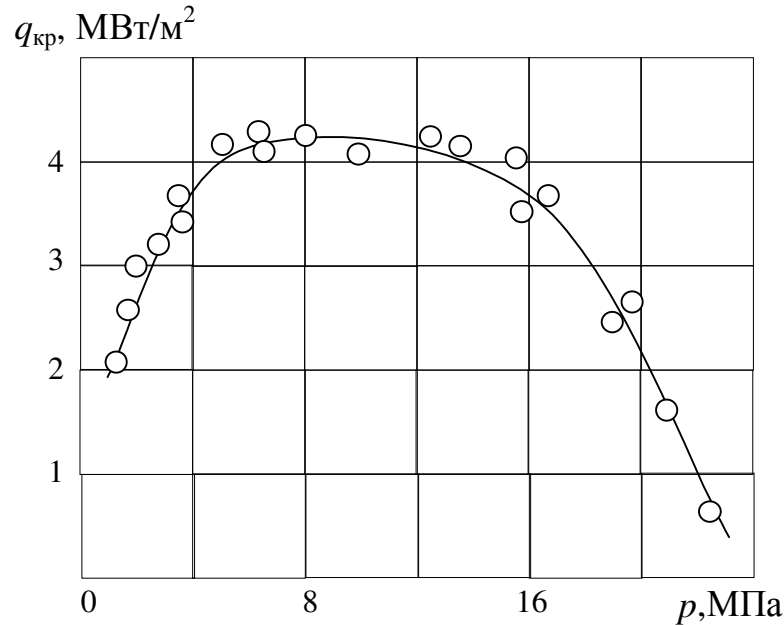


Рис.25.8

## 26. Тепло - и массоперенос в двухкомпонентных средах

### Основные положения

С массопереносом и теплоотдачей мы встречаемся как в природе, так и в технике. Такие явления имеют место в градирнях, предназначенных для охлаждения воды, в сушильных аппаратах, в испарительных системах охлаждения, системах кондиционирования воздуха, в абсорбционных холодильных установках и т.д.

Массоперенос  $i$ -ой компоненты обусловлен наличием в среде градиентов концентрации, давления и температуры. В этом случае плотность потока массы  $i$ -ой компоненты запишется в виде:

$$\vec{j}_i = \vec{j}_{iD} + \vec{j}_{iP} + \vec{j}_{iT}, \quad \text{кг}/(\text{м}^2\text{с}).$$

В дальнейшем будем считать, что основным потоком является поток, обусловленный наличием градиента концентрации и определяемый законом Фика

$$j_i = -D \frac{\partial C_i}{\partial n}, \quad (26.1)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $C_i = \frac{p_i}{R_i T_{\text{см}}}$  - концентрация;  $p_i$  - парциальное

давление;  $R_i = \frac{R_0}{\mu_i}$ . Если известен средний коэффициент массопереноса  $\bar{\beta}$ , то

плотность потока пара с поверхности воды в окружающую среду можно определить по формуле

$$j_{\text{H}_2\text{O}} = \bar{\beta} (C_{\text{H}_2\text{Ow}} - C_{\text{H}_2\text{O}\infty}) = \frac{\bar{\beta} p_{\text{H}_2\text{Ow}}}{RT} \left( 1 - \frac{p_{\text{H}_2\text{O}\infty}}{p_{\text{H}_2\text{Ow}}} \right) = \frac{\bar{\beta} p_{\text{H}_2\text{Ow}}}{RT} (1 - \varphi),$$

где  $C_{H_2O}$  - концентрация водяного пара на поверхности воды и бесконечности соответственно;  $p_{H_2Ow} = f(T_{ж})$  - парциальное давление пара на поверхности воды (см. табл. водяного пара);  $p_{H_2O\infty}$  - парциальное давление пара на бесконечности;  $\varphi$  - относительная влажность (см. ф-лу 9.32);  $T$ - абсолютная т-ра диффундирующего вещества.

### Основные уравнения сохранения

#### Уравнение массопереноса

Выделим в бесконечной среде элементарный объем и рассмотрим потоки массы  $i$ -ой компоненты через его грани. На координате  $x$  имеем:

$$\dot{G}_i = j_{ix} dy dz, \quad \frac{\text{кг}}{\text{с}}; \quad (\text{a})$$

$$\text{на } x+dx : \dot{G}_{i(x+dx)} = (j_{ix} + dj_x) dy dz, \quad (\text{b})$$

$$\text{но } dj_x = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx + \dots \quad (\text{c})$$

Вычитая (а) из (b) с учетом (с) и считая, что поток массы, вышедший из элементарной поверхности на координате  $x+dx$  больше, чем поток, вошедший на координате  $x$ , получаем:

$$\frac{\partial j_{ix}}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial C_i}{\partial \tau} dv \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial j_{ix}}{\partial x} = -\frac{\partial C_i}{\partial \tau}.$$

Аналогично можно записать и для других координат, тогда

$$\frac{\partial j_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial j_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{iz}}{\partial z} = -\frac{\partial C_i}{\partial \tau}. \quad (\text{d})$$

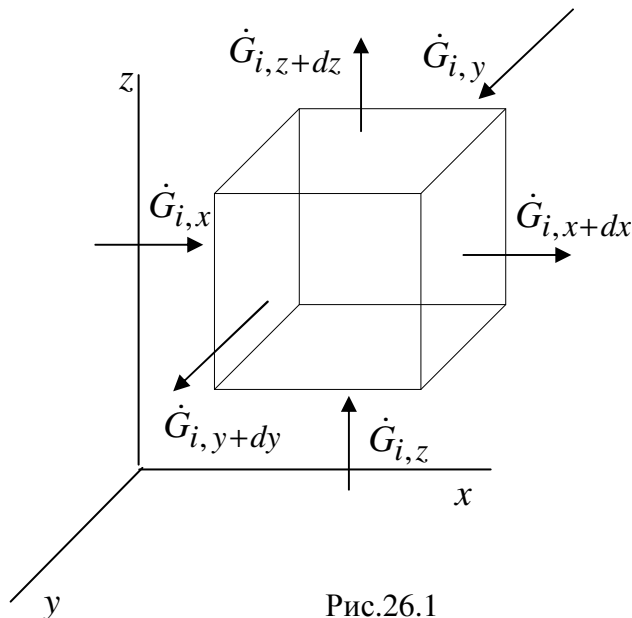


Рис.26.1

Поток  $i$ -ой компоненты складывается из потока, обусловленного молекулярным переносом, и потока, обусловленного конвективным переносом

$$j_{ix} = -D \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i w_x, \quad j_{iy} = -D \frac{\partial C_i}{\partial y} + C_i w_y, \quad j_{iz} = -D \frac{\partial C_i}{\partial z} + C_i w_z. \quad (\text{e})$$

Подставляя (е) в (d) после дифференцирования при  $D=Const$ , получим:

$$-D\left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2}\right) + w_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial C_i}{\partial y} + C_i \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial C_i}{\partial z} + C_i \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{\partial C_i}{\partial \tau},$$

$$\text{или } -D\nabla^2 C_i + C_i \operatorname{div} \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) C_i = -\frac{\partial C_i}{\partial \tau}.$$

Так как  $\rho = \text{const}$ , то  $\operatorname{div} \vec{w} = 0$  (здесь под  $\rho$  и  $\vec{w}$  понимаем  $\rho_{\text{см}}$  и  $\vec{w}_{\text{см}}$ ). Тогда окончательно можно написать:

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla) C_i = D\nabla^2 C_i. \quad (26.2)$$

Уравнению (26.2) можно придать и другой вид

$$\frac{DC_i}{d\tau} = D\nabla^2 C_i, \quad (26.2a)$$

где  $\frac{DC_i}{d\tau} = \frac{\partial C_i}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla) C_i$ .

#### Уравнение энергии для двухкомпонентной смеси

В векторной форме уравнение энергии имеет вид  $\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{q}$  (а), для оси  $Ox$  можно

написать  $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho i w_x + \sum_{i=1}^2 j_{ix} i_i$ , где последнее слагаемое характеризует перенос

энтальпии компонентами смеси. Аналогичные уравнения можно написать и для других осей.

Для двухкомпонентной смеси молярные потоки равны и противоположны по знаку, т.е.

$$\frac{j_1}{\mu_1} = -\frac{j_2}{\mu_2}, \quad j_2 = -j_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \text{тогда}$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho i w_x + j_{1x} \left( i_1 - i_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$$

Подставляя  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$  в исходное уравнение (а) с учетом, что  $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ , получим:

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho} \nabla^2 T - (\vec{w} \cdot \nabla) i - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left[ \vec{j}_1 \left( i_1 - i_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \right], \quad (26.3)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0.$$

#### Краевые условия

Для того чтобы решить конкретную задачу, необходимо к полученным уравнениям сохранения присоединить условия однозначности (геометрические условия, физические условия, временные условия - характер распределения концентрации компонентов при  $\tau = 0$ , граничные условия I, II, III родов).

При граничных условиях I рода задаются концентрации компонентов на поверхности:

$$C_i = f(x_w, y_w, z_w, \tau);$$

при граничных условиях II рода задаются плотности потоков масс компонент:

$$j_i = \varphi(x_w, y_w, z_w, \tau);$$

при граничных условиях III рода задаются условия массообмена на границах тела и среды:

$$\beta(C_{iw} - C_{i\infty}) = -D \left( \frac{\partial C_i}{\partial n} \right)_{n=0},$$

где  $C_i$  – концентрация  $i$ -го компонента;  $\beta$  – коэффициент массопереноса.

Для двухкомпонентной смеси идеальных газов имеем:  $p = p'_1 + p'_2$ ,

$$j_i = -D_i \frac{dC_i}{dy}, \quad C_i = \frac{p'_i}{R_i T} \text{ кг/м}^3. \text{ Покажем, что в этом случае коэффициенты диффузии}$$

равны  $D_1 = D_2 = D$ . Запишем массовые потоки обоих компонентов:

$$j_1 = -\frac{D_1}{R_1 T} \frac{dp_1}{dy}, \quad (a)$$

$$j_2 = -\frac{D_2}{R_2 T} \frac{dp_2}{dy}, \quad (b)$$

$$j_1 = -\frac{D_1 \mu_1}{R_0 T} \frac{dp_1}{dy}, \quad j_2 = -\frac{D_2 \mu_2}{R_0 T} \frac{dp_2}{dy}. \quad (c)$$

Так как мольные потоки  $\frac{j_i}{\mu_i}$  равны и противоположно направлены друг другу:

$$\frac{j_1}{\mu_1} = -\frac{D_1}{R_0 T} \frac{dp_1}{dy}, \quad \frac{j_2}{\mu_2} = -\frac{D_2}{R_0 T} \frac{dp_2}{dy}, \quad \text{а} \quad \frac{dp_2}{dy} = -\frac{dp_1}{dy}, \quad \text{то коэффициенты диффузии равны:}$$

$$D_1 = D_2 = D.$$

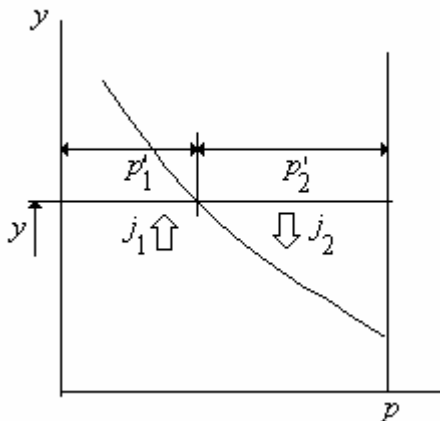


Рис. 26.2

### Массоперенос около полупроницаемой стенки.

#### Поток Стефана

Если испаряющаяся жидкость контактирует не с чистым собственным паром, а с газопаровой смесью (например, пара жидкости с воздухом), то процесс массообмена усложняется. Так как концентрация пара у поверхности жидкости больше, чем вдали от нее, то пар диффундирует в направлении от жидкости ( $j_1$  на рис.26.2). В двухкомпонентной системе  $\frac{dC_1}{dy} = -\frac{dC_2}{dy}$ ,

следовательно, газ должен диффундировать в обратном направлении - к жидкости ( $j_2$ ). Однако для газа поверхность жидкости непроницаема (газ не конденсируется в отличие от пара) и его

количество здесь должно было бы все время возрастать. Этого не происходит, потому что диффузионный поток газа к поверхности жидкости  $j_2 = -D_2 \frac{dC_2}{dy}$  компенсируется

конвективным потоком  $C_2 w$  парогазовой смеси в обратном направлении для всех значений  $y$ , который называется потоком Стефана. Из условия  $C_2 w = -j_2$  и с учетом, что  $C_2 = \frac{p_2}{R_2 T}$  можно написать:  $-\frac{D_2}{R_2 T} \left( \frac{dp_2}{dy} \right) + \frac{p_2}{R_2 T} w = 0$ , но  $\frac{dp_2}{dy} = -\frac{dp_1}{dy}$ , а

$p_2 = p - p_1$ , откуда

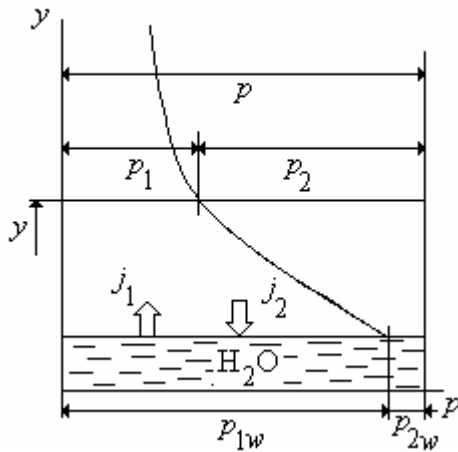


Рис.26.3

$$w = -\frac{D}{p-p_1} \left( \frac{dp_1}{dy} \right). \quad (d)$$

Для пара плотность потока:

$$j_1 = -D_1 \frac{dC_1}{dy} + C_1 w,$$

$$j_1 = -\frac{D_1}{R_1 T} \left( \frac{dp_1}{dy} \right) + \frac{p_1}{R_1 T} w. \quad (e)$$

Подставляя (d) в (e), получим:

$$j_1 = -\frac{D}{R_1 T} \frac{dp_1}{dy} - \frac{p_1}{R_1 T} \frac{D}{(p-p_1)} \left( \frac{dp_1}{dy} \right)$$

$$j_1 = -\frac{D}{R_1 T} \left( \frac{dp_1}{dy} \right) \left( 1 + \frac{p_1}{(p-p_1)} \right),$$

$$j_1 = -\frac{D}{R_1 T} \left( \frac{dp_1}{dy} \right)_{y=0} \frac{p}{(p-p_{1w})}. \quad (26.4)$$

### Тройная аналогия

Рассмотрим уравнения движения, энергии и массообмена, записанные для пограничного слоя при стационарном безградиентном обтекании пластины

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$$w_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}.$$

Структура уравнений, как видим, одинакова. Параметры  $\nu$ ,  $a$  и  $D$  имеют одинаковую размерность ( $\text{м}^2/\text{с}$ ). Если  $\nu = a = D$ , то расчетные поля скорости, температур и концентраций будут подобны при наличии подобия условий однозначности. По аналогии с числом Прандтля  $\text{Pr} = \nu/a$  введем критерий Шмидта (диффузионное число Прандтля)  $\text{Sc} = \nu/D$ , а по аналогии с числом Нуссельта  $\text{Nu} = \alpha/\lambda$  - критерий Шервуда:  $\text{Sh} = \beta l/D$ . Легко увидеть, что

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu D}{a D} = \frac{\nu D}{D a} = \text{Sc} \cdot \text{Le}, \quad (26.5)$$

где  $\text{Le} = \frac{D}{a}$  - критерий Льюиса. Если  $a = D = \nu$ , то

$\frac{\nu}{a} = \frac{D}{a} = \frac{\nu}{D} = 1$ , т.е.  $\text{Pr} = \text{Le} = \text{Sc} = 1$ . Так как рассматриваемые поля температур и

концентраций подобны, то можно записать:  $\text{St} = \text{St}_d$  (\*), где  $\text{St} = \frac{\text{Nu}}{\text{RePr}}$  - число Стентона,



а  $St_d = \frac{Sh}{ReSc}$  - диффузионное число Стентона. Таким образом, (\*) можно переписать в виде

$$\frac{\bar{\alpha} l v a}{\lambda w l v} = \frac{\bar{\beta} l v D}{D w l v}, \text{ или } \frac{\bar{\alpha}}{c_p \rho w} = \frac{\bar{\beta}}{w}.$$

В соответствии с аналогией Рейнольдса для пластины  $St = \frac{\bar{c}_f}{2} Pr^{\frac{2}{3}}$ , т.е.

$$\frac{\bar{\alpha}}{c_p \rho w_\infty} = \frac{\bar{\beta}}{w_\infty} = \frac{\bar{c}_f}{2} Pr^{-\frac{2}{3}} \quad (26.6)$$

или для локальных коэффициентов

$$\frac{\alpha_x}{c_p \rho w_\infty} = \frac{\beta_x}{w_\infty} = \frac{c_f}{2} Pr^{-\frac{2}{3}}. \quad (26.6a)$$

Таким образом, найдена связь между коэффициентами теплоотдачи, массопереноса и трения. Определив, например, из опыта гидродинамическую величину  $c_f$ , можно найти две других.

Тройная аналогия справедлива при обтекании потоком пластины, для труб она полностью не выполняется, так как течение в трубах не является безградиентным  $\left(\frac{dp}{dx} \neq 0\right)$ .

#### Тепло- и массоотдача от пластины при ламинарном и турбулентном режимах течения

При обтекании пластины ламинарным потоком справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} Nu_x &= \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0,323 Re_x^{0,5} Pr^{0,33}, \\ Nu &= 0,646 Re^{0,5} Pr^{0,33}, \\ Sh_x &= \frac{\beta_x x}{D} = 0,323 Re_x^{0,5} Sc^{0,33}, \end{aligned} \quad (26.7)$$

$$Sh = \frac{\bar{\beta} l}{D} = 0,646 Re^{0,5} Sc^{0,33}, \quad (26.8)$$

$$\delta_d(x) = \frac{\delta}{Sc^{1/3}} = \frac{4,64 x}{Re_x^{0,5} Sc^{0,33}}. \quad (26.9)$$

При турбулентном режиме течения ( $Re > 10^5$ )

$$Sh_x = \frac{\beta_x x}{D} = 0,0296 Re_x^{0,8} Sc^{0,33}, \quad (26.10)$$

$$Sh = \frac{\bar{\beta} l}{D} = 0,037 Re^{0,8} Sc^{0,33}, \quad (26.11)$$

$$\delta_d(x) = \frac{\delta_{16}}{Sc^{1/3}} = \frac{0,37 x}{Re_x^{0,2} Sc^{0,33}}. \quad (26.12)$$

#### Массоперенос в трубах

Рассмотрим процесс массопереноса в трубе, в которой движется газ, а по стенкам течет пленка жидкости (рис.26.4). Так как изменение концентрации компонента в газе обусловлено потоком массы с элементарной поверхности пленки, то можно написать

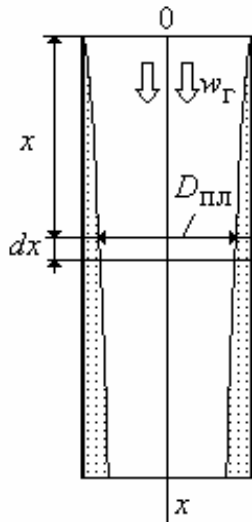


Рис.26.4

$$\frac{\pi D_{\text{пл}}^2}{4} \bar{w}_r d\bar{C} = j\pi D_{\text{пл}} dx, \quad (26.13)$$

где  $\bar{C}$  - концентрация компонента, осредненная по сечению. Далее будем считать, что пленка тонкая  $D_{\text{пл}} \approx D_{\text{тр}}$ , тогда

$$\frac{D_{\text{тр}}}{4} \bar{w}_r d\bar{C} = \beta_x (C_w - \bar{C}) dx.$$

Разделим переменные:  $\frac{d\bar{C}}{C_w - \bar{C}} = \frac{4\beta_x}{\bar{w}_r D_{\text{тр}}} dx$

и проинтегрируем:

$$\int_{C_1}^{C_2} \frac{d(\bar{C} - C_w)}{\bar{C} - C_w} = - \int_0^l \frac{4\beta_x}{\bar{w}_r D_{\text{тр}}} dx, \quad \ln \left( \frac{C_2 - C_w}{C_1 - C_w} \right) = - \frac{4\bar{\beta}}{\bar{w}_r D_{\text{тр}}} l,$$

$$\frac{C_2 - C_w}{C_1 - C_w} = \exp \left( - \frac{4\bar{\beta}}{\bar{w}_r D_{\text{тр}}} l \right), \quad C_2 - C_w = (C_1 - C_w) \exp \left( - \frac{4\bar{\beta}}{\bar{w}_r D_{\text{тр}}} l \right),$$

$$\bar{C}_2 = C_w - \frac{(C_w - C_1)}{\exp \left( \frac{4\bar{\beta}}{\bar{w}_r D_{\text{тр}}} l \right)} \quad (26.14)$$

-концентрация паров жидкости на выходе из трубы.

Расход испарившейся жидкости найдем из формулы

$$\dot{G}_2 = \frac{\pi D_{\text{тр}}^2}{4} \bar{w}_r \bar{C}_2, \quad \text{кг/с.}$$

Средний коэффициент массоотдачи можно определить из критериального уравнения, полученного Шервудом

$$\text{Sh} = \frac{\bar{\beta} D_{\text{тр}}}{D} = 0,023 \text{Re}^{0,83} \text{Sc}^n,$$

где  $n = 0,44$  при  $\text{Sc} = 0,6 \dots 2,5$  и  $n = 0,33$  при  $\text{Sc} = 10^3 \dots 2 \cdot 10^3$ .

#### Тепло-и массоперенос от капель

Существует значительное число уравнений, позволяющих определить тепло-и массоперенос от капель. Наиболее часто в расчетной практике используют уравнения вида:

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} D_k}{\lambda_r} = 2 + 0,6 \text{Re}_k^{0,5} \text{Pr}_r^{0,33}, \quad (26.15)$$

$$\text{Sh} = \frac{\bar{\beta} D_k}{D} = 2 + 0,6 \text{Re}_k^{0,5} \text{Sc}^{0,33}, \quad (26.16)$$

где второе слагаемое в правой части уравнений называется ветровым множителем, который учитывает конвективный тепло - и массоперенос,

$$\text{Re}_k = \frac{|w_r - w_k| D_k}{\nu_r}, \quad 0 < \text{Re}_k \leq 200.$$

Если рассматривать процессы на чисто молекулярном уровне, то

$$\text{Nu}=2, \quad \text{Sh}=2.$$

Вырубов, исследуя испарение капель бензина в воздушном потоке, получил

критериальное уравнение 
$$\text{Sh} = \frac{\bar{\beta} D_k}{D} = 0,52 \text{Re}_k^{0,5}, \quad (26.17)$$

которое справедливо в диапазоне  $300 \leq \text{Re}_k \leq 500$ .

Р.Д Ингево., исследовавший испарение с пробковых шаров, пропитанных водой, ацетоном и четыреххлористым углеродом, получил уравнение

$$j = \frac{\lambda_{\text{возд.}} \Delta T}{r D_{\text{ш}}} \left[ 2 + 0.303 (\text{Re} \text{ Sc})^{0.6} \left( \frac{\lambda_{\text{возд.}}}{\lambda_{\text{пара}}} \right)^{0.5} \right] \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}, \quad (26.17a)$$

где  $\Delta T = T_{\text{мокр.терм.}} - T_{\text{возд.}}$ ;  $\text{Re} = w_{\text{возд.}} D_{\text{ш.}} / \nu_{\text{возд.}} = (1,7 \div 6) 10^3$ .

## 27. Лучистый теплообмен

### Общие положения

В основе теории теплового излучения лежит как волновая, так и корпускулярная теория. Согласно первой тепловая энергия распространяется со скоростью света  $c = \lambda \nu$ , где  $\lambda$ -длина волны,  $\nu$ -частота колебаний, а по второй - поглощение и выделение энергии происходит порциями - фотонами. Энергия фотона  $e = h\nu$ , где  $h$  - постоянная Планка.

При нагреве тела электроны переходят на более высокие энергетические уровни. Возвращаясь на более низкий уровень электрон испускает фотон, энергия которого равна разности энергий возбужденного и равновесного состояний. Переход электронов на разные энергетические уровни приводит к распределению энергии фотонов, покидающих поверхность тела, по спектру частот. Энергия фотонов, покидающих поверхность тела, называется тепловым излучением, которое зависит только от температуры тела. Тепловое излучение находится в диапазоне длин волн  $\lambda = 10^7 \dots 10^{-4}$  м. Видимый спектр излучения лежит в диапазоне  $(3,8 \dots 7,6) \cdot 10^{-7}$  м.

### Основные законы излучения

В 1900 году Макс Планк установил зависимость плотности потока монохроматического (спектрального) излучения абсолютно черного тела от температуры и длины волны

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left( e^{c_2/\lambda T} - 1 \right)} \text{ Вт/м}^3, \quad (27.1)$$

где  $C_1 = 3,7418 \cdot 10^{-16}$  Вт·м<sup>2</sup> - первая постоянная излучения,  $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$  м·К - вторая постоянная излучения.

Для коротких длин волн, когда  $e^{c_2/\lambda T} \gg 1$ , получаем формулу Вина:

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left( e^{c_2/\lambda T} \right)}. \quad (27.2)$$

Если  $e^{c_2/\lambda T} \approx 1$ , то  $e^{c_2/\lambda T} \approx 1 + \frac{C_2}{\lambda T} + \dots$  и подставляя в (27.1), получим формулу Релея-

Джинса 
$$E_{0\lambda} = \frac{C_1 T}{\lambda^4 C_2}. \quad (27.3)$$

Выделим под кривой  $E_{0\lambda} = f(T, \lambda)$  элементарную площадку  $dE_0 = E_{0\lambda} d\lambda$  (рис.27.1) и проинтегрируем полученное выражение в пределах от  $\lambda=0$  до  $\lambda=\infty$ , тогда

$$E_0 = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 \left( e^{c_2/\lambda T} - 1 \right)} d\lambda = \sigma_0 T^4 \quad (27.4)$$

-закон Стефана-Больцмана, где  $E_0$  - плотность потока интегрального излучения абсолютно черного тела, Вт/м<sup>2</sup>,  $\sigma_0 = \left( \frac{\pi}{C_2} \right)^4 \frac{C_1}{15} = 5,67 \cdot 10^{-8}$ , Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>) - постоянная Стефана-Больцмана.

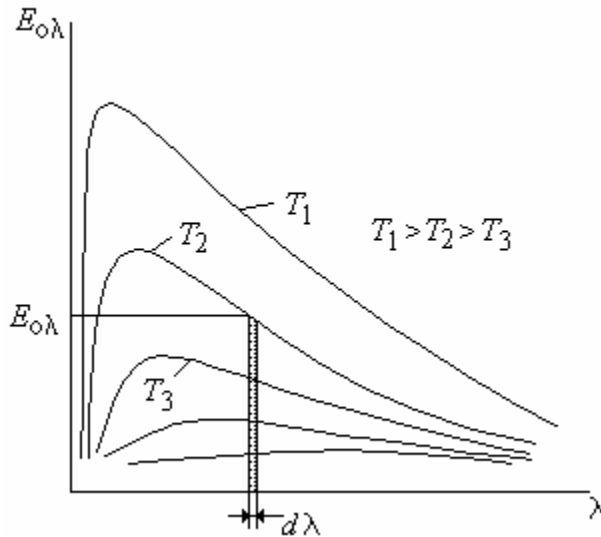


Рис. 27.1

излучения с увеличением температуры смещается в сторону коротких длин волн. Если  $\lambda_{\max}$  из (27.6) подставить в (27.1), то получим :

$$E_{0\lambda_{\max}} = 1,287 \cdot 10^{-5} T^5 \text{ Вт/м}^3.$$

### Радиационные функции

Часто необходимо определить энергию излучения черной поверхности в заданном диапазоне длин волн. Так, в диапазоне от 0 до  $\lambda_1$  можно написать  $E_0(0 - \lambda_1) = \int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda} d\lambda$ , в диапазоне от 0 до  $\lambda_2$  будем иметь  $E_0(0 - \lambda_2) = \int_0^{\lambda_2} E_{0\lambda} d\lambda$ .

Вычитая из одной функции другую, найдем искомую энергию излучения. Если эту разность разделить на  $\sigma_0 T^4$ , то получим долю энергии, которую излучает абсолютно черное тело в данном диапазоне длин волн  $\frac{E_0(0 - \lambda_2) - E_0(0 - \lambda_1)}{\sigma_0 T^4}$ . Существуют

таблицы для функций вида  $\frac{E_0(0 - \lambda)}{\sigma_0 T^4}$ , которые называются радиационными функциями черного тела.

Часто закон записывают в виде

$$E_0 = C_0 \left[ \frac{T}{100} \right]^4, \quad (27.5)$$

где  $C_0$  - коэффициент излучения абсолютно черного тела,  $C_0 = 5,67$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>).

Абсолютно черное тело - это тело, которое при данной температуре излучает или поглощает максимум лучистой энергии.

Взяв производную  $\frac{dE_{0\lambda}}{d\lambda}$  и приравняв ее нулю, получим закон смещения Вина:

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}, \quad (27.6)$$

который показывает, что максимум плотности монохроматического

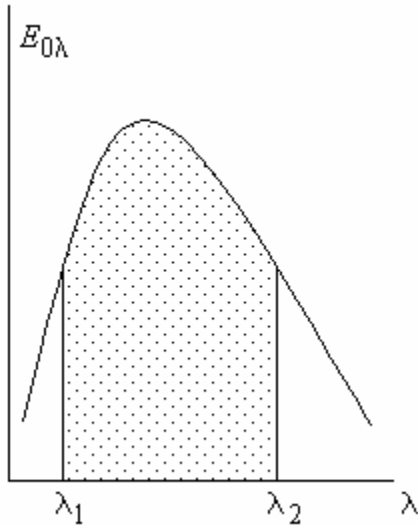


рис.27.2

### Радиационные свойства

#### Интегральные радиационные свойства

(энергия осреднена по всем  
длинам волн)

Лучистую энергию, падающую на тело, можно представить в виде трех составляющих: отраженной, поглощенной и пропущенной телом энергии

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{отр}} + E_{\text{погл}} + E_{\text{пр}}. \quad (27.7)$$

Разделив (27.7) на  $E_{\text{пад}}$ , получим

$$1 = R + A + D,$$

где  $R$ - коэффициент, характеризующий отражательную способность тела,  $A$ - коэффициент, характеризующий поглощательную способность тела,  $D$  - коэффициент, характеризующий диатермичность тела. Для абсолютно черного тела  $R = D = 0$ ,  $A = 1$ ; для абсолютно прозрачного тела  $A = R = 0$ ,  $D = 1$ ; для зеркальной поверхности  $A = D = 0$ ,  $R = 1$ .

#### Закон Кирхгофа

Поместим в изотермическую полость тело с поглощательной способностью  $A_1$ . После наступления термодинамического равновесия между телом и оболочкой тело поглотит энергию  $E_{\text{погл}1} = A_1 E_{\text{пад}}$  (а). Удалим первое тело и поместим второе тех же размеров и формы, тогда  $E_{\text{погл}2} = A_2 E_{\text{пад}}$  (б). Но при термодинамическом равновесии энергия поглощенного излучения равна энергии испущенного излучения, следовательно,  $E_{\text{погл}1} = E_1$ , а  $E_{\text{погл}2} = E_2$ . Теперь (а) и (б) можно переписать так:  $E_1 = A_1 E_{\text{пад}}$  (в),  $E_2 = A_2 E_{\text{пад}}$  (д).

Разделим (в) на (д):

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1}{A_2}. \quad (27.8)$$

Будем считать, что  $A_2 = 1$ , тогда  $\frac{E_1}{E_0} = A_1$ , но по определению степень черноты

$\varepsilon = \frac{E_1}{E_0}$  есть отношение лучистой энергии, испускаемой серым телом к лучистой энергии, излучаемой черным телом при той же температуре с единицы поверхности.

Таким образом,

$$A_1 = \varepsilon_1, \quad (27.9)$$

то есть при тепловом равновесии поглощательная способность тела равна излучательной - закон Кирхгофа.

#### Монохроматические свойства

Излучательная и поглощательная способность тел зависит от длины волны излучения, поэтому вводят такие понятия, как спектральные свойства:  $\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{0\lambda}}$ ,

$A_\lambda = \frac{E_{\text{погл}\lambda}}{E_{\text{пад}\lambda}}$ . Свяжем между собой интегральные и спектральные свойства

$$\varepsilon = \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{0\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} E_{0\lambda} d\lambda} = \frac{1}{\sigma_0 T^4} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{0\lambda} d\lambda. \quad (27.10)$$

Из (27.10) видно, что степень черноты зависит только от физических свойств излучателя. Поглощательная же способность тела зависит как от поглощательной способности самого тела, так и от характеристик тел, от которых исходит лучистая энергия:

$$A = \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_{\lambda} E_{\text{пад}\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} E_{\text{пад}\lambda} d\lambda}. \quad (27.11)$$

Для того чтобы упростить расчеты, вводят понятие серого тела, т.е. полагают  $A_{\lambda}$  и  $\varepsilon_{\lambda} = \text{const}$ ,  $A = A_{\lambda}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{\lambda}$ . Для серых тел  $\varepsilon = A$  даже в том случае, если тела не находятся в тепловом равновесии. При этом считают, что у серых тел  $D = 0$ .

### Направленные радиационные свойства

Исследования показали, что радиационные свойства зависят не только от длины волны и состояния поверхности излучателя и приемника, но и от направления излучения. У металлов наибольшая излучательная способность имеет место при больших углах  $\theta$  (угол между нормалью к поверхности и направлением излучения), а у диэлектриков - при  $\theta \rightarrow 0$ . Для рассмотрения направленных излучательных свойств вводят понятие телесного угла и интенсивности излучения (яркости).

$$\text{Телесный угол} \quad d\omega = \frac{dF_n}{r^2} \quad (27.12)$$

есть отношение площади элементарной площадки  $dF_n$ , расположенной перпендикулярно радиусу, к радиусу в квадрате и измеряется в стерadians (ср).

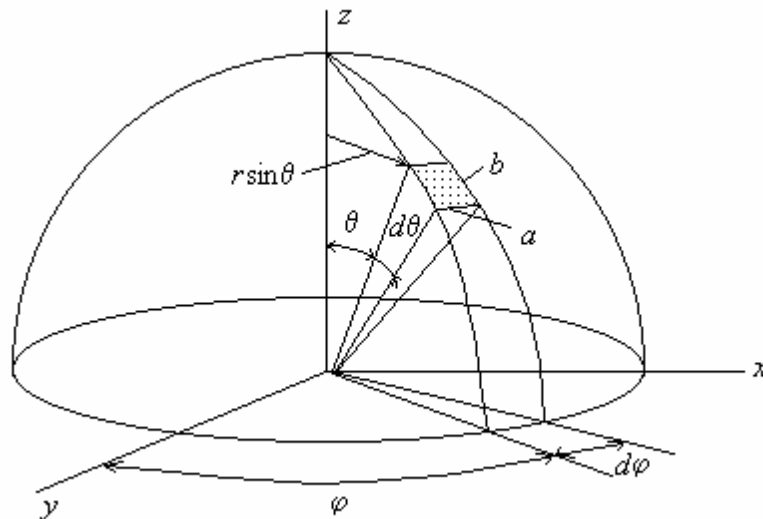


Рис.27.3

Число стерadians в угле, ограниченном замкнутой поверхностью, может быть найдено путем интегрирования (27.12). Так, например, для сферы можно написать (см. рис.27.3):

$$dF_n = ab = r \cdot \sin\theta d\varphi \cdot r \cdot d\theta, \text{ но } d\omega = \frac{dF_n}{r^2} = \sin\theta d\varphi d\theta,$$

$$\text{тогда } \omega_{\text{сф}} = \int_{\text{сф}} d\omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta = 4\pi.$$

Лучистая энергия, излучаемая с единичной поверхности, перпендикулярной к направлению излучения, в единицу времени в пределах единичного элементарного телесного угла (рис.27.4), называется интенсивностью излучения

$$I(\theta, \varphi) = \frac{dE}{d\omega \cos\theta}, \text{ Вт/(м}^2\text{ср)}. \quad (27.13)$$

Из (27.13) можно получить

$$dE = I(\theta, \varphi) d\omega \cos\theta. \quad (27.14)$$

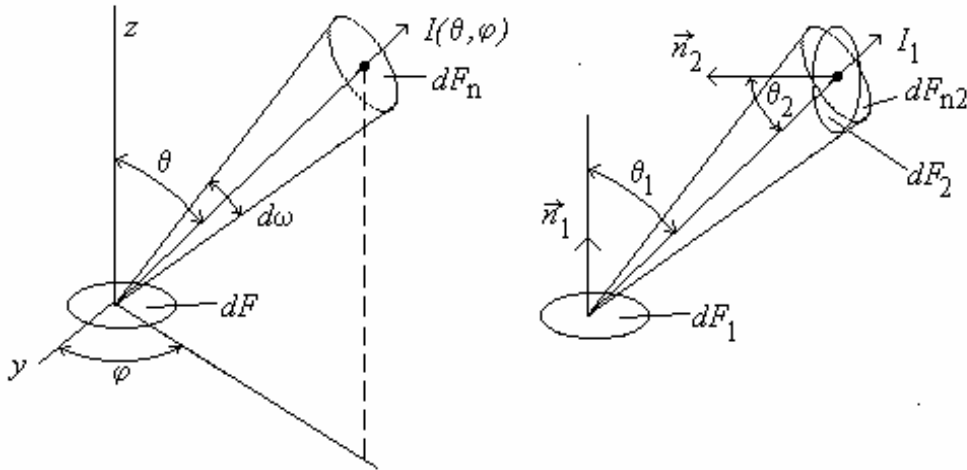


Рис.27.4

Проинтегрируем уравнение (27.14) по полусфере, то есть определим количество лучистой энергии, которое отдает плоская поверхность окружающей среде, полагая поверхность диффузионной (излучает с постоянной интенсивностью по всем углам), то есть  $I(\theta, \varphi) = \text{const}$

$$E = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I(\theta, \varphi) \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta = \pi I. \quad (27.15)$$

Диффузионным является и черное тело

$$E_0 = \pi I_0. \quad (27.16)$$

Интегральную степень черноты теперь можно записать в виде

$$\varepsilon = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I(\theta, \varphi) \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta}{\pi I_0}, \text{ но } \varepsilon(\theta, \varphi) = \frac{I(\theta, \varphi)}{I_0}, \text{ тогда}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \varepsilon(\theta, \varphi) \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta. \quad (27.17)$$

#### Угловой коэффициент излучения

Рассмотрим два тела, обменивающиеся лучистой энергией. Под угловым коэффициентом излучения понимают отношение лучистой энергии, которая дошла до второго тела от первого, ко всей энергии, излучаемой первым телом в полупространство (в полусферу).

Для элементарных площадок, где  $dF_1$  - излучающая, а  $dF_2$  - приемная, угловой коэффициент при  $I_1 = \text{const}$

$$\varphi_{dF_1 \rightarrow dF_2} = \frac{dE}{I_1 \pi} = \frac{I_1 d\omega_1 \cos \theta_1}{I_1 \pi} = \frac{\cos \theta_1 dF_2 \cos \theta_2}{\pi r^2}. \quad (27.18)$$

Для диффузионных тел конечных размеров можно написать:

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 dF_1 dF_2}{\pi r^2}. \quad (27.19)$$

Формула (27.19) показывает, какая доля лучистой энергии тела 1, излучающего в полусфере, падает на тело 2.

Если выполнить аналогичные рассуждения для случая, когда излучающей будет вторая площадка, то

$$\varphi_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{F_2} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \quad (27.20)$$

Сравнивая (27.19) и (27.20), можно получить условие взаимности

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} F_1 = \varphi_{2 \rightarrow 1} F_2, \quad (27.21)$$

которое применимо для любых двух тел в пространстве, обменивающихся лучистой энергией. Вводя понятие “взаимные поверхности излучения”  $H$ , можно написать:  $H_{1 \rightarrow 2} = \varphi_{1 \rightarrow 2} F_1$ ,  $H_{2 \rightarrow 1} = \varphi_{2 \rightarrow 1} F_2$ . Следовательно,  $H_{1 \rightarrow 2} = H_{2 \rightarrow 1}$ .

Получим выражение для условия замкнутости. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из трех поверхностей. Будем считать, что первая поверхность является излучателем, тогда ее энергию излучения можно представить в виде

$$E_1 = E_{1 \rightarrow 2} + E_{1 \rightarrow 3} + E_{1 \rightarrow 1},$$

где  $E_{1 \rightarrow 2}$  - энергия излучения падающая на вторую поверхность и т. д. Разделив все члены на  $E_1$ , получим

$$1 = \varphi_{1 \rightarrow 2} + \varphi_{1 \rightarrow 3} + \varphi_{1 \rightarrow 1}.$$

Если излучатель плоский или выпуклый, то в этом случае говорят, что тело “не видит” себя и тогда  $\varphi_{1 \rightarrow 1} = 0$ .

Для замкнутой системы, состоящей из  $n$  поверхностей, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{i \rightarrow j} = 1. \quad (27.22)$$

Условия взаимности и замкнутости позволяют решать задачи лучистого теплообмена для тел, произвольно расположенных в пространстве.

#### Методы определения угловых коэффициентов

##### 1. Аналитический метод.

В этом случае необходимо взять интегралы (27.19) и (27.20). Определим  $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ . В качестве примера рассмотрим лучистый теплообмен между двумя параллельными дисками, имеющими общую ось.



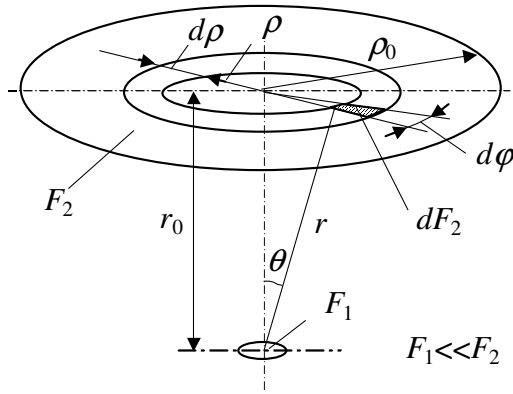


Рис. 27.5

Применяя формулу (27.19) к рис.27.5 и полагая  $F_1 \ll F_2$ , можно написать

$$\varphi_{1-2} = \int_{F_2} \frac{\cos^2 \theta dF_2}{\pi r^2}, \quad \text{но } dF_2 = \rho d\phi d\rho, \quad \text{а}$$

$$\cos \theta = \frac{r_0}{r}, \quad \text{тогда}$$

$$\varphi_{1-2} = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 \rho d\phi d\rho}{\pi r^4}. \quad \text{Интегрирование по } \phi$$

$$\text{даёт } \varphi_{1-2} = \int_0^{\rho_0} \frac{2r_0^2 \rho d\rho}{r^4}. \quad \text{Так как } r^2 = r_0^2 + \rho^2.$$

Окончательно получим

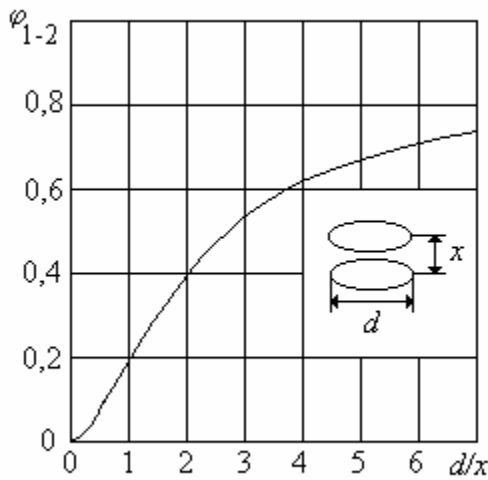


Рис.27.5а

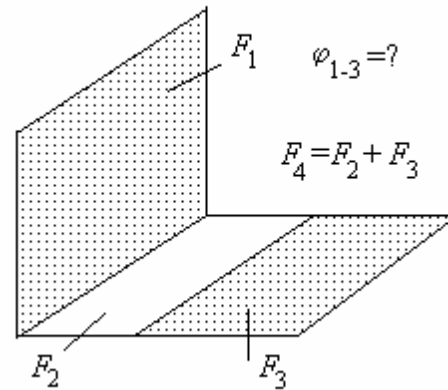


Рис.27.6

$$\varphi_{1-2} = \int_0^{\rho_0} \frac{r_0^2 d\rho^2}{(\rho^2 + r_0^2)^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 + r_0^2}.$$

При  $r_0 = 0$   $\varphi_{1-2} = 1$ . Если  $r_0 = \infty$ , то  $\varphi_{1-2} = 0$ .

2. Табличный метод.

Для многих поверхностей, широко используемых в инженерной практике, угловые коэффициенты излучения представлены в графической форме (см. рис.27.5а).

3. Алгебра угловых коэффициентов.

Метод позволяет, используя табличные угловые коэффициенты, определить угловые коэффициенты бóльшего класса геометрических форм. Предположим, что необходимо определить  $\varphi_{1 \rightarrow 3}$  (см. рис.27.6),  $F_4 = F_2 + F_3$ . Лучистую энергию, падающую на поверхность  $F_4$  от поверхности  $F_1$ , можно представить в виде  $E_1 F_1 \varphi_{1 \rightarrow 4} = E_1 F_1 \varphi_{1 \rightarrow 2} + E_1 F_1 \varphi_{1 \rightarrow 3}$ , тогда  $\varphi_{1 \rightarrow 4} = \varphi_{1 \rightarrow 2} + \varphi_{1 \rightarrow 3}$ ,  $\varphi_{1 \rightarrow 3} = \varphi_{1 \rightarrow 4} - \varphi_{1 \rightarrow 2}$ , где  $\varphi_{1 \rightarrow 4}$  и  $\varphi_{1 \rightarrow 2}$  - табличные угловые коэффициенты.

4. Метод натянутых нитей.

При нахождения угловых коэффициентов для двух бесконечных в одном направлении поверхностей используется формула

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2l_1} [(cb + da) - (ca + db)], \quad (27.23)$$

где  $(cb + da)$  - сумма длин пересекающихся нитей (рис.27.7);  $(ca + db)$  - непересекающихся нитей.

Если излучающие поверхности образуют угол (см. рис.27.8), то две поверхности у вершины угла раздвигают и проводят нити, а затем в формуле (27.23) считают, что  $ac = 0$ .

Кроме рассмотренных методов существуют

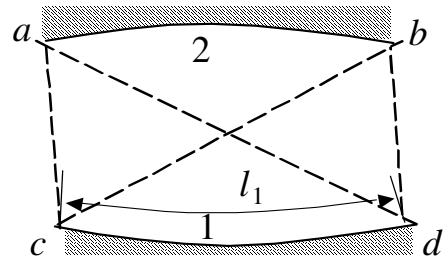


Рис.27.7

и другие - графоаналитический, световой и электрический.

Теплообмен излучением между черными поверхностями

Напомним, что черные поверхности являются диффузионными, а лучистая энергия, падающая на них, полностью ими поглощается. Поток энергии излучения, испущенный первой поверхностью, и поглощенный второй, запишется в виде

$$E_{1 \rightarrow 2} = E_{01} F_1 \varphi_{1 \rightarrow 2},$$

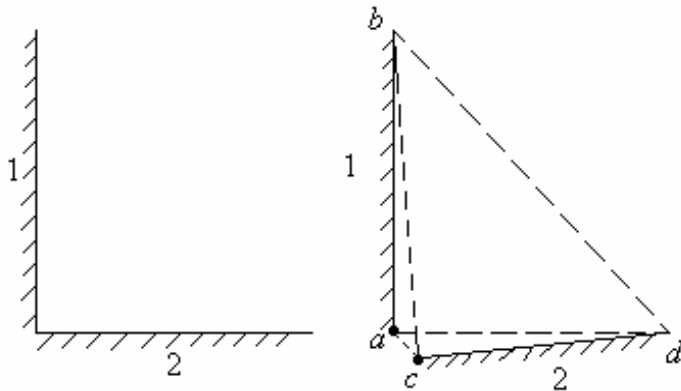


Рис.27.8

поток лучистой энергии, поглощенный первой поверхностью -

$$E_{2 \rightarrow 1} = E_{02} F_2 \varphi_{2 \rightarrow 1}.$$

Поток теплоты, который получит вторая поверхность от первой

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = E_{01} F_1 \varphi_{1 \rightarrow 2} - E_{02} F_2 \varphi_{2 \rightarrow 1}.$$

Используя условие взаимности

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} F_1 = \varphi_{2 \rightarrow 1} F_2,$$

можно написать

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = (E_{01} - E_{02}) F_1 \varphi_{1 \rightarrow 2} \text{ Вт, где } E_{01} = C_0 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4; E_{02} = C_0 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4.$$

Вводя понятие геометрического

сопротивления  $\frac{1}{F_1 \varphi_{1 \rightarrow 2}}$ , которое

обусловлено тем, что не все излучение, испущенное одной поверхностью, достигнет другой, получим

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{01} - E_{02}}{\frac{1}{F_1 \varphi_{1 \rightarrow 2}}}. \quad (27.24)$$

Адиабатическая поверхность

Если в системе тел, обменивающихся лучистой энергией, к одной из поверхностей теплота не подводится и не отводится, то такая поверхность называется адиабатической ( $Q_{\text{рез}} = 0$ ). Температура такой поверхности зависит от лучистой энергии окружающих ее тел и называется

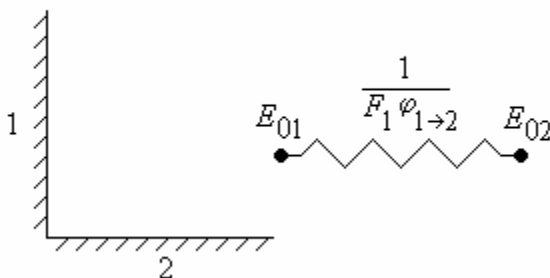


Рис. 27.9

“плавающей “. Для системы, состоящей из двух черных тел и адиабатической поверхности (см. рис.27.10), можно написать

$$\frac{E_{01} - E_{03}}{1} = \frac{E_{03} - E_{02}}{1}, \text{ откуда можно найти } E_{03} = C_0 \left( \frac{T_3}{100} \right)^4, \text{ а затем } T_3.$$

$$\frac{1}{F_1 \varphi_{1 \rightarrow 3}} \quad \frac{1}{F_2 \varphi_{2 \rightarrow 3}}$$

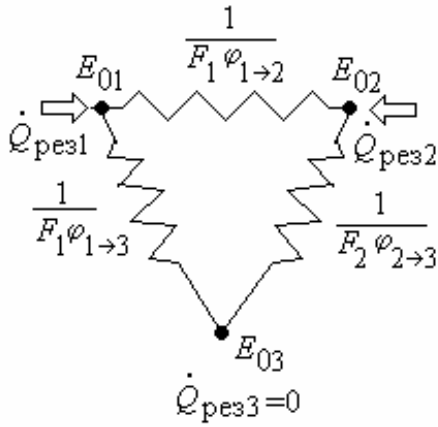


Рис.27.10

Теплообмен излучением между серыми телами.

Лучистая энергия, излучаемая серым телом, называется эффективной лучистой энергией. Она складывается из собственной  $E_{\text{соб}}$  и отраженной  $E_{\text{отр}}$ :

$$E_{\text{эф1}} = E_{\text{соб1}} + E_{\text{отр1}} = E_{\text{соб1}} + R_1 E_{\text{пад}},$$

откуда 
$$E_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{эф1}} - E_{\text{соб1}}}{R_1}. \quad (a)$$

Для того чтобы тела, обменивающиеся лучистой энергией, имели неизменную температуру, к ним необходимо подводить (отводить) результирующую теплоту

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = (E_{\text{эф1}} - E_{\text{пад}}) F_1. \quad (b)$$

Подставим (a) в (b)

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = \left( E_{\text{эф1}} - \frac{E_{\text{эф1}} - E_{\text{соб1}}}{R_1} \right) F_1 = \left( \frac{R_1 E_{\text{эф1}} - E_{\text{эф1}} + E_{\text{соб1}}}{R_1} \right) F_1,$$

но для серой поверхности  $\epsilon_1 + R_1 = 1$ , тогда

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = \left( \frac{R_1 E_{\text{эф1}} - E_{\text{эф1}} \epsilon_1 - R_1 E_{\text{эф1}} + \epsilon_1 E_{01}}{R_1} \right) F_1,$$

или 
$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = \frac{E_{01} - E_{\text{эф1}}}{\frac{R_1}{F_1 \epsilon_1}}, \quad (27.25)$$

где  $\frac{R_1}{F_1 \epsilon_1}$  – поверхностное сопротивление серого тела.

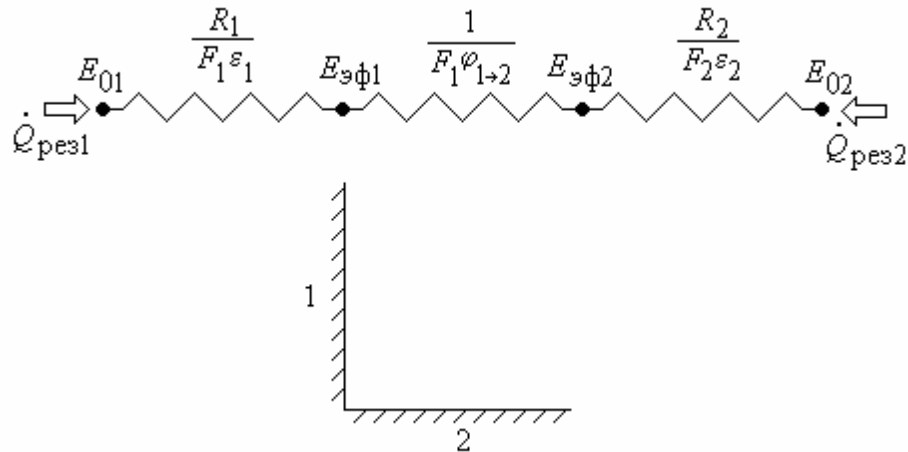


Рис.27.11

Тогда для двух серых тел, обменивающихся лучистой энергией, тепловой поток, переданный от первой поверхности ко второй будет иметь вид:

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{01} - E_{02}}{\frac{R_1}{\varepsilon_1 F_1} + \frac{1}{F_1 \phi_{1 \rightarrow 2}} + \frac{R_2}{\varepsilon_2 F_2}}. \quad (27.26)$$

Рассмотрим три частных случая.

1. Две бесконечные параллельные пластины. Для них можно написать

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{(E_{01} - E_{02})F}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}}, \quad \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{(E_{01} - E_{02})F}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$

Введем понятие приведенной степени черноты

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1};$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \varepsilon_{пр} F \left[ C_0 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - C_0 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \text{ но } C_{пр} = C_0 \varepsilon_{пр}, \text{ тогда}$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = C_{пр} F \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (27.27)$$

2. Два бесконечных цилиндра (первый охватывает второй),  $\phi_{1 \rightarrow 2} = 1$ .

$$\text{Используя (27.26), получим } \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{(E_{01} - E_{02})F_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{F_1}{F_2}}.$$

3. Небольшое серое тело с поверхностью  $F_1$  охватывается оболочкой, у которой  $F_2 \gg F_1$ .

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{01} - E_{02}}{\frac{R_1}{\varepsilon_1 F_1} + \frac{1}{F_1 \phi_{1 \rightarrow 2}} + \frac{R_2}{\varepsilon_2 F_2}} = \frac{(E_{01} - E_{02})F_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1} = \frac{(E_{01} - E_{02})F_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + 1 - 1}$$

$$C_1 = \varepsilon_1 C_0, \quad \varepsilon_1 = \frac{C_1}{C_0}, \quad \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = C_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1. \quad (27.28)$$

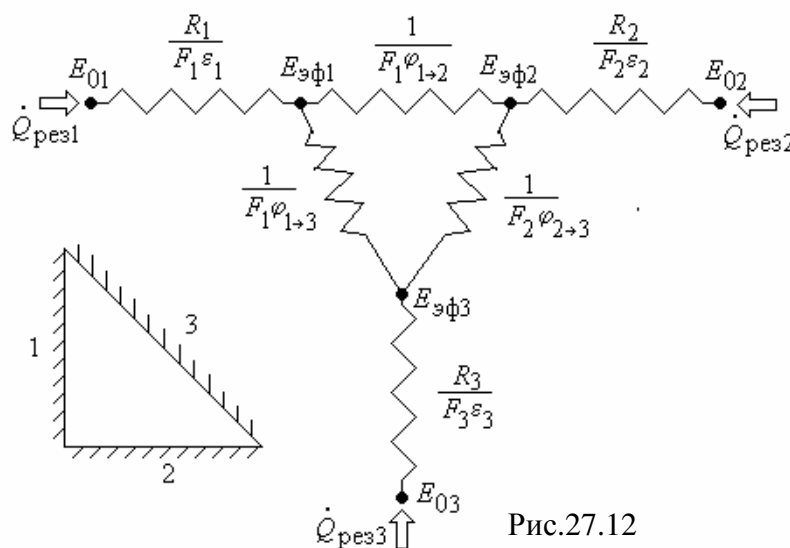


Рис.27.12

Из формулы (27.28) видно, что в этом случае поток только от теплоты зависит коэффициента излучения первого серого тела.

Если лучистый теплообмен осуществляется между тремя поверхностями, то эквивалентная электрическая схема будет иметь вид, показанный на рис.27.12.

Перенос излучения в поглощающих - пропускающих средах

До сих пор считалось, что между телами, обменивающимися лучистой энергией, среда была прозрачной. Однако стекло, газы с несимметричной структурой молекулы ( $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $SO_2$ ,  $NH_3$ ) могут как излучать, так и поглощать лучистую энергию. Лучистая энергия, проходя через полупрозрачную среду, поглощается ею. Будем считать, что собственное излучение среды мало, тогда на длине  $dx$  ослабление, например, спектральной интенсивности  $dI_\lambda$  найдем из выражения  $dI_\lambda = -\alpha_\lambda I_\lambda dx$ ,

где  $I_{\lambda x}$  - интенсивность излучения на координате  $x$ ;  $\alpha_\lambda$  - спектральный коэффициент поглощения среды.

Разделив переменные и считая  $\alpha_\lambda = \text{const}$ , после интегрирования получим закон Бугера

$$I_{\lambda x} = I_{\lambda, x=0} e^{-\alpha_\lambda x} . \quad (27.29)$$

Лучистая энергия, поглощаемая слоем

$$\Delta I = I_{\lambda, x=0} - I_{\lambda x} = I_{\lambda, x=0} (1 - e^{-\alpha_\lambda x}) ,$$

тогда спектральный коэффициент поглощения и степень черноты найдем из выражения

$$A_\lambda = \varepsilon_\lambda = \frac{I_{\lambda, x=0} - I_{\lambda x}}{I_{\lambda, x=0}} = 1 - e^{-\alpha_\lambda x} .$$

Как было показано ранее, для серых тел  $A_\lambda = A$ ,  $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$ ,  $A = \varepsilon$ .

Рассмотрим лучистый теплообмен между двумя серыми бесконечными параллельными пластинами ( $\varphi_{1-2} = 1$ ), между которыми находится непрозрачный газ.

Лучистую энергию, падающую на первое тело, можно записать в виде:

$$E_{\text{пад1}} = E_{\text{эф2}} D_r + E_r = E_{\text{эф2}} D_r + \varepsilon_r E_{0r} .$$

Найдем поток теплоты, который необходимо подвести к первому телу, чтобы его температура осталась неизменной

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = (E_{\text{эф1}} - E_{\text{пад1}}) F_1 .$$

С учетом предыдущего уравнения можно написать

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = (E_{\text{эф1}} - E_{\text{эф2}} D_r - \varepsilon_r E_{0r}) F_1 .$$

Воспользуемся балансным уравнением:

$1 = A_r + D_r + R_r$ , но для нашего случая  $A_r = \varepsilon_r$ ,  $R_r = 0$ , тогда  $1 = \varepsilon_r + D_r$ . С учетом этого выражения  $E_{\text{эф1}} = E_{\text{эф1}} \cdot 1 = E_{\text{эф1}} \varepsilon_r + E_{\text{эф1}} D_r$ , поэтому

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = (E_{\text{эф1}} \varepsilon_r + E_{\text{эф1}} D_r - E_{\text{эф2}} D_r - \varepsilon_r E_{0r}) F_1 \quad \text{или}$$

$$\dot{Q}_{\text{рез1}} = \frac{E_{\text{эф1}} - E_{\text{эф2}}}{1} + \frac{E_{\text{эф1}} - E_{r0}}{1} , \quad (a)$$

$$\frac{1}{F_1 \varphi_{12} D_r} \quad \frac{1}{F_1 \varepsilon_r}$$

где учитывается, что в общем случае  $\varphi_{1-2} \neq 1$ . Последняя запись уравнения позволяет передачу лучистой энергии между телами изобразить в виде эквивалентной электрической схемы (рис.27.13):

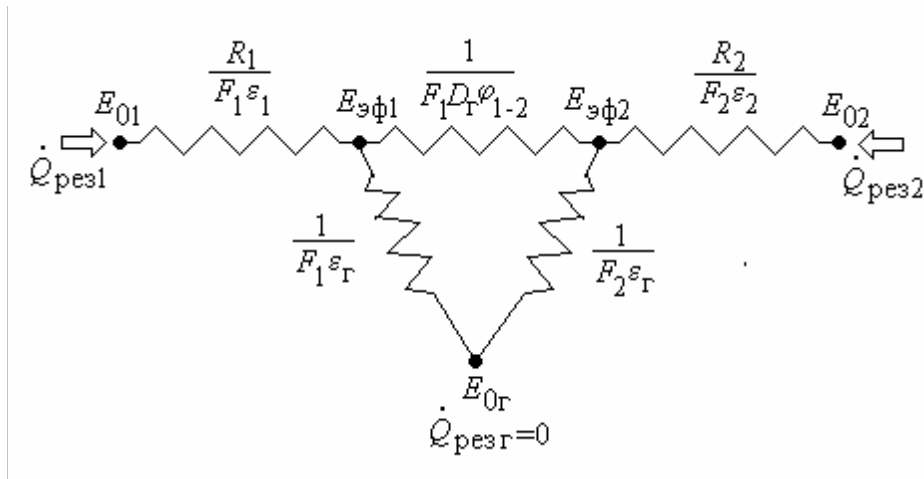


Рис.27.13

Аналогичные уравнения можно написать для второй пластины.

$$E_{\text{пад}2} = E_{\text{эф}1} D_{\Gamma} + \epsilon_{\Gamma} E_{0\Gamma}, \quad \dot{Q}_{\text{рез}2} = (E_{\text{эф}2} - E_{\text{пад}2}) F_2,$$

$$\dot{Q}_{\text{рез}2} = \frac{E_{\text{эф}2} - E_{\text{эф}1}}{1} + \frac{E_{\text{эф}2} - E_{0\Gamma}}{D_{\Gamma} F_2 \varphi_{2-1} \epsilon_{\Gamma} F_2} \quad (\text{b})$$

Так как  $\Sigma \dot{Q}_{\text{рез}i} = 0$ , то  $\dot{Q}_{\text{рез}1} = -\dot{Q}_{\text{рез}2}$ . Отсюда можно определить  $E_{0\Gamma} = C_0 \left( \frac{T_{\Gamma}}{100} \right)^4$ , а затем  $T_{\Gamma}$ . Таким образом, потенциал  $E_{0\Gamma}$ , как и потенциал адиабатической стенки, является плавающим и зависит от температуры других поверхностей.

Определим тепловой поток, который получит второе тело от первого:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{E_{01} - E_{02}}{\frac{R_1}{\epsilon_1 F_1} + R_{\text{экв}} + \frac{R_2}{\epsilon_2 F_2}}, \quad (27.30)$$

где  $R_{\text{экв}} = \frac{1}{\frac{1}{F_1 \varphi_{12} D_{\Gamma}} \left( \frac{1}{F_1 \epsilon_{\Gamma}} + \frac{1}{F_2 \epsilon_{\Gamma}} \right)}$  - эквивалентное сопротивление,

полученное из параллельного соединения сопротивлений

$R_1 = \frac{1}{F_1 \varphi_{1-2} D_{\Gamma}}$  и  $R_2 = \frac{1}{F_1 \epsilon_{\Gamma}} + \frac{1}{F_2 \epsilon_{\Gamma}}$  (напомним, что при параллельном соединении

сопротивлений складываются их проводимости, то есть

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

#### Действие защитных экранов

Чтобы уменьшить поток лучистой энергии от одного тела к другому, между ними устанавливают защитные экраны.

При отсутствии экрана для двух бесконечных параллельных серых пластин

можно написать  $q_{1-2} = C_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$  Вт/м<sup>2</sup>,

где  $C_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}}$ ;  $C_1 = \varepsilon_1 C_0$ ;  $C_2 = \varepsilon_2 C_0$ . Будем считать, что

$C_1 = C_2 = C_3 = C$ . Поместим между телами экран, который представляет собой тонкую пластину, и составим уравнения теплового баланса. Так как экран тонкий, то его температура одинакова с обеих сторон, следовательно

$$q_{1-3} = C_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{а})$$

$$q_{3-2} = C_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{б})$$

но  $q_{1-3} = q_{3-2}$ . Приравнявая (а) и (б), найдем

$$\left( \frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Подставим это выражение в (а), тогда:

$$q_{(1-2)3} = \frac{1}{2} C_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (27.31)$$

т.е. при установке экрана плотность теплового потока уменьшается в два раза:

$q_{(1-2)3} = \frac{q_{1-2}}{2}$ , ( $n = 1$ ). Если имеется  $n$  экранов, то  $q_3 = \frac{q_{1-2}}{n+1}$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $C_1 = C_2 = C$ , а  $C_3 \neq C$ .

$$q_{1-2} = C_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

$$q_{1-3} = C_{\text{пр}31} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{а})$$

где  $C_{\text{пр}31} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_0}}$ .

$$q_{3-2} = C_{\text{пр}32} \left[ \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{б})$$

где  $C_{\text{пр}32} = \frac{1}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}}$ , но в нашем случае  $C_1 = C_2 = C$ , следовательно,  $C_{\text{пр}31} = C_{\text{пр}32} = C_{\text{пр}3}$ . Приравнявая (а) и (б) с учетом сказанного, получим

$$\left( \frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (\text{с})$$

Подставим (с) в (а) :

$$q_{1-3} = \frac{C_{\text{пр}3}}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \frac{q_{1-2} C_{\text{пр}3}}{2 C_{\text{пр}}}, \quad (27.32)$$

то есть  $\frac{q_{(1-2)э}}{q_{1-2}} = \frac{C_{прэ}}{2C_{пр}}$ . Если в качестве экрана используется, например, медь, покрытая окисью, у которой  $C_э = 3,18$ , а у стенки  $C = 5,38$ , то  $\frac{q_{(1-2)э}}{q_{1-2}} \approx 0,144$ , т.е. тепловой поток между поверхностями при установке экрана уменьшается в 6,94 раза.

### Измерение высоких температур

Измерение температуры поверхности высоконагретого тела контактным способом при помощи термометров и термопар встречает значительные технические трудности. В связи с этим широко используются оптические методы, которые позволяют измерять температуру поверхности тела с достаточной точностью не касаясь самого тела. При этом вводятся такие понятия как радиационная, цветная и яркостная температуры. Определив эти температуры из опыта, находят действительные значения температур. Так, из равенства лучистых энергий можно установить связь между радиационной и истинной температурами

$$E_0(T_{рад.}) = E(T), \text{ но } \sigma_0 T_{рад.}^4 = \varepsilon \sigma_0 T^4, \text{ тогда } T = \frac{T_{рад.}}{\varepsilon^{1/4}}.$$

Из соотношения  $\frac{E_{0\lambda_1}(T_{Ц})}{E_{0\lambda_2}(T_{Ц})} = \frac{E_{\lambda_1}(T)}{E_{\lambda_2}(T)}$  с учетом закона Вина найдем зависимость между  $T_{Ц}$  и

$T$ . Действительно, подстановка дает  $e^{\frac{C_2}{T_{Ц}}(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})} \varepsilon_{\lambda_2} = e^{\frac{C_2}{T}(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})} \varepsilon_{\lambda_1}$ . После логарифмирования получим:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Ц}} = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{\lambda_1}}{\varepsilon_{\lambda_2}}\right)}{C_2\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}.$$

Подставив закон Вина в равенство

$$E_{0\lambda}(T_{Я}) = E_{\lambda}(T) = \varepsilon_{\lambda} E_{0\lambda}(T),$$

найдем связь между яркостной и действительной температурами

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Я}} = \frac{\lambda \lg \varepsilon_{\lambda}}{C_2}.$$

### Сложный теплообмен

В реальных системах, как правило, имеет место сложный теплообмен, то есть суммарный тепловой поток складывается из потоков, обусловленных теплопроводностью, конвекцией и лучистым теплообменом. В связи с этим при расчетах необходимо определить долю каждого из них, и если у какого-то потока она мала, то в дальнейшем исключить его из рассмотрения.

При передаче теплоты, например, от одной пластины к другой, когда отсутствуют конвективные токи (зазор  $\delta$  мал), плотность теплового потока можно записать в виде:

$$q = \frac{\lambda_r}{\delta} (T_1 - T_2) + C_{пр} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (27.33)$$

Уравнение теплового баланса для элемента ребра представим так:



$$\lambda_p f_p \frac{d^2 T_p}{dx^2} dx = \alpha(T_p - T_{oc}) \Pi dx + C \left[ \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{oc}}{100} \right)^4 \right] \Pi dx,$$

где  $\Pi$  - периметр ребра;  $f_p$  - площадь поперечного сечения ребра ;  $C = \varepsilon_p C_0$  ;  $\varepsilon_p$  - степень черноты поверхности ребра .

#### Радиационные свойства газов

В отличие от серых тел, газы обладают ярко выраженными спектральными свойствами, т.е. при определенной длине волны они могут хорошо поглощать лучистую энергию, а при другой - быть прозрачными.

Если лучистая энергия, испускаемая серыми телами, определяется свойствами поверхности, то поглощательная и излучательная способности газов зависят от их объема. Поэтому для произвольных объемах вводят понятие средней длины пути луча:

$L = 3,6 \frac{V}{F}$ , где  $F$  - поверхность газового объема. Так, для сферы  $L = \frac{2}{3} D$ , для

бесконечных параллельных стенок  $L = 2\delta$ , для бесконечного цилиндра  $L = D$ .

Интегральная степень черноты газов зависит от температуры и от произведения средней длины пути луча и парциального давления газа (рис.27.14), то есть

$\varepsilon_\Gamma = f(T_\Gamma, L \cdot p_\Gamma)$ . Если газ находится при давлении выше атмосферного, то вводят поправку. Так, для водяного пара можно написать  $\varepsilon'_{H_2O} = \varepsilon_{H_2O} \cdot C_{H_2O}$ , где  $C_{H_2O}$  - коэффициент, зависящий от давления (см. рис.27.15).

Степень черноты для смеси газов определяется по формуле  $\varepsilon_{см} = \varepsilon_{H_2O} + \varepsilon_{CO_2} - \Delta\varepsilon$ . Величина  $\Delta\varepsilon$  характеризует переизлучение газов, когда длины излучаемых волн перекрывают друг друга. Коэффициент поглощения водяного пара находят из выражения:

$$A_{H_2O} = \varepsilon^*_{H_2O} \left( \frac{T_{H_2O}}{T_w} \right)^{0,45} C_{H_2O}, \quad \text{где } \varepsilon^*_{H_2O} = f \left( p_{H_2O} L \frac{T_w}{T_{H_2O}}, T_w \right),$$

$T_w$  - температура излучателя.

В этом случае при определении  $\varepsilon^*_{H_2O}$  используется график  $\varepsilon_{H_2O} = f(p_{H_2O} L, T_\Gamma)$  (см.

рис.27.14), но вместо  $T_\Gamma$  подставляют температуру излучателя  $T_w$ , а  $p_{H_2O} L$  умножают

на  $\frac{T_w}{T_{H_2O}}$ .

Для  $CO_2$  справедлива формула:  $A_{CO_2} = \varepsilon^*_{CO_2} \left( \frac{T_{CO_2}}{T_w} \right)^{0,65} C_{CO_2}$ .

Поглощательная способность смеси определяется выражением  $A_{см} = A_{H_2O} + A_{CO_2} - \Delta A$ , где  $\Delta A = \Delta\varepsilon$  (при температуре  $T_w$ ).

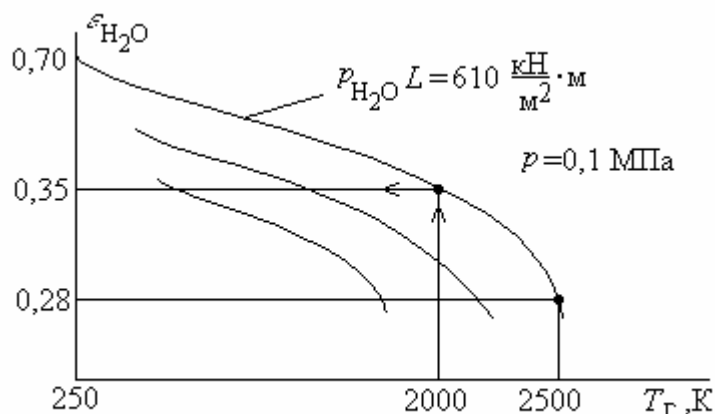


Рис.27.14

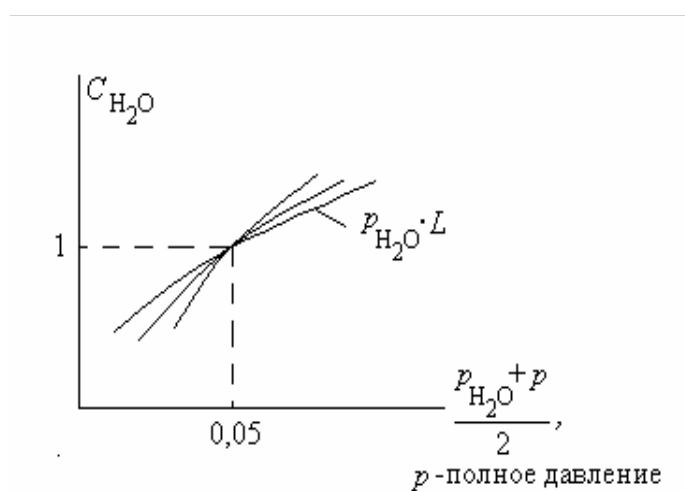


Рис.27.15

## 28. Теплообменные аппараты

Теплообменные аппараты (ТА) предназначены для нагревания одного из теплоносителей (агента) за счет охлаждения другого. Теплообменные аппараты делятся на четыре основных типа.

1. Рекуперативные ТА, в которых теплота от одного агента к другому передается через твердую стенку.
2. Регенеративные ТА, где процесс передачи теплоты осуществляется в нестационарных условиях: сначала горячий теплоноситель нагревает насадку, аккумулирующую теплоту, затем через эту насадку пропускают нагреваемый поток. Такие аппараты находят применение, например, в транспортных газотурбинных установках.
3. ТА смешительного типа, в которых агенты перемешиваются. По этому принципу работают водоподогреватели паросиловых установок, инжекторы.
4. ТА с внутренними источниками теплоты (например, реакторы АЭС).

По характеру взаимного движения теплоносителя рекуперативные ТА разделяются на проточные и противоточные (рис.28.1).

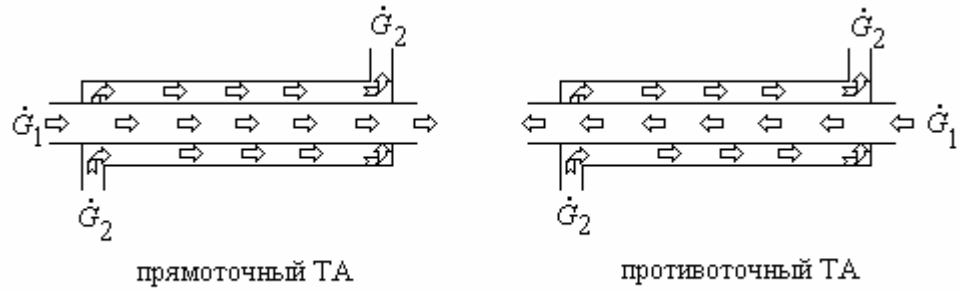


Рис. 28.1

### Уравнение теплового баланса и теплопередачи

Рассмотрим прямоточный теплообменник. Будем полагать, что в ТА происходит передача теплоты без потерь в окружающую среду от горячего агента 1 с расходом  $\dot{G}_1$  к холодному агенту 2 с расходом  $\dot{G}_2$ . Тогда элементарный тепловой поток, отдаваемый первым агентом и получаемый вторым, будет равен соответственно убыли или увеличению энтальпии агентов при изменении их температур на  $dt_1$  и  $dt_2$ :

$$d\dot{Q}_1 = -d\dot{I}_1 = -c_{p1}\dot{G}_1 dt_1, \quad (a)$$

$$d\dot{Q}_2 = d\dot{I}_2 = c_{p2}\dot{G}_2 dt_2. \quad (b)$$

Введем понятие массовой (расходной) теплоемкости  $W = c_p \dot{G}$  и приравняем элементарные тепловые потоки, определяемые (a) и (b):

$$W_2 dt_2 = -W_1 dt_1, \text{ или } \frac{dt_1}{dt_2} = -\frac{W_2}{W_1}.$$

Из соотношения видно, что чем больше расходная теплоемкость, тем меньше изменение температуры соответствующего агента.

Интегрируя (a) и (b), получим

$$\dot{Q}_1 = -\bar{c}_{p1}\dot{G}_1(t_1'' - t_1'),$$

$$\dot{Q}_1 = \bar{c}_{p1}\dot{G}_1(t_1' - t_1''), \quad (c)$$

$$\dot{Q}_2 = \bar{c}_{p2}\dot{G}_2(t_2'' - t_2'). \quad (d)$$

Запишем уравнение теплопередачи в дифференциальной форме

$$d\dot{Q} = k\Delta t dF, \quad (e)$$

где  $\Delta t$  - текущий температурный напор между агентами;  $k$  - локальный коэффициент теплопередачи;  $dF$  - элементарная площадка теплопередающей поверхности. В интегральной форме будем иметь

$$\dot{Q} = \bar{k} \Delta t F. \quad (f)$$

Уравнение теплопередачи (f) используется чаще всего для определения требуемой поверхности теплообмена.

Определим температурный напор между потоками.

Так как  $dt_1 = -\frac{d\dot{Q}}{c_{p1}\dot{G}_1}$ ,  $dt_2 = \frac{d\dot{Q}}{c_{p2}\dot{G}_2}$ , то можно написать

$$dt_1 - dt_2 = d(\Delta t) = -\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)d\dot{Q}, \text{ или обозначая } m = \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right),$$

$$d(\Delta t) = -m d\dot{Q}.$$

После подстановки выражения для  $d\dot{Q}$  из (е), получаем

$$d(\Delta t) = -mk\Delta t dF, \quad \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk dF. \text{ Интегрирование последнего уравнения от } \Delta t' \text{ до } \Delta t_x \text{ и}$$

$$\text{от } 0 \text{ до } F_x \text{ дает: } \ln \frac{\Delta t_x}{\Delta t'} = -mkF_x, \text{ откуда } \Delta t_x = \Delta t' \exp(-mkF_x), \quad (28.1) \text{ где}$$

$\Delta t'$  - температурный напор между теплоносителями на входе в ТА. Уравнение (28.1) представляет изменение локального температурного напора вдоль поверхности теплообмена  $F$  при проточке. Определим выражение для среднего по поверхности температурного напора

$$\begin{aligned} \bar{\Delta t} &= \frac{1}{F} \int_F \Delta t_x dF = \frac{\Delta t'}{F} \int_F e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{mkF} \int_F e^{-mkF} d(mkF) = \frac{\Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} (e^{-mkF} - 1) = \\ &= \frac{\Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \left( \frac{\Delta t''}{\Delta t'} - 1 \right) = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t_{\delta} - \Delta t_m}{\ln \frac{\Delta t_{\delta}}{\Delta t_m}}, \end{aligned} \quad (28.2)$$

где  $\Delta t_{\delta}$  и  $\Delta t_m$  - соответственно наибольший и наименьший температурные напоры. Формула (28.2) представляет среднелогарифмический температурный напор между агентами и может использоваться при расчете рекуперативных ТА как с прямоточным, так и с противоточным движением теплоносителей. Так как в реальных теплообменных аппаратах движение потоков является более сложным, чем в теплообменнике “труба в трубе”, то действительный температурный напор определяют по формуле  $\Delta t_d = \bar{\Delta t} \cdot \varepsilon_{\Delta t}$ , где  $\varepsilon_{\Delta t}$  учитывает как направление движения

потоков, так и число ходов  $\varepsilon_{\Delta t} = f(R, P)$ ;  $R = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{\delta}{\delta'}$ ;  $P = \frac{\delta t_2}{\Delta t_{\max}} = \frac{\delta'}{\Delta}$  (см. рис.28.2 и рис.28.3). Если число ходов в ТА больше трех, то  $\varepsilon_{\Delta t} = 1$ .

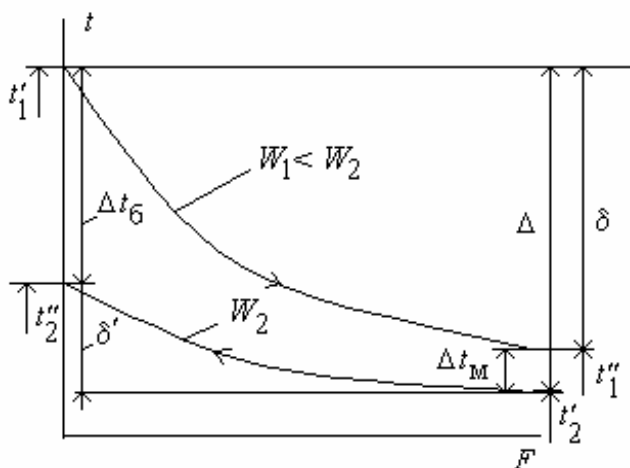


Рис. 28.2

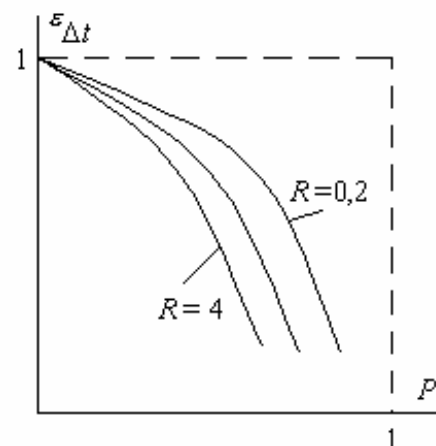


Рис.28.3

Для противоточной схемы имеем  $d(\Delta t) = -\left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right)d\dot{Q}$ , при  $W_1 = W_2$

получаем  $d(\Delta t) = 0$ , т.е. в этом случае температурный напор постоянен вдоль всей поверхности теплообмена.

Эффективность ТА можно оценить коэффициентом эффективности  $\varepsilon = \frac{W_1(t'_1 - t''_1)}{W_1(t'_1 - t'_2)}$ , определяемым как отношение теплового потока, который действительно отдал горячий теплоноситель, к тепловому потоку, который он мог бы отдать, если бы его температура на выходе из ТА  $t''_1$  была равной температуре нагреваемого агента на входе  $t'_2$  в ТА (см. рис.28.2). Из уравнения теплового баланса  $\bar{k}\Delta\bar{t}_d F = W_1\delta$  можно получить  $\frac{\bar{k}F}{W_1} = \frac{\delta}{\Delta\bar{t}_d} = N$ , то есть зная параметр  $N$ , можно определить поверхность теплообменного аппарата. В [27] показано, что  $N$  может быть выражен через коэффициент эффективности и расходные теплосмощности агентов

$$N = \ln\left[\left(1 - \varepsilon \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{1}{1 - \varepsilon}\right] \frac{1}{1 - \frac{W_1}{W_2}}.$$

#### Основные положения расчета ТА рекуперативного типа Тепловой расчет

Основные положения расчета теплообменного аппарата сводятся к следующему.

При заданных:  $\dot{G}_1, t'_1, t'_2, t''_2$  и  $\varepsilon$  определяют  $t''_1$  и уточняют средние значения теплоемкостей в заданном интервале температур  $c_{p_i} = f\left(\frac{t'_i + t''_i}{2}\right)$ . Из уравнения теплового баланса  $\dot{Q} = \dot{G}_1 c_{p1}(t'_1 - t''_1) = \dot{G}_2 c_{p2}(t''_2 - t'_2)$  находят расход воды через трубный пучок  $\dot{G}_2 = \frac{\dot{G}_1 c_{p1}(t'_1 - t''_1)}{c_{p2}(t''_2 - t'_2)}$ . Далее определяют средний коэффициент теплопередачи  $\bar{k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right) \frac{d_n}{d_b} + \frac{1}{\alpha_{пр}\varphi}}$ , где  $\varphi = \frac{F_{pc}}{F_1}$  - коэффициент оребрения;  $\alpha_{пр} = \alpha_1 \left[1 - (1 - \psi\xi E) \frac{F_p}{F_{pc}}\right]$  - приведенный коэффициент теплоотдачи;  $\psi$  учитывает изменение  $\alpha_1$  по высоте ребра;  $\xi$  учитывает трапецевидность ребер,  $E$  - коэффициент эффективности ребра;  $\alpha_1$  - коэффициент теплоотдачи с воздушной стороны (см. [27]);  $\alpha_2 = 6000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$  - коэффициент теплоотдачи по водяному тракту (этой величиной задаются).

Определив  $\bar{k}$  и  $\Delta\bar{t}_{\text{лог д}}$ , находят поверхность ТА по формулам

$$F = \frac{\dot{Q}}{\Delta\bar{t}_{\text{лог д}} \bar{k}} \quad \text{или} \quad F = \frac{NW_1}{k}.$$

Количество пучков и число ходов в ТА находят из следующих соображений. Зная  $\alpha_2$ , определяют  $Nu_2 = \frac{\bar{\alpha}_2 d_b}{\lambda_2}$ , а затем  $Re_2$  из критериального уравнения  $Nu_2 = 0,021 Re_2^{0,8} Pr^{0,43} \varepsilon_f$ . Теперь можно найти скорость воды в трубке, которой отвечает  $\alpha_2$ :  $w_2 = \frac{Re_2 \bar{\nu}_2}{d_b}$ , но  $\dot{G}_2 = \frac{\pi d_b^2}{4} \bar{\rho}_2 w_2 n$ , откуда число трубок в пучке  $n = \frac{4 \dot{G}_2}{\pi d_b^2 \bar{\rho}_2 w_2}$ . Поверхность пучка  $F_{\text{пучка}} = \pi d L_x n$ , где  $L_x$  - длина трубки в пучке (рис.28.4). После этого число ходов находят из выражения  $m = \frac{F}{F_{\text{пучка}}}$ .

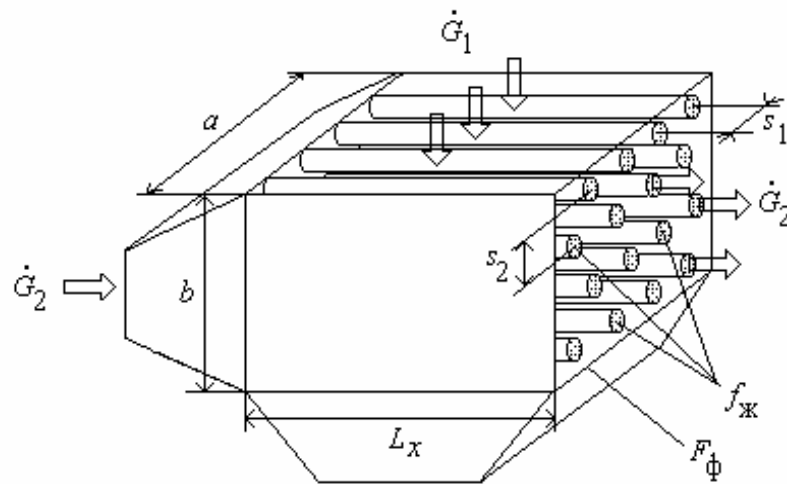


Рис.28.4

### Гидравлический расчет

Движение теплоносителя в трактах ТА приводит к падению давления из-за наличия гидравлических сопротивлений. Цель расчета - определить, насколько уменьшится давление агента на выходе из ТА по сравнению с входным и определить, если это необходимо, какую мощность должна иметь воздуходувка, компрессор или насос, чтобы создать необходимый напор, равный суммарным потерям давления при заданном расходе агента.

В воздушном тракте падение давления имеет место в диффузоре, пучках труб при их поперечном обтекании воздухом и в конфузоре, то есть  $\Delta p_{\Sigma} = \Delta p_{\text{диф}} + \Delta p_{\text{пуч.труб}} + \Delta p_{\text{конф}}$ .

В водяном тракте будем иметь :

$$\Delta p_{\Sigma} = \Delta p_{\text{диф}} + \Delta p_{\text{вс}} + \Sigma \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{вр}} + \Delta p_{\text{пов}} + \Delta p_{\text{конф}}, \text{ где}$$

$$\Delta p_{\text{вс}} = \zeta \frac{\rho_2 w_2^2}{2} - \text{падение давления из-за внезапного сужения потока; } \zeta = f\left(\text{Re}, \frac{F_{\text{тр}}}{F}\right) -$$

коэффициент местного сопротивления;

$$\Delta p_{\text{тр}} = \xi \frac{L_x \bar{\rho}_2 w_2^2}{d_b} - \text{потеря давления, обусловленная трением при движении воды в трубке в одном ходе.}$$

Остальные  $\Delta p_i$  характеризуют соответственно падение давления из-за внезапного расширения потока при выходе из трубной доски  $\Delta p_{вр}$ , поворота потока  $\Delta p_{пов}$  и его движения в конфузоре  $\Delta p_{конф}$ , значения которых можно найти в справочниках по гидравлическим сопротивлениям.

Так как течение в трактах ТА неізотермическое, то соответствующие коэффициенты сопротивления необходимо уточнять, умножая их на поправки типа  $\left(\frac{\mu_c}{\mu_{жс}}\right)^n$  или  $\left(\frac{Pr_c}{Pr_{жс}}\right)^m$ , которые учитывают зависимость физических свойств агентов от температуры в пограничном слое.

Зная суммарное падение давления вдоль тракта, можно найти, например, мощность насоса, необходимую для прокачки воды с заданным расходом:

$$N_n = \dot{G}_2 \bar{v}_2 \Delta p_{\Sigma H_2O} \frac{1}{\eta_{oi}^H} = \frac{\dot{G}_2 \Delta p_{\Sigma H_2O}}{\rho_2 \eta_{oi}^H}, \text{ где } \eta_{oi}^H - \text{внутренний относительный к.п.д. насоса.}$$

#### Сравнение тепловой эффективности прямоточной и противоточной схем ТА

Тепловая эффективность прямоточных ТА при прочих равных условиях приближается к противоточным в том случае, когда изменение температуры одного агента намного больше (меньше), чем другого  $\frac{\delta t_2}{\delta t_1} = \frac{W_1}{W_2}$  (см. рис.28.5). С ростом температурного

напора эффективность прямоточного ТА возрастает  $\frac{\delta t_1}{\Delta t} = \frac{\bar{k}F}{W_1} = N$ . При малых значениях параметра  $N$  эффективность прямоточных аппаратов приближается к показателям противоточных. В силу сказанного используются, как правило, противоточные ТА.

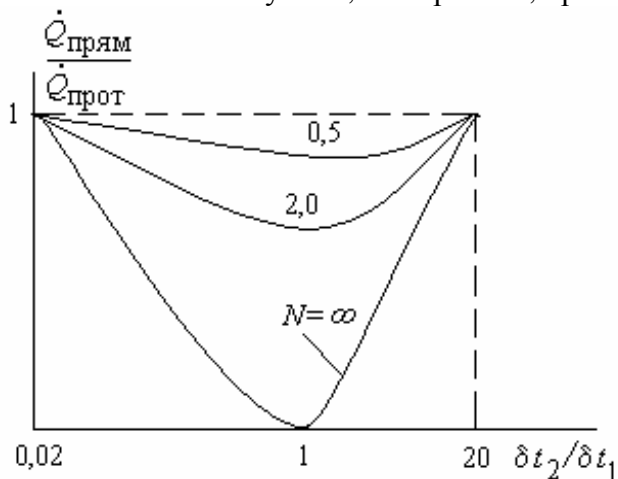


Рис.28.5

## Приложение I

Ниже представлены тексты программ на языке Фортран-77. Программа GTU\_REG предназначена для расчета тепловой эффективности цикла газотурбинной установки с регенерацией теплоты. Программы GEO1RA и GEO1A позволяют рассчитывать мощность и эффективность геотермальных тепловых электрических станций (ГеоТЭС) традиционного типа с расширителем (см. рис.10.20б, стр. 163) и станций с применением гидропаровой турбины, (рис.10.20в, стр.163) с оптимизацией параметров рабочего тела. В таблице П.1 приведены результаты сравнения расчетной мощности двух станций при различных параметрах (температуре  $T$  и степени сухости  $x$ ) термальной смеси на входе в ГеоТЭС.

ГТУ с регенерацией теплоты

Идентификаторы программы

(все единицы измерения – в СИ):

$T_1 \dots T_6, P_1 \dots P_4$  – температуры и давления в характерных точках цикла

ROV – плотность рабочего тела

R0 – универсальная газовая постоянная

RV,AMV – газовая постоянная и молекулярная масса рабочего тела

HRN – теплота сгорания топлива

BT – расход топлива

PIK – степень повышения давления в компрессоре

TAU= $T_1/T_3$

LKS,LKD –идеальная и действительная работа компрессора

LTS,LTD – идеальная и действительная работа турбины

LCS,LCD – идеальная и действительная работа цикла

MU0,MMU – степень регенерации теплоты

NGTUD – действительная мощность ГТУ

EFGTU – к.п.д. ГТУ

```
PROGRAM GTU_REG
```

```
REAL LCS,LCD,LKS,LKD,LTS,LTD,KV,MU,MU0,
```

```
& NCGTUD,LCDQ
```

```
REAL MMU(10)
```

```
OPEN (2,FILE='GTU.DAT')
```

```
OPEN (6,FILE='REZGTU.DAT')
```

```
OPEN (7,FILE='TABGTU.DAT')
```

```
READ (2,*) P1,T1,R0,AMV,EFK,EFT,HRN,GG,EFKC,TAU0,MU0
```

```
WRITE(7,*) T1,T1/TAU0,TAU0
```

```
TAU=TAU0
```

```
MMU(1)=0
```

```
MMU(2)=0.3
```

```
MMU(3)=0.5
```

```
MMU(4)=0.75
```

```
DO 2 J=1,4
```

```
MU=MMU(J)
```

```
DO 3 K=1,13
```

```
PIK=0.5+K
```

```
T3=T1/TAU
```

```
RV=R0/AMV
```

```
ROV1=P1/RV/T1
```

```
CV=5*RV/2.
```

```
CP=CV+RV
```

```
KV=CP/CV
```



```

C    оптимальная степень повышения давления в
C    компрессоре при MU=0
PIKOPT=(T3*EFT*EFK/T1)**(KV/(2.*(KV-1.)))
P2=P1*PIK
T2=T1*(PIK)**((KV-1.)/KV)
T2D=T1+(T2-T1)/EFK
ROV2=P2/RV/T2
ROV2D=P2/RV/T2D
P3=P2
ROV3=P3/RV/T3
ROV3D=P3/RV/T3
LKS=-CP*(T2-T1)
LKD=-CP*(T2D-T1)
P4=P1
T4=T3*(P4/P3)**((KV-1.)/KV)
LTS=CP*(T3-T4)
T4D=T3-(T3-T4)*EFT
ROV4=P4/RV/T4
ROV4D=P3/RV/T4D
T5=T2D+MU*(T4D-T2D)
T6=T4D+T2D-T5
Q1=CP*(T3-T5)
QI=Q1*GG
Q2=CP*(T6-T1)
QII=Q2*GG
LTD=CP*(T3-T4D)
LCS=LTS+LKS
LCD=LTD+LKD
NCGTUD=GG*LCD
EFVC=LCD/LCS
LCDQ=Q1-Q2
EFGTU=NCGTUD/(GG*CP*(T3-T5))
BT=QI/HRN/EFKC
C    IF(T6.EQ.T2D.OR.T6.LT.T2D) GOTO 4
    WRITE(6,*) ' LKS=',LKS,' LKD=',LKD,' LTS=',LTS,
& ' PIKOPT=',PIKOPT,' TAU=',TAU,' T3=',T3,' T1=',T1,
& ' LTD=',LTD,' Q1=',Q1,' T2=',T2,' T4=',T4,' T4D=',T4D,
& ' Q2=',Q2,' LCS=',LCS,' LCD=',LCD,' T2D=',T2D,' KV=',KV,
& ' ROV2D=',ROV2D,' Q2=',Q2,' EFT=',EFT,' EFVC=',EFVC,
& ' ROV2D=',ROV2D,' T1=',T1,' P1=',P1,' EFGTU=',EFGTU,
& ' P2=',P2,' PIK=',PIK,' BT=',BT,' QI=',QI,' QII=',QII,
& ' T5=',T5,' T6=',T6,' MU=',MU,' NCGTUD=',NCGTUD
    WRITE(7,100) MU,PIK,EFGTU
3    CONTINUE
2    CONTINUE
4    STOP
100  FORMAT(F5.2,F10.2,F10.3)
    END
Исходные данные (файл GTU.DAT)
1.E5 290. 8314. 29. 0.88 0.89 44.E6 490. 0.98 0.2472 0.0
P1 T1 R0 AMV EFK EFT HRN GG EFKC TAU0 MU0

```

## PROGRAM GEO1RA

С Одноконтурная геотермальная станция  
 С с одним расширителем  
 С  
 С Идентификаторы программы:  
 С R-удельная теплота парообразования, Дж/кг;  
 С CP1-удельная изобарная теплоемкость термальной  
 С воды, Дж/(кгК);  
 С E-удельная энтальпия термальной воды, Дж/кг;  
 С P-давление насыщения, Па;  
 С CPIT-средняя удельная изобарная теплоемкость  
 С термальной воды в заданном интервале  
 С температур, Дж/(кгК);  
 С S-удельная энтропия термальной воды, Дж/(кгК);  
 С IS-изоэнтропийный процесс;  
 С GS-расход термальной смеси через ГеоТЭС, кг/с;  
 С GET-внутренний относительный КПД ГПТ;  
 С PET-внутренний относительный КПД ПТ;  
 С ETN-внутренний относительный КПД насоса;  
 С ТК-температура пара в конденсаторе, С;  
 С ТКК-температура пара в конденсаторе, К;  
 С VK-удельный объем воды в конденсаторе, м3/кг;  
 С T1-температура термальной смеси на входе в  
 С ГеоТЭС, С;  
 С X1-степень сухости термальной смеси на входе в  
 С ГеоТЭС;  
 С GP1-расход сухого насыщенного пара через  
 С первые ступени паровой турбины (ПТ), кг/с;  
 С E1P-энтальпия сухого насыщенного пара перед  
 С ПТ, Дж/кг;  
 С T2-температура пара за ГПТ, С;  
 С X2-степень сухости влажного пара за ГПТ;  
 С E2P-энтальпия сухого насыщенного пара за ГПТ, Дж/кг;  
 С S1P-энтропия сухого насыщенного пара перед ПТ, С Дж/кг/К;  
 С S2P-энтропия сухого насыщенного пара за ГПТ,  
 С Дж/кг/К;  
 С EKS-энтальпия влажного пара за ПТ при  
 С изоэнтропийном расширении, Дж/кг;  
 С P2- давление за ГПТ, Па;  
 С PGT-мощность ГПТ, Вт;  
 С PT-мощность ПТ, Вт;  
 С PNK-мощность насоса конденсатора, Вт;  
 С PNZ-мощность насоса закачки воды в пласт, Вт;  
 С PGEO-полезная мощность ГеоТЭС, Вт;  
 С T5-температура воды в точке "5", С;  
 С ETI-внутренний абсолютный КПД ГеоТЭС;  
 С ETEX-эксергетический КПД ГеоТЭС.  
 DIMENSION Pmaxx(10,10),TT1(10)  
 R(A)=(2447.7-1.283\*(A-273.)-6.26E-3\*(A-273.)\*\*2)\*1.E3  
 CP1(A)=4331.-3.09\*(A-273.)+1.98E-2\*(A-273.)\*\*2  
 E(A)=(4.7706+4.042653\*(A-273.)+9.59184E-4\*(A-273.)\*\*2)\*1.E3

```

P(A)=1.E6*EXP(82.86568+0.01028003*A-7821.541/A-
& 11.48776*ALOG(A))
CPIT(A)=(CP1(A)+CP1(T0))/2.
S(A)=CPIT(A)*ALOG(A/T0)
OPEN(2,FILE='GEO1RA.DAT')
OPEN(8,FILE='REZG1RA.DAT')
OPEN(7,FILE='PLGEO1RA.DAT')
READ(2,*) GS,EFR,EFPT,EFN,T0,TF,TK,VK,TOS,
& EOS,SOS,V6
WRITE(6,*) 'Одноконтурная схема с одним расширителем'
WRITE(8,*) 'Одноконтурная схема с одним расширителем'
WRITE(6,99)
WRITE(8,99)
99  FORMAT(/T6,'T1',T14,'T2',T22,'T5',T30,'X1',T38,'NGEO',T50,
& 'NPT',T58,'ETI',T64,'ETEX')
TKK=TK+T0
PK=P(TKK)
DO 2 J=1,10
X1=0.05+0.05*(J-1)
DO 2 I=1,8
T1=110.+10.*I
TT1(I)=T1
T1K=T1+T0
GP1=GS*X1
PMAK=0.0
NT2=INT(T1-TF)+1
DO 1 K=1,NT2
T2=TF+(K-1)
T2K=T2+T0
R1=R(T1K)
R2=R(T2K)
E1P=E(T1K)+R1
C1=ALOG(T1K/T2K)
E2S=E(T2K)+(R1/T1K+CP1(T1K)*C1)*T2K
E2D=E1P-(E1P-E2S)*EFPT
X2=(E(T1K)*EFR-E(T2K))/R2
E2P=E(T2K)+R2
XSM=X1+(1.-X1)*X2
ESM2=(E2D*X1+(1.-X1)*X2*E2P)/XSM
S1P=S(T1K)+R1/T1K
S2P=S(T2K)+R2/T2K
SSM2=((S1P+(E1P-E2S)*(1.-EFPT)/T2K)*X1
& +(1.-X1)*X2*S2P)/XSM
EKS=E(TKK)+(SSM2-S(TKK))*TKK
PT=GS*EFPT*(X1*(E1P-E2S)+XSM*(ESM2-EKS))
P2=P(T2K)
P6=P(T1K)
PNK=XSM*(P2-PK)*GS*VK/EFN
PNZ=(P6-P2)*GS*V6/EFN
PGEO=PT-PNK-PNZ
EP5=(1.-X1)*(1.-X2)*E(T2K)+XSM*(E(TKK)+(P2-PK)*VK/EFN)
T5=-1.1148+0.24685*(EP5/1E3)-1.27E-5*(EP5/1.E3)**2

```

```

T5K=T5+T0
IF(PGEO.LE.PMAX.OR.T5.LT.TF) GO TO 1
PMAX=PGEO
Pmaxx (I,J)=PMAX
PTM=PT
PNZM=PNZ
PNKM=PNK
T2M=T2
T5M=T5
EP5M=EP5
ESM1=E(T1K)*(1.-X1)+E1P*X1
SSM1=S(T1K)*(1.-X1)+S1P*X1
ETI=PMAX/((ESM1-EP5M)*GS)
ETEX=PMAX/(GS*(ESM1-EOS-TOS*(SSM1-SOS)))
1  CONTINUE
WRITE(6,100) T1,T2M,T5M,X1,PMAX,
& PTM,ETI,ETEX
WRITE(8,100) T1,T2M,T5M,X1,PMAX,
& PTM,ETI,ETEX
100  FORMAT(T2,3F8.3,F8.5,2E11.4,2F6.3)
110  FORMAT(F6.0,10F6.2)
2  CONTINUE
DO 3 I=1,8
WRITE(7,110)TT1(I),(Pmaxx(I,J)/1e6,J=1,10)
3  CONTINUE
STOP
END

```

Исходные данные (файл geo1ra.dat)

```

166.7 0.98 0.72 0.7 273. 68. 45.83 1.0102E-3 283. 42.E3 151.1 1.012E-3
GS EFR EFPT EFN T0 TF TK VK TOS EOS SOS V6

```

```

PROGRAM GEO1A
C  Одноконтурная геотермальная станция
C  с одной гидропаровой турбиной
C
C  Идентификаторы программы:
C  R-удельная теплота парообразования, Дж/кг;
C  CP1-удельная изобарная теплоемкость термальной
C  воды, Дж/кг/гр;
C  E-удельная энтальпия термальной воды, Дж/кг;
C  P-давление насыщения, Па;
C  CPIT-средняя удельная изобарная теплоемкость термальной
C  воды в заданном интервале температур, Дж/кг/гр;
C  S-удельная энтропия термальной воды, Дж/кг/К;
C  IS-изоэнтروпийный процесс;
C  GS-расход термальной смеси через ГеоТЭС, кг/с;
C  GET-внутренний относительный КПД ГПТ;
C  PET-внутренний относительный КПД ПТ;
C  ETN-внутренний относительный КПД насоса;
C  TK-температура пара в конденсаторе, С;
C  ТКК-температура пара в конденсаторе, К;

```

С VK-удельный объем воды в конденсаторе, м<sup>3</sup>/кг;  
 С T1-температура термальной смеси на входе в ГеоТЭС, С;  
 С X1-степень сухости термальной смеси на входе в ГеоТЭС;  
 С GP1-расход сухого насыщенного пара через  
 С первые ступени паровой турбины(ПТ), кг/с;  
 С E1P-энтальпия сухого насыщенного пара перед ПТ, Дж/кг;  
 С T2-температура пара за ГПТ, С;  
 С X2-степень сухости влажного пара за ГПТ;  
 С E2P-энтальпия сухого насыщенного пара за ГПТ, Дж/кг;  
 С S1P-энтропия сухого насыщенного пара перед ПТ, Дж/кг/К;  
 С S2P-энтропия сухого насыщенного пара за ГПТ, Дж/кг/К;  
 С EKS-энтальпия влажного пара за ПТ при изоэнтропийном  
 С расширении, Дж/кг;  
 С P2- давление за ГПТ, Па;  
 С PGT-мощность ГПТ, Вт;  
 С PT-мощность ПТ, Вт;  
 С PNK-мощность насоса конденсатора, Вт;  
 С PNZ-мощность насоса закачки воды в пласт, Вт;  
 С PGEO-полезная мощность ГеоТЭС, Вт;  
 С T5-температура воды в точке "5",С;  
 С ETI-внутренний абсолютный КПД ГеоТЭС;  
 С ETEX-эксергетический КПД ГеоТЭС.  
 DIMENSION Pmaxх(10,10),TT1(10)  
 R(A)=(2447.7-1.283\*(A-273.)-6.26E-3\*(A-273.)\*\*2)\*1.E3  
 CP1(A)=4331.-3.09\*(A-273.)+1.98E-2\*(A-273.)\*\*2  
 E(A)=(4.7706+4.042653\*(A-273.)+9.59184E-4\*(A-273.)\*\*2)\*1.E3  
 P(A)=1.E6\*EXP(82.86568+0.01028003\*A-7821.541/A-  
 & 11.48776\*ALOG(A))  
 CPIT(A)=(CP1(A)+CP1(T0))/2.  
 S(A)=CPIT(A)\*ALOG(A/T0)  
 PRINT\*, 'IS'  
 READ\*, IS  
 OPEN(2,FILE='GEO1A.DAT')  
 OPEN(7,FILE='PLGEO1A.DAT')  
 OPEN(8,FILE='REZGE1A.DAT')  
 READ(2,\*) GS,GET,PET,ETN,T0,TF,TK,VK,TOS,  
 & EOS,SOS,V6  
 WRITE(6,\*) 'Одноконтурная схема с одной ГПТ '  
 WRITE(8,\*) 'Одноконтурная схема с одной ГПТ '  
 IF(IS.EQ.0) THEN  
 WRITE(6,\*) 'изоэнтропийная степень сухости '  
 WRITE(8,\*) 'изоэнтропийная степень сухости '  
 ENDIF  
 WRITE(6,99)  
 WRITE(8,99)  
 99 FORMAT(/T6,'T1',T14,'T2',T22,'T5',T30,'X1',T38,'NGEO',T49,'NGPT',  
 & T61,'NPT',T70,'ETI',T75,'ETEX',T83,'ET')  
 TKK=TK+T0  
 PK=P(TKK)  
 DO 2 J=1,10  
 X1=0.05+0.05\*(J-1)  
 GP1=GS\*X1

```

DO 2 I=1,8
T1=110.+10.*I
TT1(I)=T1
T1K=T1+T0
PMAx=0.0
NT2=INT(T1-TF)+1
DO 1 K=1,NT2
T2=TF+(K-1)
T2K=T2+T0
R1=R(T1K)
R2=R(T2K)
E1P=E(T1K)+R1
C1=ALOG(T1K/T2K)
E2S=E(T2K)+(R1/T1K+CP1(T1K)*C1)*T2K
E2D=E1P-(E1P-E2S)*PET
X2=CP1(T2K)*(T2K*C1+T1K*
& (1.-T2K*(1.+C1)/T1K)*
& (1.-GET))/R2
E2P=E(T2K)+R2
IF(IS.EQ.0) THEN
X2=CP1(T2K)*T2K*C1/R2
ENDIF
XSM=X1+(1.-X1)*X2
ESM2=(E2D*X1+(1.-X1)*X2*E2P)/XSM
S1P=S(T1K)+R1/T1K
S2P=S(T2K)+R2/T2K
SSM2=((S1P+(E1P-E2S)*(1.-PET)/T2K)*X1
& +(1.-X1)*X2*S2P)/XSM
EKS=E(TKK)+(SSM2-S(TKK))*TKK
PGT=CP1(T1K)*(1.-X1)*GS*(T1K-T2K*(1.+C1))*GET
PT=GS*PET*(X1*(E1P-E2S)+XSM*(ESM2-EKS))
P2=P(T2K)
P6=P(T1K)
PNK=XSM*(P2-PK)*GS*VK/ETN
PNZ=(P6-P2)*GS*V6/ETN
PGEO=PT+PGT-PNK-PNZ
ET=PGEO/(PT+PGT)
EP5=(1.-X1)*(1.-X2)*E(T2K)+XSM*(E(TKK)+(P2-PK)*VK/ETN)
T5=-1.1148+0.24685*(EP5/1E3)-1.27E-5*(EP5/1.E3)**2
T5K=T5+T0
IF(PGEO.LE.PMAx.OR.T5.LT.TF) GO TO 1
PMAx=PGEO
Pmaxx(I,J)=PMAx
PGTM=PGT
PTM=PT
PNZM=PNZ
PNKM=PNK
ETM=PMAx/(PTM+PGTM)
T2M=T2
T5M=T5
EP5M=EP5
ESM1=E(T1K)*(1.-X1)+E1P*X1

```

```

SSM1=S(T1K)*(1.-X1)+S1P*X1
ETI=PMAX/((ESM1-EP5M)*GS)
ETEX=PMAX/(GS*(ESM1-EOS-TOS*(SSM1-SOS)))
1  CONTINUE
  WRITE(6,100) T1,T2M,T5M,X1,PMAX,
& PGTM,PTM,ETI,ETEX,ETM
  WRITE(8,100) T1,T2M,T5M,X1,PMAX,
& PGTM,PTM,ETI,ETEX,ET
2  CONTINUE
  DO 3 I=1,8
    WRITE(7,110)TT1(I),(Pmaxx(I,J)/1E6,J=1,10)
3  CONTINUE
100  FORMAT(T2,3F8.3,F8.5,3E11.4,3F6.3)
110  FORMAT(F6.0,10F6.2)
  STOP
  END

```

Исходные данные (файл geol1a.dat)

166.7 0.42 0.72 0.7 273. 68. 45.83 1.0102E-3 283. 42.E3 151.1 1.012E-3  
GS GET PET ETN T0 TF TK VK TOS EOS SOS V6

Таблица П.1

$T, C$	$x$	$N_{рас}, МВт$	$N_{ГПТ}-N_{рас}, КВт$	$(N_{ГПТ}-N_{рас})/N_{рас}, \%$
120	0.05	4.44	721	16.24
130		5.21	906	17.36
140		6.03	1087	18.00
150		6.89	1277	18.52
160		7.79	1476	18.95
170		8.72	1678	19.24
180		9.68	1893	19.54
190		10.69	2120	19.83
120	0.10	7.03	673	9.57
130		8.06	846	10.49
140		9.12	1019	11.17
150		10.19	1210	11.87
160		11.29	1390	12.31
170		12.39	1590	12.83
180		13.52	1790	13.24
190		14.66	2000	13.64
120	0.15	9.62	618	6.42
130		10.91	790	7.24
140		12.20	960	7.87
150		13.49	1130	8.38
160		14.78	1310	8.86
170		16.07	1480	9.21
180		17.35	1680	9.68
190		18.63	1870	10.04
120	0.20	12.21	570	4.67
130		13.76	730	5.31
140		15.29	890	5.82
150		16.79	1060	6.31

160		18.28	1220	6.67
170		19.74	1390	7.04
180		21.18	1570	7.41
190		22.60	1750	7.74
120	0.25	14.80	510	3.45
130		16.61	660	3.97
140		18.37	830	4.52
150		20.09	980	4.88
160		21.77	1140	5.24
170		23.41	1300	5.55
180		25.01	1460	5.84
190		26.57	1640	6.17
120	0.30	17.40	440	2.53
130		19.45	600	3.08
140		21.45	760	3.54
150		23.39	900	3.85
160		25.27	1050	4.16
170		27.08	1210	4.47
180		28.84	1360	4.72
190		30.54	1520	4.98

## Приложение II

### Расчет температурного поля в пластине итерационным методом [32]

```

PROGRAM TEMPL1
DIMENSION T(100),TT(100)
OPEN(2,FILE='TEMPL1.DAT')
OPEN(4,FILE='PRN')
OPEN(6,FILE='CON')
OPEN(8,FILE='RESTP1.DAT')
READ(2,*) N,EPS
WRITE(6,10)
WRITE(8,10)
10  FORMAT(3X,'РАСЧЕТ ТЕМП. ПОЛЯ ИТЕР. МЕТОДОМ')
DO 20 I=1,N
T(I)=0.0
20  TT(I)=T(I)
DO 70 I=1,50
21  T(1)=50.+0.222*T(2)+0.111*T(6)
T(2)=50.+0.25*(T(1)+T(3)+T(7))
T(3)=50.+0.25*(T(2)+T(4)+T(8))
T(4)=50.+0.25*(T(3)+T(5)+T(9))
T(5)=50.+0.5*T(4)+0.25*T(10)
T(6)=27.778+0.111*T(1)+0.222*T(7)+0.111*T(11)
T(7)=0.25*(T(2)+T(6)+T(8)+T(12))
T(8)=0.25*(T(3)+T(7)+T(9)+T(13))
T(9)=0.25*(T(4)+T(8)+T(10)+T(14))
T(10)=0.25*T(5)+0.5*T(9)+0.25*T(15)
T(11)=38.889+0.111*T(6)+0.222*T(12)
T(12)=25.+0.25*(T(7)+T(11)+T(13))
T(13)=25.+0.25*(T(8)+T(12)+T(14))

```



```

T(14)=25.+0.25*(T(9)+T(13)+T(15))
22  T(15)=25.+0.25*T(10)+0.5*T(14)
    DO 30 J=1,N
    IF(ABS(TT(J)-T(J)).GT.EPS) GOTO 50
30  CONTINUE
    WRITE(6,40) (K,T(K),K=1,N)
    WRITE(8,40) (K,T(K),K=1,N)
40  FORMAT(' T(',I2,')=',F8.2)
    STOP
50  DO 60 J=1,N
60  TT(J)=T(J)
70  CONTINUE
    WRITE(6,80) EPS
    WRITE(8,80) EPS
80  FORMAT(1H1,'ТЕМП. НЕ ОПР. ПРИ 50 ШАГАХ ИТЕР.')
```

STOP  
END

15 0.1 - файл исходных данных "TEMPL1.DAT"

#### Результаты расчета

T(1)= 88.48	T(10)= 140.76
T(2)= 138.78	T(11)= 68.04
T(3)= 158.41	T(12)= 96.73
T(4)= 166.16	T(13)= 110.59
T(5)= 168.25	T(14)= 116.82
T(6)= 69.19	T(15)= 118.60
T(7)= 108.36	
T(8)= 128.8	
T(9)= 138.12	

#### Расчет поля температуры в пластине путем обращения матрицы

```

PROGRAM PL_MATR
DIMENSION A(50,50),B(50),C(50,50),T(50)
OPEN(2,FILE='PL.DAT')
OPEN(4,FILE='REZPL.DAT')
READ(2,*) N
READ(2,*) ((A(I,J),J=1,N),I=1,N),(B(I),I=1,N)
CALL MATINV(A,N,C)
DO 20 I=1,N
SUM=0.0
DO 10 J=1,N
10  SUM=SUM+C(I,J)*B(J)
20  T(I)=SUM
WRITE(4,*)(I,T(I),I=1,N)
STOP
END
SUBROUTINE MATINV(AA,N,AINV)
DIMENSION AA(50,50),AINV(50,50),A(50,100),ID(50)
NN=N+1
N2=2*N
DO 100 I=1,N
ID(I)=I
```

```

DO 100 J=1,N
100  A(I,J)=AA(I,J)
      DO 200 I=1,N
      DO 200 J=NN,N2
200  A(I,J)=0.
      DO 300 I=1,N
300  A(I,N+I)=1
      DO 400 K=1,N
      S=A(K,K)
      J=K
      DO 500 I=K+1,N
      R=A(I,K)
      IF(ABS(R).GT.ABS(S)) THEN
        S=R
        J=I
      ENDIF
500  CONTINUE
      IF(S.EQ.0) THEN
        PRINT*,'DET=0'
        STOP
      ENDIF
      IF(J.EQ.K) GOTO 700
      DO 600 J=K+1,N2
      R=A(K,I)
      A(K,I)=A(J,I)
600  A(J,I)=R
700  DO 800 J=K+1,N2
800  A(K,J)=A(K,J)/S
      DO 820 I=K+1,N
      R=A(I,K)
      DO 810 J=K+1,N2
810  A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*R
820  CONTINUE
400  CONTINUE
      DO 900 J=N+1,N2
      DO 900 I=N-1,1,-1
      S=A(I,J)
      DO 910 K=I+1,N
910  S=S-A(K,J)*A(I,K)
      A(I,J)=S
900  CONTINUE
      DO 920 I=1,N
      DO 920 J=1,N
920  AINV(I,J)=A(I,J+N)
      RETURN
      END

```

15

-4.5, 1., 0., 0., 0., 0., 5, 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,  
 1., -4., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,  
 0., 1., -4., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,  
 0., 0., 1., -4., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,  
 0., 0., 0., 1., -2., 0., 0., 0., 0., 5, 0., 0., 0., 0., 0.,  
 .5, 0., 0., 0., 0., -4.5, 1., 0., 0., 0., 5, 0., 0., 0., 0.,  
 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0.,  
 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1., 0., 0., 0., 1., 0., 0.,  
 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1., 0., 0., 0., 1., 0.,  
 0., 0., 0., 0., 5, 0., 0., 0., 1., -2., 0., 0., 0., 0., 5,  
 0., 0., 0., 0., 0., 5, 0., 0., 0., 0., -4.5, 1., 0., 0., 0.,  
 0., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1., 0., 0.,  
 0., 0., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1., 0.,  
 0., 0., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1.,  
 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 1., 0., 0., 0., 1., -4., 1.,  
 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 5, 0., 0., 0., 1., -2.,  
 -225., -200., -200., -200., -100., -125., 0., 0., 0., 0., -175.,  
 -100., -100., -100., -50.

$$T(1) = 88.57$$

$$T(2) = 138.91$$

$$T(3) = 158.56$$

$$T(4) = 166.30$$

$$T(5) = 168.38$$

$$T(6) = 69.30$$

$$T(7) = 108.51$$

$$T(8) = 129.01$$

$$T(9) = 138.28$$

$$T(10) = 140.91$$

$$T(11) = 68.11$$

$$T(12) = 96.83$$

$$T(13) = 110.69$$

$$T(14) = 116.91$$

$$T(15) = 118.6$$

### Тепловой и гидравлический расчет теплообменного аппарата

(методика расчета изложена в [27])

- '
- ' Идентификаторы
- ' CP1-уд. изобарная теплоемк. воздуха
- ' CP2-уд. изобарная теплоемк. воды
- ' T11-температура воздуха перед ТА
- ' T12-температура воздуха за ТА
- ' T21-температура воды перед ТА
- ' T22-температура воды за ТА
- ' G1-расход воздуха через ТА
- ' G2-расход воды через ТА
- ' P11-давление воздуха перед ТА
- ' P12-давление воздуха за ТА
- ' P21-давление воды перед ТА
- ' P22-давление воды за ТА
- ' EPS-тепловая эффективность ТА

```

' N-параметр переноса теплоты
' DI-внутр. диаметр трубы
' D-наружн. диаметр трубы
' DR-наружн. диаметр ребра
' SR-шаг между ребрами
' PI-число 'Пи'
' F1-нар.поверх. неоробр.трубки на шаге
' FRW-поверхн. оробр. трубки на шаге
' FIR=FRW/F1-коэфф. оребрения
' DLR-толщина ребра
' HR-высота ребра
' FR-поверхность ребра
' FW-нар.поверхн.трубки между ребрами
' S1-поперечный шаг
' S2-продольный шаг
' S21-диагональный шаг
' L0-характерный линейный размер
' RE1-критерий Рейнольдса по воздуху
' CS-коэфф. формы пучка
cls
dim a$(30)
shared zm,xm,ym,nfil,q$( ),fil$( ),G1,MM$,nvar,rep$( )
reg 1,0:call interrupt 51
dim static rep$(120)
dim x(11),y(11),b(11),c(11),d(11),tt1(11),tt2(11)
dim my1t(11),lam1t(11),pr1t(11),ny2t(11),lam2t(11),pr2t(11)
dim cp1t(11),cp2t(11),ro2t(11),tau(11),rzz(11)
for i=1 to 11:read tt1(i):next
for i=1 to 11:read cp1t(i):next
for i=1 to 11:read my1t(i):next
for i=1 to 11:read pr1t(i):next
for i=1 to 11:read lam1t(i):next
for i=1 to 11:read tt2(i):next
for i=1 to 11:read ny2t(i):next
for i=1 to 11:read ro2t(i):next
for i=1 to 11:read cp2t(i):next
for i=1 to 11:read pr2t(i):next
for i=1 to 11:read lam2t(i):next
for i=1 to 6 :read tau(i):next
for i=1 to 6 :read rzz(i):next
data 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200 ' tt1
data 1.005,1.005,1.005,1.005,1.009,1.009,1.009,1.013,1.017,1.022,1.026 'cp1
data 17.2, 18.1,19.1,20.1,21.1,21.9,22.8,23.7,24.5,25.3,26.0 ' MY1
data .707, .703 ,.699,.696,.692,.688,.686,.684,.682,.681,.68 ' Pr1
data 2.44,2.59 ,2.76,2.9,3.05,3.21,3.34,3.49,3.64,3.78,3.93 ' LAM1
data 0,10,20,30,40,50,60,70,80,90,100 ' tt2
data 1.789,1.306,1.006,.805,.659,.556,.478,.415,.365,.326,.295 ' NY2
data 999.9,999.7,998.2,995.7,992.2,988.1,983.1,977.8,971.8,965.3,958.4 'ro2
data 4.212,4.191,4.183,4.174,4.174,4.174,4.179,4.187,4.195,4.208,4.22 'cp2
data 13.67,9.52,7.02,5.42,4.31,3.54,2.98,2.55,2.21,1.95,1.75 ' PR2
data 55.1,57.4,59.9,61.8,63.5,64.8,65.9,66.8,67.4,68.0,68.3 ' LAM2
data 100,2000,4000,6000,8000,10000 'tau

```

```

data 0 , 0.2,0.37,0.6 ,0.9 ,1.4 'RZZ
yf=1
b$=" Расчет теплообменного аппарата"
q$(1)=" Распечатка заданий "
q$(2)=" Расчет варианта "
X=2
call choiceh(2,5,3,25,50,b$,q$(),X,Y)
iii=Y
on error goto 8
if iii=1 then kill "zadan.dat"
9 locate 1,1:print "
on error goto 0
OPEN "i",2,"QA.DAT"
input#2, nfil
for i=1 to nfil
input#2,fil$(i)
next
input#2,R0,AMV,ALF2,RZ0,TAU0,EFR0,DZ,AL,DC
close#2
if EFR0=0 then
color 7,0: locate 12,5
print "Введите коэффициент эффективности ребра (рис.12а), в противном случае"
print "расчет будет произведен для плоского призматического ребра "
locate , 20: input;"EFR= ",EFR0
end if
rep$(80)=str$(EFR0,4)
if iii=1 then
b$= " Вывод результатов "
q$(1)=" В файл "
q$(2)=" На принтер "
q$(3)=" На экран "
X=1
call choiceh(3,10,3,15,50,b$,q$(),X,Y)
ii=Y
select case ii
case 1:open "a",8,"ZADAN.DAT"
case 2:open "o",8,"lpt1:":lprint chr$(15);
case 3:open "o",8,"scrn:"
end select
end if 'iii=1
if iii=2 then
b$= " Вывод результатов "
q$(1)=" В файл "
q$(2)=" На принтер "
X=1
call choiceh(2,10,3,15,50,b$,q$(),X,Y)
ii=Y
select case ii
case 1:ii=1
case 2:open "o",8,"lpt1:"
end select
end if 'iii=2

```

```

width "lpt1:",180
pi=3.1416
11 nv=0
on error goto 88
12 b$= " Файл с вариантами: "
   for iif=1 to nfil:q$(iif)=" "+fil$(iif)+" ":next
   xf=yf
   q$(nfil+1)=" Выход "
   call choiceh(nfil+1,10,3,15,70,b$,q$(),XF,YF)
   if yf=4 then stop
   f$=fil$(YF)
open "i",1,f$
on error goto 0
do while not eof(1)
nv=nv+1
line input#1,a$(nv)
loop
close#1
nv=nv-1
a11:
color ,0: cls
n=min(nvar,nv)+4
gosub 100
do
gosub 900
select case ff
case 80: n=min(n+1,nv):gosub 100
case 72: n=max(4,n-1):gosub 100
case 27:stop
case 13:goto 1
end select
loop
1 nvar=n-3
print
open "i",1,f$
for i=1 to nvar-1+3 : line input#1,aa$ : next
input#1,Var,G1,P11,t11,t21,t22,eps,dp,np
close#1
rep$(81)=str$(Var,2)
rep$(83)=str$(P11,4)
rep$(84)=str$(dp,4)
rep$(85)=str$(eps,4)
rep$(86)=str$(G1,4)
rep$(87)=str$(t11,4)
rep$(88)=str$(t21,4)
rep$(89)=str$(t22,4)
rep$(90)=str$(AL,4)
rep$(94)=str$(ALF2,5)
if TAU0>0 then rep$(91)=str$(TAU0,5)
rep$(92)=str$(DST,3)
P11=P11*1e5
open "i",1,"geom.dat"

```

```

for i=1 to np-1+5 : line input#1,a$ : next
input#1,var,d,di,dr,dlr,sr,s1,s2
close#1
dst=(d-di)/2 : hr=(dr-d)/2 : rep$(9)=str$(hr,4)
d=d/1000 : di=di/1000 : dr=dr/1000 : dlr=dlr/1000 : sr=sr/1000
s1=s1/1000 : s2=s2/1000 : hr=hr/1000
b$="Материал труб:"
q$(1)=" алюминий "
q$(2)=" медь "
call choiceh(2,20,3,25,50,b$,q$(1),Y)
select case Y
case 1: LAMR=180:ROR=2700 : rep$(82)="алюминий": MM$="А"
case 2: LAMR=384:ROR=8900 : rep$(82)="медь" : MM$="М"
end select
rep$(82)=q$(Y)
' Тепловой расчет

T11K=t11+273
T12=T11-EPS*(T11-T21) : rep$(114)=str$(t12,2)
CV1=(CV(T11)*T11-CV(T12)*T12)/(T11-T12)
DLT1=T11-T12
DTB=T11-T22 : rep$(2)=str$(DTB,4)
DTM=T12-T21 : rep$(3)=str$(DTM,4)
DTSR=(DTB-DTM)/(LOG(DTB/DTM)) : rep$(4)=str$(DTSR,4)
NP=DLT1/DTSR
P=(T22-T21)/(T11-T21)
R=(T11-T12)/(T22-T21)
T2SR=(T21+T22)/2. : rep$(106)=str$(t2sr,2)
T1SR=T2SR+DTSR : rep$(12)=str$(T1SR,4)
'физические свойства воздуха (0...200 C)
call spline(11,tt1(),my1t(),b(),c(),d())
call seval(11,t1sr,tt1(),my1t(),b(),c(),d(),MY1,sp,ssp)
MY1=MY1*1e-6 : rep$(15)=str$(MY1,4)
RO11=P11*AMV/R0/(T1SR+273) : rep$(13)=str$(RO11,4)
NY1=MY1/RO11 : rep$(14)=str$(NY1,4)
call spline(11,tt1(),pr1t(),b(),c(),d())
call seval(11,t1sr,tt1(),pr1t(),b(),c(),d(),PR1,sp,ssp)
call spline(11,tt1(),cp1t(),b(),c(),d())
call seval(11,t1sr,tt1(),cp1t(),b(),c(),d(),CP1,sp,ssp)
CP1=CP1*1E3 : rep$(105)=str$(cp1,4)
call spline(11,tt1(),lam1t(),b(),c(),d())
call seval(11,t1sr,tt1(),lam1t(),b(),c(),d(),LAM1,sp,ssp)
LAM1=LAM1*1e-2 : rep$(16)=str$(LAM1,4)
'физические свойства воды (0...100 C)
call spline(11,tt2(),lam2t(),b(),c(),d())
call seval(11,t2sr,tt2(),lam2t(),b(),c(),d(),LAM2,sp,ssp)
LAM2=LAM2*1e-2
call spline(11,tt2(),cp2t(),b(),c(),d())
call seval(11,t2sr,tt2(),cp2t(),b(),c(),d(),CP2,sp,ssp)
CP2=CP2*1E3 : rep$(107)=str$(cp2,4)
call spline(11,tt2(),ro2t(),b(),c(),d())
call seval(11,t2sr,tt2(),ro2t(),b(),c(),d(),RO2,sp,ssp)

```

```

call spline(11,tt2(),pr2t(),b(),c(),d())
call seval(11,t2sr,tt2(),pr2t(),b(),c(),d(),PR2,sp,ssp)
call spline(11,tt2(),ny2t(),b(),c(),d())
call seval(11,t2sr,tt2(),ny2t(),b(),c(),d(),NY2,sp,ssp)
NY2=NY2*1e-6
'термическое сопротивление загрязнений
if tau0>0 then
  call spline(6,tau(),rzz(),b(),c(),d())
  call seval(6,tau0,tau(),rzz(),b(),c(),d(),RZ,sp,ssp)
  RZ=RZ*1E-3
else
  RZ=RZ0
end if
rep$(93)=str$(RZ,5)
Q=DLT1*G1*CP1 : rep$(5)=str$(Q/1000,4)
G2=DLT1*G1*CP1/(CP2*(T22-T21)) : rep$(6)=str$(G2,4)
W1=CP1*G1
W2=CP2*G2
N=LOG((1.-W1*EPS/W2)/(1.-EPS))/(1.-W1/W2)
EPSDT=NP/N
F1=PI*D*SR
FIR=((DR^2-D^2)/2+DR*DLR+D*(SR-DLR))/(D*SR)
rep$(7)=str$(DST,4)
rep$(8)=str$(FIR,4)
rep$(10)=str$((FIR-1)/FIR,4)
FRW=FIR*F1
FW=F1-PI*D*DLR
DR=2.*HR+D
FIRR=((DR^2-D^2)/2.+DLR*(DR-D)+D*SR)/(D*SR)
FR=FRW-FW
rep$(109)=str$(FW*1E6,5)
rep$(110)=str$(FRW*1E6,5)
rep$(111)=str$(FR*1E6,5)
L0=D*FW/FRW+(PI*(DR^2-D^2)/4.)^0.5*FR/FRW 'хар. размер
rep$(11)=str$(L0*1000,4)
screen 12
view (50,50)-(600,300):window(5,0)-(25,20)
line (5,0)-(25,0),7
line (5,0)-(5,20),7
locate 6,1:print"dp/P1";
locate 7,3:print"%";
locate 23,65:print"C1,m/s";
color 10:locate 24,20
if iii=2 then
print"Moving : ";chr$(27);" ";chr$(26);" OK: Enter";
end if
col=12
if iii=1 then
print#8, tab(10);" Вариант ";nvar;MM$;G1
print#8, tab(10);" C1,m/s   dp, Па   V, м3";
for C1=5 to 25 step 5
  gosub 200

```



```

print#8, tab(10);using "##.# ##### #.###";_ C1,dp*p11/100,vp
next C1
print#8,""
locate 24,20:input" One more variant ? (Y/N) ";ot$
if ot$="Y" or ot$="y" then
    screen 0: goto a11
else
    if ii=1 then
        screen 0: close#8 : shell "edit zadan.dat": stop
    else
        stop
    end if
end if
end if
for C1=5 to 25 step dc
    gosub 200
    if dp>20 then exit for
next C1
c1=20 :col=15:gosub 200:cl=7:gosub 210
do
    gosub 900
    select case ff
    case 75 :col=12:gosub 200:cl=0:gosub 210
    c1=min(25,c1-dc):col=15:gosub 200:cl=7:gosub 210
    case 77 :col=12:gosub 200:cl=0:gosub 210
    c1=max(5,c1+dc):col=15:gosub 200 :cl=7:gosub 210
    case 13: rep$(1)=str$(C1,4):
        kkj=1:gosub 200
        gosub 300:gosub 50: screen 0
locate 10,10:print"Результаты расчета записаны в файлах ";frez$;" и report.txt"
    do while inkey$="":loop
    goto 11
    case 27 : gosub 50 : stop
    end select
loop
end
50 if ii=1 then
    close#8
    frez$=ltrim$(str$(nvar))+mm$+ltrim$(str$(G1))+_
".dat"
    open "o",8,frez$
    end if
    PRINT#8, "Результаты расчета"
    print#8," вариант ";nvar;MM$;G1
    print#8, " C1 ALF1 ";
    print#8,"KTP FT1 EFR N1 Z1 M"
print#8, using "##.# #####.## #####.## #.### ## ### ## ";_
    C1, ALF1, KTP, FT1, EFR, N1F, Z1X, M
    print#8,"FG1 FF1 PN2 PV1 DLP1 C1SR"
print#8, using "#.### #.### #####.## #####.## #####.## #.###";_
    FG1, FF1, PN2, PV1, DLP1, C1SR
print#8," Температура воздуха на входе=";T11

```

```

print#8," Температура воздуха на выходе= ";T12
print#8," Объем теплообменника= ";VP ;" N= ";N;" Расход воды= ";G2
print#8," Характерный размер= ";L0
print#8," Рейнольдс по воздуху= ";RE1;" Нуссельт по воздуху= ";NU1
print#8,USING" Потери давления ###.## %";DP
print#8," NP= ";NP;" P= ";P;" R= ";R;" EPSDT= ";EPSDT
print#8," DTSR= ";DTSR;" Нуссельт по воде=";NU2
print#8," Рейнольдс по воде=";RE2;" Скорость воды=";C2
print#8,using" KAPF= #.### KAPD= #.###";KAPF,KAPD
print#8,using" Высота= #.### Ширина= #.### Глубина= #.###";L1X,A,B
print#8,using" Объем = #.###";VP
  close#8
  'report
  gosub report
  return '50
  100 for i=1 to nv
  locate i,1
  if i=n then color 15,10 else color 15,0
  print a$(i);

next
return '100
200 RE1=C1*L0/NY1 : rep$(20)=str$(RE1,5)
  SIG1=S1/D
  SIG2=S2/D
  SIG2S=(SIG1^2/4.+SIG2^2)^0.5
  CS=((SIG1-1.)/(SIG2S-1.))^0.1 : rep$(19)=str$(CS,5)
  SN=0.6*FIR^0.07 : rep$(18)=str$(SN,4)
  rep$(17)=str$(PR1,4)
  NU1=0.36*RE1^SN*PR1^0.33*CS/(FIR^0.5) : rep$(21)=str$(NU1,4)
  ALF1=NU1*LAM1/L0:alf11=alf1 : rep$(22)=str$(ALF1,3)
  MS=(2.*ALF1/LAMR/DLR)^0.5
  H=HR+DLR/2. : rep$(23)=str$(H*1000,4)
  BI=ALF1*DLR/LAMR
  if EFR0=0 then
    EFR=TANH((2.*BI)^0.5*H/DLR)/((2.*BI)^0.5*H/DLR)' ф.55
  'для ребра постоянного сечения
  else
    EFR=EFR0
  end if
  rep$(24)=str$(MS*H,4)
  PSI=1.-0.058*MS*H : rep$(25)=str$(PSI,4)
  ETA=1.-(1.-PSI*EFR*DZ)*FR/FRW : rep$(26)=str$(ETA,4)
  ALFPR=ALF1*ETA
  KTP=1./((1./ALF2+RZ)*D/DI+1./ALFPR/FIR) : rep$(27)=str$(KTP,3)
  FT1=N*W1/KTP : rep$(37)=str$(FT1,4)
  FG1=G1/RO11/C1 : rep$(28)=str$(FG1,4)
  'площадь живого сечения
  '
  if kkj=1 then print "G1=";G1,"RO11=";RO11,"C1=";C1: s$=input$(1)
  KAPF=(S1-D)/S1-2.*HR*DLR/S1/SR : rep$(29)=str$(KAPF,4)
  S21=SQR((S1/2)^2+S2^2)
  KAPD=2.*(S21-D)/S1-4.*HR*DLR/S1/SR : rep$(30)=str$(KAPD,4)

```

```

rep$(31)=str$(min(KAPD,KAPF),4)
DG=2.*((S1-D)*SR-2.*HR*D LR)/(S1+SR-D)
rep$(99)=str$(DG*1000,3)'гидр. диаметр
FF1=FG1/min(KAPF,KAPD)
'площадь фронтального сечения
rep$(32)=str$(FF1,4) :rep$(33)=str$(AL,4)
L1X=sqr(FF1/AL) 'длина трубок
A=AL*L1X 'высота пучка
rep$(35)=str$(A,4) : rep$(34)=str$(L1X,4):rep$(58)=rep$(34)
rep$(67)=rep$(35) : rep$(66)=rep$(34)
N1F=int(A/S1) : rep$(36)=str$(N1F,3)
'число труб в ряду
Z1X=int(FT1/(PI*D*L1X*N1F)): rep$(38)=str$(Z1X,4) 'число рядов
NT1X=N1F*Z1X 'общее число труб
NU2=ALF2*DI/LAM2 : rep$(95)=str$(NU2,4)
rep$(97)=str$(PR2,4)
RE2=(NU2/0.021/(PR2^0.43))^1.25 : rep$(96)=str$(RE2,5)
rep$(40)=str$(RO2,4)
C2=RE2*NY2/DI: rep$(41)=str$(C2,4)
'расчетная скорость воды
C2A=4*G2/(RO2*PI*DI^2*N1F*Z1X)
'скорость при однозаходной схеме
rep$(42)=str$(C2A,4)
M=round(C2/C2A,0) : rep$(43)=str$(M,2) 'число ходов
B=Z1X*S2 : rep$(39)=str$(B,4) : rep$(68)=rep$(39) 'глубина
VP=A*B*L1X : rep$(69)=str$(VP,4) 'объем
'расчет потерь
gosub 250
circle(c1,dp),.02,col
return '200
210 line(5+.02,dp)-step(c1-5-.1,0),cl
line(c1,.1)-step(0,dp-.3),cl
color 12
locate 8,1:print using"##.##";dp;
locate 24,65:print using"##.##";c1;
return '210
250 ' Определение гидравлических потерь
' а. по воде
' DLB=0.0018/DI
'коэффициент сопротивления для гладких труб
LAMTR=0.11*(6.67e-5+68/RE2)^0.25: rep$(98)=str$(LAMTR,5)
FF2=A*B
FTR1X=NT1X*PI*DI^2/4.
'DZWS=0.5*(1.-FTR1X/FF2)
DZWS=0.5
rep$(59)=str$(DZWS,4) 'вход
'DZWR=(FF2/FTR1X-1.)^2
DZWR=1.1
rep$(60)=str$(DZWR,4) 'выход
rep$(100)=str$(T2SR,3)
DZ21X=DZWS+LAMTR*L1X/DI+DZWR : rep$(101)=str$(DZ21X,5)
rep$(57)=str$(DI*1000,4): rep$(58)=rep$(34)

```

```

DZ2=DZ21X*M      :rep$(61)=str$(DZ2,5)
DLP2=DZ2*RO2*C2^2/2. :rep$(62)=str$(DLP2,5)
PN2=G2*DLP2/RO2   :rep$(64)=str$(PN2,5)
rep$(56)=str$(RO2,5)
' б. по воздуху
CS1=5.4*(L0/DG)^.3 :rep$(53)=str$(CS1,4)
T1SRK=T1SR+273. : rep$(49)=str$(T1SRK,3)
T12K=T12+273.
DZT=2.*(T12K-T11K)/T1SRK : rep$(112)=str$(DZT,4)
DZ0=CS1/(RE1^0.25)    : rep$(113)=str$(DZ0,4)
DZ1=DZ0*Z1X+DZT : rep$(52)=str$(DZ1,4)
DLP11=DZ1*RO11*C1^2/2.
P12=P11-DLP11
P1SR=(P11+P12)/2.
ROSR1=P1SR*AMV/T1SRK/RO :rep$(50)=str$(ROSR1,4)
C1SR=G1/FG1/ROSR1 : rep$(51)=str$(C1SR,3)
DLP1=DZ1*ROSR1*C1SR^2/2. : rep$(54)=str$(DLP1,4)
PV1=G1*DLP1/ROSR1 : rep$(63)=str$(PV1,6)
dp=DLP1/P11*100 : rep$(55)=str$(dp,4)
PP=PN2+PV1      : rep$(65)=str$(PP,6)
return '250
300 ' уточнение расчета
Z1X=round(Z1X,0):
N1F=round(N1F,0): rep$(36)=str$(N1F,4)
M=round(M,0)
Z1Xa=round(Z1X/M,0):Z1X=Z1Xa*M : rep$(38)=str$(Z1X,4)
NT1X=Z1X*N1F
C2a=4*G2/(RO2*PI*DI^2*N1F*Z1X/M) : 'rep$(42)=str$(C2a,4)
FT1=NT1X*PI*D*L1X 'новая площадь теплоотд. поверхн.
A=N1F*S1 : B=Z1X*S2 : VP=A*B*L1X
FF1=A*L1X:FG1=FF1*min(KAPF,KAPD)
C1=G1/(RO11*FG1) :rep$(44)=str$(C1,4)'уточнение скорости воздуха
RE1=C1*L0/NY1 : rep$(45)=str$(RE1,5)
NU1=0.36*RE1^SN*PR1^0.33*CS/(FIR^0.5) : rep$(46)=str$(NU1,4)
ALF1=NU1*LAM1/L0 : rep$(47)=str$(ALF1,4)
MS=(2.*ALF1/LAMR/DLR)^0.5
H=HR+DLR/2.
BI=ALF1*DLR/LAMR
if EFR0=0 then
  EFR=TANH((2.*BI)^0.5*H/DLR)/((2.*BI)^0.5*H/DLR) 'призматическое ребро
else
  EFR=EFR0 'на плоской стенке !
end if
PSI=1.-0.058*MS*H
ETA=1.-(1.-PSI*EFR*DZ)*FR/FRW
ALFPR=ALF1*ETA
'теплоотдача по воде
RE2=C2a*DI/NY2
NU2=0.021*RE2^.8*PR2^.43
ALF2=NU2*LAM2/DI
KTP=1./((1./ALF2+RZ)*D/DI+1./ALFPR/FIR) : rep$(48)=str$(KTP,3)
'новое значение теплового потока

```

```

Q=KTP*FT1*DTSR*EPSDT
T12=T11-Q/(CP1*G1)
'расчет потерь
  gosub 250
return '300
900 ff = 0: I$ = INKEY$
  IF LEN(I$) = 1 THEN ff = ASC(I$)
  IF LEN(I$) = 2 THEN ff= ASC(RIGHT$(I$, 1))
RETURN
'обработка ошибки удаления файла "zadan.dat"
8 resume 9
'обработка ошибки открытия файла "var*.dat"
88 print " В файле QA.DAT неверное имя ";f$
  print "Существующие файлы: "
  color 12
  files "var*.dat"
  color 7
  y3=csrln:locate y3-1,1
  input " Введите верное имя ",f$
  cls
resume 12
FUNCTION CV(A)
  CV=708.4+0.09349*A
END FUNCTION
FUNCTION TANH(A)
  TANH=(EXP(A)-EXP(-A))/(EXP(A)+EXP(-A))
END FUNCTION
sub spline(n,x(),y(),b(),c(),d())
  nm1=n-1
  if n<3 then goto 550
  d(1)=x(2)-x(1)
  c(2)=(y(2)-y(1))/d(1)
  for i=1 to nm1
    d(i)=x(i+1)-x(i)
    b(i)=2.*(d(i-1)+d(i))
    c(i+1)=(y(i+1)-y(i))/d(i)
    c(i)=c(i+1)-c(i)
  next
  b(1)=-d(1):b(n)=-d(n-1):c(1)=0.:c(n)=0.
  if n=3 then 551
  c(1)=c(3)/(x(4)-x(2))-c(2)/(x(3)-x(1))
  c(n)=c(n-1)/(x(n)-x(n-2))-c(n-2)/(x(n-1)-x(n-3))
  c(1)=c(1)*d(1)^2/(x(4)-x(1))
  c(n)=-c(n)*d(n-1)^2/(x(n)-x(n-3))
551 for i=2 to n
  ts=d(i-1)/b(i-1)
  b(i)=b(i)-ts*d(i-1)
  c(i)=c(i)-ts*c(i-1)
next
  c(n)=c(n)/b(n)
  for ib=1 to nm1
    i=n-ib

```

```

c(i)=(c(i)-d(i)*c(i+1))/b(i)
next
b(n)=(y(n)-y(nm1))/d(nm1)+d(nm1)*(c(nm1)+2.*c(n))
for i=1 to nm1
b(i)=(y(i+1)-y(i))/d(i)-d(i)*(c(i+1)+2.*c(i))
d(i)=(c(i+1)-c(i))/d(i):c(i)=3.*c(i)
next
c(n)=3.*c(n): d(n)=d(n-1)
exit sub 'spline
550 b(1)=(y(2)-y(1))/(x(2)-x(1))
c(1)=0.:d(1)=0.
b(2)=b(1):c(2)=0.:d(2)=0.
end sub ' spline
sub seval(n,u,x(),y(),b(),c(),d(),s,sp,spp)
i=1
if i>=n then i=1
if u<x(i) then 510
if u<=x(i+1) then 530
510 i=1:j=n+1
520 k=(i+j)/2
if u<x(k) then j=k
if u>=x(k) then i=k
if j>i+1 then 520
530 dx=u-x(i)
s=y(i)+dx*(b(i)+dx*(c(i)+dx*d(i)))
sp=b(i)+dx*(2.*c(i)+3.*dx*d(i))
spp=2.*c(i)+6.*dx*d(i)
end sub 'seval

sub choiceh(n,a,b,c,d,b$,q$( ),X,Y)
color 0,7
for i=1 to 6 : locate a-2+i,b:print string$(d,32);:next

locate a,b+5:print b$;
for i=1 to n:call otgh(a+2,b+2+(i-1)*c,q$( ),i,1):next
call otgh(a+2,b+2+(X-1)*c,q$( ),X,2)
Y=X
reg 1,1 :call interrupt 51' курсор- видимый
do
gosub codh
select case f
case 75:
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$( ),Y,1):
if Y=1 then Y=n else Y=max(1,Y-1)
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$( ),Y,2)
case 77:
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$( ),Y,1)
if Y=n then Y=1 else Y=min(Y+1,n)
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$( ),Y,2)
case 13:

call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$( ),Y,3):delay(.15)

```

```

call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$(Y),Y,2)
exit sub
case 27: Y=n+1:exit sub
end select
gosub mouse
if ym=a+2 then
for i=1 to n
if xm>=b+2+(i-1)*c and xm<=b+2+(i-1)*c+len(q$(i)) then
if Y<>i then
reg 1,2 :call interrupt 51' курсор- невидимый
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$(Y),Y,1):
Y=i
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$(Y),Y,2)
reg 1,1 :call interrupt 51' курсор- видимый
end if
end if
next
if zm=1 then
select case xm
case b+2+(Y-1)*c to b+2+(Y-1)*c+len(q$(Y))
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$(Y),3):delay(.15)
call otgh(a+2,b+2+(Y-1)*c,q$(Y),Y,2)
reg 1,1 :call interrupt 51' курсор- видимый
reg 1,2 :call interrupt 51' курсор- невидимый
exit sub
end select
end if 'zm
end if 'ym=a+2
loop
codh:
F=0:I$=INKEY$
IF LEN(I$)=1 THEN F=ASC(I$)
IF LEN(I$)=2 THEN F=ASC(RIGHT$(I$,1))
RETURN
end sub 'choiceh
mouse:
reg 1,3 ' контроль движения курсора и нажатия кнопок
call interrupt 51
xm=reg(3):ym=reg(4):zm=reg(2):xm=xm/8+1:ym=ym/8+1
return
sub otgh(a,b,q$(ig),ig,N)
select case N
case 1:
color 0,7 :locate a-1,b+1:print chr$(32);
color 0,11:locate a,b:print q$(ig);
color 8,7 :locate a+1,b+1:print string$(len(q$(ig)),223);
locate a,b+len(q$(ig)):print chr$(220);
case 2:
color 0,7:locate a-1,b+1:print chr$(3);
color 15,11:locate a,b:print q$(ig);
color 8,7:locate a+1,b+1:print string$(len(q$(ig)),223);
locate a,b+len(q$(ig)):print chr$(220);

```

```

case 3:
color 0,7 :locate a-1,b+1:print chr$(32);
color 0,7:locate a,b:print" ";
color 15,11:locate a,b+1:print q$(ig);
color 0,7:locate a+1,b+1:print string$(len(q$(ig))+1,32);
end select

```

```

end sub ' otg
report:
open "i",9,"rep.emp"
open "o",10,"report.txt"
i=0
do while not eof(9)
line input#9,o$
if instr(o$,"#")>0 then
i=val(mid$(o$,1,3)): replace "#" with rep$(i) in o$
o$=mid$(o$,4,77)
end if
print#10,o$
loop
close#9: close#10
shell "edit report.txt"
return

```

Файлы данных

“qa.dat”

1

variant.dat

```

8314 29 6000 .0005 1.03 .01
R0 AMV ALF2 RZ DZ DC

```

“geom.dat”

Характеристики шахматных пучков из трубок  
с оребрением (табл.3, [27] )

№ пучка	d	di	D	DELТр	Sp	S1	S2
1	9.7	7.7	23.4	0.46	3.5	24.8	20.3
2	9.7	7.7	23.4	0.46	2.9	24.8	20.3
3	10.7	8.7	21.9	0.48	2.9	24.8	20.3
4	9.7	7.7	23.4	0.41	2.2	24.8	20.3
5	16.4	14.4	28.5	0.25	3.6	31.3	34.3
6	16.4	14.4	28.5	0.25	2.9	31.3	34.3
7	16.4	14.4	28.5	0.25	2.9	47.0	34.3
8	19.6	17.6	37.2	0.30	2.8	39.6	44.5
9	19.6	17.6	37.2	0.30	2.8	50.5	44.5
10	19.6	17.6	37.2	0.30	2.8	68.4	44.5
11	19.6	17.6	37.2	0.30	2.8	68.4	20.3
12	19.6	17.6	37.2	0.30	2.8	50.5	35.0
13	26.0	24.0	44.1	0.30	2.9	49.8	52.5
14	26.0	24.0	44.1	0.30	2.9	78.4	52.5



файл "variant.dat"

Варианты курсовой работы

№ пп	G1 кг/с	P1 бар	t11 С	t21 С	t22 С	EPS	dP/P1 %	№ пучока, табл.3,[27]
1	20	2.5	140	20	30	0.85	4.0	1
2	30	2.5	140	20	35	0.90	6.0	2
3	30	2.5	140	20	35	0.90	4.5	2
4	10	3.0	140	20	30	0.87	8.0	4
5	20	3.5	160	25	30	0.92	7.0	3
6	20	3.0	145	25	35	0.92	7.0	6
7	20	3.0	150	20	30	0.88	7.0	5
8	10	2.9	140	20	30	0.88	4.0	7
9	20	4.4	180	20	32	0.90	6.0	2
10	20	2.5	140	20	35	0.90	4.0	1
11	30	3.9	125	20	30	0.85	5.0	2
12	10	2.2	125	20	30	0.85	7.0	12
13	30	4.2	125	20	30	0.85	6.0	13
14	30	2.1	120	20	30	0.85	5.0	5
15	20	2.5	140	20	30	0.85	4.5	3

Рекомендуемая литература

Часть I

Основная

1. Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика.-М.: Энергоатомиздат, 1983.- 416 с.
2. Андрианова Т.Н. и др. Сборник задач по технической термодинамике.-М.: Изд.МЭИ, 2000.-352 с.

Дополнительная

3. Техническая термодинамика (под ред. Крутова В.И.).-М.: Высшая школа, 1991.-384 с.
4. Новиков И.И. Термодинамика.- М.: Машиностроение, 1984.-592 с.
5. Андриющенко А.И. Основы технической термодинамики реальных процессов.-М.: Высшая школа, 1973.-264 с.
6. Архаров А.М. и др. Теория и расчет криогенных систем.-М.: Машиностроение, 1978.- 415 с.
7. Александров А.А. и др. Практикум по технической термодинамике.-М.: Энергоиздат, 1986.-304 с.
8. Бэр Г.Д. Техническая термодинамика.-М.: "Мир", 1977.-518 с.
9. Базаров И.П. Термодинамика.- Гос. изд. физ-мат. лит., 1961.-292 с.
10. Бродянский В.М. и др. Эксергетический метод и его приложения.- М.: Энергоатомиздат, 1988.-288 с.
11. Второе начало термодинамики (под ред. Тимирязева А.К.).- М.,Л.: Гос. технико-теоретическое изд., 1934.-311 с.
12. Зысин В.А. Комбинированные парогазовые установки и циклы.- М.,Л.: Госэнергоиздат, 1962.-186 с.
13. Гохштейн Д.П. Современные методы термодинамического анализа энергетических установок.- М.: "Энергия", 1969.-368 с.
14. Кричевский И.Р. Понятия и основы термодинамики.- М.: "Химия", 1970.-439 с.
15. Ястржембский А.С. Термодинамика и история ее развития.- М.,Л.: "Энергия",1966.- 667 с.
16. Потапов Ю.С., Фоминский Л.П., Потапов С.Ю. Энергия вращения.- Кишинев, 2001, 400с.
17. Глансдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
18. Николис С., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М., 1979.
19. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983.- 341 с.
20. Журавлев В.А. Термодинамика необратимых процессов в примерах и задачах. М.: Наука, 1979.
21. Исаев С.И. Термодинамика. М.: Изд. МГТУ, 2000.- 413 с.
22. Сапожников С.З., Китанин Э.Л. Техническая термодинамика и теплопередача. СПб.: Изд. СПбГТУ,2001.- 317 с.

Часть II

Основная

23. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача.- М.: 1984 - 486 с.
24. Теория теплообмена (под ред. Леонтьева А.И.). - М.: Высшая школа, 1979. - 495 с.
25. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. - М.: Энергия, 1980. - 286 с.
26. Практикум по теплопередаче (под ред. Солодова А.П.). - М.: Энергоатомиздат, 1986. - 297 с.

27. Гавра Г.Г., Михайлов П.М., Рис В.В. Тепловой и гидравлический расчет теплообменных аппаратов компрессорных установок. Учебное пособие.- Л.: ЛПИ, 1982.- 72 с.

Дополнительная

28. Галин Н.М., Кириллов Л.А. Тепломассообмен (в ядерной энергетике). - М: Энергоатомиздат, 1987. - 375 с.

29. Кутепов А.М., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. - М.:Высшая школа, 1986. - 448 с.

30. Исаченко В.П. Теплообмен при конденсации.-М.:Энергия, 1977. - 239 с.

31. Лыков А.В.Теория теплопроводности.-М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.

32. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. - М.: Мир, 1983.-512 с.

33. Присняков В.Ф. Кипение.- Киев: Наукова думка, 1988 .- 238 с.

34. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем.- М.: Изд. МЭИ, 2007.- 383 с.

35. Коровин Н.В. Топливные элементы и электрохимические установки.- М.: Изд. МЭИ, 2005.- 278 с.

36. Морачевский А.Г., Сладков И.Б, Термодинамические расчеты в металлургии.- М.:”Металлургия“,1993.-304 с.

## Содержание

Введение	3
----------	---

### Часть I. Техническая термодинамика

<b>1. Основные понятия термодинамики</b>	
Краткий исторический очерк развития термодинамики	4
Термодинамическая система	5
Термодинамический метод исследования	5
Термодинамический процесс	5
Параметры термодинамической системы	6
Теплота и работа и их изображение в диаграммах состояния	7
Уравнение состояния	10
<b>2. Первый закон термодинамики</b>	
Принцип эквивалентности теплоты и работы, опыт Джоуля	10
Внутренняя энергия и энтальпия	11
Аналитическое выражение первого закона термодинамики для закрытой и открытой систем	12
Первый закон термодинамики с учетом переменной массы	14
Применение первого закона термодинамики к круговому процессу	14
<b>3. Приложение первого закона термодинамики к идеальным газам</b>	
Свойства идеального газа. Опыты Гей-Люссака, Бойля и Мариотта.	
Термическое уравнение состояния	15
Внутренняя энергия и энтальпия идеального газа	16
Теплоемкость	17
Смеси газов	18
Теплоемкость смеси	20
Основные виды процессов	20
Изохорический процесс, $dv=0$	20
Изотермический процесс, $dT=0$	21
Изобарический процесс, $dp=0$	21
Изоэнтропийный процесс, $ds=0$	21
Политропический процесс	23
Теплота и работа политропического процесса	24
Связь теплоемкости политропического процесса с показателем политропы	25
Три группы политропических процессов. Способы определения показателя политропы	25
Процессы в одноступенчатом поршневом компрессоре	26
Влияние вредного пространства на эффективность поршневого компрессора	27
Многоступенчатое сжатие	29
Струйные компрессоры	29
<b>4. Второй закон термодинамики</b>	
Обратимые и необратимые процессы	31
Основные формулировки второго закона термодинамики	32
Идеальный цикл Карно	32
Теорема Карно	34
Интеграл Клаузиуса для обратимого кругового процесса, энтропия	34
Изменение энтропии в обратимых процессах	36
Интеграл Клаузиуса для необратимого кругового процесса	37
Изменение энтропии при необратимых процессах	38

Передача теплоты путем теплопроводности	39
Цикл Карно с внутренней необратимостью	40
Цикл Карно с внешней необратимостью	41
Движение газа в адиабатической трубе при наличии трения	41
Передача теплоты в теплообменном аппарате	42
Термодинамическая шкала температур	43
Тождественность газовой и термодинамической температур	43
Энтропия и термодинамическая вероятность	44
Диалектическое толкование второго закона термодинамики	45
<b>5. Приложение второго закона термодинамики к анализу термодинамических процессов</b>	
Средняя термодинамическая температура процесса	46
Адиабатическое течение с трением	46
Процессы смешения	49
Смещение в объеме	49
Смещение в потоке	51
Заполнение сосуда газом	52
Максимальная работа изолированной системы. Теорема Гюи-Стодолы	52
Эксергия теплоты и потока, эксергетический КПД	53
<b>6. Теплосиловые газовые циклы и реактивные двигатели</b>	
Циклы двигателей внутреннего сгорания	57
Цикл Отто	58
Цикл Дизеля	62
Цикл Тринклера	65
Цикл Стирлинга	66
Газотурбинные установки	68
Идеальная газотурбинная установка (цикл Брайтона)	69
ГТУ с регенерацией теплоты	72
Процессы в турбореактивном двигателе	75
Прямоточный воздушно-реактивный двигатель	77
Жидкостной реактивный двигатель	79
<b>7. Термодинамические потенциалы и дифференциальные уравнения термодинамики</b>	
Термодинамические потенциалы	80
Дифференциальные уравнения термодинамики	83
<b>8. Равновесие термодинамических систем и фазовые переходы</b>	
Термодинамическое равновесие, четыре случая сопряжения термодинамической системы с окружающей средой	86
Химический потенциал	87
Условия устойчивости и равновесия в изолированной системе	87
Условия устойчивости	87
Условия равновесия в однородной изолированной системе	88
Условия фазового равновесия	88
Фазовые переходы. Правило фаз Гиббса	89
Уравнение Клапейрона-Клаузиуса	90
Устойчивость фаз	90
Фазовые переходы при неодинаковых давлениях фаз	91
Фазовые переходы при искривленных поверхностях раздела фаз.	
Уравнение Лапласа	92
Уравнение Клапейрона-Клаузиуса с учетом кривизны поверхности	93
Формула Кельвина	93
Термодинамика образования новой фазы. Критический радиус пузырька	94

<b>9. Свойства реальных газов и паров.</b>	
Опыт Эндрюса	96
Сжимаемость реальных газов	96
Уравнение Ван-дер-Ваальса	97
Зависимость изобарной теплоемкости от давления	99
Дросселирование газов и паров. Эффект Джоуля-Томсона	99
Водяной пар, диаграмма состояния, процесс парообразования	102
Параметры влажного пара	104
T-s, p-v и i-s диаграммы водяного пара. Таблицы свойств водяного пара	105
Процессы в водяном паре	106
Процесс при постоянном объеме, $dv=0$	106
Процесс при постоянном давлении, $dp=0$	106
Изотермический процесс, $dT=0$	107
Изоэнтروпийный процесс, $ds=0$	107
Влажный воздух	108
<b>10. Паровые и комбинированные циклы теплоэнергетических установок</b>	
Цикл Карно	114
Цикл Ренкина	114
Влияние начальных и конечных параметров на эффективность цикла Ренкина	115
Цикл Ренкина с промежуточным перегревом пара	116
Регенеративный цикл	117
Комбинированный цикл с высоконапорным парогенератором	119
Бинарный ртутно – водяной цикл	121
Газопаровой цикл с котлом - утилизатором	122
Теплофикационные циклы	124
Циклы атомных теплоэнергетических установок	125
Тепловые циклы геотермальных электростанций	128
Анализ цикла Ренкина с учетом необратимых потерь энтропийным и эксергетическим методами	133
Энтропийный метод	133
Эксергетический метод	136
Диаграмма потоков эксергии в ГТУ	137
<b>11. Методы непосредственного преобразования энергии</b>	
Магнетогидродинамический генератор на газовом рабочем теле	138
Цикл МГД-генератора с жидкометаллическим рабочим телом	140
Цикл термоэлектрического генератора	141
Топливный элемент	143
<b>12. Циклы холодильных машин и тепловых насосов, ожижение газов</b>	
Обратный цикл Карно, холодильный коэффициент	146
Идеальная воздушная холодильная машина	147
Парокомпрессионная холодильная установка	148
Пароэжекторная холодильная установка	150
Абсорбционная холодильная установка	151
Тепловые насосы	152
Вихревая труба Ранка	154
Методы ожижения газов	156
<b>13. Основы химической термодинамики</b>	
Общие положения	159
Тепловой эффект химической реакции. Закон Гесса	160
Закон Кирхгофа	162

Скорость химической реакции и закон действующих масс	164
Химическое равновесие. Принцип Ле Шателье - Брауна	164
Степень диссоциации и ее связь с константой равновесия	166
Термодинамические условия равновесия химических реакций	167
Химическое сродство	167
Уравнение изотермы химической реакции	168
Закон Вант-Гоффа	169
Зависимость скорости реакции от температуры, закон Аррениуса	170
Тепловой закон Нернста	172
<b>14. Основные понятия неравновесной термодинамики</b>	173
<b>Часть II. Теория тепло - и массопереноса</b>	
<b>15. Общие положения и понятия</b>	178
Передача теплоты в природе. Массоперенос	178
Температурное поле	179
Градиент температуры	179
Плотность теплового потока, закон Фурье	180
Коэффициент теплопроводности	180
Дифференциальное уравнение теплопроводности	181
Краевые условия (условия однозначности)	183
<b>16. Теплопроводность при стационарном режиме</b>	
Передача теплоты через плоскую стенку при граничных условиях I-го рода	183
Передача теплоты через плоскую стенку при коэффициенте теплопроводности, зависящем от температуры	184
Передача теплоты через многослойную плоскую стенку при граничных условиях I-го рода	185
Передача теплоты через плоскую стенку при граничных условиях III-го рода	185
Передача теплоты через бесконечную цилиндрическую стенку при граничных условиях I-го рода	186
Передача теплоты через бесконечную цилиндрическую стенку при граничных условиях III-го рода	187
Передача теплоты через многослойную цилиндрическую стенку при граничных условиях III-го рода	189
Критический диаметр изоляции	190
Теплопроводность в пластине при наличии внутренних источников теплоты	190
Теплопроводность цилиндрического стержня при наличии внутренних источников теплоты	192
Теплопроводность цилиндрической стенки при наличии внутренних источников теплоты	193
Теплопроводность тонкого стержня	195
Плоская ребристая стенка с ребрами постоянного сечения	197
Передача теплоты через круглое ребро постоянного сечения	199
Передача теплоты через трапециевидные и треугольные ребра	200
Ребро постоянного теплового напряжения	202
Пористое охлаждение бесконечной пластины	204
Двумерная стационарная теплопроводность	207
<b>17. Нестационарные процессы теплопроводности</b>	
Охлаждение (нагревание) бесконечной пластины	208
Анализ полученного решения	211
Количество теплоты, отдаваемое пластиной окружающей среде в	

процессе охлаждения	213
Охлаждение (нагревание) бесконечно длинного цилиндра	213
Количество теплоты, отдаваемое цилиндром в процессе охлаждения	215
Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров	216
Регулярный режим	217
<b>18. Численные методы решения задач теплопроводности</b>	
Методы решения задач стационарной теплопроводности	218
Явный метод решения задач нестационарной теплопроводности.	
Критерий устойчивости	222
Неявный метод решения задач нестационарной теплопроводности	224
<b>19. Конвективный теплообмен в однородной среде</b>	
Основные понятия и определения	224
Основные уравнения сохранения. Уравнение сплошности	225
Уравнение движения	226
Уравнение энергии	227
Уравнение теплоотдачи	228
Краевые условия (условия однозначности)	228
Особенности теплообмена при турбулентном течении	228
<b>20. Подобие и моделирование конвективного теплообмена</b>	
Критерии подобия и критериальные уравнения	229
Уравнения сохранения для пограничного слоя	231
Условия подобия физических процессов	232
Метод размерностей, $\pi$ - теорема	233
<b>21. Обработка результатов экспериментальных исследований</b>	
Определение средней по сечению канала скорости потока	235
Определение средней по сечению температуры потока обогреваемого канала	236
Температурный напор при $q_w = const$	236
Температурный напор при $T_w = const$	237
Получение эмпирических уравнений в критериальном виде	238
<b>22. Теплоотдача при вынужденном движении жидкости</b>	
Приближенный метод расчета теплоотдачи на плоской пластине при ламинарном режиме течения. Интегральное соотношение Кармана	240
Тепловой пограничный слой, уравнение Кружилина	243
Теплоотдача от плоской пластины при ламинарном режиме течения	245
Связь между коэффициентом теплоотдачи и трения, аналогия Рейнольдса	246
Турбулентный пограничный слой	246
Обтекание пластины при турбулентном режиме течения	248
Течение в трубах. Связь между коэффициентами трения и сопротивления	250
Теплоотдача в трубе при ламинарном режиме течения	250
Теплоотдача в трубах с прямолинейной осью при турбулентном движении	253
Теплоотдача в изогнутых и шероховатых трубах	254
Теплоотдача при поперечном обтекании труб	255
Теплоотдача при поперечном обтекании пучков труб	257
<b>23. Теплоотдача при свободном движении жидкости</b>	
Теплоотдача от вертикальной стенки	259
Теплоотдача от горизонтальных труб и проволочек при свободной конвекции	261
<b>24. Отдельные задачи конвективного теплообмена</b>	
Теплоотдача жидких металлов	262



Теплоотдача при движении газа с большой скоростью	262
<b>25. Теплообмен при фазовых превращениях</b>	
Теплообмен при конденсации пара	264
Основные положения	264
Теплоотдача при конденсации неподвижного чистого пара на вертикальной стенке при ламинарном режиме течения пленки (задача Нуссельта)	266
Теплоотдача при конденсации чистого пара на вертикальной стенке при турбулентном режиме течения пленки	269
Теплоотдача на горизонтальных трубах и внутри труб	271
Теплообмен при кипении однородной жидкости. Режимы кипения	271
Условия зарождения парового пузырька	272
Связь между критическим радиусом пузырька и перегревом жидкости	273
Работа образования пузырька критического размера	274
Интенсивность образования пузырьков критического размера	274
Скорость роста пузырька	274
Отрывной диаметр пузырька	275
Пузырьковый режим кипения	275
Кризис кипения первого рода	276
<b>26. Тепло - и массоперенос в двухкомпонентных средах</b>	
Основные положения	277
Основные уравнения сохранения	
Уравнение массопереноса	278
Уравнение энергии для двухкомпонентной смеси	279
Краевые условия	279
Массоперенос около полупроницаемой стенки, поток Стефана	280
Тройная аналогия	281
Тепло - и массоотдача от пластины при ламинарном и турбулентном режимах течения	282
Массоперенос в трубах	282
Тепло - и массоперенос от капель	283
<b>27. Лучистый теплообмен</b>	
Общие положения	284
Основные законы излучения	284
Радиационные функции	285
Радиационные свойства. Интегральные радиационные свойства	286
Закон Кирхгофа	286
Монохроматические свойства	286
Направленные радиационные свойства	287
Угловой коэффициент излучения	288
Методы определения угловых коэффициентов	289
Теплообмен излучением между черными поверхностями	291
Адиабатическая поверхность	291
Теплообмен между серыми телами	292
Перенос излучения в поглощающих - пропускающих средах	294
Действие защитных экранов	295
Измерение высоких температур	297
Сложный теплообмен	297
Радиационные свойства газов	298
<b>28. Теплообменные аппараты</b>	
Уравнения теплового баланса и теплопередачи	300

Основные положения расчета ТА рекуперативного типа	302
Тепловой расчет	302
Гидравлический расчет	303
Сравнение тепловой эффективности прямоточной и противоточной схем ТА	304
Приложение I	305
Приложение II	313
Рекомендуемая литература	331