Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет

В. Н. КОЗЛОВ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2011

УДК 517.97(075.8)
ББК 22.18я73
К 59

Рецензенты:
Чл.-кор. РАН, доктор технических наук,
профессор *П.А. Бутырин*

Козлов В. Н., Системный анализ, оптимизация и принятие решений: учеб. пособие / В. Н. Козлов. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 244 с.

В первой части книги изложены основные принципы, методология и классификация методов системного анализа, оптимизации и принятия решений. Во второй части рассмотрены методы оптимизации для принятия решений в условиях полной определенности, включающие математическое программирование, вариационные методы и динамическое программирование. Третья часть содержит основные методы принятия решений в условиях неопределенности: методы системных (решающих) матриц, минимизации риска, комбинаторной аппроксимации, моделей спортивного типа, нечетких чисел и множеств.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по магистерской программе по направлению «Системный анализ и управление». Пособие может быть использовано в учреждениях дополнительного профессионального образования, а также может быть полезным для научных работников, аспирантов и инженеров.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики»

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Козлов В. Н., 2011
© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2011

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В книге рассмотрены методология и основы системного анализа, принятия решений и исследования систем управления различными видами деятельности. Термин ***«система»***, определяемый в философском плане как целое, состоящее из частей, используется для формирования оценок для принятия решений ***в условиях определенности***, а также ***в условиях неопределенности***.

В сфере управления ***«система управления»*** определяется как совокупность взаимосвязанных элементов – объектов, целей управления, функций, организационных структур, методов и алгоритмов управления. *Система управления* характеризуется *целостностью, упорядоченностью, управляемостью* и другими свойствами элементов и подсистем, отражающих особенности объекта управления и методов управления. Для анализа и исследования систем управления широко используются методы системного анализа и теории принятия решений.

Понятие ***«системный анализ»*** (в ряде случаев – ***«анализ систем»***) в настоящее время широко используется в теории и практике научных исследований. Этой области научных знаний посвящено большое число учебных пособий и монографий, которые отражают теоретический и практический опыт применения методов системного анализа и принятия решений в прикладных задачах, в частности, в задачах управления инновационной деятельностью.

При системном анализе и управлении «***в условиях полной определенности»*** возникла наука, базирующаяся на строгом математическом фундаменте для формирования и обработки оценок вариантов различных моделей на основе методов оптимизации. Эти методы позволяют описать модели функционирования различных объектов и систем на основе огромного опыта обобщения и классификации современных методов.

В настоящее время для анализа и управления ***«в условиях неопределенности»*** существенное значение имеет «принятие решений в условиях полного или частичного отсутствия информации». В организационной, научной и инженерной деятельности от правильности принимаемых решений зависит очень многое. Поэтому осознанное решение задачи невозможно без определенного «обобщенного подхода» к накопленным фактам, что требует применения адекватных методов.

Методами принятия решений будем называть методы, используемые при отсутствии полной информации о ситуации, в которой принимается решение на основе обработки экспертных или совокупности аналитических точечных оценок. При этом совокупность точечных оценок может быть получена методами оптимизации или рационализации для выбранных вариантов создания объектов или систем управления. Формирование экспертных оценок возможно методами оптимизации для заданных условий и вариантов функционирования объектов или систем управления.

Для случая неопределенности приведены методы принятия решений в условиях неопределенности на основе обработки таблиц (матриц) оценок, заданных в пространстве «варианты-условия». Сформулированы методы принятия решений в условиях ***статистически заданной неопределенности***, когда имеется ***риск*** принятия неправильных решений. Рассмотрены методы комбинаторной аппроксимации, адаптированные для принятия решений в особых условиях. Приведены основные идей методов обработки оценок вариантов для случая ***нестатистически заданной неопределенности*** с помощью нечетких чисел и функций принадлежности.

Учебное пособие делится на три раздела. ***В первой части*** книги изложены принципы и методы системного анализа и принятия решений, как основ исследования систем управления в условиях полной или неполной информации об объекте, включая примеры применения. Описаны примеры управления инновационной деятельностью в сфере образования в части формирования количественных и качественных оценок информационного потенциала обучающихся. Дана общая характеристика методов исследования систем управления.

Во второй части книги приведены основные методы системного анализа и принятия решений для управления ***в условиях полной определенности***, включающие методы конечномерной оптимизации и методы вариационного типа. Изложены математические формулировки конечномерных задач, необходимые условия оптимальности и вычислительные методы, доставляющие оптимальные решения как пределы конечных или асимптотически сходящихся процедур оптимизации.

Изложены классические задачи и численные методы – линейное программирование и симплекс-метод, численно-аналитические методы минимизации линейных функционалов на компактных множествах как аналоги метода эллипсоидов. Описаны методы нелинейного программирования для безусловной и условной минимизации, включая методы квадратичного программирования, численно-аналитические и численные методы проекционного типов и методы минимизации на компактных множествах.

Приведены формулировка и доказательство теоремы Куна-Таккера, определяющих необходимые и достаточные условия оптимальности задач выпуклого программирования. Изложен метод динамического программирования как необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления динамическими системами. Сформулированы вычислительные методы для синтеза оптимального управления.

Совокупность перечисленных методов может быть использована для формирования оценок вариантов создания объектов или систем управления.

В третьей части книги изложены методы принятия решений ***в условиях неопределенности*** на основе метода системных (решающих) матриц для различных стратегий и комплекс методов минимизации риска на базе вероятностно-стохастических моделей. Приведены методы комбинаторной аппроксимации, направленные на преобразование задач к методам линейного упорядочения. Рассмотрены элементы принятия решений на основе методов теории нечетных чисел и множеств.

ЧАСТЬ 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ И МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рассматриваются принципы, методы и задачи системного анализа и принятия решений в условиях полной и неполной определенности. Сформулированы требования к принятию решений, приведены примеры и варианты принятия решений для систем управления инновационной деятельностью в интеллектуальной сфере высшего образования России.

1. Основы принципов и методов системного анализа и принятия решений

1.1. Принципы системного анализа и принятия решений

Анализ принципов можно начать с рассмотрения примеров задач управления инновационной деятельностью, которые будут иллюстрированы задачами управления содержанием образования.

1. О проблемах управления инновационными преобразованиями. В соответствии с основными положениями общей теории управления в системах управления выделяются *«объект управления»* и *«управляющая среда»*. Применительно к инновационной деятельности ***«система управления»*** определяется как совокупность взаимосвязанных элементов – объектов, целей, функций, организационных структур управления, методов управления, персонала кадров управления и подсистем управляющей системы, разрешающих инновационные проблемы на целевом, структурном, алгоритмическом и других уровнях.

При управлении инновационной деятельностью необходимо определить «***критерии инновационности»,*** которые должны быть определены с целью задания отличий инновационной деятельности от классической исследовательской деятельности. Инновационную деятельность можно определять как деятельность, позволяющую создать ***объекты инноваций*** в сферах науки, техники или технологий, которые отличаются ***инновационными качествами*** от известных объектов по законам, явлениям, принципам или методам функционирования, позволяющим формировать объекты с принципиально новыми или существенно лучшими качественными свойствами. Таким образом, к ***«критериям инновационности»*** можно отнести совокупность новых законов, явлений, принципов или методов, использованных для создания новых объектов с качественно или количественно новыми свойствами.

К объектам инновационной деятельности можно отнести исследования в области наноматериалов и нанотехнологий, когда очевидными являются новые физические уровни рассмотрения явлений и свойств материалов в различных областях техники и технологии. К этому классу относятся исследования по созданию квантовых вычислителей.

Отдельные компоненты системы управления взаимодействуют между собой и участвуют в том или ином виде в процессе взаимодействия на объекты управления (управляемые подсистемы) для достижения главной, основных и других целей системы. Как следует из этого определения, целесообразно вводить различные типы структур инновационной деятельности – иерархические, матричные (сетевые) и другие типы.

При управлении инновационной деятельностью можно использовать распространенное понятие ***«дерева целей»,*** которое представляет собой структурированную и построенную по иерархическому принципу (ранжирование по уровням) совокупность целей системы, программы, плана, в которых выделены: главная цель («вершина дерева»), подчиненные ей подцели первого, второго и других уровней («ветви дерева»). Нетрудно видеть, что данное определение включает наряду с целями и средства их достижения.

Целесообразно иметь в виду, что в ряде случаев анализа и исследования систем управления инновационной деятельностью возможно использование обобщенного понятия ***«дерева целей и средств»***, когда на каждом иерархическом или сетевом уровнях выделены уровневые цели и уровневые средства. Это позволяет рассматривать характеристики систем в рамках некоторых ***«парных характеристик»***, ***«триадных характеристик»*** или в виде ***«n-арных характеристик».***

В исчерпывающей совокупности эти элементы можно представить в виде «триадной» характеристики – ***«дерева целей, дерева средств и дерева результатов»,*** которые в исчерпывающей совокупности описывают ситуации при анализе и исследовании инновационных систем. Далее эти качественные характеристики будут иллюстрированы конкретными примерами.

2. Определения и методология исследования систем управления инновационной деятельностью. Для анализа систем управления инновационной деятельностью весьма важно иметь общие определения и выделить этапы стратегического управления инновационной деятельностью – определение миссии как заявления о предназначении, цели, анализ, выбор стратегии и тактики управления, реализация стратегии и тактики управления, корректировка стратегии и тактики управления. Необходимо определить структуры управления инновационной деятельностью: функционально-иерархического, линейно-иерархического, сетевого, матричного и других типов.

Решение задач анализа и исследования систем управления инновационной деятельностью требует введения целого ряда определений, которые с учетом их общности позволят сформулировать общие методы анализа независимо от содержательных назначений инновационных процессов. При этом будут использованы абстрактные модели, аксиоматические предположения, которые требуются для построения моделей при сохранении математической, физической и других аналогий. Необходимы также понятия, которые используются далее при изучении методов системного анализа и синтеза инновационных процессов. Эти понятия определяют основные категории, используемые при создании инновационных технологий.

Абстракция (от лат. abstractio – отвлечение) представляет собой мысленный процесс отвлечения от некоторых свойств и отношений рассматриваемых объектов, которые рассматриваются при проведении исследования как несущественные и второстепенные

Аксиома – это исходное положение или утверждение, принимаемое без доказательства и лежащее в основе других положений научной теории или взаимодействия субъектов и объектов управления.

Анализ – всестороннее рассмотрение и метод научного исследования путем рассмотрения отдельных сторон, свойств, составных частей процесса (явления) или составную часть любого исследования, а также функции управления.

Аналогия (от греч. analogia – сходство, соответствие) – умозаключение, позволяющее на основе сходства или подобия двух объектов по некоторым их свойствам и отношениям сделать соответствующие вероятностные выводы.

Апостериори и априори (от лат. a posteriori – из последующего и a priori – из предшествующего) – философские категории, служащие для обозначения полученных из опыта (апостериори) и предшествующих ему (априори) знаний.

Аргументация (от лат. argumentation – приведение аргументов) – способ убеждения на основе суждений и доказательств какого-либо определенного тезиса.

Верификация (от лат. verificatio – подтверждение, доказательство) – процесс установления истинности научных утверждений путем их эмпирической проверки.

Гипотеза – предварительное и предположительное научное представление о познаваемом объекте исследования, основанное на ранее полученных данных и знаниях.

Дедукция (лат. deductio – выведение) – умозаключение, основанное на логике и здравом смысле от общего к частному, то есть от общих рассуждений и посылок к частным или другим общим выводам.

Идеализация – мысленный процесс создания идеальных объектов посредством изменения свойств реальных предметов.

Индукция (от лат. inductio – побуждение, наведение) – умозаключение, основанное на логическом рассуждении и здравом смысле от единичных, частных положений, явлений и фактов к общим выводам и обобщениям.

Интуиция (от лат. intuitio – пристальное всматривание, созерцание) – способность непосредственного постижения истины без логического обоснования и доказательства.

Исследование – научный труд, вид научной деятельности; научное изучение и процесс познания; процесс изучения какого-либо объекта и получения на этой основе новых знаний о нем.

3. Системный подход и системный анализ. В основе методов анализа и исследования систем управления лежит ***принцип идеализации*** как мыслительный процесс создания идеальных объектов посредством изменения свойств реальных предметов. Идеализированные свойства систем управления формализуются в виде комплекса ***системно-аналитических технологий***, включающих философские, математические, физические, химические и другие технологии, адекватные модели и методы системного анализа и принятия решений.

Важными элементами исследования являются подходы, основанные на декомпозиции и агрегировании. ***Декомпозиция*** – аналитический или численный метод исследования на основе разделения сложного целого (систем, подсистем и т.п.) на более простые составные части, используя для этого определенные критерии.

В системном анализе широко используется ***«триадные модели»*** (триады), включающие задание целей, средств и результатов. ***«Дерево целей»*** – структурированная и построенная по иерархическому принципу ранжированная по уровням совокупность целей системы, программы, плана, в которой выделены: главная цель («вершина дерева»), подчиненные ей подцели первого, второго и т.д. уровней («ветви дерева»). Аналогично можно ввести обобщенные понятия средств достижения целей. Тогда ***«дерево средств»*** можно определить как иерархическую совокупность средств, согласованно распределенных по уровням иерархической или другой структуры системы управления инновационной деятельностью. При этом можно задать оператор или совокупность операторов, позволяющих обеспечить достижение необходимых целей. В итоге можно сформулировать ***«дерево результатов»*.**

Системно-аналитические технологии можно сформулировать как основные методологические приемы, которые целесообразно использовать при решении задач системного анализа. Применение методов системного анализа при принятии решений в условиях неопределенности требует разработки методов и формулировки алгоритмов (схем) обработки вариантных экспертных оценок в соответствии с различными критериями.

«Системный анализ» предполагает разделение проблемы на подпроблемы с последующим рассмотрением этих подпроблем. Общая характеристика принципов системного анализа дается в виде схемы. Рассмотрим основные качественные характеристики принципов.

1) «Структурный принцип». Данный принцип предусматривает рассмотренные задач с позиций полного сохранения качественных характеристик всей системы в целом. При этом необходимо обеспечивать полноту анализа проблемы, чтобы не потерять качественные или количественные свойства при разделении или объединении частей целого.

Декомпозиция проблемы **и** ***агрегирование подпроблем*** является одним из важнейших принципов:

– ***декомпозиция*** предполагает анализ и получение оценки проблемы на основе изучения свойств ее частей;

– ***агрегирование*** – метод исследования на основе объединения
подзадач в единую задачу.

Примером декомпозиции может служить разделение сложной динамической системы на подсистемы и анализ ее по частям. Пример агрегирования – объединение совокупности координат в агрегаты (сборки) координат, что позволяет упростить анализ. Пример агрегирования в динамических системах – квадратичные функции Ляпунова, линейные формы и другие типы агрегатов. Каждый подход порождает эффективные процедуры анализа, а применительно к динамическим системам обусловливает создание метода векторных функций Ляпунова.

2) «Взаимосвязанность и согласованность подпроблем» необходима для учета всех свойств целого, разделенного на части. Обычно свойства частей определяются соответствующими характеристиками или параметрами, свойства связей определяют условия для достижения целей или выполнения ограничений. Взаимные связи могут порождать соответствующие принципы учета при управлении:

– *принцип согласования взаимодействий*;

– *принцип развязывания взаимодействий;*

– *принцип прогнозирования взаимодействий*.

3) «Принцип целеполагания и ограничения». ***Целеполагание*** относительно проблемы и подпроблем является важным принципом, обуславливающим необходимость задания цели при выполнении системного анализа проблемы. Заданные цели, а также множества целей в случае рассмотрения подпроблем позволяют осознать существо решения проблем, ***ограничения*** и направленность в принятии решения. Методика формулировки целей неразрывно связана с заданием ограничений. Цели и ограничения – главные категории принципа целеполагания, используемые для формулировки задач.

Разрешимость проблемы и подпроблем – важный принцип системного анализа, который предполагает необходимость рассмотрению вопроса о существовании решения до начала решения проблемы. Весьма важно решить проблему ***существования решения*** в случае использования принципов и методов системного анализа. Естественно, что в случае декомпозиции и агрегирования проблема анализа разрешимости принимает специфические формы, для которых должны использоваться соответствующие методы. Достаточно вспомнить метод декомпозиции Данцига-Вульфа и другие варианты метода декомпозиции.

4) «Принцип допустимости, рациональности и оптимальности». Этот принцип позволяет анализировать проблемы, исходя из достижения все более сложных целей и задач. Однако при этом на первом этапе важно сформулировать условия допустимости для того или иного разделения проблемы на полпроблемы.

Достижение оптимальности не всегда является возможным на практике, и в такой ситуации следует иметь в виду, что конструктивным часто бывает обеспечение рациональности, или, другими словами, приемлемости решений. ***Рациональное (приемлемое) решение***, обладающее свойства грубости (сохранения свойств при изменении условий), бывает предпочтительное оптимальному решению, которое может не являться грубым.

5) «Принцип ориентации на качественный результат». Этот принцип позволяет определить качественные свойства проблемы или подпроблемы и направить процессы анализа или синтеза в требуемое направление. Характерно, что понимание ***значимости качественного результата*** на практике встречается не всегда. Это связано с высокими требованиями к специалистам, которые могут получить качественные результаты, позволяющие сделать надежные выводы без многочисленных экспериментов. Вместе с тем получение качественных результатов невозможно без использования соответствующих

методов. Важное место здесь занимает ассоциирование формальных методов содержательных
задач.

6) «Интегрированный триадный принцип – «целеполагание – средство – результат» и его варианты. Данный принцип требует рассмотрения проблемы в обобщенном варианте, когда анализируется соответствия между главными составляющими схемами принятия решений. Характерно, что в эффективном варианте имеет место согласование целей, средств и результата. В противном случае могут иметь место следующие ситуации:

– соответствие целей и средств достижения целей;

– несоответствие целей и средств достижения целей;

– соответствие целей и результатов;

– несоответствие целей и результатов;

– соответствие средств и результатов;

– несоответствие средств и результатов.

Рассмотренная группа ситуаций является относительно полной в выбранной ***«триадной конструкции» – «цели – средства – результаты».*** В ***«n-арной конструкции»*** принятия решений совокупность ситуаций существенно возрастает, что приводит к усложнению процесса принятия решений. В этом случае, как и в «триадной» схеме, возможно применение матричных характеристик схемы принятия решений. Анализ согласованности между отдельными элементами схемы принятия решений является основным инструментом корректности процедуры принятия решений в целом. В этой связи необходимо дополнить следующим принципом.

7) «Принцип идентификация согласованности «целей – средств – результатов». Идентификация необходима для обеспечения корректности схемы принятия решений. В противном случае могут рассматриваться несогласованные элементы, когда цели не соответствуют средствам, либо средства не согласованы с целями. В ряде случаев возможны следующие ситуации:

– ***соответствие целей средствам***, которые требуется идентифицировать;

– ***соответствие средств необъявленным целям***, которые необходимо идентифицировать для обеспечения корректности схемы принятия решений с учетом идентифицированных целей;

– ***ситуации несогласованности***, которые поддаются идентификации или формированию вариантов целей и средств.

Последние рассуждения поясняют смысл предлагаемого принципа идентификации, применение которого позволяет раскрыть необъявленные, но реальные цели, средства, предлагаемые при принятии решений.

Рассмотренные принципы будут использованы при изложении методов системного анализа, причем последние будут играть двойную роль:

– с одной стороны, они могут выступать как методы непосредственного анализа;

– с другой стороны, служить инструментом при получении исходных системных оценок для различных вариантов решений.

Однако общая процедура обработки оценок может основываться на изложенные принципы, составляющие определенную «философию» процедур принятия решений.

Инновационный анализ организационных структур является важной составляющей современного исследования. В настоящее время наука рассматривает развивающиеся системы, все процессы в которой взаимосвязаны. Этому представлению соответствует новая тенденция в процессе познания – целостное, или системное, мышление, которая развивается, в частности и в менеджменте, в виде концепции системного управления. Проблемы управления в настоящие время нельзя решить на основе жестких дисциплинарных подходов, так как они носят системный характер и требуют применения адекватной парадигмы.

Суть системного подхода для анализа и исследования систем управления инновационной деятельностью состоит в последовательном учете того, что активные системы – интегрированные целостности, свойства которых не идентичны свойствам составляющих систем. Более того, системные свойства разрушаются, если система разделяется на составляющие элементы. Отдельные составляющие активных систем взаимозависимы и взаимодействуют между собой. В результате этого взаимодействия и взаимозависимости частей формируют специфику целостности системы. Следовательно, современный системный подход требует познания отдельных элементов на основе анализа динамики системы в целом. Фокус изучения переносится с элементарных блоков на фундаментальные принципы организации, иными словами, происходит смещение интереса к изучению целого, но при сохранении интереса к изучению частей. Современная концепция системного управления предполагает использования ряд положений, базирующихся на общих свойствах активных систем:

8) «Принцип стабильности и изменчивости». Свойство активных систем – высокая стабильность, которая достигается не жесткими, а гибкими нелинейными обратными связями. В социальных системах вариативность (как способность к изменениям) – основополагающие свойства, которые, согласно принципу социального дарвинизма, обеспечивают гибкость и адаптивность, необходимые для приспособляемости к условиям внешней среды.

Способы взаимодействия, методы работы и установившиеся связи формирует уникальный стиль организации, ее индивидуальность. Стремление поддерживать устойчивые взаимоотношения с постоянно меняющейся внешней средой невозможно без адекватных изменений во внутренней структуре организации. Из этого рассуждения следует: чтобы сохранить свою индивидуальность, необходимо адаптироваться в соответствии с целями личности.

Таким образом, можно сказать, что активные системы обретают стабильность в процессе постоянных изменений, поскольку сохраняют себя как целое путем адаптации к окружающей среде через изменение составляющих элементов и взаимодействий.

9) «Стратегический принцип разрешения конфликтов». Социальным системам (в частности, организациям) присущи принципиально не разрешимые в пользу одной из сторон конфликты, например:

– ***«стабильность – перемены»;***

– ***«свобода – порядок»;***

– ***«традиции – инновации»;***

– ***«планирование – невмешательство».***

Концепция системного управления подразумевает решение этих конфликтов не жесткими мерами, а путем установления динамического баланса между конфликтующими частями системы. При возникновении конфликта системный подход требует от специалиста изучения позиций сторон и поиска решений, обеспечивающих баланс интересов. К оценке и выбору решений следует привлекать группы экспертов, имеющих различные точки зрения.

Таким образом, методы системного управления проявляются в изменении базовых установок и мировоззрения системного специалиста. Специалист нового типа вносит вклад в долгосрочное процветание организации, используя различные факторы, включая интуицию, использование потенциала сотрудников, расширение их способностей и самообучения, гибкость организации для достижения целей.

Важнейшим инструментом в работе современного специалиста является методология системного анализа, без которого немыслимы значимые, современные решения проблем развития и выживания организации. Можно выделить три основных момента практической пользы применения методов системного анализа:

– постановка задач и полные или частичные математические формулировки;

– неполная формализация требует систематического применения неформальных знаний и методов;

– «системный анализ – это прикладная диалектика», позволяющая в той или иной мере учесть динамику анализируемой проблемы.

Каждая организация, рассматриваемая как открытая система, характеризуется определенным набором переменных. Эти переменные можно разделить на внутренние и внешние. На системной модели организации видно, что внутренними переменными являются цели, задачи, структура, люди и технологии. Все переменные взаимосвязаны. Внешние переменные подразделяются на прямые и косвенные, образуя внешние среды прямого и косвенного воздействия.

Подготовка кадров по системному анализу и управлению возможна на основе изучения и освоения совокупности научных областей знаний и соответствующих дисциплин, являющихся частями теории знаний на основе системного анализа и синтеза, теории и практики управления. К ним можно отнести:

- детерминированный математический анализ и синтез;
- вероятностно-статистический анализ и синтез;
- численный анализ и синтез и синтез;
- физический анализ и синтез;
- химический и нанохимический анализ и синтез;
- экологический анализ и синтез;
- теоретико-механический анализ и синтез;
- электротехнический анализ и синтез;
- теоретико-управленческий анализ и синтез;
- вычислительно-аппаратный анализ и синтез;
- функционально-аналитический анализ и синтез;
- теоретико-технологический программистский анализ и синтез;
- теоретико-информационный анализ и синтез процессов и систем;
- системно-отраслевой анализ и синтез, обеспечивающий применение системных знаний, умений и навыков в сфере приложений, что предполагает компетентностная концепция создания федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Перечисленные компоненты содержания образования в области системного анализа и управления определяют их адаптационные возможности. Важнейшим компонентом адаптационных возможностей организации является эффективность инновационной деятельности, т.е.

инновационный потенциал менеджмента. К техническому университету как научному и методическому центру подготовки кадров в этом отношении предъявляются повышенные требования.

1.2. Методы системного анализа и принятия решений

Методы системного анализа и принятия решений базируются на комплексе математических методов, которые используются в условиях полной или неполной определенности об объекте управления.

В условиях полной определенности используются ***«методы математического программирования»*** в конечномерных или бесконечномерных пространствах.

Математическое программирование используется для принятия решений в условиях полной определенности о структуре и параметрах математической модели. Для получения оценок качества систем инновационного управления можно использовать методы вариационного исчисления для соответствующих классов задач.

При отсутствии полной информации используются ***«методы теории принятия решений»***. Качественные признаки ситуации позволяют развить теорию оценок для построения методов управления инновационной деятельностью.

Сфера приложения системно-инновационных методов весьма широка. Исходя из общей цели разработки нововведений, можно сформулировать ряд средств достижения инновационных целей, опираясь на методологию методов математического программирования. К ним относятся различные целевые установки:

– пар «целей – средств»;

– триад «целей – средств – результатов»;

– деревьев «целей – средств – результатов»

и других важных построений – ограничений задач математического программирования.

Основными категориальными признаками теории принятия решений, в пространстве которых должны строиться оценки, являются следующие компоненты:

– ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЙ;

– УСЛОВИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ.

Приведенная схема описывает общую ситуацию, может быть представлена «матричными структурами» различных размерностей, что позволяет использовать эффективные методы создания новых изделий путем погружения задачи в процедуры принятия решений. В этом случае остается ряд нерешенных проблем, среди них способы получения оценок, учитывающих комплекс следующих необходимых характеристик: долговечность, экономичный эффект, полезность или рациональность, надежность (живучесть).

Естественно, что возможны различные «оценки, носящие технический или экономический характер». Вид оценок зависит от принципов их формирования. В частности, процесс построения матрицы системных оценок (решающих матриц) на этапе отбора инновационных решений может проводиться на основе теории долговечности, теории надежности, а также на основе экономических теорий или теорий полезности. Это фиксирует роль общетехнических или специальных областей технического, экономического или организационного знаний в формировании матрицы системных оценок.

Характерно, что процедура построения матрицы системных оценок в общем случае может носить более сложный характер, т.

е формирование матрицы системных оценок предполагает ***иерархическую технологию*** последовательного формирования оценок – от областей технического знания к организационному управлению, а далее – к экономическим оценкам.

Следует заметить, что области технического значения можно рассматривать как исходные для получения ***системных оценок*** для обработки и управления инновационными процессами. В ряде случаев – это готовые к непосредственному применению оценки. В общем случае для принятия решений необходимо формирование оценок. В этом смысле процедура построения оценок является определенной ***надстройкой над первичными понятиями и результатами*** в предметной области.

Достоинством предлагаемых схем обработки данных – это возможно принятия решений на основе качественных характеристик стратегий. Это позволяет использовать следующие стратегии:

– ***«стратегии оптимизма»;***

– *«стратегии пессимизма»;*

– *«минимаксные стратегии»;*

– *«стратегии нейтралитета».*

Для реализации стратегий используются соответствующие процедуры, что позволяет лицу, принимающему решение, достаточно четко определить свое отношение и степень доверия к выбранному решению, выбрать подходы на основе методов системных (решающих) матриц, теории риска, комбинаторной аппроксимации, теории нечетких множеств и других методов.

1.3. Системный анализ в задачах количественного и качественного исследования проблем образования

Анализ инновационных образовательных структур требует применения системного анализа и системных технологий, позволяющих определить перспективу развития современного образования. Современные системы образования разнообразны по структуре, характеризуются несколькими качественными и количественными признаками. Система образования государства определяется как совокупность законодательной и нормативной базы и образовательных учреждений, реализующих эту базу. Общие качественные признаки определяют довузовские, вузовские и послевузовские образовательные учреждения.

1. Общая характеристика систем образования. С позиций системного анализа образовательные структуры могут реализовать *образовательные, профессионально-образовательные или образовательно-профессиональные программы* различных уровней.

Другой качественный признак определяет этапность образования. В ряде случаев используют термин «ступенчатость», или «уровневость», образовательных структур. В настоящее время существует многоуровневые, многоступенчатые или *уровневые* образовательные структуры. Указанные два признака образовательных систем позволяют в первом приближении классифицировать образовательные и профессиональные системы.

Анализ классификации позволяет выделить следующие типы инновационных образовательных структур. Первый тип образовательной подсистемы реализует двухуровневые образовательные профессиональные программы подготовки с преимущественно академическими аспектами деятельности в сфере образования и науки («академический бакалавр» и «академический магистр»).

Системная характеристика образовательных и профессиональных структур подтверждает, что реализация двух типов структур возможна как при делении, так и при отсутствии деления обучения на временные уровни (ступени). Различные системы имеют право на существование, дополняя друг друга. Естественной качественной характеристикой приоритетов этих систем является ключевые слова:

– образование и профессия (в первом случае);

– профессия и образование (во втором случае).

Для первой образовательной подсистемы характерна ***«прямая фундаментализация»***, что предполагает изучение в большом объеме фундаментальных дисциплин на первых курсах. В случае второй подсистемы преобладает ***«инверсная фундаментализация»,*** когда объем фундаментальных дисциплин увеличивается на завершающих стадиях обучения в условиях усвоения учащимися практических задач предметной области. Продолжая анализ инновационных аспектов образовательных подсистем, необходимо отметить дуальный характер образования. Применительно к техническому образованию – это традиционные естественнонаучные дисциплины, а другой общие профессиональные дисциплины, определяющие сущность соответствующего направления базового высшего образования. Эти компоненты «не сводимы» и «не растворимы» «одни в других». Разумность баланса проверяется способностью дисциплин обеспечивать *синтез новых объектов в предметной области*, реализуемый в рамках специальных дисциплин.

Основные естественнонаучные и общие профессиональные дисциплины и степень их взаимосвязи могут быть определены в процессе анализа и исследования систем управления инновационными структурами проектирования образовательных систем. На этапе создания системы управления инновационными образовательными процессами целесообразно использовать качественную системную характеристику взаимосвязи в виде матрицы дисциплинарной дифференциации (табл. 1.1).

Таблица 1.1.

Системные задачи инженерной деятельности и типы фундаментов

Типы Фундаментов	Задачи инженерной деятельности							
	Исследование	**Проектирование**	**Конструирование**	**Производство**	**Технология**	**Эксплуатация**	**Менеджмент**	**…**
1. Естественнонаучный и математический фундамент								
1.1. Математика								
1.2. Физика								
1.3. Химия								
1.4. Биология								
1.5. Экология								
1.6. Информатика								
2. Общепрофессиональный фундамент								
2.I. Механика								
2.2. Электротехника и электроника								
2.3. Материаловедение и технология								
2.4. Метрология, стандартизация и сертификация								
2.5. Информационные технологии								
3. Фундаменты специальных дисциплин								
…								

В отличие от описательно-объяснительного классического универсализма новый универсализм предполагает синтез и реализуемость результатов, что способствовало рождению нового явления – становлению технических университетов как новых центров науки, образования и культуры.

Таким образом, с 1991 года в России вместе с созданием новой образовательной подсистемы подготовки бакалавров и магистров появились новые типы образовательных учреждений – технические университеты как центры инновационного развития образования и науки.

2. Количественные методы исследования систем образования. Математические методы могут быть основой количественного исследования элементов инновационного содержания федеральных дисциплин ГОС. Рассмотрим принципы создания задач оптимизации для формирования содержания на основе системных моделей и теории знаний как *проекций областей научных знаний на образовательные дисциплины, формулируемые*
следующим образом.

«Принцип целеполагания» предполагает задание целевых условий в виде балансовых, интервальных соотношений (типа «равенств» или неравенств, соответственно) или целевых функций (функционалов). В результате необходимо определить целевые условия типа равенств, неравенств или целевых условий экстремального типа (типа минимизация или максимизация функционалов);

«Принцип математического, физического, химического и других видов моделирования объектов» предполагает формулировки ограничений задачи на основе используемых типов моделей объектов системного анализа, и управления и оптимизации, к которым относятся аддитивные или другие классы моделей. Задание ограничений является важным технологическим центром формирования синтезируемого знания и требования к содержанию продукта деятельности личности специалиста.

На основе принципов целевого задания, математического моделирования и ограничений можно сформулировать комплекс задач математического программирования, которые иллюстрируют возможности этого подхода к формированию количественных оценок интеллектуального потенциала специалиста.

Таким образом, перечисленные принципы составляют сферу технологического формирования кадров в области системного анализа и управления, которая может транслироваться в другие направления подготовки бакалавров и магистров в области техники и технологии.

Задача 1. Формулировка (в соответствии с принципом целеполагания) задач экстремального типа приводит к задаче максимизации функционала линейного типа

$$\varphi_1 = p^Г + p^Е + p^О + p^С + p^\Sigma \rightarrow \max, \quad (1)$$

при ограничениях, которые задают математическую модель (соотношения между переменными функционала (1)). Переменные с индексами в (1) определяют потенциалы в виде трудоемкостей циклов гуманитарных, естественнонаучных и математических, общих профессиональных и специальных дисциплин, соответственно. В целом соотношение (1) определяет потенциал образовательных профессиональных программ как линейный функционал в конечномерном пространстве.

Для формирования соотношений между отдельными переменными используются математические модели, задаваемые линейными алгебраическими равенствами и неравенствами:

$$p^{Г} = A^{ГЕ} p^{E} \;\|\; p^{E} = A^{EO} p^{O} \;\|\; p^{O} = A^{OC} p^{C}, \tag{2}$$

$$p^{Г} \ge 0 \;\|\; p^{E} \ge 0 \;\|\; p^{O} \ge 0 \;\|\; p^{C} \ge 0. \tag{3}$$

Задача минимизации линейного функционала (1) при ограничениях (2), (3) является задачей линейного программирования. В ограничениях (2) и (3) использованы матрицы (характеристики) влияния, обозначенные символом A с соответствующими индексами, определяющие влияние:

– гуманитарных и социальных дисциплин на естественнонаучные, задаваемые с помощью матрицы влияния $A^{ГЕ}$;

– естественнонаучных и математических дисциплин на общие профессиональные дисциплины, определяемые матрицей A^{EO};

– общих профессиональных дисциплин на специальные дисциплины, характеризуемые матрицей влияния A^{OC}.

Поскольку в соотношениях (2) введены матрицы влияния (матрицы с соответствующими индексами) дисциплин друг на друга, то эти соотношения может рассматриваться с одной стороны как ограничение, а с другой стороны – как целевые условия. Соотношения (1), (2) и (3) могут применяться как целевые условия или ограничения задач линейного программирования.

В качестве переменной можно рассматривать компоненты векторов $p^{Г}, p^{EH}, p^{C}, p^{\cdots}$ либо элементы матрицы влияния в равенствах (2).

Задача 2. Формулировка задач на основе целевых условий типа равенств может быть дана следующим образом: необходимо обеспечить заданный потенциал, представленный следующим равенством:

$$\varphi_2 = p^{Г} + p^{E} + p^{O} + p^{C} + p^{\Sigma} \quad (4)$$

при ограничениях вида:

$$p^{Г} = A^{ГЭ} p^{E} \quad \| \quad p^{E} = A^{EO}\, p^{O} \quad \| \quad p^{O} = A^{OC}\, p^{C}, \quad (5)$$

$$p^{Г} \geq 0 \quad \| \quad p^{E} \geq 0 \quad \| \quad p^{O} \geq 0 \quad \| \quad p^{C}, \quad (6)$$

$$p^{Г-} \leq p^{Г} \leq p^{Г+} \quad \| \quad p^{E-} \leq p^{E} \leq p^{E+} \quad \| \quad p^{O-} \leq p^{O} \leq p^{O+}, \quad (7)$$

где соотношения (4), (5), (6) и (7) задают ограничения задач математического программирования. Представленные задачи соответствуют решению системы двух равенств типа (4) и (5), неравенств типа (7) (условий неотрицательности значений потенциалов и интервальных ограничений типа неравенств (7), что характерно для «позитивных» систем).

Возможны другие формулировки задач математического программирования по формированию содержания образования для проектирования государственных образовательных стандартов (ГОС). Эти задачи можно рассматривать как ограничения задачи математического программирования с целевыми условиями экстремального типа, которые формализованы функционалом:

$$\varphi_1 = C_{Г}^{T} p^{Г} + C_{E}^{T} p^{E} + C_{O}^{T} p^{O} + C_{C}^{T} p^{C} \to \max \quad (8)$$

при ограничениях (4) – (7), когда векторы весовых коэффициентов в (8) – неотрицательные. В результате сформулирован комплекс задач линейного и квадратичного программирования, который можно использовать для синтеза содержания в форме количественных соотношений между компонентами содержания или в виде соотношений между отдельными циклами дисциплин.

Необходимо заметить, что вычисление экстремума данных функционалов должно происходить путем вычисления элементов матриц влияния, поскольку именно эти переменные являются искомыми, а также удовлетворяют требованию управляемости функционалов по отношению к ограничениям задач математического программирования.

Пример 3. Рассмотрим пример описания схемы взаимодействия научными фундаментами отраслей промышленности, когда между ними возможна диффузия инноваций. В табл. 1.2 содержится системная характеристика

Таблица 1.2.

Характеристика областей деятельности и областей знания

Области фундаментального технического знания	Предметные области профессиональной деятельности							
	Энергетика	**Электротехника**	**Электроника**	**Теплотехника**	**Машиностроение**	**Металлургия**	**Строительство**	**Управление**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Энергетика	/							
Электротехника		/						
Электроника			/					
Теплотехника				/				
Машиностроение					/			
Металлургия						/		
Строительство							/	
Управление								/

взаимодействий отраслей промышленности, включая различные типы фундаментов технического знания (см. также табл. 1.1) для создания объектов инноваций.

Характер, глубина обобщения, интеграция и взаимопроникновение (диффузия) на этапах инновационного синтеза существенно зависят от специфики области профессиональной деятельности. Системная характеристика областей фундаментального знания и областей профессиональной деятельности определяет парные связи для процессов инновационного преобразования различных отраслей деятельности за счет ***«диффузии инноваций»***, т.е. процесса проникновения инноваций в одной отрасли за счет их переноса в другие отрасли. Аналогичная характеристика процесса диффузии инноваций иллюстрируется в табл. 1.3.

В зависимости от типа связи указанных областей – прямого косвенного – реализуются различные инновационные стратегии диффузионного типа. В случае прямой связи – это стратегия классического типа, поскольку новые образовательные программы могут быть созданы при дифференциации знаний.

Таблица 1.3.

Характеристика потребности регионов и университетов

Возможности технического университета						
	Образование	**Наука**	**Культура**	**Экономика, бизнес**	**Производство**	**Другие Потребности**
Образование	/					
Наука		/				
Культура			/			
Экономика				/		
Производство					/	
…						/

Подобная стратегия строится на изучении циклов дисциплин соответствующего типа. В случае косвенной связи стратегия предполагает извлечение максимального инновационного эффекта из разностороннего рассмотрения комплексного примера обобщенной задачи. Такая стратегия основана на дисциплины, играющие роль введения в область знаний или деятельности.

Таким образом, приведенные классификации могут быть использованы для ориентирующих рекомендаций при проектировании содержания естественнонаучных и общих профессиональных дисциплин.

Важную инновационную роль играют ГОС как нормативная основа при разработке учебными заведениями образовательных профессиональных программ.

Образовательный стандарт обеспечивает сохранение и воспроизводство культуры и образования в различных регионах России. ГОС включает федеральную часть, структуру системы образования и образовательных программ по отдельным направлениям и специальностям. В качестве основы для стандарта по направлению может быть использована профессиональная программа. Стандарт является лишь минимальной нормативной основой при инновационном проектировании образовательных процессов. В ГОС второго поколения выделены федеральная, муниципальная и региональная (вузовская) части, разграничивающие компетенции. Каждая дисциплина может быть востребована на разных уровнях профессиональности, что соответствует разным типам образованности. Наконец, стандарт – комплексная единая форма определения конечного уровня образованности. Стандарты по циклам дисциплин образуют «горизонтали», согласующие разные направления, в то время как «вертикали» – стандарты по направлениям – определяют комплексные проблемы в сфере техники, по которым осуществляется высшее техническое образование на обозначенном естественнонаучном фундаменте.

Региональная часть стандарта формируется с учетом роли технических университетов и вузов в обеспечении потребностей регионов. Матрица системных характеристик технического университета и потребностей регионов иллюстрирует не только сферы инновационного воспроизводства вуза, но и требования к гармоничному развитию региона.

3. Элементы качественного исследования проблем образования. Интеллектуально-инновационные технологии и их системный анализ позволяют разработать ряд принципов, направленных на повышения качества образования. Математические дисциплины являются составной частью фундамента бакалаврского, инженерно и математического образования, а их успешное усвоение позволяет эффективно решать прикладные задачи. Однако общеизвестны трудности в изучении и условии математики и родственных с ней дисциплин. Это относится к таким курсам, как высшая и вычислительная математика, теория управления, системный анализ и принятие решений. Цели разработки методики преподавания очевидны – стремление максимально способствовать успешному обучению математическим дисциплинам до уровня, позволяющего эффективно применять математические методы при решении исследовательских и инженерных задач. Обучение математическим дисциплинам целесообразно осуществлять, используя ряд принципов.

«Принцип категоризации» предполагает акцентированное выделение и постоянное утверждение в сознании учащихся основных объектов математики (категорий), выступающих в качестве моделей явлений окружающего мира или искусственного создаваемых систем (продуктов инженерной деятельности). Такими объектами математики и математических дисциплин могут быть линейные или нелинейные алгебраические, дифференциальные, разностные или интегральные уравнения и другие. Постоянный акцент на класс моделей при изложении материала невольно приучает учащихся к мысли о необходимости использования математики, иллюстрирует общность математического аппарата, универсальность при описании и качественном анализе процессов и явлений.

Принципиальное значение имеет умение выполнять действия (операции) над математическими объектами, которые диктует ***«принцип динамизма».*** Под этим понимается обучение умению выполнять различные операции алгебры и анализа над математическими объектами, включая дифференцирование, интегрирование, разложение в ряды по базисным системам элементов и другие операции. Характер и последовательность операций над объектами определяется «методами решения» задач. В результате методы решения формируется в виде заданной последовательности операций. Такая алгоритмизированная процедура обучения (когда постулируются основные объекты и операции над ними) может быть выражена в виде схем, позволяющих синтезировать таблицы, аналогичные таблицам сложения, вычитания, умножения и деления.

Большое разнообразие основных объектов математики и набора операций над ними обусловливается целесообразность использования ***«принципа структуризации»*** для представления инновационных вариантов знаний об изучаемых объектах. Структуризация для целей инноваций предполагает формирование таблиц объектов, основных операций над ними (дифференцирование, интегрирование, разложение по базисным системам и др.) и определение результатов этих операций. Например, преобразование Лапласа (или Фурье) в теории управления – это один из видов интегрального преобразования для линейных дифференциальных уравнений, позволяющий получить передаточные функции (частотные характеристики) объектов или систем управления.

Перечисленные принципы («категоризации», «динамизма», «структуризации») не являются исчерпывающими для успешного изложения математических дисциплин. Однако их применение повышает вероятность успешного усвоения дисциплин, поскольку в инновационной технологии предлагаются методы для усвоения материала.

Согласно высказыванию Даламбера *«Каждое открытие прекрасно само по себе, но еще более прекрасен метод, которым оно получено»*. В связи с этим важным обстоятельством является выбор или генерация моделей знаний как основ методов.

На основе введенных понятий можно сформулировать ***«принцип категоризации»***, предполагающий выделение базисных категорий в предлагаемой ***«модели знаний»:***

– ***базисные понятия, определения, явления, процессы*** и другие элементы знаний как *категории первого уровня* изучаемой области знаний или учебной дисциплины;

– ***базисные действия или операции*** над объектами, порождающие *новые категории более высокого уровня* относительно исходных базисных категорий научной области знаний или соответствующей учебной дисциплины;

– ***базисные методы*** как направленные совокупности действий над базисными категориями как ***базисные методы***

первого или последующих уровней, которые могут быть методами первого или более высокого уровней.

На основании введенных базисных категорий можно формулировать комплексы задач математического программирования. Соответствующий вариант задачи состоит в обеспечении целевого условия:

$$\varphi_2 = p^{T\Gamma} Q_\Gamma p^\Gamma + p^{TE} Q_E p^E + p^{TO} Q_O p^O + p^{TC} Q_C p^C \to \max \qquad (9)$$

при выполнении ограничений типа (4) – (7), в которых возможно выделение базисных понятий, базисных действий и базисных методов. Матрицы в функционале (9) – симметричные и отрицательно-определенные. В результате инновационный потенциал содержания может быть определен с помощью решения задачи математического программирования, сущность которой состоит в максимизации функционала (9) при ограничениях (2), (3).

Стратегии, тактики и структуры систем управления инновационной деятельностью могут синтезироваться различным образом. Приведенные выше определения и примеры позволяют дать некоторое обобщение понятий, используемых в инновационной деятельности. Для определения указанных выше важных понятий необходимо дополнить исходную систему определений специальными понятиями, которые позволят определить стратегию, тактику и структуру исследования систем управления инновационной деятельности.

Одним из важных элементов стратегии является создание ***«концепции исследования»***. Концепция исследования – комплекс основополагающих идей, принципов, правил, раскрывающих сущность и взаимосвязи исследования, и позволяющих определить систему показателей, факторов и условий, способствующих решению проблемы.

В качестве классических примеров системы показателей используются критерии оптимальности, выбор которых должен удовлетворять ряду требований. Критерий оптимальности – показатель или система показателей качества работы, значения которых должно быть минимизировано (максимизировано) при наличии или отсутствии ограничений.

Выбор концепции исследования, критерия (или критериев) оптимальности, определение ограничений позволяет сформулировать методику и методологию исследования. ***«Методика исследования»*** – совокупность способов, приемов и действий практического выполнения определенных исследовательских процессов, используя для этого строго последовательные, систематические, точно сформулированные и следующие плану научно-обоснованные положения (утверждения и четко сформулированные мысли). ***«Методология исследования»*** – совокупность принципов, методов, форм и средств логической организации и проведения исследовательской деятельности, предполагающей осознание ее цели, выбор и использование определенного состава методологического арсенала.

Следующим важным элементом тактики и структуры исследования является выбор и обоснование методов исследования. Методы научного исследования – совокупность целенаправленных способов и действий получения новых знаний в рамках выбранной модели знаний. В числе рассматриваемых в данной книге методов исследования относятся методы оптимизации, которые включают методы конечномерной оптимизации (методы математического программирования), вариационные методы и методы принятия решений.

Методы оптимизации – методы вычисления экстремумов функций и аргументов (векторов, функций), в которых они достигаются при наличии или отсутствии ограничений в условиях полной определенности, которые образуют методы математического программирования. ***Принятие решение*** – методы отыскания решений на основе обработки экспертных оценок в условиях неполной определенности.

Целевая функция (функция цели) – функция, с помощью которой формализуется цель управления в задачах оптимизации, причем наибольшее или наименьшее значение целевой функции вычисляется при решении задач математического программирования с учетом имеющихся ограничений.

Цель исследования – желаемый новый исследовательский результат состояния объекта исследования, выраженный качественно и (или) количественно преимущественно с указанием сроков его достижения, исполнителей и ресурсов.

Организация исследования предполагает упорядочение исследовательских действий во времени, в пространстве и по содержанию на основе адекватных целям исследования принципов, методов, форм и средств.

Подход к исследованию определяет выбор средств и методов исследования, пути и организацию его проведения. Объекты исследования – конкретная проблема или задача требуют исследования в различных отраслях науки: управлении, экономике, технике. Это то, на что направлено и что является содержанием научного изучения, разрешения и познания. Принцип исследования – основное правило действия, руководящая идея, используемые при осуществлении познавательной деятельности. Проблема (от греч. problema – трудность, преграда) – противоречие в познании, характеризующееся несоответствием между новыми фактами и данными и старыми способами их объяснения.

Приведенные выше определения и понятия позволяют перейти к определению системы управления. Система управления – совокупность взаимосвязанных элементов (целей, функций, организационных структур управления, методов управления, персонала, кадров управления и др.) и подсистем управляющей подсистемы, взаимодействующих между собой и участвующих в том или ином виде в процессе воздействия на объекты управления (управляемую подсистему) для достижения главной, основных и других целей системы. Система характеризуется целостностью и упорядоченностью элементов и подсистем, отражающих особенности объекта управления.

1.4. Системный анализ, теория знаний и содержание образования

Системный анализ и теория знаний могут применяться при разработке компетентностного подхода к формированию содержания. Это относится к формированию дидактических единиц циклов дисциплин федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) и примерных образовательных программ на основе ***базисных компетентностно-знаниевых моделей содержания.*** Приведенные далее элемнты теории знаний позволяют обеспечить канонизацию содержания циклов дисциплин, включая циклы профессиональных (ПД) или специальных (СД) дисциплин на основе математических или естественнонаучных дисциплин или их модулей.

1. Определение и характеристики базисного принципа в теории знаний. Базисный принцип основан на идее формирования ***минимального семейства образующих категорий***, определяющих различные модели содержания дисциплины или модулей ФГОС.

Принципы решения задачи базируются на введении новых типов дидактических единиц и программ. Это возможно при введении «категоризации», «концептуализации» и «системном обобщении» содержания областей научного знания. На этой основе предлагается преемственность между дидактическими единицами математических, естественнонаучных и профессиональных дисциплин.

Преемственность циклов дисциплин может строиться на основе триады базисных элементов – **«базисных категорий»**, **«базисных действий над категориями»** и **«базисных методов»** фундаментальных дисциплин.

Разработка дидактических единиц и примерных программ может рассматриваться с учетом требований по совершенствованию содержания циклов дисциплин ФГОС. При этом необходимо отметить целесообразность применения дидактических единиц математического и естественнонаучного цикла при формировании дидактических единиц федеральных профессиональных дисциплин.

Дидактические единицы могут формироваться с различной степенью детализации. Дидактические единицы, совпадающие с крупными разделами федеральных дисциплин, дают общую характеристику и не могут быть эффективно использованы в других циклах. Это не позволяет определить применение конкретных понятий, действий и методов при формировании федеральных дисциплин других циклов, в частности, профессиональных дисциплин для технических направлений и специальностей. При использовании в качестве дидактических единиц «базисных категорий» описанный выше недостаток исчезает, однако необходимо вводить дидактические единицы в разумном объеме. Приведенные оценки определяют границы интервальных оценок количества дидактических единиц. При создании ФГОС можно исходить из приведенных соображений и целесообразности, диктуемой спецификой направлений или специальностей. Для иллюстрации рассмотрим дидактические единицы примерные программы по математике.

Федеральная дисциплина «Математика» является одной из основных в структуре ФГОС. Формирование дидактических единиц и примерных программ по математике обычно выполняется методом экспертных оценок. На этой основе к настоящему времени разработано большое количество программ, соответствующих различным требованиям. Анализ первого и второго поколений ГОС и необходимость совершенствования третьего поколения ФГОС требуют поиска новых путей к их представлению данных. Примерные программы дисциплин характеризуются содержанием и формой его представления.

«Содержание» является основной характеристикой примерных программ, отражающей установочные требования к совокупности дидактических единиц ФГОС.

«Форма представления» содержания и примерных программ определяет систему описания дидактических единиц, причем в зависимости от выбранной формы могут быть получены различные эффекты по восприятию содержания. При этом далее будут рассмотрены различные формы представления, которые могут различные интервальные оценки. Можно отметить, что в настоящее время широко используются «развернутые» описания дидактических единиц, когда достаточно подробно характеризуются основные компоненты содержания, исходя из практического опыта или из сложившихся традиций. Можно использовать новые элементы теории знаний и форму представления содержания с помощью следующих элементов:

– ***характеристика базисных категорий*** программ;

– ***направленность описания дидактических единиц*** (элементов примерных программ) ***на результат;***

– ***целостность примерных программ,*** позволяющая на качественном уровне описать задачи и методы.

Можно говорить о различном уровне «обучающих» характеристик программ, поскольку содержание концептуально определяет совокупность задач, основных (базисных) понятий и базисных методов.

Формирование содержания циклов дисциплин ФГОС российской образовательной системы может происходить на основе ряда вариантов. При этом целесообразно исходить из ряда следующих принципов.

«Принцип ориентации» на тип образовательной подсистемы системы ВПО России, направление и специальность предполагает разделение содержания в зависимости от типа образовательных систем подготовки бакалавров, магистров и специалистов, поскольку две подсистемы характеризуются своими образовательными ценностями, создавая разнообразие единого образовательного пространства России.

«Принцип необходимой глубины образованности» по дисциплине требует дифференцированной реализации образовательных и примерных программ в зависимости от требований той или иной из упомянутых выше подсистем ВПО России.

«Принцип интервальности» (граничных оценок) при формировании содержания предполагает различную широту при определении содержания рассматриваемого цикла дисциплин в зависимости потребностей образовательной профессиональной программы.

«Принцип категориальности» определяет содержание на основе введения категорий в виде базисных дидактических единиц, позволяющих минимальным образом формировать содержание и обеспечивать преемственность с дисциплинами других циклов. В качестве базисных дидактических единиц могут выступать базисные понятия, явления или процессы, базисные действия, а также базисные методы, представляющие собой направленную совокупность базисных действий.

«Принцип управляемости» содержания, когда в условиях выделения категорий (базисных понятий и базисных методов) реализуется их естественное применение при формировании дидактических единиц дисциплин профессионального и специального циклов.

«Принцип гарантирующего сопряжения» циклов дисциплин ГОС, направленный на достижение связи содержания дисциплин различных циклов (это подразумевает формирование связанных дидактических единиц дисциплин различных циклов).

«Принцип ориентации» на современные достижения соответствующих научных областей знания предусматривает использование классических и последних достижений в соответствующих областях математического и естественнонаучного знания.

Реализация **«принципа интервальности»** требует определения границ при формировании содержания. При этом границами интервальных оценок могут быть:

– содержание университетских классических дисциплин, что реализуется в ведущих технических университетах России, хотя временные возможности для реализации ограничены рамками ГОС. Это ограничение носит формальный характер, поскольку в ведущих вузах подготовка по наукоемким направлениям и специальностям реализует подготовку по циклам дисциплин на основе математического и естественнонаучного фундаментов;

– содержание дисциплин данного цикла на основе потребностей обеспечения профессиональных и специальных дисциплин, что приводит к формированию содержания в адаптированном виде, часто отражающего уровень развития соответствующих областей науки на уровне XIX века. Последнее обстоятельство затрудняет использование современных методов в соответствующих дисциплинах профессионального цикла.

2. Варианты базисных компетентностных моделей теории знаний и содержания. Промежуточный вариант формирования содержания предполагает непрерывную фундаментальную подготовку при изучении дисциплин данного цикла и дисциплин профессионального и специального циклов. Данный вариант формирования содержания отражает опыт ведущих вузов, выпускники которых используют математические и естественнонаучные дисциплины при получении реальных результатов.

На основании приведенных принципов можно сформировать различные по содержанию типы примерных программ по математическим и естественнонаучным дисциплинам, характеристика которых дана на рис. 1.1.

ХАРАКТЕРИСТИКА БАЗИСНЫХ КОМПЕТЕНТНОСТНО-ЗНАНИЕВЫХ МОДЕЛЕЙ И СОДЕРЖАНИЯ

историко-логические модели
категориально-логические модели
системно-логические модели
концептуально-логические модели

Рис. 1.1. Типы базисных компетентностно-знаниевых моделей и содержания

Историко-логические (в ряде случаев, фактологические) **базисные модели знаний** включают традиционные дидактические единицы и примерные программы строятся на основе экспертных оценок и преимущественно отражают содержание в последовательности, определенной историческим процессом получения научного знания в соответствующей области научного знания (математике, физике и т. д.). Как правило, такие программы используются на этапах первичного обучения, и являются классическими моделями. Кроме этого, такие модели являются исходными для формирования спектра ***компетентностно-базисных моделей*** знаний, умений и навыков.

Категориально-логические кометентностные

модели теории знаний позволяют формировать дидактические единицы примерных программ следующего типа:

- ***явные базисные категории*** - понятия, явления, законы, принципы и другие компоненты;

- ***базисные действия (операции)*** над базисными категориями ***и результаты этих действий*** как основы базисных методов;

- ***базисные методы*** как направленные совокупности базисных действий и результатов, которые могут конкретизироваться специальным образом для различных дисциплин.

При этом форма примерной программы отличается возможностью четкого определения категорий дисциплин для каждого раздела. Направленность категориально-логических программ в большей степени может соответствовать целям первичного обучения.

Системно-логические компетентностные модели теории знаний содержат системно-обобщенные категориальные компетенции, обладающие общностью для различных разделов дисциплины или группы дисциплин (модулей), причем дидактические единицы и примерные программы по содержанию основаны на введении:

- ***обобщенных базисных категорий;***

- ***обобщенные операции над базисными категориями;***

- ***обобщенных базисных методов,*** совпадающих для различных разделов отдельных научных областей знаний или их групп, что создает условия для «диффузии» достижений из одной области знаний в другую область знаний.

При этом формируются «системные базисные категории», позволяющие получить целостную по части категорий картину для научной области знания. Такие программы выделяют общесистемные принципы формирования различных разделов научной области знания, общие для широкого круга математических теорий. Появляется возможность «продолжения» («тиражирования») категорий для разработки вариантов теоретических и прикладных разделов математически ориентированных дисциплин. Содержание дисциплин строится на основе выделенных системных категорий, которые проецируются из научной области знаний на учебную дисциплину. В этом процессе отражается общность содержания разделов научной области и учебной дисциплины.

Концептуально-логические компетентностные модели теории знаний это:

- ***концептуально обобщенные базисные категории;***
- ***концептуально-обобщенные базисные действия;***
- ***концептуально-обобщенные базисные методы как направленная совокупность действий***, что позволяет формировать дидактические единицы и примерные программы данного типа на основе соединения научной концепции (как ведущей идеи) формирования области знания с задачами учебной дисциплины.

В ряде случаев такое соединение формируется на основе выделения концептуально-системной структуры знаний. В этой ситуации формирование разделов примерной программы происходит по общему «сценарию» (жесткой схеме). Структура учебной дисциплины формируется как «концептуальная проекция» соответствующей области научного знания. Важной характеристикой таких примерных программ является формирование дидактических единиц в соответствии с технологией развития соответствующей области научного знания. Данный тип программ в наибольшей степени может быть использован на этапах совершенствования личности при обучении в аспирантуре.

Эффективное применение методов фундаментальных наук возможно на основе сочетания образованности, сформировавшей владение научными областями знания и дисциплинами ГОС на основе сочетания историко-логического и концептуально-логического принципов. Последнее связано с тем, что в условиях сочетания принципов появляется реальная надежда на осознанное владение современными фундаментальными методами. В этой ситуации уровень осознания позволяет прогнозировать развитие методов и успешно их применять на практике. В частности, умение применять теоретические знания является косвенным критерием осознанного владения методами изучаемых дисциплин.

Приведенная классификация является одной из форм идентификации дидактических единиц и примерных программ, позволяет определить направления совершенствования компетентностного подхода с целью ориентации учащихся на проблематику изучаемой дисциплины, координации и концентрации умений и навыков. Однако проблема классификации не исчерпывает проблему формирования компетентностного содержания программ, отвечающей потребностям ее применения в образовательном процессе. В связи с этим необходимо рассмотреть аспекты применения математических и естественнонаучных дисциплин для формирования другой важной группы федеральных дисциплин, составляющих профессиональные дисциплины.

Содержание дисциплин естественнонаучного и математического цикла фактически определяют различные типы фундаментов для формирования ПД. В этой связи рассмотрим основные принципы влияния дисциплин математического и естественнонаучного цикла на формирование содержания ПД. Можно отметить, что влияние носит двухсторонний характер, причем оба цикла дисциплин накладывают ограничения на формулировку содержания. Формирование дисциплин данного цикла и соответствующей учебной литературы может осуществляться на основе требований фундаменту образования. Учитывая сказанное, можно дать следующие принципы формирования ПД:

– **«принцип дифференцированности структуры ПД»** в зависимости от типа образовательной профессиональной программы специалистов;

– **«принцип формирования моделей объектов»** профессиональной деятельности специалиста на основе фактологического (совокупности фактов), математического, естественнонаучного или других типов фундаментов общих профессиональных дисциплин;

– **«принцип ориентации на синтез новых объектов»** предметной деятельности специалистов.

Далее будут приведены варианты циклов ПД для некоторых направлений, а описанная выше системная характеристика позволяет определить основной набор вариантов построения дисциплин, опираясь на различные фундаменты. Это позволяет канонизировать структуру ПД, ранжировать по типу фундамента, глубине изучения, объему и другим признакам. Базисные дидактические единицы можно определить, исходя из выбранного типа фундамента дисциплины.

Соединение понятий базиса и типа фундамента дисциплины определяют «вариативные базисы» как минимальные, упорядоченные, компактно представленные совокупности информация, отражающие основные категории. В этой ситуации понятия, модели, принципы, законы, теории определяют (по новому) предметные области дисциплины, расширяя ее направленность и образовательную ценность.

Приведенные соображения отражают факт формирования содержания дисциплин, структуру и иерархию описываемых понятий в рамках классического подхода, который можно назвать **прямым подходом**. Сущность его состоит в вариативности формирования содержания, описанной выше, что все-таки сохраняет основные традиции обучения.

Вместе с тем можно ввести **инверсные** подходы для формирования «интегрирующих» дисциплин, когда за базисные категории ОПД принимаются базисные категории математики, физики и других дисциплин ЕН – цикла.

3. Историко-логические модели теории знаний. Данный класс дидактических единиц и примерных программ в основном соответствуют исторической последовательности формирования математики как научной области знания. Содержательная часть описывает основные классические понятия и методы в их историческом применении. Однако отсутствует явный акцент на «базисные категории» – базисные понятия, базисные действия и базисные методы.

Методом будем называть направленную совокупность математических действий, однако в ряде случаев отсутствует явное указание на этот факт. Последнее структурирование затрудняет реализовать «принцип управляемости» ПД со стороны математики и других естественно-научных дисциплин, включенных в ФГОС. Основные цели математического образования формулируются следующим образом:

1. Достаточная концептуальная и фактологическая математическая культура, а также общее интеллектуально-математическое развитие в рамках выбранной глубины образованности. Формирование математического и алгоритмического мышления, соответствующего требуемой глубине образованности.

2. Структурирование (в историческом развитии) математических знаний, применяемых при освоении федеральных дисциплин образовательных профессиональных программ подготовки специалистов.

3. Навыки решения учебных математических задач, позволяющие интерпретировать математические результаты, приносящие реальные достижение в инженерной и научной сферах деятельности.

4. Формирование технологии математического исследования прикладных вопросов, формулировка (перевод) реальных задач на математический язык, выбор аналитических, численных или аналитико-численных методов ее решения, оценка полученных результатов.

Базовые и специальные курсы математики могут иметь различную глубину образованности для различных областей техники и технологии по содержанию, которая достигается выбором различного числа часов, отводимых на изучение.

Дидактические единицы и примерная программа могут учитывать различия по глубине образованности. Кроме того, уровни могут отличаться от первого фундаментом изложения тем, что в частности, предполагает изучение различных фундаментов (на базе классического фундамента и фундамента в виде основ функционального анализа и теории множеств).

Например, на первом уровне не используется понятие предела по направлению, не доказываются свойства равномерно сходящихся рядов, свойства кратных интегралов, теоремы существования и т. д. Дополнительные разделы программы могут излагаться для отдельных специальностей на первом и на втором уровнях глубины образованности в зависимости от потребностей.

Целесообразно изучение исходных математических разделов дисциплин в течение первых четырех семестров, что реализует элементы непрерывного математического образования.

Такими дисциплинами могут быть федеральные ПД. В этой ситуации возникает возможность обеспечения управляемости содержания ПД со стороны дисциплины «Математика».

Управляемость фундаментальностью содержания возможна по схеме отражения дидактических единиц математики в названиях дидактических единиц других циклов, в частности, цикла ПД.

В этой ситуации имеется возможность формировать нормативные документы с ориентацией на явное использование фундаментальных дисциплин при формировании профессионально ориентирующих дисциплин.

4. Категориально-логические компетентностные модели теории знаний. Категориально-логические компетентностные модели, дидактически единицы и примерные программы определяют ***базисные категории*** и содержат явные формулировки базисных понятий, базисных действий и базисных методов для направлений в области техники и технологии. Другими словами, в данной ситуации даются перечни упомянутых категорий. Этот перечень для каждого раздела программы определяет «базисные категории» в виде трех списков – ***списка базисных понятий, списка базисных действий и списка базисных методов*** математики. Для краткости базисные действия и базисные методы объединены в один список. Базисные категории применяются в математике и в приложениях.

Акцентирование внимания учащихся и преподавателей на базисных понятиях, действиях, методах и приложениях делают всю программу структурированной. Дисциплина может быть ориентирована на приложения, что создает предпосылки положительного влияния на качество подготовки специалистов.

Варианты дидактических единиц и примерной программы по математике позволяет дать формировать дидактические единицы других дисциплин.

Анализ показывает, что возможно построение программ дополнительного образования на основе структур ФГОС третьего поколения. Последнее создает определенный "канон содержания", что положительно сказывается на упорядочении содержания подготовки. Представляется, что формирование появление "суперновых" программ дополнительного образования ставит вопрос о целесообразности включения этих программ в перечень (классификатор) основных программ.

Важной задачей при формировании компетентностного содержания образовательных программ является формирование интеллектуального и информационного потенциалов обучающихся. Для этого на основе системно-логической структуры целесообразно формировать «поле знаний» в виде системных матриц или сетевых структур знаний, включающих следующие **базисные компетентностные категории**:

- **элементарные** базисные понятия;
- **элементарные** базисные операции;
- **элементарные** базисные методы;
- **интегрированные** базисные понятия;

- **интегрированные** базисные операции;
- **интегрированные** базисные методы.

Таким образом, полнота формирования указанных объектов возможна на основе категорий математических и естественно-научных дисциплин и выделения подходов к формированию базисных категорий других циклов дисциплин.

1.5. Контрольные вопросы

1. Каковы основные принципы системного анализа и принятия решений в условиях определенности или неопределенности используются при анализе и исследовании систем управления и инновационных проблем.
2. Какие методы системного анализа можно использовать для исследования в зависимости от целей и характера неопределенности.
3. Какие критерии инновационности и инновационные задачи можно сформулировать для образовательных систем.
4. Как могут быть сформулированы цели инноваций при формировании содержания высшего профессионального образования.
5. Какие основные характеристики можно дать базисным компетентностным моделям знаний и содержания образования.

ЧАСТЬ 2. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рассматриваются методы математического программирования (конечномерной оптимизации) и вариационного исчисления как методы принятия решений в условиях полной информации. Приведены основные идеи и алгоритмы методов линейного, квадратичного и динамического программирования. Методы обеспечивают математическую культуру при выборе оптимальных или рациональных решений в различных задачах.

2. Математические методы и оценки вариантов

2.1. Математическое программирование, вариационное исчисление и оценки в функциональных пространствах

Методы математического программирования позволяют вычислить точки минимума функционалов на множествах конечномерных пространств. Эта группа методов оптимизации предназначена для вычисления минимизирующих или максимизирующих элементов функционалов в соответствующих пространствах, которые определяют оценки для выбора вариантов.

1. Методы математического программирования. Эти методы можно разделить на несколько группы в зависимости от типа допустимых областей, методам формирования вычислительной схемы и другим признакам.

По типу допустимых областей, в которых выполняется минимизация, можно выделить две группы методов:

- ***методы безусловной минимизации*** (максимизации) функционалов, когда допустимой областью изменения аргументов функционала является конечномерное пространство, к которым относятся методы наискорейшего спуска, методы Ньютона, методы сопряженных направлений (градиентов) и др.;

- ***методы условной минимизации*** (максимизации), когда допустимым множеством является – часть пространства.

По типу вычислительных алгоритмов можно выделить методы последовательного уменьшения функционала, и методы, использующие необходимые условия оптимальности.

Методы безусловной минимизации. Для минимизации функционала без ограничений (во всем конечномерном пространстве): $\varphi(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, т.е. когда ограничения отсутствуют, можно использовать два метода:

- ***метод последовательной (прямой) оптимизации,*** когда вычислительный алгоритм формирует минимизирующую последовательность

$$\mathbf{x}_{k+1} = \psi(\mathbf{x}_k) \xrightarrow[k \to k^*]{} \mathbf{x}^* = \arg\min \varphi(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

сходящуюся к минимизирующему элементу x^*;

- ***метод необходимых условий***, когда минимизирующий элемент вычисляется на основе необходимых условий оптимума

$$\partial\varphi(\mathbf{x}) / \partial x\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0, \mathbf{x}^* = \arg\min \varphi(\mathbf{x}). \qquad (2)$$

Если в методе последовательной минимизации непосредственно формируется минимизирующая последовательность, то метод необходимых условий формулирует условия, которым должен удовлетворять вектор $\mathbf{x}^*$. Очевидно, что для отыскания вектора $\mathbf{x}^*$ из необходимых условий следует также построить последовательность $\mathbf{x}_{k+1} = \psi(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0$, сходящуюся к решению системы необходимых условий. Таким образом, в двух случаях строятся минимизирующие последовательности.

Методы выпуклой условной минимизации. Общая постановка задач конечномерной оптимизации имеет следующий вид: вычислить векторы, доставляющие минимум выпуклых функционалов

$$\varphi(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad \mathbf{x}\in \mathbb{R}^n, \tag{3.а}$$

при ограничениях, задающих выпуклую допустимую область D изменения аргументов функционала:

$$D=\{x\in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x})\le b_i, \ \ g_i(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad i=\overline{1,m},\}, \tag{3.б}$$

где функционал (целевая функция или критерий) определяет цель и количественное выражение эффективности решения; $\mathbf{x}\in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных (управлений, решений и т.д.), такой, что $\mathbf{x}=\left(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_j,...,\mathbf{x}_n\right)^T$; $g_i(\mathbf{x})$, $i=\overline{1,m}$, – функции, задающие ограничения в виде допустимой выпуклой области конечномерного пространства.

Рассмотрим идеи методов, лежащие в основе решения общих задач математического программирования (1.1.а) (1.1.б): вычислить минимум функционала $\varphi(\mathbf{x})$ при выполнении ограничений $g_i(\mathbf{x})\le b_i$, $i=\overline{1,m}$:

$$\mathbf{x}^*=\arg\min\{\varphi(x)\mid x\in D\subset \mathbb{R}^n\}. \tag{4}$$

Для решения экстремальной задачи данного типа можно построить итерационные ***проекционные алгоритмы*** минимизации с восстановлением ограничений задачи:

$$\mathbf{x}_{k+1} = P_D\left(\mathbf{x}_k\right), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $P_D\left(\cdot\right)$ – оператор проецирования на допустимое выпуклое множество:

$$D = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; g_i\left(\mathbf{x}\right) \le b_i, \;\; i = \overline{1,m} \right\} \subset \mathbb{R}^n, \quad D \ne \varnothing, \tag{6}$$

позволяющий найти элемент $\mathbf{x}$, удовлетворяющий условию:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\|^2 = \left\| \mathbf{x} - P_D\left(y\right) \right\|^2, \quad \left\| \mathbf{x} \right\|^2 = \left(\mathbf{x}, \mathbf{x}\right), \tag{7}$$

причём оператор $y = P_D\left(\cdot\right)$ называется ***оператором проецирования (проектором)*** на выпуклое множество D, а использованная норма - норма евклидова пространства.

Существуют также алгоритмы минимизации с сохранением ограничений задачи:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Theta_D\left(\mathbf{x}_k\right), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0 \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

где оператор типа (8) задает алгоритм.

Таким образом, для минимизации функционала формируется минимизирующая последовательность типа (8) с проверкой на каждой итерации выполнения необходимых условий. К таким процедурам относятся методы линейного, квадратичного программирования и другие методы.

Обсудим идею отыскания оптимальных решений. Сущность ее заключается в использовании проектирования на допустимые выпуклые множества точек, совпадающих с безусловным минимумом функционала. Необходимо учесть ограниченность данного метода, поскольку корректное решение имеет место для функционалов равного роста из точки безусловного минимума. Тогда для задачи: вычислить

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\left\{\varphi(\mathbf{x}) \middle| \mathbf{x} \in D\right\}, \tag{9}$$

решение принимает вид:

$$\mathbf{x}^* = P_D\left(\mathbf{x}^0\right), \tag{10}$$

где $P_D(\cdot)$ – проектор на выпуклое допустимое множество D, а $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ – точка безусловного минимума функционала.

2. Простейшие задачи классического вариационного исчисления. Классическое вариационное исчисление позволяет найти минимум функционалов, определенных на элементах функциональных пространств. При этом, как и в конечномерном случае, можно выделить ***задачи на условный и безусловный минимум***.

Понятие вариации функционала. Условия Эйлера. Перейдем к выводу необходимых условий в виде уравнений Эйлера для задачи вычисления минимума функционала

$$\mathbf{J}\left(x(\cdot)\right) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L}\left(t, x, \dot{x}\right) dt \to extr, x\left(t_0\right) = x_0\ x\left(t_1\right) = x_1, \tag{11}$$

рассматриваемой в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $\mathrm{C}^1\left(\left[t_0, t_1\right]\right), -\infty < t_0 < t_1 < \infty$. Пространство функций $\mathrm{C}^1\left(\left[t_0, t_1\right]\right)$ является ***банаховым пространством***, т.е. линейным полным нормированным относительно нормы:

$$\left\| x(\cdot) \right\| = \max\left(\max_{t \in [t_0, t_1]} \left| x(t) \right|, \max_{t \in [t_0, t_1]} \left| \dot{x}(t) \right| \right).$$

Будем предполагать, что функция $\mathbf{L}(\cdot)$ непрерывна по совокупности переменных вместе со своими частными производными $\mathbf{L}_x$ и $\mathbf{L}_{\dot{x}}$.

Теорема 1 ***(необходимое условие Эйлера)***. Пусть функция $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, доставляет локальный экстремум в задаче (11). Тогда она удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{\dot{x}}\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\right) + \mathbf{L}_x\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\right) = 0,$$

которое называется уравнением Эйлера. Допустимая функция $\hat{x}(\cdot)$, для которой оно выполнено, называется стационарной точкой задачи (11) или экстремалью. Локальный экстремум в пространстве
$C^1([t_0, t_1])$ называется ***слабым экстремумом.***

Доказательство теоремы проводится поэтапно.

а) ***Определение первой вариации по Лагранжу.*** Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 \mathbf{F}(t, \lambda)\,dt = \int_0^1 \mathbf{L}\left(t, \hat{x}(t) + \lambda x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{x}(t)\right)dt.$$

Гладкость функции $\mathbf{L}(\cdot)$ позволяет дифференцировать под знаком интеграла. Дифференцируя и подставляя $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \left(q(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t)\right)dt,$$

где $q(t) = \mathbf{L}_x\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\right)$, $p(t) = \mathbf{L}_{\dot{x}}\left(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\right)$.

Итак, $\lim_{\lambda\to\infty}\left(\mathbf{J}\left(\hat{x}(\cdot)+\lambda\dot{x}(t)\right)-\mathbf{J}\left(\hat{x}(\cdot)\right)\right)/\lambda$ существует для любого $x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$. Обозначим этот предел $\delta\mathbf{J}\left(\hat{x}(\cdot),x(\cdot)\right)$.

Определение 2. Функция $x(\cdot)\to\delta\mathbf{J}(\cdot,\cdot)$ называется ***первой вариацией по Лагранжу функционала*** $\mathbf{J}$.

б) ***Преобразование первой вариаций с помощью интегрирования по частям.*** Пусть $x(t_0)=x(t_1)=0$ и функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Следуя Лагранжу, имеем

$$\delta\mathbf{J}\left(\hat{x}(\cdot),x(\cdot)\right)=\int_0^1\left(q(t)x(t)+p(t)\dot{x}(t)\right)dt=\int_0^1 a(t)x(t)dt \quad (12)$$

где $a(t)=-\dot{p}(t)+q(t)$ (произведение $p(t)x(t)$ обращается в нуль на концах промежутка интегрирования).

Известно, что $\hat{x}(t)$ доставляет локальный минимум. Отсюда следует, что функция $\lambda\to\varphi(\lambda)$ имеет локальный минимум в нуле. По теореме Ферма, известной из анализа, $\varphi'(0)=\delta\mathbf{J}\left(\hat{x}(\cdot),x(\cdot)\right)=0$. Сопоставляя последнее условие с (1.3), получаем, что для произвольной функции $x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ такой, что $x(t_0)=x(t_1)=0$,

имеет место равенство $\int_0^1 a(t)x(t)dt=0$.

в) ***Основная лемма классического вариационного исчисления (лемма Лагранжа).*** Пусть непрерывная функция $t\to a(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ обладает тем свойством, что $\int_0^1 a(t)x(t)dt=0$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(\cdot)$, у которой $x(t_0) = x(t_1) = 0$. Тогда $a(t) \equiv 0$.

Доказательство. Допустим, что $a(\tau) \neq 0$ в некоторой точке $\tau \in [t_0, t_1]$. Тогда вследствие непрерывности $a(\cdot)$ найдется отрезок $\Delta = [\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$, на котором $a(\cdot)$ не обращается в нуль. Пусть для определенности $a(t) \geq m > 0$. Построим функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} (t-\tau_1)^2 (t-\tau_2), & t \in \Delta, \\ 0, & t \notin \Delta. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\tilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, кроме того $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}(t_1) = 0$. По условию леммы $\int_0^1 a(t)\tilde{x}(t)dt = 0$. С другой стороны, по теореме о среднем, известной из курса анализа, $\int_0^1 a(t)\tilde{x}(t)dt > 0$, и это противоречие доказывает лемму.

Сопоставив результаты рассуждений на этапах а) и б), убеждаемся, что $-\dot{p}(t) + q(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Задача Лагранжа и основная задача оптимального управления. Лагранжем была поставлена следующая задача вариационного исчисления на условный экстремум: вычислить функции заданного класса, которые доставляют экстремум функционала

$$\mathbf{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^1 f(t, x(t), u(t))dt + \Psi_0(x(t_0), x(t_1)) \to extr \quad (13)$$

при ограничениях:

$$\dot{x}-\varphi(t,x,u)=0,$$

$$\Psi_0\left(x(t_0),x(t_1)\right)=0\left(\Leftrightarrow \Psi_j\left(x(t_0),x(t_1)\right)=0,\ j=\overline{1,S}\right),$$

где $f:\mathbf{V}\to\mathbb{R}^1,\varphi:\mathbf{V}\to\mathbb{R}^n,\psi:\mathbf{W}\to\mathbb{R}^s$.

Для решения задачи Лагранж использовал ***правило множителей,*** в соответствии с которым обставляется функция Лагранжа:

$$\varphi\left(x(\cdot),u(\cdot);p(\cdot),\mu,\lambda_0\right)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{L}dt+l,$$

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}(t,x,\dot{x},u)=p(t)\left(\dot{x}-\varphi(t,x,u)\right)+\lambda_0 f(t,x,u), \qquad (14)$$

$$l=l(x_0,x_1)=\sum_{j=0}^{S}\mu_j\psi_j(x_0,x_1),\quad \lambda_0=\mu_0.$$

Следуя Лагранжу, будем искать условия экстремума (14). Имеет место теорема.

Теорема 2 (Эйлера-Лагранжа). Если $\hat{z}=\left(\hat{x}(\cdot),u(\cdot)\right)$ оптимальный в слабом смысле процесс для задачи (1.4), (1.5) то найдутся множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0=\hat{\mu}_0\le 0$ задаче на минимум и $\hat{\lambda}_0=\mu_0\le 0$- в задаче на максимум, $\hat{p}(\cdot)\in C^1\left([t_0,t_1]\right)$ - не равные одновременно нулю и такие, что будут выполнены уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{\dot{x}}\left(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),u(t)\right)+\mathbf{L}_x\left(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),\hat{u}(t)\right)=0,$$

$$\mathbf{L}_n\left(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),\hat{u}(t)\right)=0.$$

и условия трансверсальности:

$$\mathbf{L}_x\left(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),\hat{u}(t)\right)=(-1)^k\frac{\partial l}{\partial x_k}\left(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)\right),\ k=0,1.$$

Эта теорема доказывается как прямое следствие общей теоремы, касающейся правила множителей Лагранжа для гладких бесконечномерных задач.

2.2. Метод линейного программирования, симплекс-метод и линейные оценки

Задачи линейного программирования в канонической форме широко распространены в инженерной практике, и для их решения разработана большая группа методов, основной из которых – симплекс-метод. Рассмотрим постановку и решение задачи линейного программирования в канонической форме.

1. Постановка задачи линейного программирования. Задача будет рассматриваться в форме, которая называется канонической. Известно, что путем введения дополнительных ограничений и переменных можно свести к канонической форме задачу линейного программирования, представленную в любой форме, в частности в естественной форме.

Каноническая форма задачи линейного программирования имеет следующий вид: вычислить

$$\mathbf{x}^*=\arg\min\begin{Bmatrix}\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{cx}\,|\,\mathbf{Ax}=b\ \ ,\ \ x\geq 0\\ \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n},\, m\leq n\end{Bmatrix}\in\mathbb{R}^n \qquad (1.а)$$

с помощью конечно-сходящейся вычислительной процедуры, заданной оператором

$$\mathbf{x}^{S+1}=\psi(\mathbf{x}^S),\quad \mathbf{x}^0=\mathbf{x}_0. \qquad (1.б)$$

В операторе (1.б) векторы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^0$ - оптимальное решение задачи (1.а) и начальное приближение для симплекс-метода (1.б), которые в симплекс-методе являются ***базисными решениями***, определяемыми ниже. Векторы $\mathbf{x}^{s+1}$ и $\mathbf{x}^s$ в (1.б) представляют собой последующее и предыдущее решения в симплекс-методе.

При решении задачи линейного программирования необходимо решить следующие основные подзадачи:

Подзадача 1. Определение ***условий существования, единственности и ограниченности*** решений ограничений задачи линейного программирования (1.а):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = b \ , \ \ x \geq 0 \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \leq n \end{array} \right\}.$$

Подзадача 2. Формулировка ***необходимых условий оптимальности*** текущих решений, вычисляемых на итерациях симплекс-метода (1.б).

Подзадача 3. Вычисление ***новых базисных решений*** $\mathbf{x}^{S+1}$ на основе известных базисных решений $\mathbf{x}^s$ с помощью алгоритма симплекс-метода (1.б).

Подзадача 4. Формирование ***новой базисной матрицы и обратной для нее*** для формулировки вычислительной схемы симплекс-метода (1.б) в целом.

Как правило, последовательность (1.б) является конечной, и за конечное число итераций (шагов) алгоритма симплекс-метода вычисляется оптимальное базисное решение или определяется единственность или ограниченность решения. Это имеет место, если отсутствует явление ***«зацикливания»***, которое требует специального рассмотрения, в частности, в ряде случаев исключается специальными методами, например, известным методом Чарнса.

Задача линейного программирования (1) имеет специальную форму в силу линейности функционала и ограничений, задаваемых системой линейных равенств и неравенств. Это определяет соответствующий подход к формулировке необходимых условий оптимальности.

2. Необходимые условия оптимальности решений для канонической формы задачи. Рассмотрим ограничения задачи в канонической форме, которая может иметь ***три эквивалентные формы*** задания ограничений:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \qquad (2.а)$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad x_j \geq 0, \qquad (2.б)$$

$$(a_i, \mathbf{x}) = b_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad \mathbf{x} \geq 0, \qquad (2.в)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)^T$ - вектор переменных задачи линейного программирования; $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_j, ..., A_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица ограничений задачи в виде (2.а), в которой A_j – столбцы матрицы, используемые для ***векторно-столбцового задания*** ограничений вида (2.б); $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_i, ..., a_m)^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица ограничений, используемая для ***векторно-строчного задания*** ограничений типа (2.в); $b = (b_1, ..., b_i, ..., b_m)^T$ – вектор правых частей ограничений типа равенств.

Необходимо учитывать, что для вычисления допустимого решения системы (2) необходимо решить систему линейных алгебраических равенств и простейших неравенств, определяющих условия неотрицательности переменных.

В связи с этим при решении задач линейного программирования симплекс-методом используются базисные решения.

Определение 1. Решение $\mathbf{x}^s$ называется ***базисным решением***, на s–й итерации, если выполнены условия:

1) все компоненты x_j^s, $j \in B_s$, вектора решений $\mathbf{x}^s = (x_1^s, ..., x_j^s, ..., x_m^s)^T \in \mathbb{R}^m$ являются неотрицательными, где B_s – множество номеров базисных переменных на s-й итерации;

2) все остальные компоненты вектора $\mathbf{x}$ – нулевые: $x_j = 0$, $j \notin B_s$;

3) матрица $\mathbf{P}_S = [\mathbf{A}_1 ... \mathbf{A}_j ... \mathbf{A}_m]_s$ размера $(m \times m)$, образованная столбцами с номерами, соответствующими базисным компонентам решения на s-й итерации метода, является неособой матрицей.

Определение 2. Матрица $\mathbf{P}_s$ в определении 1 называется ***базисной матрицей на*** s-й итерации симплекс-метода.

С учетом введенных определений перепишем ограничения задачи (2) в виде

$$\mathbf{Ax} = \sum_{j \in B_s} \mathbf{A}_j x_j + \sum_{j \notin B_S} \mathbf{A}_j x_j = \mathbf{b}, \qquad (3.а)$$

где первая сумма определяется компонентами базисного решения, а вторая сумма – компонентами небазисных решений, причем $\mathbf{A}_j$ – j-й столбец матрицы ограничений, т.е. использованы ***матричная и векторно-столбцовая записи*** ограничений типа (2.а) и (2.б); B_s – множество номеров базисных компонент решения на s-й итерации метода.

Обозначим исходную базисную матрицу на s-й итерации:

$$\mathbf{P}_S = [\mathbf{A}_1 ... \mathbf{A}_i ... \mathbf{A}_m]_s .$$

Нетрудно видеть, что базисная матрица $\mathbf{P}_S$ состоит из столбцов $\mathbf{A}_j$, таких что $j \in B_s$, где B_s – множество номеров базисных переменных, которые не отрицательны, им соответствуют линейно-независимые столбцы $\mathbf{A}_j$ матрицы ограничений $\mathbf{A}$. Обычно при формулировке симплекс-метода предполагается, что в матрице ограничений $\mathbf{A}$ имеется базисная матрица $\mathbf{P}_S$, которая единичная. В противном случае используется *метод искусственного базиса*.

Метод искусственного базиса позволяет преобразовать задачу путем введения вектора новых неотрицательных искусственных переменных $x_j \geq 0$, $j \notin B_s$, $j \in N$ – множество искусственных переменных. Сущность метода состоит в элементарном преобразовании ограничений введением новых искусственных переменных, которым соответствуют единичные столбцы матрицы ограничений. Искусственные переменные включаются в минимизируемую целевую функцию с достаточно большими положительными коэффициентами (весами). Если в процессе вычислений симплекс-методом искусственные переменные выводятся из базиса, то это является ***критерием существования решения*** исходной задачи линейного программирования. Если искусственные переменные в процессе итераций симплекс-метода присутствуют в базисном решении, то решение исходной задачи линейного программирования не существует, т.е. ***ограничения задачи (1) не совместны***.

Для иллюстрации преобразований ограничений задачи запишем ограничения (3) в виде

$$\mathbf{Ax} = \sum_{j\in B_s} \mathbf{A}_j x_j + \sum_{j\notin B_S} \mathbf{A}_j x_j + \sum_{j\notin B_s,\, j\in Q} A_j x_j = \mathbf{b}, \tag{3.б}$$

где столбцы $A_j, j \notin B_s, j \in N$, являются единичными столбцами. Эти столбцы образуют единичную базисную матрицу на нулевой итерации симплекс-метода $P_0 = E \in R^{m\times m}$, для которой обратная базисная матрица также единичная. В результате в ограничениях задачи существует базисная матрица, которой соответствуют искусственные переменные. В рассматриваемом методе искусственного базиса целевая функция преобразуется к виду:

$$\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{c}, \tilde{\mathbf{x}}), \qquad \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_N)^T, \tag{3.в}$$

где вектор $\mathbf{x}$ – вектор ограничений исходной задачи (1.а), а $\mathbf{x}_N$ – вектор искусственных переменных.

Преобразования ограничений задачи в методе искусственного базиса к виду (3.б) и целевой функции к виду (3.в) иллюстрируют сохранение структуры задачи линейного программирования (1.а) и отражают качественные свойства столбцов матрицы ограничений в векторно-столбцовой форме записи ограничений типа (3.б). Эти качественные свойства связаны наличием единичной базисной матрицы, что позволяет далее определить первые оценки оптимальности на первой итерации симплекс-метода, сформировать алгоритм рекуррентного вычисления обратной базисной матрицы и разработать в целом алгоритм симплекс-метода.

Таким образом, исходная формулировка задачи линейного программирования (1.а) и ее формулировка с ограничениями типа (3.б) и функционалом (3.в) позволяют далее рассматривать общую схему симплекс-метода для задачи (1.а).

Тогда ограничения примут вид

$$\mathbf{P}_S \mathbf{x}^S + \sum_{j \notin B_s} \mathbf{A}_j x_j = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{x}^S = (x_1^s, ..., x_m^s)^T$ – вектор базисного решения на s-й итерации. Представим вектор базисного решения через небазисные переменные. Тогда можно представить базисное решение на s-й итерации симплекс-метода в виде

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{P}_S^{-1} b - \sum_{j \notin B_S} \mathbf{P}_S^{-1} \mathbf{A}_j x_j . \qquad (4)$$

Продолжая формулировку необходимых условий, рассмотрим функционал $\varphi(\mathbf{x}) = cx,\ \ c = (c_1, ..., c_j, ..., c_n)$, выделив в нем два слагаемых, соответствующих компонентам базисного решения и небазисным переменным на s-й итерации симплекс-метода. Тогда будем иметь

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} = \sum_{j \in B_S} c_j x_j + \sum_{j \notin B_S} c_j x_j = \mathbf{c}^s \mathbf{x}^s + \sum_{j \notin B_S} c_j x_j ,$$

где вектор $\mathbf{c}^S = (c_1^s, c_2^s ..., c_m^s)$ соответствует коэффициентам целевой функции для базисного решения на s-й итерации. Подставим в функционал выражение для базисного вектора (4). Тогда минимизируемый функционал примет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^s \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \notin B_S} (\mathbf{c}^s \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{A}_j - c_j) x_j = \mathbf{c}^s \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \notin B_S} \Delta_j x_j , \qquad (5.а)$$

$$\Delta_j = \mathbf{c}^s \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{A}_j - c_j . \qquad (5.б)$$

Из последнего соотношения следует ***критерий оптимальности***: если все $\Delta_j < 0$, то полученное на s-й итерации решение оптимально, поскольку введение в базис небазисных компонент с оценками $\Delta_j < 0$ приводит к увеличению функционала. Если существует такой номер j, для которого $\Delta_j > 0$, то значение функционала можно уменьшить, перейдя к новому базисному решению[1]. Обычно в новое множество базисных компонент вводят компоненту с номером k, таким, что $\max_j \Delta_j = \Delta_k > 0$, однако можно вводить в базисное решение компоненты с положительными оценками. Тогда можно сформулировать критерий оптимальности:

$$\Delta_j < 0, \quad \forall j \notin B_s. \tag{5.в}$$

Критерий (5.в) будет использован в рассматриваемом ниже алгоритме симплекс-метода.

3. Формирование конечной минимизирующей последовательности базисных решений. Определив номер k-й переменной, вводимой в базис, найдем величину переменной x_k^{s+1}, вводимой в базис на $(s+1)$-й итерации метода из условия не отрицательности этой компоненты нового базисного решения. Для записи условия не отрицательности можно воспользоваться представлением базисного решения в виде (4), приняв во внимание, что $x_k^{s+1} \neq 0$, а все $x_j = 0$, $j \notin B_{s+1}$. Тогда

$$\mathbf{x}^{S+1} = \mathbf{P}_S^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{P}_S^{-1}\mathbf{A}_k x_k^{S+1} \geq 0. \tag{6}$$

[1] Переход осуществляется путем выведения из базиса одной базисной компоненты и введения одной новой компоненты из числа небазисных переменных.

Далее удобно ввести обозначение $x_k^s = P_s^{-1} A_k$, определив вектор $\mathbf{x}_k^s$ следующим образом: $\mathbf{x}_k^s = (x_{1k}^s, ..., x_{mk}^s)^T$. Тогда равенство (6) можно переписать в координатной форме:

$$x_i^{S+1} = x_i^S - x_{ik}^S x_k^{S+1}, \quad P_S^{-1} A_k = \begin{pmatrix} x_{1k}^S \\ \dots \\ x_{ik}^S \\ \dots \\ x_{nk}^S \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Для определения x_k^{S+1} с учетом (6) рассмотрим два случая.

1). ***Случай неограниченных решений.*** Пусть все значения $x_{ik}^s < 0$. Тогда можно увеличивать неограниченно величину x_k^{s+1}, и при этом условия (6) нарушаются. Целевая функция будет неограниченно возрастать, поскольку решение задачи неограниченное.

2). ***Случай ограниченных решений.*** Пусть существует $x_{ik}^s > 0$. Тогда решение задачи конечно, и надо определить величину x_k^{s+1} с учетом (6). Очевидно, что при увеличении x_k^{s+1} найдется такое значение x_k^{s+1}, при котором некоторая компонента

старого базисного решения станет равной нулю[2]. Пусть этой компонентой будет x_l^{s+1}, т.е.

$$x_l^{s+1} = x_l^S - x_{lk}^S x_k^{s+1} = 0.$$

Чтобы остальные компоненты остались неотрицательными, величину x_k^{s+1} необходимо определить из условия

---

[2] Это соответствует выведению данной переменной из базиса.

$$x_l^{S+1} = \min_{x_{ik}^S > 0}[x_i^S \,/\, x_{ik}^S] = x_l^S \,/\, x_{lk}^S. \qquad (8)$$

Таким образом, переменная x_k^{s+1} включается в список базисных переменных, а x_l^S исключается из базисного решения (базиса). Вычисление компонент нового базисного решения на $(s+1)$-й итерации симплекс-метода должно выполняться по формулам, вытекающим из приведенных рассуждений, которые принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} x_l^{S+1} = x_i^S - x_{ik}^S x_k^{S+1},\ i \neq k; \quad x_k^{S+1} = \frac{x_j^S}{x_{lk}^S}, \quad i,k \in B_{S+1}; \\ x_j^{S+1} = 0, \quad x_j^{S+1} = 0, \quad j,l \notin B_{S+1} = B_S \cup k \setminus l. \end{gathered} \qquad (9)$$

Полученные формулы используются для вычисления компонент решения на $(s+1)$-й итерации симплекс-метода при решении задачи линейного программирования. При этом необходимо вычислять элементы обратной базисной матрицы, соответствующей новому базисному решению.

4. Вычисление элементов новой обратной базисной матрицы. Для вычисления оценок Δ_j в (5), необходимо иметь матрицу, обратную базисной матрице. В симплекс-методе используется рекуррентное соотношение для базисной матрицы, которое формируется на основе очевидного равенства

$$\mathbf{P}_{S+1}\mathbf{U}_{S+1} = \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

где $\mathbf{U}_{S+1}$ – матрица, обратная для базисной матрицы на $(s+1)$-й итерации симплекс-метода. Введем в последнее равенство матрицу $\mathbf{U}_S$, умножив на нее обе части последнего уравнения. Тогда получим

$$\mathbf{U}_S\mathbf{P}_{S+1}\mathbf{U}_{S+1} = \mathbf{U}_S\,. \qquad (10)$$

Рассмотрим структуру матрицы $\mathbf{P}_{S+1}$, выделив в ней столбцы:

$$\mathbf{P}_{S+1} = \left[\mathbf{A}_1 \dots \underbrace{\mathbf{A}_k}_{l} \dots \mathbf{A}_m\right]_{s+1},$$

причем для данной матрицы на месте l-го столбца (соответствующего переменной выводимой из базиса) должен быть расположен вектор A_k.

Тогда соотношение (10) в развернутой форме примет вид:

$$\mathbf{U}_S\mathbf{P}_{S+1}\mathbf{U}_{S+1} = \mathbf{U}_S\left[\mathbf{A}_1 \dots \underbrace{\mathbf{A}_k}_{l} \dots \mathbf{A}_m\right]_{s+1}\mathbf{U}_{S+1} = \mathbf{U}_S\,,$$

который можно преобразовать к эквивалентной форме:

$$\left[\mathbf{U}_S\mathbf{A}_1 \dots \underbrace{\mathbf{U}_S\mathbf{A}_k}_{l} \dots \mathbf{U}_S\mathbf{A}_m\right]\mathbf{U}_{S+1} = \mathbf{U}_S\,.$$

Поскольку $\mathbf{U}_S = \mathbf{P}_s^{-1}$ – обратная базисная матрица на s-й итерации симплекс-метода, а $\mathbf{A}_j$ – столбцы матрицы $\mathbf{P}_S$, то справедливы соотношения:

$$\mathbf{U}_S\mathbf{A}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{U}_S\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i, \quad i \in B_S, \qquad \mathbf{U}_S\mathbf{A}_k = (x_{1k}, \dots, x_{mk})^T = \mathbf{x}_k\,.$$

Рассмотрим полученные соотношения в преобразованной форме

$$[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{e}_m)\mathbf{U}_{S+1} = \mathbf{U}_S\,,$$

которую можно представить в «развернутом» виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & x_{1k}^S & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_{2k}^S & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{lk}^S & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{mk}^S & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{S+1} & \dots & u_{1l}^{S+1} & \dots & u_{1m}^{S+1} \\ u_{21}^{S+1} & \dots & u_{2l}^{S+1} & \dots & u_{2m}^{S+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{l1}^{S+1} & \dots & u_{ll}^{S+1} & \dots & u_{lm}^{S+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1}^{S+1} & \dots & u_{ml}^{S+1} & \dots & u_{mm}^{S+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11}^S & \dots & u_{1l}^S & \dots & u_{1m}^S \\ u_{21}^S & \dots & u_{2l}^S & \dots & u_{2m}^S \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{l1}^S & \dots & u_{ll}^S & \dots & u_{lm}^S \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1}^S & \dots & u_{ml}^S & \dots & u_{mm}^S \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение i-й строки на j-й столбец и l-й строки на
l-й столбец, получим равенства:

$$u_{ij}^S = u_{ij}^{S+1} + x_{ik}^S u_{lj}^{S+1}, \; i \neq l, \; x_{lk}^S u_{lj}^{S+1} = u_{lj}^S .$$

Из последних формул следуют рекуррентные соотношения для вычисления элементов новой обратной базисной матрицы:

$$u_{ij}^{S+1} = u_{ij}^S + x_{ik}^S \frac{u_{lj}^S}{x_{lk}^S}, \; u_{lj}^{S+1} = \frac{u_{lj}^S}{x_{lk}^S} . \qquad (11)$$

5. Алгоритм симплекс-метода. Алгоритм симплекс-метода формулируется для задачи линейного программирования на основе выведенных выше соотношений.

Шаг 1. Формулировка задачи линейного программирования в канонической форме на основе ***метода искусственного базиса*** так, чтобы в матрице ограничений существовала единичная базисная матрица. Для этого необходимо дополнить матрицу ограничений единичными столбцами, которые должны в совокупности с исходными столбцами матрицы ограничений обеспечивать существование единичной базисной матрицы. При этом естественным образом должны быть введены соответствующие искусственные переменные, которые включаются в целевую функцию с большими положительными весовыми коэффициентами для задачи на минимум. В результате запишем исходную матрицу ограничений $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_n]$ в симплекс-таблицу 2.1, а коэффициенты целевой функции $C_1,...,C_n$ запишем в строку этой таблицы. В табл. 2.1 также включим компоненты исходного базисного решения, определяемого вектором $\mathbf{x}_{B_0}$.

Шаг 2. Вычисление характеристических разностей (оценок) по формулам типа (5.б):

$$\Delta_j = \mathbf{c}^S \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{A}_j - C_j$$

и запись оценок в $(m+1)$-ю строку симплекс-таблицы.

Шаг 3. Вычисление оценки Δ_k, удовлетворяющей условию:

$$\Delta_k = \max_j \Delta_j, \;\; \Delta_j > 0.$$

Если все $\Delta_j < 0$, то в соответствии с выполнением критерия оптимальности (5.в) вектор x^S – оптимальное решение, и далее следует перейти к шагу 9, иначе – к шагу 4.

Шаг 4. Вычисление нового базисного решения x_k^{s+1} из условия (8):

$$x_k^{s+1} = \min_{x_{ik}>0}[x_i^S \;/\; x_{ik}^S] = x_l^S \;/\; x_{lk}^S .$$

Таблица 2.1

№	Базисные столбцы	B_s	Базисное решение X^S	C_1	C_2	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	…	$\mathbf{A}_m$	$\mathbf{A}_{m+1}$	…	$\mathbf{A}_k$	…	$\mathbf{A}_n$
1	$\mathbf{A}_1$	c_1^S	x_1^S	1	0	…	0	$X^s_{1,m+1}$	…	$X^s_{1,k}$	…	$X^s_{1,n}$
2	$\mathbf{A}_2$	c_2^S	x_2^S	0	1	…	0	$X^s_{2,m+1}$	…	$X^s_{2,k}$	…	$X^s_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$\mathbf{A}_l$	c_l^S	x_l^S	0	0	…	0	$X^s_{l,m+1}$	…	$X^s_{l,k}$	…	$X^s_{l,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\mathbf{A}_m$	c_m^S	x_m^S	0	0	…	1	$X^s_{m,m+1}$	…	$X^s_{m,k}$	…	$X^s_{m,n}$
			Оценки	Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Таблица 2.2

№	Базисные столбцы	B_{s+1}	Базисное решение $\mathbf{X}^{S+1}$	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	C_n
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	…	$\mathbf{A}_m$	$\mathbf{A}_{m+1}$	…	$\mathbf{A}_k$	…	$\mathbf{A}_n$
1	$\mathbf{A}_1$	c_1^{S+1}	x_1^{S+1}	1	0	…	0	$X^s_{1,m+1}$	…	$X^s_{1,k}$	…	$X^s_{1,n}$
2	$\mathbf{A}_2$	c_2^{S+1}	x_2^{S+1}	0	1	…	0	$X^s_{2,m+1}$	…	$X^s_{2,k}$	…	$X^s_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$\mathbf{A}_l$	c_k^{S+1}	x_k^{S+1}	0	0	…	0	$X^s_{l,m+1}$	…	$X^s_{l,k}$	…	$X^s_{l,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\mathbf{A}_m$	c_m^{S+1}	x_m^{S+1}	0	0	…	1	$X^s_{m,m+1}$	…	$X^s_{m,k}$	…	$X^s_{m,n}$
			Оценки	Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Шаг 5. Вычисление компонент нового базисного решения $\mathbf{x}^{s+1}$ по формулам (9)**:**

$$x_k^{S+1} = x_i^S - x_k^{S+1} x_{ik}^S,\; i \in B_{S+1},\; i \neq k;\;\; x_l^{S+1} = 0,\;\; x_j^{S+1} = 0,\; j, l \notin B_{S+1}.$$

Шаг 6. Вычисление элементов новой симплекс-таблицы для (s+1)-й итерации метода по формулам:

$$x_{ij}^{S+1} = x_{ij}^{S} - x_{ik}^{S} x_{lj}^{S} / x_{lk}^{S},\ i \neq l; \quad x_{lj}^{S+1} = x_{lj}^{S} / x_{lk}^{S}\ .$$

$$u_{ij}^{S+1} = u_{ij}^{S} + x_{ik}^{S} \frac{u_{lj}^{S}}{x_{lk}^{S}}, \quad i \neq l, \qquad u_{lj}^{S+1} = \frac{u_{lj}^{S}}{x_{lk}^{S}}.$$

Эта формула была выведена выше.

Шаг 7. Корректировка симплекс-таблицы с учетом изменений коэффициентов целевой функции, соответствующих новому базисному решению и формируем табл. 2.2.

Шаг 8. Переход к шагу 2.

Шаг 9. Останов, регистрация оптимального решения.

Таким образом, сформулированный алгоритм определяет конечную последовательность шагов, необходимых для вычисления оптимального решения.

Пример. Имеется объект управления, для которого в стационарных состояниях связь между управлениями u_i, и выходными координатами s_j определяется линейной алгебраической системой:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Определим управления, обеспечивающие максимум критерия оптимальности $z = 4u_1 + 2u_2$, при условии: выходные координаты статического объекта управления s_i принадлежат заданной допустимой области D, определенной системой условий:

$$s_1 \le 5, s_2 \le 14, s_3 \le 10, s_4 \le 8, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0.$$

Сформулированная задача управления сводится к определению максимума линейного функционала $z = 4u_1 + 2u_2$ при ограничениях следующего вида:

$$\begin{aligned} &u_1 \le 5, && u_2 \le 8, \\ &2u_1 + u_2 \le 14, && u_1 \ge 0, \\ &u_1 + u_2 \le 10, && u_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду, введя обозначения $u_1 = x_1, u_2 = x_2$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 = 5, \\ &2x_1 + x_2 + x_4 = 14, \\ &x_1 + x_2 + x_6 = 10, \\ &x_2 + x_7 = 8, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 6. \end{aligned}$$

Тогда целевая функция задачи управления примет вид:

$$z = 4x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + +0 \cdot x_6.$$

Систему ограничений можно переписать в векторной форме:

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + ... + \mathbf{A}_6 x_6 = \mathbf{B} \text{ или } \mathbf{Ax} = \mathbf{B},$$

где векторы и матрицы ограничений задачи определены следующими равенствами:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$; $\mathbf{B} = (5, 14, 10, 8)^T$; $\mathbf{A}_1 = (1, 2, 1, 0)^T$;

$$\mathbf{A}_2 = (0,1,1,1);\ \mathbf{A}_3 = (1,0,0,0)^T;\ \mathbf{A}_4 = (0,1,0,0)^T;\ \mathbf{A}_5 = (0,0,0,1)^T;$$

$$\mathbf{A}_2 = (0,0,0,1)\ .$$

Поскольку вычисляется максимум функционала, то оптимальное решение будет получено тогда, когда все оценки $\Delta_j \geq 0$. Составим симплекс-таблицу данной задачи управления, представленную в табл. 2.3.

Таблица 2.3

I	Базис	B^1	$\mathbf{X}^1$	4	2	0	0	0	0
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_3$	0	5	1	0	1	0	0	0
2	$\mathbf{A}_4$	0	14	2	1	0	1	0	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	10	1	1	0	0	1	0
4	$\mathbf{A}_6$	0	8	0	1	0	0	0	1
5	–	–	–	-4	-2	0	0	0	0

Исходный базис состоит из векторов $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$; ему соответствует решение $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,5,14,10,8)$, поскольку коэффициенты целевой функции c_3, c_4, c_5, c_6 равны нулю, то значение линейного функционала $z_0 = 0$.

В новый базис вводится вектор, которому соответствует $\min\limits_j \Delta_j$ такой, что разностью является $\Delta_1 = -4$, которой соответствует вектор $\mathbf{A}_1$, следовательно, вектор $\mathbf{A}_1$, необходимо ввести в базис. Чтобы определить вектор, выводимый из базиса, вычислим

$$x_k = \min_i x_i / x_{i1} = \min_i x_i / u_{i1} = 5.$$

На основе вычислений определяем, что вектор $\mathbf{A}_3$ необходимо вывести из базиса.

Получаем разрешающую строку и столбец (они выделены в таблице). После преобразования решения по формулам симплекс-метода можно определить новое базисное решение: $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,) = (5,0,0,4,5,8)$. В этом случае значение линейного функционала $z_1 = 20$.

Симплексная таблица после первой итерации имеет вид, данный в табл. 2.4.

Таблица 2.4

I	Базис	B^2	$\mathbf{X}^2$	4	2	0	0	0	0
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_1$	4	5	1	0	1	0	0	0
2	$\mathbf{A}_2$	0	4	0	1	-2	1	0	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	5	0	1	0	0	1	0
4	$\mathbf{A}_6$	0	8	0	1	0	0	0	1
5	–	–	–	0	-2	4	0	0	0

Для решения $\mathbf{X}^2$ критерий оптимальности не выполняется, поскольку среди значений Δ_j имеются отрицательные. Такой разностью (оценкой) является $\Delta_2 = -2 < 0$, следовательно, вектор $\mathbf{A}_2$ необходимо ввести в базис для улучшения значения функционала. Определяем компоненту вектора базисного решения, выводимую из базиса, применяя полученное ранее соотношение вида:

$$x_k = \min_i (x_i / x_{i2}) = \min_i (x_i / u_{i2}) = 4.$$

В результате определяем, что $\mathbf{A}_4$ должен быть исключен из базиса. Определяем вторую разрешающую строку и новый разрешающий столбец. Преобразовав решение $\mathbf{X}^2$, получим новое решение

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,) = (5, 4, 0, 0, 1, 4).$$

Симплексная таблица второй итерации метода имеет вид, представленный в табл. 2.5. Очевидно, что для решения $\mathbf{X}^3$ критерий оптимальности $(\forall \Delta_j > 0)$ выполняется, следовательно, полученное решение рассматриваемой задачи является оптимальным.

Таблица 2.5

I	Базис	B^3	$\mathbf{X}^3$	4	2	0	0	0	0
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_1$	4	5	1	0	1	0	0	0
2	$\mathbf{A}_2$	2	4	0	1	-2	1	0	0
3	$\mathbf{A}_5$	0	1	0	1	1	-1	1	0
4	$\mathbf{A}_6$	0	4	0	1	2	-1	0	1
5	–	–	–	0	0	0	2	0	0

Рассмотренный пример иллюстрирует совокупность операций для вычислений оптимального базисного решения, совпадающего с решением задачи линейного программирования.

2.3. Метод минимизация и линейные оценки на компактных множествах

Рассматриваются два варианта численно-аналитического решения задачи минимизации линейного функционала на компактных множествах.

1. Первый вариант условной минимизации. Рассматривается следующая задача минимизации линейного функционала: вычислить вектор-аргумент, минимизирующий линейный функционал

$$z^* = \arg\min \left\{ \varphi = c_o^T z \;\middle|\; \begin{array}{l} A_o Z = b_o, \quad A_o \in R^{m\times n}, m \le n, \;\; rang\;A_o = m, \\ (Z-d)^T Q(Z-d) \le r^2, \;\; rang\;Q = n \end{array} \right\} \in R_Z^n. \quad (1)$$

Эллипсоид в данной задаче может аппроксимировать параллелепипед интервальных ограничений на переменные. Замена переменных позволяет преобразовать ограничения к следующей форме:

$$Z = Q^{-1/2}X + d, \; X = Q^{1/2}(Z-d), \; (Z-d)^T Q(Z-d) =$$

$$= (Q^{-1/2}X + d - d)^T Q(Q^{-1/2}X + d - d) = X^T Q^{-1/2} Q Q^{-1/2} X = X^T X \le r^2,$$

и преобразовать исходную задачу (1) к виду: вычислить вектор

$$X^* = \arg\min \left\{ \varphi = c_o^T Q^{-1/2} X + c_o^T d \;\middle|\; \begin{array}{l} AZ = A_o(Q^{-1/2}X + d) = \\ \\ = A_o Q^{-1/2} X + A_o d = b_o. \end{array} \right.$$

В новых переменных ограничения задачи принимают вид:

$$\{ A X = b, A = A_o Q^{-1/2}, b = b_o - A_o d, rang\;A = m, \;\; X^T X \le r^2 \} \in R_x^n .$$

В компактном виде последняя задача сводится к вычислению минимума линейного функционала $J = c^T X + f$ при ограничениях: $AX = b$, $X^T X \le r^2$.

Необходимые условия для задачи, полученной заменой квадратичного неравенства на квадратичное равенство можно получить с помощью функции Лагранжа:

$$L = c^T X + \lambda_0^T (AX - b) + \lambda (X^T X - r^2) \ .$$

Необходимые условия представляется системой равенств

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c + A^T \lambda_0 + 2\lambda X = 0 \, , \ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = AX - b = 0 \, , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = X^T X - r^2 = 0 \, , \qquad (2)$$

из которых следует:

$$\lambda_o \ = \ \left(AA^T\right)^{-1}\left[-2\lambda \ b - Ac\right]. \qquad (3)$$

Решение преобразованной задачи как функция λ имеет следующий вид:

$$X^* = X^*(\lambda) = \frac{\tilde{P}^o c - 2\lambda A^T \left(AA^T\right)^{-1} b}{-2\lambda} \ , \tilde{P}^o = E - A^T \left(AA^T\right)^{-1} A \ . \quad (4)$$

Последнее решение можно представить как функцию параметра. Параметризованное решение представляется следующим образом:

$$X^*(\lambda) = P^0 c - \tilde{P}^0 c(1 - \frac{1}{2\lambda}), \quad P^0 c = \tilde{P}^0 c + P^A b, \quad P^A b = A^T (AA^T)^{-1} b.$$

Квадратное уравнение для множителя Лагранжа λ имеет вид:

$$\alpha\lambda^2 - \beta = 0, \ \alpha = 4b^T (AA^T)^{-1} b + 4r^2 > 0, \beta = c^T \tilde{P}^0 c > 0.$$

Из полученного уравнения можно найти два значения λ^- и λ^+, одно из которых соответствует максимуму, а другое - минимуму линейного функционала, причем: $\lambda^{\mp} = \ \mp(\beta / \alpha)^{1/2}$. В результате оптимальное решение исходной задачи (1) примет вид

$$z^* = Q^{-1/2} x^* + d.$$

Таким образом, полученное решение определяет минимум линейного функционала на компактном множестве.

2. Второй вариант решения задачи условной минимизации. Постановка и решение задачи рассматриваются в следующем виде: вычислить вектор

$$x^* = arg\ min\left\{ \varphi\, x = c^T x \mid Ax = b,\ \|x\|^2 \le r^2 \right\} \qquad (5)$$

для минимизации линейного функционала при ограничениях типа равенств и квадратичных неравенств, где $A \in R^{m \times n}$.

Преобразуем задачу (5), переходя в ограничениях от квадратичных неравенств к квадратичным равенствам. В результате задача (5) преобразуется к следующему виду: вычислить вектор

$$x^* = arg\ min\left\{ \varphi\, x = c^T x \mid Ax = b,\ \|x\|^2 = r^2 \right\}. \qquad (6)$$

Тогда решение задачи формулируется с помощью метода множителей Лагранжа, а функция Лагранжа примет следующий вид:

$$L = c^T x + \lambda_0^T (Ax - b) + \lambda (\|x^2\| - r^2). \qquad (7)$$

В силу метода Лагранжа необходимые условия оптимальности можно представить следующей таблицей:

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 0$	$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$
$\frac{\partial L}{\partial x} = c + A^T \lambda_0 + 2\lambda x = 0$ (1)	$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = Ax - b = 0$ (2)	$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \|x\|^2 - r^2 = 0$ (3)

Далее необходимо определить решение системы уравнений, сформулированных в таблице. Решение может быть получено специальными методами. Например, из уравнения (5) таблицы можно определить вектор x как функцию двух множителей Лагранжа. В результате вектор:

$$x = -\frac{1}{2\lambda}\left(c + A^T\lambda_0\right). \qquad (8)$$

Из (8) и условия (2) таблицы следует равенство:

$$-A\frac{1}{2\lambda}\left(c + A^T\lambda_0\right) - b \;=\; -\frac{1}{2\lambda}\left(Ac + AA^T\lambda_0\right) - b = 0. \qquad (9)$$

Если матрица AA^T неособенная (строки матрицы A – линейно независимые), то можно из (9) получить алгебраическое уравнение:

$$-\frac{1}{2\lambda}Ac - \frac{1}{2\lambda}AA^T\lambda_0 - b = 0. \qquad (10.a)$$

В результате вектор множителей Лагранжа л$_0$ примет вид:

$$\lambda_0 = -(AA^T)^{-1}[2\lambda b + Ac]. \qquad (10.б)$$

Если подставить (10.б) в (9), то можно получить уравнение:

$$c - A^T(AA^T)^{-1}\cdot[2\lambda b + Ac] + 2\lambda x = 0 \;. \qquad (11.a)$$

Система (11.a) – линейная алгебраическая система, разрешаемая относительно вектора x. Тогда вектор x как функция множителя Лагранжа $\lambda \in R^m$ определяется из условия:

$$c - A^T(AA^T)^{-1}2\lambda b - A^T(AA^T)^{-1}Ac + 2\lambda x = 0$$

Тогда можно преобразовать последнее уравнение к виду

$$[E - A^T(AA^T)^{-1}A]c - A^T(AA^T)^{-1}2\lambda b + 2\lambda x = 0 \quad (11.б)$$

Далее будут использованы обозначения:

$$\tilde{P}^0 = E - A^T(AA^T)^{-1}A, \quad \bar{A} = A^T(AA^T)^{-1}.$$

В результате вектор уравнения (11.б) примут вид:

$$\tilde{P}^0 c - 2\bar{A}\lambda b + 2\lambda x = 0. \quad (11.в)$$

После этого вектор x можно определить равенством:

$$x = \frac{1}{2\lambda}\left[-\tilde{P}^0 c + 2\bar{A}\lambda b\right]. \quad (12)$$

Далее после подстановки (12) в квадратичное ограничение типа равенств в (6) можно получить уравнение:

$$\|x\|^2 - r^2 = x^T x - r^2,$$

где $x = \frac{1}{2\lambda}(a + \lambda e)$, причем $a = -P^0 c$, $e = 2\bar{A}b$. После подстановки полученного вектора в квадратичное ограничение типа равенств задачи (6) можно получить уравнение

$$x^T x - r^2 = \frac{1}{4\lambda^2}[a + \lambda e]^T[a + \lambda e] - r^2 =$$

$$= \frac{1}{4\lambda^2}[a^T + \lambda e^T][a + \lambda e] - r^2 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) это квадратное уравнение относительно неизвестного скалярного множителя Лагранжа $\lambda \in R^1$, которое в результате преобразований последовательно принимает вид:

$$[a^T + \lambda e^T][a + \lambda e] - 4\lambda^2 r^2 = 0, \qquad (14)$$

$$a^T a + 2\lambda e^T a + \lambda^2 e^T e - 4\lambda^2 r^2 = 0, \qquad (15)$$

поскольку: $a^T b = b^T a$.

Уравнения (13)–(15) – алгебраические уравнения относительно скалярного множителя Лагранжа. Из (15) следует, что

$$\lambda = \lambda_1^* \quad и \quad \lambda = \lambda_2^*. \qquad (16)$$

Эти решения квадратного алгебраического уравнения обладают свойством, что одно из них соответствует минимуму функционала, а другое – максимуму. Этот вывод следует из геометрической свойств решений рассматриваемой задачи оптимизации. В результате оптимальное решение определится равенством (12) с параметрами, вычисляемыми как решения квадратного алгебраического уравнения.

Рассмотренный метод также позволяет получить решения по конечным формулам. Необходимые и достаточные условия оптимальности также формулируются в теореме Куна-Таккера.

Рассмотренные подходы аналогичны подходам метода эллипсоидов, которые имеют полиномиальную степень сложности. Для таких методов объём вычислений определяется полиномиальной функцией, зависящей от параметров m и n задачи оптимизации:

$$P(m,n) = m^{\alpha} n^{\beta}.$$

Симплекс-метод имеет экспоненциальную степень сложности, определяемую равенством

$$P(m,n) = \exp(m,n).$$

Пример. Линейное программирование является основой решения многих задач экономики, управления и техники. При этом широкое распространение имеет модель В. Леонтьева – «затраты- выпуск»

$$y_i = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} y_j + c,$$

где a_{ij} – затраты сырья; y_j – количество затрачиваемого сырья; y_i – количество готового продукта. По сути, это модель «вход – выход» для стационарного режима объектов в экономике. На множестве моделей данного типа можно сформулировать комплекс задач линейного программирования для анализа экономики.

Таким образом, рассмотренные численно-аналитические методы минимизации на компактных множествах позволяют сформировать специальные классы методов и алгоритмов.

2.4. Методы минимизации линейных и кусочно-линейных функционалов с линейными и интервальными ограничениями

Решение задач линейного и кусочно-линейного программирования с линейными и интервальными ограничениями можно определить путем сведения ограничений задачи к канонической форме. Пусть рассматривается следующая задача: вычислить вектор

$$x^* = arg\ min\left\{ \varphi(x) = c^T x \mid Ax = b,\ \ x^- \le x \le x^+ \right\}. \quad (1)$$

Рассмотрим решение экстремальной задачи минимизации линейного и кусочно-линейного функционалов при ограничениях типа равенств и двухсторонних неравенств:

$$Ax = b, \quad x^- \le x \le x^+. \qquad (2)$$

Двухсторонние ограничения в (2) можно преобразовать эквивалентным образом:

$$x \le x^+, \quad -x \le -x^-.$$

Последние соотношения иллюстрируют переход от двустороннего ограничения к двум односторонним ограничениям.

Для сведения ограничений к канонической форме, используемой в канонической форме задач линейного программирования, на первом этапе можно ввести неотрицательные свободные переменные y^1 и y^2 в систему ограничений типа (2). Тогда ограничения задачи можно представить в виде:

$$Ax = b, \quad x - y^1 = x^+, \quad -x + y^2 = -x^-, \quad y^1 \ge 0, \quad y^2 \ge 0. \qquad (3)$$

В результате получаем систему ограничений, в которой имеется две группы ограничений: «типа неравенств» и «типа неравенств». Векторно-матричная форма ограничений типа равенств в (3) примет следующий вид:

$$A_1 z_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ E & -E & 0 \\ -E & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = b.$$

Следовательно, после введения вектора новых переменных $z_1 \triangleq (x, y^1, y^2)^T$ можно представить ограничения (3) в виде:

$$A_1 z_1 = b, \quad y^1 \ge 0, \quad y^2 \ge 0. \qquad (4)$$

Соотношения (4) не являются канонической формой, т.к. имеются отрицательные переменные в виде вектора x, компоненты которого не имеют ограничения на знак. Поэтому на втором этапе можно воспользоваться методом разности переменных, в соответствии с которым производится замена вектора x в виде разности неотрицательных векторов:

$$x = x^1 - x^2, \;\; x^1 \geq 0, \;\; x^2 \geq 0. \qquad (5)$$

Тогда (5) с учетом замены переменных примет вид:

$$A_2 z_2 = \begin{pmatrix} A & -A & 0 & 0 \\ E & -E & E & 0 \\ -E & E & 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ x^+ \\ -x^- \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где вектор $z_2 \triangleq (x^1, x^2, y^1, y^2)^T$.

В результате ограничения (6) соответствуют канонической форме. В результате мы сформулировали каноническую форму исходной задачи, поскольку исходная задача (1) преобразована к задаче: вычислить вектор

$$z_2^* = \arg\min\{c_1^T z_2 \mid \;\; A_2 z_2 = b, \;\; z_2 \geq 0\}, \qquad (7)$$

где $c_1 = (c, \; -c, \; 0, \; 0)^T$.

Приведенные преобразования являются доказательством следующего утверждения.

Утверждение 1. Каноническая форма задачи линейного программирования (1) может быть представлена в виде (7).

Утверждение можно модифицировать для решения задачи кусочно-линейного программирования.

Утверждение 2. Задача кусочно-линейного программирования: вычислить вектор

$$x^{*} = arg\ min\left\{ \varphi(x) = c^{T} |x| \mid Ax = b,\ x^{-} \leq x \leq x^{+} \right\} \in R^{n} \tag{8}$$

преобразуется к задаче линейного программирования в канонической форме:

$$z_2^{*} = \arg\min\{\varphi(z_2) = c_2^{T} z_2 \mid A_2 z_2 = b,\ z_2 \geq 0\}, \tag{9}$$

где вектор параметров целевой функции имеет вид: $c_2 = (c\ c\ 0\ 0)^{T}$.

Таким образом, введение свободных переменных и метод разности переменных позволяют свести ограничения задач линейного и кусочно-линейного программирования к канонической форме и использовать для их решения симплекс-метод.

2.5. Контрольные вопросы

1. Какова основная идея формулировки задач линейного программирования, геометрическая интерпретация и свойства ее решений.

2. Какой смысл имеют локальные условия оптимальности семейства базисных решений в задаче линейного программирования.

3. В чем сущность перехода от одного базисного решения к другому базисному решению.

4. В чем состоит идея вычисления семейства обратных матриц, необходимых при решении задач линейного программирования.

5. Какие преимущества и недостатки имеют численно-аналитические методы минимизации линейных функционалов на компактных множествах.

3. МЕТОДЫ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И БЕЗУСЛОВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ

Методы безусловной минимизации позволяют определить минимум выпуклых функционалов при отсутствии ограничений на переменные и получить нелинейные оценки функционалов для анализа и принятия решений. Эти методы и могут быть составной частью методов условной оптимизации.

3.1. Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска является наиболее простым по вычислительной схеме и требует относительно малого объема вычислительной работы.

1. Вычислительная схема метода. Рассмотрим решение задачи безусловной минимизации в постановке: вычислить вектор

$$x_* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}, \qquad (1)$$

где функционал $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию выпуклости.

Определение 1. Функционал $\varphi(\mathbf{x})$ называется ***выпуклым функционалом на интервале*** $[x', x''] = [a, b]$, если выполнено условие

$$\varphi(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \le \lambda\varphi(\mathbf{x}') + (1-\lambda)\varphi(\mathbf{x}''), \;\; 0 \le \lambda \le 1.$$

Свойство выпуклости функционала иллюстрируется на рис. 3.1.

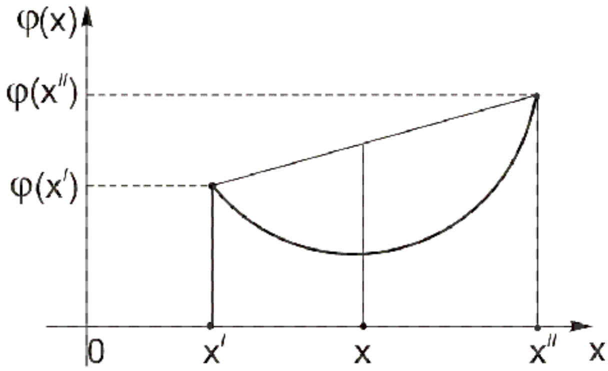

Рис. 3.1. Иллюстрация выпуклой функции

Необходимо учитывать, что для выпуклых на интервале функционалов метод наискорейшего спуска доставляет глобальный минимум, а в общем (невыпуклом случае) метод приводит к одному из локальных минимумов. Для вычисления точки минимума выпуклой функции строится последовательность $\{x_k\}$, сходящаяся к указанной точке с элементами вида

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \qquad (1.а)$$

где $\mathbf{x}_{k+1}$ и $\mathbf{x}_k$ – последующее и предыдущее приближения; $\mathbf{p}_k$ – направление движения из точки $\mathbf{x}_k$; α_k – шаг в направлении $\mathbf{p}_k$. Выбор направления определяет ряд методов. В данном случае направление $\mathbf{p}_k$ определяется как вектор антиградиента функционала:

$$\mathbf{p}_k = -\varphi'(\mathbf{x}_k) \overset{\Delta}{=} -\varphi'_k,$$

где $\varphi'_k = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{1k}}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{nk}} \right)^T$ – градиент функционала. В результате вычислительная схема метода принимает вид

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \varphi'_k. \qquad (1.б)$$

Алгоритм метода наискорейшего спуска (1.б) содержит параметр α_k, выбор которого может быть выполнен различным образом. Весьма важно, чтобы выбор параметра α_k обеспечивал сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к точке минимума.

Теорема о сходимости метода наискорейшего спуска накладывает ограничения на выбор скалярного параметра α_k.

Теорема 1 (о сходимости). Пусть выполнены условия:

1). Функционал $\varphi(\mathbf{x})$ ограничен снизу.

2). Градиент функционала $\varphi'(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица (условию типа непрерывности)

$$\|\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y})\| \le L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n;$$

3) Параметр α_k, выбирается из условия

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_k) \le \varepsilon\alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{2}$$

Тогда для предельного значений градиента функционала выполнено необходимое условие оптимальности

$$\|\varphi'_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Другими словами, при выполнении указанных условий теоремы последовательность (1.б), соответствующая методу наискорейшего спуска, сходится к стационарной точке функционала $\varphi(\mathbf{x})$.

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала, пользуясь теоремой о среднем:

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_k) = (\varphi'_k \;\; , \mathbf{x} - \mathbf{x} \;\;), \quad \mathbf{x} \quad = \mathbf{x} \;\; + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x} \;\;), \theta \in [0,1].$$

Добавим и вычтем в правой части последнего равенства слагаемое $(\varphi_k', \mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_k) = (\varphi_k', \mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + (\varphi_k' - \varphi', \mathbf{x} - \mathbf{x}), \qquad (2)$$

где $-\alpha_k \varphi_k' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$ в силу вычислительной схемы алгоритма наискорейшего спуска (1.б).

Далее проведем оценки приращения функционала с учетом равенства (2). В результате получим цепочку соотношений:

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_k) \le -\alpha(\varphi_k', \varphi_k') + \alpha L \|\mathbf{x}_{kc} - \mathbf{x}_k\| \cdot \|\varphi_k'\| \le$$

$$\le -\alpha \|\varphi_k'\|^2 + \alpha L \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \cdot \|\varphi_k'\| =$$

$$= -\alpha \|\varphi_k'\|^2 + \alpha L \|\varphi_k'\|^2 = \alpha \cdot \|\varphi_k'\|^2 (-1 + \alpha L).$$

Из последних соотношений следует, что для монотонного уменьшения функционала необходимо, чтобы выполнялось неравенство: $-1 + \alpha L \le \varepsilon$.

Откуда следует, что скалярный параметр α должен выбираться из условия $\alpha < (1 - \varepsilon)/L$, и для того, чтобы было $\alpha > 0$, параметр ε должен быть таким, чтобы $0 < \varepsilon < 1$.

Таким образом, при выборе шага α_k из условия

$$\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) - \varphi(\mathbf{x}_k) \le \varepsilon \alpha (\varphi_k', \mathbf{p}_k). \qquad (3)$$

Функционал $\varphi(\mathbf{x})$ монотонно уменьшается, и в силу ограниченности снизу этот функционал на последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ достигает минимума.

Условия сходимости позволяют сформулировать алгоритм метода. Алгоритм метода формулируется в соответствии с ограничениями теоремы на выбор шага.

Шаг 1. Выбирается произвольный вектор $\mathbf{x}_0$ – начальное приближение. Полагается $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

Шаг 2. Выбирается произвольное значение α.

Шаг 3. Определяется новое приближение $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \varphi'_k$.

Шаг 4. Вычисляется $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = \varphi(\mathbf{x}_k - \alpha_k \varphi'_k)$ и $\varphi(\mathbf{x}_k)$.

Шаг 5. Если $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) - \varphi(\mathbf{x}_k) \le \varepsilon\alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k)$, $0 < \varepsilon < 1$, то значение α принимается в качестве искомого: $\alpha_k = \alpha$, и происходит переход к шагу 6, иначе производится деление α пополам и выполняется переход к шагу 4.

Шаг 6. Вычисляется новое приближение $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \varphi'_k$.

Шаг 7. Проверяется условие стационарности:

$$\left\|\varphi'_{k+1}\right\|^2 = (\varphi'_{k+1}, \varphi'_{k+1}) \le \delta, \delta > 0,$$

и если $\left\|\varphi'_{k+1}\right\|^2 \le \delta,$, то выполняется переход к шагу 8, иначе – к шагу 2, положив $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}$.

Шаг 8. Останов.

Геометрическая интерпретация процесса вычислений приведена на рис. 3.2.

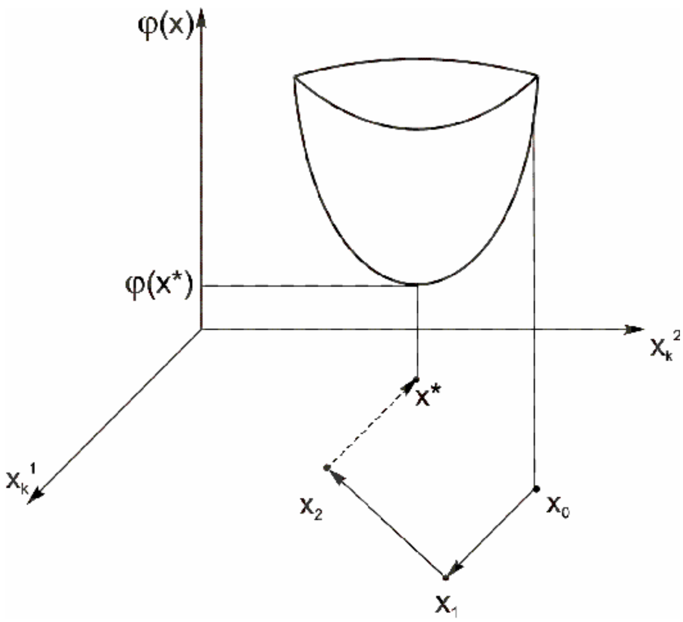

Рис. 3.2. Иллюстрация процесса минимизации функционала в двумерном пространстве

Рассмотрим вычислительную схему метода наискорейшего спуска на примере.

Пример. Пусть в двумерном пространстве задан квадратичный функционал $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2 + 39$. Вычислить точку минимума в двумерном пространстве.

Решение. Рассмотрим последовательно шаги алгоритма.

Шаг 1. Задается $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}) = (7, -2)^T$. Полагается $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

Шаг 2. Выбирается $\alpha = 0,3$.

Шаг 3. Определяется вектор нового приближения:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k - 0,3\begin{bmatrix} 2x_1 - 10 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6 \\ 1,0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 4. Вычисляется значение функционала в новом и предыдущем приближениях: $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = 9,64,\ \varphi(\mathbf{x}_k) = 34$.

Шаг 5. Проверяется выполнение условия стационарности – неравенства типа (2): $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) - \varphi(\mathbf{x}_k) \le \varepsilon\alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k),\ 0 < \varepsilon < 1$, которое выполняется при значении параметров $\alpha = 0,3, \quad \varepsilon = 0,1$, а также условие $(\varphi_k^{,}, p_k) = ([4,-10],[4,-10]) = 116$. Принимается $\alpha_k = 0,3$ и выполняется переход к шагу 6.

Шаг 6. Вычисляется вектор

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k\varphi'_k = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} - 0,3\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,8 \\ 1,0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Проверяется условие стационарности (2):
$\left\|\varphi'_{k+1}\right\|^2 \le \delta = 0,1,$ которое не выполняется, и выполняется переход к шагу 2. Последовательное выполнение шагов 2-7 позволяет определить значения $\mathbf{x}_k$: $\mathbf{x}_2 = [5,32\,|\,2,20]^T$, $\mathbf{x}_3 = [5,12\,|\,2,68]^T$,

$\mathbf{x}_4 = [5,05\,|\,2,87]^T$. Решение, полученное на пятой итерации $\mathbf{x}_5 = [5,02\,|\,2,95]^T$, соответствует приближенному решению с учетом ограничения нормы градиента функционала в окрестности точки стационарности функционала.

Необходимо иметь в виду, что в силу утверждения теоремы 1 сходимость метода – асимптотическая при бесконечно большом числе шагов алгоритма.

Рассмотренный метод может использоваться самостоятельно, а также служить частью более сложных вычислительных алгоритмов минимизации, в частности при решении задач условной
минимизации.

3.2. Метод Ньютона

Метод Ньютона является методом второго порядка, поскольку *для отыскания точек минимума используется квадратичная аппроксимация функционала в окрестности очередного приближения к решению.* На основе этой идеи строится вычислительная схема метода.

1. Вычислительная схема метода. На отдельных этапах алгоритма метода Ньютона строятся квадратичные аппроксимации

$$\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_k) + (\varphi'_k, \mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\varphi''_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \qquad (1)$$

т.е. ***функционал*** $\varphi(x)$ ***в окрестности очередного приближения аппроксимирует квадратичная функция*** $\Psi(x)$ в соответствии с (1). Далее ***вычисляется точка минимума этой квадратичной аппроксимации.*** Решение этой задачи существенно проще, чем решение исходной задачи минимизации. Далее процесс повторяется до выполнения сходимости к точке безусловного минимума. В результате метод позволяет минимизировать семейство квадратичных аппроксимаций исходного функционала. Наглядное представление идеи метода Ньютона дано на рис. 3.3,

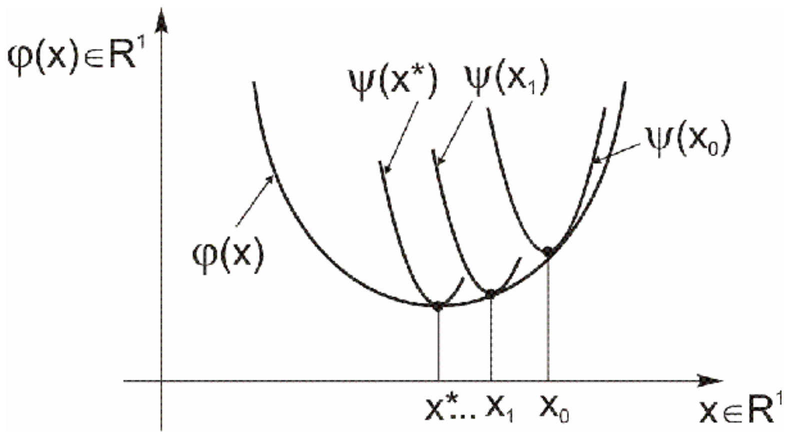

Рис. 3.3. Геометрическая иллюстрация идеи метода Ньютона

где представлено семейство квадратичных аппроксимаций $\varphi(x)$ в окрестности x_k .

В силу строгой выпуклости $\varphi(x)$ аппроксимирующие функции (точнее, семейство новых функций) будут также выпуклыми. Поэтому можно определить единственный минимум аппроксимирующих функций из условия стационарности

$$\partial\psi(\mathbf{x}) / \partial\mathbf{x} = 0,$$

используемого для вычисления направлений: $p_k = x - x_k$:

$$\varphi'_k + \varphi''_k \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = O_n,$$

Из последнего равенства направление p_k определяется равенством:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k = -[\varphi''_k]^{-1}\varphi'_k,$$

что позволяет получить общую схему метода Ньютона в виде

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k [\varphi_k'']^{-1} \varphi_k'. \qquad (2)$$

Напомним, что используемая квадратичная аппроксимация функционала строится как вторая производная функционала по векторному аргументу, определяемая равенством

$$\varphi''(\mathbf{x}) = [\varphi_k'(\mathbf{x})]_k' = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Для окончательной формулировки алгоритма метода Ньютона необходимо выбрать шаг α_k. Выбор шага неоднозначен. Рассмотрим метод выбора шага из условия сходимости.

2. Теорема о сходимости метода Ньютона. Для определения условий, которым должен удовлетворять шаг α_k, рассмотрим вспомогательные сведения. Пусть $F(x)$ – произвольная симметричная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\rho \|\mathbf{y}\|^2 \le (F(\mathbf{x})\mathbf{y}, \mathbf{y}) \le R \|\mathbf{y}\|^2, \quad \rho, R > 0 \qquad (3)$$

при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$. Тогда, если выбрать вектор $\mathbf{p} = -\mathbf{F}(x)\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, то $(\varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{p}) = -(\varphi', \mathbf{F}\varphi') \le -\rho \|\varphi'\|^2$, при условии, что $\|\varphi'(\mathbf{x})\|^2 \ne 0$. Таким образом, вектор $\mathbf{p} = -\mathbf{F}(x)\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ определяет направление спуска функции $\varphi(\mathbf{x})$[3]. Исходя из этого, для минимизации $\varphi(\mathbf{x})$ можно сформировать итерационный процесс

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{F}_k \varphi(\mathbf{x}_k),\ \ \alpha_k > 0,\ \ k = 0,1,\dots\ , \tag{4}$$

где $\{\mathbf{F}_k\}$ – последовательность произвольных матриц, удовлетворяющая условию (3). Нетрудно видеть, что процедуры (2) и (4) обладают общими свойствами, причем схема (4) является более общей.

Для связи процессов (2) и (4) рассмотрим схему

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{F}_k^{-1} \varphi'_k,\ \ \alpha_k > 0, \tag{5}$$

где используется матрица, обратная к $\mathbf{F}_k$. Это не отражается на существе дела, поскольку, если матрица $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет условию (3), то для матрицы $\mathbf{F}_k^{-1}$ будут выполнены условия

$$m_1 \|\mathbf{y}\|^2 \le (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{y}) \le M \|\mathbf{y}\|^2,\quad m_1 = \frac{\rho}{R^2} > 0,\ M_1 = \frac{1}{\rho},$$

и поэтому

$$(\varphi'_k, \mathbf{p}_k) = -(\varphi'_k, \mathbf{F}_k^{-1}\varphi'_k) \le -m_1 \|\varphi'_k\| < 0\,. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема:

Теорема. *Результаты теоремы из раздела* 3.1 *сохраняют силу и для метода (5).*

Доказательство. Если $x = x_k + \alpha\, p_k$, где $\mathbf{p}_k = -\mathbf{F}_k^{-1}\varphi'_k$, то:

---

[3] Особенно простое доказательство имеет этот факт в скалярном случае.

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_K) = \alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k) + \frac{\alpha^2}{2}(\varphi'_{kc}\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k) \le$$

$$\le \alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k) + \left[1 + \frac{\alpha M \|\mathbf{p}_k\|^2}{2(\varphi'_k, \mathbf{p}_k)}\right].$$

Но с учетом (3)

$$(\varphi'_k, \mathbf{p}_k) = -(\mathbf{F}_k \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k) \le -\rho \|\mathbf{p}_k\|^2.$$

Следовательно,

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_K) = \alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k)\left[1 + \frac{\alpha M}{2\rho}\right].$$

Отсюда вытекает, что неравенство (3) будет обязательно выполняться, если $1 - \alpha M / (2\rho) \ge \varepsilon$, т.е. $\alpha \le \bar{\alpha} = 2\rho(1-\varepsilon)/M$. Тем самым обоснован выбор α_k.

Поскольку $(\varphi'_k, \mathbf{p}_k) < 0$ при $\|\varphi'_k\| \ne 0$, из условия

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k \le \varepsilon \alpha_k (\varphi'_k, \mathbf{p}_k). \qquad (7)$$

следует, что имеет место условие: $\varphi_{k+1} < \varphi_k$. Используя (7) и учитывая ограниченность $\varphi(\mathbf{x})$ снизу аналогично тому, как в теореме 1 п. 3.1 доказывалось, что $\|\varphi'_k\| \to 0$, устанавливаем, что при $k \to \infty$ $(\varphi'_k, \mathbf{p}_k) \to 0$. В силу оценки (6) это означает, что $\|\varphi'_k\| \to 0$. Отсюда в силу сильной выпуклости $\varphi(\mathbf{x})$ следует сходимость последовательности (4) к решению x_*.

Метод (2) можно рассматривать как процесс градиентного типа (4), считая, что $\mathbf{F}_k^{-1} = [\varphi''_k]^{-1}$. Поскольку матрица φ''_k обладает требуемыми свойствами, сходимость метода обеспечивается. Поэтому процедура метода Ньютона (2) сходится к стационарной точке функционала $\varphi(\mathbf{x})$ при выборе шага α_k из условия (3) п.3.1.

Теорема о сходимости доказана, и далее можно формулировать алгоритм метода Ньютона.

3. Алгоритм метода Ньютона. Совокупность шагов алгоритма имеет следующий вид:

Шаг 1. Выбирается точка $\mathbf{x}_0$. Полагается $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

Шаг 2. Выбирается произвольное число α.

Шаг 3. Вычисляется вектор $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k$.

Шаг 4. Вычисляется функционал $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = \varphi(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)$.

Шаг 5. Если $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) - \varphi(\mathbf{x}_k) \le \varepsilon\alpha(\varphi'_k, \mathbf{p}_k)$, то значение α принимается в качестве исходного $\alpha_k = \alpha$, и далее - переход к шагу 6, иначе производится уменьшение α_k (путем умножения на множитель $q_1 : 0 < q < 1$) и затем - переход к шагу 4.

Шаг 6. Вычисляется очередное приближение:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k [\varphi''_k]^{-1} \varphi'_k .$$

Шаг 7. Проверяется условие стационарности $\left\|\varphi'_{k+1}\right\|^2 = (\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ – малое число. Если $\left\|\varphi'_{k+1}\right\|^2 \le \delta$, то далее - переход к шагу 8, иначе – к шагу 2, положив $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}$.

Шаг 8. Останов.

Для произвольной (но выпуклой) функции имеет место асимптотическая сходимость. Для квадратичной функции метод Ньютона доставляет минимум за один шаг.

Перейдем к иллюстрации вычислительной схемы метода.

Пример. Вычислить минимум квадратичной функции $\varphi(\mathbf{x}) = 51 + x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - 2x_2$.

Решение. Для минимизации можно воспользоваться алгоритмом метода Ньютона.

Шаг 1. Выбирается вектор $\mathbf{x}_0 = (2{,}0\ ,\ 5{,}0)^T$; $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

Шаг 2. Полагаем $\alpha = 1{,}0$.

Шаг 3. Вычисляется $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k$, где направление

$$\mathbf{p}_k = -[\varphi''_k]^{-1}\varphi'_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x_1 - 14 \\ 2x_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

В результате $\mathbf{x}_{k+1} = (2{,}0\,,\ 5{,}0)^T + (5{,}0\,,\ -4{,}0)^T = (7{,}0\,,\ 1{,}0)^T$ есть решение задачи, доставляющее минимум заданному функционалу.

3.3. Метод сопряженных градиентов

В методе сопряженных градиентов устранено обращение матриц вторых производных, необходимое в методе Ньютона.

1. Вычислительная схема метода. Введем понятие *сопряженных векторов.*

Определение 1. Два вектора $\mathbf{p}_k$ и $\mathbf{p}$ *в* $\Re^n$ ***называются сопряженными*** **(A –** ***ортогональными*****)**, *если* $(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_j) = 0$ *при* $k \neq j$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Метод эффективен для квадратичных выпуклых функций

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + C,$$

где A – симметричная положительно определенная матрица, т.е. $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, $x \neq 0$.

Для минимизации квадратичных функций строится последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, где векторы $\mathbf{p}_k$ - сопряженные:

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_j) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

Обычно векторы $\mathbf{p}_k$ строятся следующим образом:

$$\mathbf{p}_0 = -\varphi_0', \ \mathbf{p}_{k+1} = -\varphi_k' + \beta_{k+1}\mathbf{p}_k, \qquad (1)$$

причем параметр β_{k+1}, выбирается из условий сопряженности $\mathbf{p}_k$ и $\mathbf{p}_{k+1}$. Алгоритм метода сопряженных градиентов имеет вид:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k,$$

где параметр α_k выбирается из условия

$$\alpha_k = -\frac{(\mathbf{b},\mathbf{p}_k) + (\mathbf{x}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)}.$$

Рассмотренные соотношения позволяют сформулировать алгоритм метода сопряженных градиентов.

2. Алгоритм метода сопряженных градиентов. Основные шаги алгоритма представляются следующей последовательностью:

Шаг 1. Выбирается произвольная точка $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$, полагается $k = 0$.

Шаг 2. Вычисляется вектор $\mathbf{p}_0 = -\varphi_k'(\mathbf{x}_0) = -\varphi_0'$, используя соотношения (1).

Шаг 3. Если $0 < k < n-1$, то переходим к шагу 4, иначе – если $\varphi(\mathbf{x})$ квадратичный функционал, то далее - переход к шагу 8, а если $\varphi(\mathbf{x})$ – произвольный выпуклый функционал, то - к шагу 7.

Шаг 4. Вычисляется $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$, где множитель

$$\alpha_k = -\frac{(\mathbf{b},\mathbf{p}_k) + (\mathbf{x}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, \mathbf{A}\mathbf{p}_k)},$$

если $\varphi(\mathbf{x})$ – квадратичная; $\alpha_k = \overline{a}_k$, если $\varphi(\mathbf{x})$ произвольная, причем

$\overline{\alpha}_k$ такое, что $\overline{\alpha}_k = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{p}_k) \mid \alpha \geq 0\}$.

Шаг 5. Вычисляется направление $\mathbf{p}_{k+1} = -\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}) + \beta_{k+1}\mathbf{p}_k$, где

$$\beta_{k+1} = -(\varphi'_{k+1}, \varphi'_{k+1} - \varphi'_k) / (\varphi'_k, \mathbf{p}_k) = (\varphi'_k, \varphi'_k) / (\varphi'_{k-1}, \varphi'_{k-1}),$$

Шаг 6. Полагается $k = k + 1$ и далее - переход к шагу 3.

Шаг 7. Так как $\varphi(\mathbf{x})$ произвольный выпуклый функционал, то если $\left\|\varphi''_{n-1}\right\|^2 \geq \delta > 0$, положим $\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0 = -\varphi'(\mathbf{x}_{n-1})$, $k = 0$ и переходим к шагу 3, иначе – к шагу 8.

Шаг 8. Останов.

Метод вычисляет минимум квадратичной положительно определенной функции за число итераций меньшее чем n. Для произвольной выпуклой функции – асимптотическая сходимость.

Пример. Вычислить точку минимума квадратичной функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1 x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-4, -6)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 18.$$

Решение. Минимум можно вычислить с помощью алгоритма:

Шаг 1. Выбирается $\mathbf{x}_0 = (4{,}0\,,\ 8{,}0)^T$, полагаем $k = 0$.

Шаг 2. Вычисляется направление $\mathbf{p}_0 = \varphi'_0 = (-4{,}0\,,\ -10{,}0)^T$.

Шаг 3. Так как $k = 0 < n = 2$, то - переход к шагу 4.

Шаг 4. Вычисляется вектор первого приближения решения $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha_0\mathbf{p}_0$, где $\alpha_0 = -[(\mathbf{b}, \mathbf{p}_0) + (\mathbf{x}_0, \mathbf{A}\mathbf{p}_0)] / (\mathbf{p}_0, \mathbf{A}\mathbf{p}_0) = 0{,}5$, так как $(\mathbf{b}, \mathbf{p}_0) = -116$, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{A}\mathbf{p}_0) = -192$, $(\mathbf{p}_0, \mathbf{A}\mathbf{p}_0) = 232$.

Тогда вектор

$\mathbf{x}_1 = (4{,}0\,,\ 8{,}0)^T + 0{,}5(-4{,}0\,,\ -10{,}0)^T = (2{,}0\,,\ 3{,}0)^T$.

Шаг 5. Вычисляется вектор $\mathbf{p}_1 = -\varphi'(\mathbf{x}_1) + \beta_1 \mathbf{p}_0$, где параметр $\beta_1 = -(\varphi'_1, \varphi'_1 - \varphi'_0)/(\varphi'_0, \varphi'_0) = 0$ так как $\varphi'_1 = (0, 0)^T$ а остальные векторы ненулевые.

Таким образом, вектор $\mathbf{x}_1$ является решением задачи.

Метод сопряженных градиентов и его обобщения положены в основу алгоритмов решения общих задач математического программирования. В частности, далее будет рассмотрен вариант метода проектирования градиента, согласованный с методом сопряженных градиентов. Помимо него известны и широко обладающие определенными достоинствами.

3.4. Контрольные вопросы

1. Как определяются выпуклые функционалы в конечномерных пространствах.
2. Как формулируются задачи безусловной минимизации в конечномерных пространствах.
3. Как формулируется основная идея метода наискорейшего спуска, метода Ньютона и метода сопряженных градиентов.
4. Поясните структуру и особенности вычислительных схем методов наискорейшего спуска, Ньютона и сопряженных градиентов.
5. В чем состоит сущность исследования сходимости и выбора шага в методе наискорейшего спуска.
6. Какова основная идея исследования сходимости и выбора шага в методе Ньютона.

4. МЕТОДЫ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И УСЛОВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ

Методы условной минимизации предназначены для решения задач математического программирования с ограничениями и определения нелинейных условных оценок для анализа и принятия решений. Рассмотрены методы и необходимые условия оптимальности для задач выпуклой оптимизации в виде теоремы Куна-Таккера, итеративные методы проецирования на допустимые области.

4.1. Необходимые и достаточные условия оптимальности как теорема Куна-Таккера

Как уже отмечалось, методы оптимизации можно разделить на две большие группы: методы прямой минимизации (не использующие необходимые и достаточные условия) и методы, основанные на необходимых условиях. Применение необходимых условий экстремума хорошо известно из курса высшей математики для задач безусловной минимизации. В случае задач на условный экстремум необходимы соответствующие аналоги, в частности, полученные в теореме Куна-Таккера для задач выпуклого программирования.

1. Общие сведения о задачах выпуклого программирования. Мы будем устанавливать необходимые и достаточные условия для следующей задачи: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{D}\}, \qquad (1)$$

когда $\varphi(\mathbf{x})$ выпуклый функционал, а допустимые множества выпуклы, замкнуты и задаются системами равенств и неравенств.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{D} = \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{b}\},\ \ \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ldots, f_m(\mathbf{x})),$$

(2)

где $f_i(\mathbf{x})$ $, i=\overline{1,m},$ – вогнутые непрерывные на множестве Γ скалярные функции, а Γ – заданное выпуклое и замкнутое множество. В частности, Γ может совпадать с пространством $\Re^n$.

Из теории выпуклых множеств известно, что множество (2) выпукло, поскольку является пересечением выпуклых множеств Γ и $\{\mathbf{x}\in\Re^n \,|\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\ge\mathbf{b}\}$. Из непрерывности $f_i(\mathbf{x})$ и замкнутости множества Γ следует замкнутость множества $\mathfrak{D}$.

Пусть сформулирована задача: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x}\in\mathfrak{D}\subset\Re^n\}, \tag{3}$$

причем $\varphi(\mathbf{x})$ выпуклый функционал, а $\mathfrak{D}$ удовлетворяет проведенным условиям. Эта задача называется *задачей выпуклого программирования.*

Множество $\mathfrak{D}$ должно удовлетворять условию регулярности.

Определение 1. Если для каждого i $(i=\overline{1,m})$ существует точка $x_i\in\mathfrak{D}$, что влечет за собой

$$f_i(x_i) > b_i, \tag{4}$$

то множество $\mathfrak{D}$ удовлетворяет ***условию регулярности Слейтера***.

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

который характеризует невязки в неравенствах, задающих ограничения.

Определение 2. *Функция*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{h}(\mathbf{x})) \qquad (6)$$

$(\mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \geq 0)$ называется ***функцией Лагранжа для задачи*** (3). Векторы $\mathbf{y} \in \Re^m$ называются ***множителями Лагранжа***. В задачах выпуклого программирования необходимые и достаточные условия формулируются с помощью седловых точек функции Лагранжа.

Определение 3. Пара $\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*$ называется ***седловой точкой функции Лагранжа*** $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ***на множестве*** $\mathbf{x} \in \Gamma, y \geq 0$, если

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_*,\mathbf{y}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}_*,\mathbf{y}_*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}_*) \qquad (7)$$

для всех $\mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \geq 0$. Последнюю формулу можно записать также следующим образом:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_*,\mathbf{y}_*) = \min_{\mathbf{x}\in\Gamma} \max_{\mathbf{y}\geq 0} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y}\geq 0} \min_{\mathbf{x}\in\Gamma} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Теорема 1. Если пара $\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*$ – седловая точка функции Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ на множестве $\mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \geq 0$, то $\mathbf{x}_*$ – ***оптимальная точка задачи*** выпуклого программирования.

Доказательство. Развернутая форма условий (7) с учетом (6) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}_*) + (\mathbf{y},\mathbf{h}(\mathbf{x}_*)) \leq \varphi(\mathbf{x}_*) + (\mathbf{y}_*,\mathbf{h}(\mathbf{x}_*)) \leq \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}_*,\mathbf{h}(\mathbf{x})). \qquad (8)$$

Из левого неравенства следует, что

$$(\mathbf{y}_*,\mathbf{h}(\mathbf{x})) \leq (\mathbf{y}_*,\mathbf{h}(\mathbf{x}_*)), \qquad (9)$$

а поскольку $\mathbf{y}_* \geq 0$ и это неравенство имеет место для любого значения $\mathbf{y} \geq 0$, то $\mathbf{h}(\mathbf{x}_*) \leq 0$. В частности, (9) имеет место и для

$y = 0$, т.е. $(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{x}_*)) \ge 0$, а, следовательно (так как $\mathbf{y}_* \ge 0$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x}_*) \le 0$),

$$(\mathbf{y}_*, \mathbf{h}(\mathbf{x}_*)) = 0. \qquad (10)$$

Если $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$, то из (1) и (5) следует, что $h(x) < 0$, и поэтому для $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ будет иметь место условие

$$(\mathbf{y}_*, h(x)) \le 0. \qquad (11)$$

Так как (8) имеет место для всех значений $\mathbf{x} \in \Gamma$ и в частности, для $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$, то из правого неравенства (8) и из (10) и (11) получаем для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}_*) \le \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}_*, \mathbf{h}(\mathbf{x})) \le \varphi(\mathbf{x}).$$

Но $\mathbf{x}_* \in \mathfrak{D}$ (так как $\mathbf{x} \in \Gamma$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x}_*) \le 0$) и, следовательно, $\mathbf{x}_*$ – оптимальная точка.

Следующая теорема является необходимым и достаточным условием оптимальности.

2. Теорема Куна-Таккера. Теорема формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (3) *множество* $\mathfrak{D} = \{\mathbf{x} \in \Gamma \,|\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ge \mathbf{b}\}$ *обладает свойством регулярности Слейтера* (4). *Необходимым и достаточным условием оптимальности является существование такого* $\mathbf{y}_* \ge 0$, *чтобы пара* $\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*$ *была седловой точкой функции Лагранжа* $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *на множестве* $\mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \ge 0$.

Достаточность доказана в теореме 1.

Необходимость. Пусть $\mathbf{x}_*$ оптимален. Рассмотрим в $(n+1)$-м пространстве $\Re^{n+1}$ множества

$$\mathbf{P}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{z}_0\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}\mathbf{z}_0\ge\varphi(\mathbf{x}_*)\\ \mathbf{z}\le 0\end{matrix}\right\},\quad \mathbf{S}=\bigcup_{\mathbf{x}\in\Gamma}\mathbf{S}(\mathbf{x}),\ \mathbf{z}_0\in\Re_0^1,\ \ \mathbf{z}\in\Re_0^n\ ,$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ определяется для каждого $\mathbf{x}\in\Gamma$ следующим образом:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x})=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{z}_0\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}\mathbf{z}_0\ge\varphi(\mathbf{x})\\ \mathbf{z}\ge\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{x})\end{matrix}\right\}.$$

Покажем, что множества $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ выпуклы. Выпуклость множества $\mathbf{P}$ очевидна.

Пусть

$$\begin{pmatrix}\mathbf{z}_0'\\ \mathbf{z}'\end{pmatrix}\in\mathbf{S}\ \text{и}\ \begin{pmatrix}\mathbf{z}_0''\\ \mathbf{z}''\end{pmatrix}\in\mathbf{S},$$

и покажем, что и $(z_0,\mathbf{z})^T=\alpha(z_0',\mathbf{z})^T+(1-\alpha)\cdot(z_0',\mathbf{z})^T\in\mathbf{S}$ для всех $\alpha\in[0,1]$. Так как $(z_0',\mathbf{z})^T\in\mathbf{S}$, то найдется такой вектор $\mathbf{x}\in\Gamma$, что

$$(\mathbf{z}_0',\mathbf{z})^T\in\mathbf{S}(\mathbf{x}'),$$

и аналогично $(z_0'',z'')^T\in\mathbf{S}(x'')$. Нам достаточно показать, что $(z_0,z)\in S(x)$, где $x=\alpha x'+(1-\alpha)x''$. Из выпуклости $\varphi(x)$ и $-f(x)$ следует

$$\varphi(\mathbf{x})=\varphi[\alpha\mathbf{x}'+(1-\alpha)\mathbf{x}'']\le\alpha\varphi(\mathbf{x}')+(1-\alpha)\varphi(\mathbf{x}'')\le$$
$$\le\alpha z_0'+(1-\alpha)z_0''=z_0,$$
$$\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{b}-\mathbf{f}[\alpha\mathbf{x}'+(1-\alpha)\mathbf{x}'']\le$$
$$\le b-[\alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}')+(1-\alpha)\mathbf{f}(\mathbf{x}'')]=$$
$$=\alpha[\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{x}')]+(1-\alpha)[\mathbf{b}-\mathbf{f}(\mathbf{x}'')]\le$$
$$\le\alpha\mathbf{z}'+(1-\alpha)\mathbf{z}''=\mathbf{z}.$$

Таким образом, $(z_0,z)\in\mathbf{S}\subset\mathbf{S}$.

Теперь докажем, что множества $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}$ не имеют общих точек. Здесь

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} z_0 \geq \varphi(x_*) \\ \mathbf{z} \leq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Для каждого $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ ввиду оптимальности $\mathbf{x}_*$ будет справедливо

$$z_0 \geq \varphi(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x}_*), \text{ но в } \mathbf{P}_0 \quad z_0 < \varphi(\mathbf{x}_*).$$

Для каждого $\mathbf{x} \in \Gamma$, такого, что $\mathbf{x} \notin \mathfrak{D}$, найдется хотя бы один номер такой, что

$$z_i \geq b_i - f_i(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ но в } \mathbf{P}_0 \quad z_i < 0.$$

Множества $\mathbf{S}$ и $\mathbf{P}$ выпуклы и не имеют общих точек. По теореме о ***разделяющей гиперплоскости*** существует гиперплоскость, разделяющая эти множества, и существует ненулевой вектор нормали, разделяющей гиперплоскости

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \neq 0, \qquad (12)$$

такой, что

$$u_0 z_0 + (\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq u_0 w_0 + (\mathbf{u}, \mathbf{w}), \qquad (13)$$

для всех $(z_0, \mathbf{z})^T \in \mathbf{S}$ и $(w_0, \mathbf{w})^T \in \mathbf{P}_0$

Поскольку множеству $\mathbf{P}_0$ принадлежат точки со сколь угодно большими по модулю отрицательными компонентами, то необходимо должно быть

$$(u_0, \mathbf{u})^T \geq 0. \qquad (14)$$

Неравенство (13) остается справедливым и тогда, когда $(w_0, \mathbf{w})^T$ принадлежит границе $\mathbf{P}$; поэтому, выбрав $z_0 = \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{z} = \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), w_0 = \varphi(\mathbf{x}_*), w = 0$, получим для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$u_0 \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \geq u_0 \varphi(\mathbf{x}_*) . \qquad (15)$$

Убедимся, что $u_0 > 0$. Предположим, что $u_0 = 0$. Тогда (15) примет вид

$$(\mathbf{u}, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \geq 0, \ \ \forall \mathbf{x} \in \Gamma .$$

Так как $u > 0$ (см. (14)) и $u \neq 0$ (см. (13)), а для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ будет справедливо

$$\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0 ,$$

то при $u_i > 0$ равенство

$$b_i - f_i(\mathbf{x}) = 0 ,$$

будет выполняться для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$; что противоречит свойству регулярности Слейтера.

Значит, из предположения $u_0 = 0$ следует, что $\mathbf{u} = 0$, а это противоречит (12). Итак, $u_0 > 0$.

Пусть $\mathbf{y}_* = u_0^{-1} \mathbf{u} \geq 0$, тогда (15) примет вид

$$\varphi(\mathbf{x}_*) \leq \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}_*, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) .$$

для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$, и для $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$. Отсюда следует

$$(\mathbf{y}_*, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \geq 0 . \qquad (16)$$

Но $\mathbf{y}_* \geq 0$, а $\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) \leq 0$ (так как $\mathbf{x}_* \in \mathfrak{D}$), поэтому.

$$(\mathbf{y}_*, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)) = 0 . \qquad (17)$$

Для любого значения $\mathbf{y} \geq 0$ будет справедливо

$$(\mathbf{y}, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)) \leq 0 . \tag{18}$$

Из неравенств (16)-(18) получаем

$$\varphi(\mathbf{x}_*) + (\mathbf{y}, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)) \leq \varphi(\mathbf{x}_*) + (\mathbf{y}_*, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)) \leq \varphi(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}_*, \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

для всех $\mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \geq 0$ или

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_*)$$

что соответствует ***неравенствам седловой точки.***

3. Дифференциальные условия Куна-Таккера. Для практического применения весьма важен случай дифференцируемости ограничений.

Теорема 3. *Если функция* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *задачи выпуклого программирования* (2) *непрерывно дифференцируемы на множестве* $\Gamma = \{x \mid x \geq 0\}$, *то для того, чтобы пара* x_*, y_* *была седловой точкой функции Лагранжа в области* $x \geq 0, y \geq 0$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий, приведенных в табл.* 4.1.

Таблица 4.1

$\frac{\partial \mathcal{L}_*}{\partial \mathbf{x}} \geq 0$	$\left(\mathbf{x}_*, \frac{\partial \mathcal{L}_*}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0$	$\mathbf{x}_* \geq 0$
$\frac{\partial \mathcal{L}_*}{\partial \mathbf{y}} \geq 0$	$\left(\mathbf{y}_*, \frac{\partial \mathcal{L}_*}{\partial \mathbf{y}}\right) = 0$	$\mathbf{y}_* \geq 0$

Таким образом, сформулированные условия определяют необходимые и достаточные условия для задач выпуклого программирования, и могут использоваться для создания новых методов оптимизации.

4.2. Методы оптимизации на основе теоремы Куна-Таккера

Рассмотренная теорема Куна-Таккера позволяет сформулировать ряд методов условной оптимизации.

1. Метод вспомогательной переменной. Обсудим решение следующей задачи квадратичного программирования: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\max\{\varphi(\mathbf{x}) = C^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x},\ \mathbf{D} = \mathbf{D}^T > 0 \mid \underset{A\in\Re^{m\times n},\, m<n}{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}},\ \mathbf{x} \geq 0\} \in \Re^n$$

с использованием следствий из теоремы Куна-Таккера. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = C^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Градиенты функции Лагранжа по переменным x и y равны

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{C} + 2\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{y},\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Условия Куна-Таккера с учетом дифференциальных соотношений, данных в табл. 4.1, примут вид, определенный в табл. 4.2.

Таблица 4.2

$\mathbf{C} + 2\mathbf{D}\mathbf{x}_* - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_* \geq O_n$	$(\mathbf{x}_*, \mathbf{C} + 2\mathbf{D}\mathbf{x}_* - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_*) = 0$	$\mathbf{x}_* \geq 0_n$
$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{y}_*} = \mathbf{A}\mathbf{x}_* - \mathbf{b} = O_n$	$(\mathbf{y}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = 0$	$\mathbf{y}$ произволен

Введем вспомогательную переменную $V \geq 0$, такую, что

$$\mathbf{C} + 2\mathbf{D}\mathbf{x}_* - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_* - \mathbf{V}_* = O_n,\ \ \mathbf{V}_* \geq 0.$$

Тогда условия Куна-Таккера примут вид, данный в табл. 4.3.

Таблица 4.3

$\mathbf{C}+2\mathbf{D}\mathbf{x}_*-\mathbf{A}^T\mathbf{y}_*-\mathbf{V}_*=O_n$	$(\mathbf{x}_*,\mathbf{V}_*)=0$	$\mathbf{x}_*\geq 0_n$
$\mathbf{A}\mathbf{x}_*-\mathbf{b}=O_m$	Выполнены на допустимом решении	$\mathbf{y}$ - произвольный

Как следует из данных табл. 4.3, для отыскания оптимального решения (седловой точки функции Лагранжа) следует решить систему равенств (неравенств)

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_*=\mathbf{b}, \mathbf{C}+2\mathbf{D}\mathbf{x}_*-\mathbf{A}^T\mathbf{y}_*-\mathbf{V}_*=O_n,$$
$$(\mathbf{x}_*,\mathbf{V}_*)=0, \mathbf{x}_*\geq O_n, \mathbf{V}_*\geq 0.$$

Таким образом, метод Била позволяет свести задачу условной минимизации квадратичного функционала к решению системы линейных равенств и неравенств.

2. Метод Била. Рассмотрим обобщенную задачу выпуклого квадратичного программирования (по сравнению с задачей (1), п. 4.1): вычислить

$$\mathbf{x}_*=\arg\max\{\varphi(\mathbf{x})=C^T\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{D}=\mathbf{D}^T>0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\geq 0\}\in\Re^n \quad (1)$$

Предположим, что систему ограничений задачи (1) удается разрешить относительно m первых компонент, т.е. из ограничений задачи $Ax=A_1x_1+A_2x_2=b_m$ можно определить

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2),$$

где $\mathbf{x}_2$ – свободные переменные.

Представим далее $\varphi(\mathbf{x})$ как функцию свободных переменных. Тогда функционал определит новую задачу математического программирования, в которой минимизируемый квадратичный функционал данной задачи принимает следующий преобразованный вид

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2^T\mathbf{x}_2 + (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_1=\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2)}$$

$$= C_1^T\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2) + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \qquad (20)$$

$$+[\mathbf{x}_1^T\mathbf{D}_{11}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_1^T\mathbf{D}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T\mathbf{D}_2\mathbf{x}_2] = \qquad (2)$$

$$= C_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} + (-C_1^T\mathbf{A}_2 - \mathbf{C}_2^T)\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}_2 =$$

$$= C_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} + (-C_1^T\mathbf{A}_2 - \mathbf{C}_2^T)\mathbf{x}_2 +$$

$$+\mathbf{x}_2^T[\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^{-T}\mathbf{D}_{11}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 + 2\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{22}]\mathbf{x}_2 + const\,.$$

Выражение в квадратных скобках в (2) есть не что иное, как $(\partial\varphi / \partial\mathbf{x}_2)/2$. Если $\partial\varphi / \partial\mathbf{x}_2 \geq 0$, то полученное решение $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T$ оптимально. Если некоторые компоненты $\partial\varphi / \partial\mathbf{x}_2 < 0$, то можно увеличить значение $\varphi(\mathbf{x})$. При увеличении некоторой переменной $\mathbf{x}_2$ возможны две ситуации.

1. Некоторая переменная x_k базисных переменных обращается в нуль, и в дальнейшем ее увеличение невозможно. Тогда можно найти значение x_{m+1}, при котором $x_k = 0$, как в симплекс-методе (см. раздел 2.3). Затем надо сделать пересчет переменных и снова проверить решение на оптимальность.

2. Производная $\partial\varphi / \partial x_{m+1} = 0$ внутри допустимой области. Тогда из этого условия можно найти x_{m+1}, вычислить новое решение, а затем снова проверить новое решение на оптимальность в соответствии с условиями Куна-Таккера.

Таким образом, описанная идея метода Била содержит проверку на оптимальность в соответствии с условиями Куна-Таккера и пересчет переменных на основе соотношений симплекс-метода. При этом вычисления проводятся в пространстве меньшей размерности в результате введения свободных переменных.

3. Метод Баранкина и Дорфмана. Рассмотрим задачу условной минимизации квадратичного программирования: вычислить вектор

$$\mathbf{x}_* = \arg\max\{\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{D} = \mathbf{D}^T > 0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{A} \in \Re^{m\times n}\}.$$

Условия Куна-Таккера для данной задачи имеют вид, представленный в табл. 4.4.

Таблица 4.4

$2\mathbf{D}\mathbf{x}^* - \mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{V}^* = -\mathbf{C}$	$\mathbf{x}^{T*}\mathbf{V}^* = 0$	$\mathbf{x}^* \geq O_n$
$\mathbf{A}\mathbf{x}_* - \mathbf{b} = O_m$	Выполнено на допустимом решении	$\mathbf{y}$ произволен

Идея метода состоит в применении к ограничениям линейного типа данной задачи ряда симплексных преобразований, в результате которых достигается выполнение условия $\mathbf{x}^{T*}\mathbf{V}^* = 0$. При проведении симплексных преобразований (см. раздел 2) проверяется одновременно допустимость решений.

Таким образом, условия Куна-Таккера порождают ряд вычислительных схем, сочетающих аналитические условия и вычислительные процедуры.

4.3. Метод проекции градиента и условные нелинейные оценки

Метод проекции градиента является универсальным для задач выпуклой минимизации, использует проецирование на допустимое множество в процессе вычисления текущих решений. Рассмотрим алгоритмы, использующие проекции для различных ограничений.

1. Методы проекции градиента на линейные многообразия. Рассмотрим решение задачи квадратичного программирования: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\max\{\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x},\ \mathbf{D} = \mathbf{D}^T > 0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \Re^{m\times n}\} \in \Re^n, \qquad (1)$$

используя проектирование текущих решений на линейные многообразия, определяемые ограничениями задачи.

Известно, что точка $\mathbf{z}^* = P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{z})$ называется ***проекцией точки на множество*** $\mathfrak{D}$, если $P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{z})$ удовлетворяет условию

$$\inf_{x\in\mathfrak{D}} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{z} - P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{z})\|^2,\ \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{y}, \mathbf{y}). \qquad (2)$$

Рассмотрим аналитическое представление операторов проектирования точки на линейное многообразие $\mathfrak{D} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \Re^{m\times n},\ \mathbf{b} \in \Re^m\} \neq \varnothing$. Допустим, что множество $\mathfrak{D}$ не пусто, т.е. система ограничений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет решение. Для этого в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\mathbf{A}$ был равен рангу расширенной матрицы $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$. Пусть необходимо найти проекцию точки $\mathbf{z}$ на $\mathfrak{D}$. В соответствии с определением (2) необходимо найти $P_{\mathfrak{D}}(z)$, доставляющий минимум $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2 = \|P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{z}) - \mathbf{z}\|^2$ при ограничениях $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Другими словами, надо решить задачу: вычислить

$$P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{z}) = \arg\min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \Re^{m\times n}, m < n\}.$$

Поскольку данная задача укладывается в рамки обычной «лагранжевой» схемы, известной из математического анализа, то составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 + (\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}).$$

и выпишем известные необходимые условия Лагранжа:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{x}} = 2\,(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2 + \mathbf{A}^T\mathbf{y} = O_m \;\Big\|\; \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b} = O_m\,.$$

Тогда из первого условия имеем $\mathbf{x}_*(\mathbf{y}) = \mathbf{z} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}/2$, откуда определяется выражение для $\mathbf{y}^*$ через $\mathbf{z}$ с учетом того, что

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_*(\mathbf{y}) = \mathbf{b} : \mathbf{y}_* = 2(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z} - 2(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}.$$

Из последнего равенства с учетом условия $\mathbf{x}_*(\mathbf{y}) = \mathbf{z} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}/2$ ***оператор проецирования*** (проектор) вектора $\mathbf{z}$ на множество $\mathfrak{D}$:

$$P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{z}) = \left[\mathbf{E} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\right]\mathbf{z} + \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}. \qquad (3)$$

Таким образом, соотношение (3) устанавливает вид оператора проектирования на линейное многообразие. Если $\mathbf{b} = O_m$, то линейное многообразие преобразуется в линейное подпространство (содержит нулевой вектор), а оператор проектирования на линейное подпространство задается матрицей вида

$$P_{\mathfrak{D}^0}(\mathbf{z}) = \left[\mathbf{E} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\right]\mathbf{z}.$$

Полученные представления операторов проецирования позволяют перейти к формулировке вычислительной схемы метода:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k(P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{x}_k)),$$

где, направление $\mathbf{p}_k$ строится с помощью проекции градиента функционала на линейное многообразие. Алгоритм решения задачи (1), согласованный с методом сопряженных градиентов (см. п. 3.3), имеет следующий вид:

Шаг 1. Вычисляется вектор $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющий ограничениям задачи, полагаем $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

Шаг 2. Вычисляется вектор $p_1 = -(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_k)$, где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$, причем матрица $\mathbf{A}$ имеет строки, определенные в (1). Полагаем $k = 1$.

Шаг 3. Вычисляется новое приближение:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_{k+1}\mathbf{p}_{k+1},$$

Где шаг определяется равенством

$$\alpha_{k+1} = -(\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_{k+1}) / (\mathbf{p}_{k+1}, \mathbf{D}\mathbf{p}_{k+1}).$$

Шаг 4. Определяется новое направление в соответствии с равенством:

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1} = -(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_k) + \frac{\left\|(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_k)\right\|^2}{\left\|(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\right\|^2}\mathbf{p}_k.$$

Шаг 5. Полагается $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}, k = k+1, \mathbf{p}_{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_{k+1}$.

Шаг 6. Если $k = n$, то - переход к шагу 7, иначе – к шагу 3.

Шаг 7. Останов.

Рассмотренный алгоритм предназначен для частной задачи квадратичного программирования.

2. Общий метод проекции градиента для общей задачи квадратичного программирования на основе теоремы Куна-

Таккера. Общая задача квадратичного программирования формулируется в следующем виде: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\min\{\mathbf{C}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} \mid (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i \le 0, i \in J; \quad (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i = 0, i \in J^0, i \in J \bigcup J^0\} \in \Re^n . \tag{4}$$

Идея решения этой общей задачи состоит в организации итеративного процесса:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k (P_{\mathfrak{D}}(\mathbf{x}_k)),$$

где направление $\mathbf{p}_k$ вычисляется, исходя из проектирования градиента на многообразие (линейное), образованное активными ограничениями. Проверка оптимальности выполняется по теореме Куна-Таккера.

Определение. Ограничения задачи (4), выполняемые как равенства в точке очередного приближения, называются ***активными ограничениями***.

Другими словами, ***идея метода*** состоит в последовательном решении семейства простейших задач квадратичного программирования типа (1) на множествах сменяющих друг друга линейных многообразий с проверкой оптимальности на основе дифференциальных условий теоремы Куна-Таккера.

Определение общей идеи алгоритма позволяет сформулировать алгоритм метода.

Шаг 1. Вычисляем точку $\mathbf{x}_0$, используя какие-либо методы решения линейных неравенств и равенств.

Шаг 1а. Строим индексное множество $\overline{J}_0$, состоящее из номеров *активных ограничений* (выполняющихся в точке $\mathbf{x}_0$ как равенства): $\bar{J}_0 = \bar{J}(\mathbf{x}_0) = \{i \mid (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0) - b_i = 0, i \in J \bigcup J^0\}$. Другими словами, $\bar{J}_0$ – множество номеров *активных ограничений*.

Шаг 1б. Если $\bar{J}_0 \neq \varnothing$, то переходим к шагу 2, иначе положим $P_1 = \mathbf{O}$ и перейдем к шагу 4.

Шаг 2. Вычислим матрицу $\mathbf{W}_0$ и вектор $\mathbf{U}$: $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{A}_{\bar{J}_0} \mathbf{A}_{\bar{J}_0}^T) \mathbf{A}_{\bar{J}_0}, \mathbf{U}_0 = -\mathbf{W}_0 \varphi'(\mathbf{x}_0)$. Строки матрицы $\mathbf{A}_{\bar{J}_0}$ есть векторы $\mathbf{a}_i$, соответствующие уравнениям и неравенствам, выполняющимся в точке x_0 как равенства.

Шаг 3. Вычисляется оператор
$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{\bar{J}_0}^T \mathbf{W}_0 = \mathbf{A}_{\bar{J}_0}^T (\mathbf{A}_{\bar{J}_0} \mathbf{A}_{\bar{J}_0}^T)^{-1} \mathbf{A}_{\bar{J}_0}$.

Шаг 4. Определяется направление движения на данном шаге:

$$\mathbf{p}_0 = -(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_0).$$

Шаг 5а. Если $(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то, положив $k = 0$, переходим к шагу 6б, иначе – к шагу 5б.

Шаг 5б. Если $(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_0) = 0$ и все компоненты вектора $\mathbf{U} \geq 0$, то $\mathbf{x}_0$ – решение задачи, и необходимо перейти к шагу 7, иначе – к шагу 6а.

Шаг 6а. Формируется новое индексное множество J^*, полученное из $\bar{J}_0$ путем исключения i, для которых $U_i < 0$, и если $J^* \neq 0$, то вычисляется оператор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{J^*}^T (\mathbf{A}_{J^*} \mathbf{A}_{J^*}^T)^{-1} \mathbf{A}_{J^*}$.

Положив $k = 0$, переходим к шагу 6б, иначе – (если $J^* \neq \varnothing$) переходим к шагу 1б.

Шаг 6б. Вычисляется $\mathbf{p}_1 = -(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_0)$ (см. шаг 4).

Шаг 6в. Вычисляются

$$\alpha = -(\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_{k+1}) / (\mathbf{p}_{k+1}, \mathbf{D}\mathbf{p}_{k+1});$$
$$m = \min_{i:\,(\mathbf{a}_i, \mathbf{p}_{k+1})>0} (b_i - (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}_k)) / (\mathbf{a}_i, \mathbf{p}_{k+1})\,.$$

Шаг 6г. Если $\alpha < m$, то переход к шагу 6д, иначе – к шагу 6з.

Шаг 6д. Вычисление $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_{k+1}$.

Шаг 6е. Полагаем $k = k+1$ и вычисляем вектор нового направления

$$\mathbf{p}_{k+1} = -(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_k) + \frac{\left\|(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_k)\right\|^2}{\left\|(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\right\|^2} p_k\,.$$

Шаг 6ж. Если $\mathbf{p}_{k+1} \neq 0$ (или $k < n$), то переход к шагу 6в, иначе (когда $\mathbf{p}_{k+1} = 0$ или $k = n$) полагается $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_k$, и происходит переход к шагу 1б.

Шаг 6з. Вычисляется $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + m\mathbf{p}_{k+1}$. Полагается $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{k+1}$, и - переход к шагу 1б.

Шаг 7. Останов.

Как следует из схемы алгоритма, минимизация на подпространстве осуществляется с помощью объединения проекции градиента и метода сопряженных градиентов. Проиллюстрируем процедуру минимизации.

Пример. Найдем решение следующей задачи: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)/2 \,|\, -2x_1 + x_2 \le -2, -0,5x_1 + x_2 \le 1,$$
$$0,25x_1 - x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 \le 8\}\,.$$

Решение. Сформулируем задачу в стандартной форме: вычислить

$$\mathbf{x}_* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Bigg| \ \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\} \in \Re^2,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -0,5 & 1 \\ -0,25 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1а. Вычисляется допустимое решение $\mathbf{x}_0 = (4,3)^T$, используя метод решения системы линейных равенств и неравенств.

Шаг 1б. Формируется индексное множество $\overline{J}_0 = \{\,2\,\}$.

Шаг 1в. Множество $\overline{J}_0 \ne \varnothing$, поэтому – переход к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляется матрица $\mathbf{W}_0$ и вектор $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{W}_0 = \left[(-0,5\,,1)\begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}(-0,5\,,1) = -(0,4\,,\,0,8)\,;$$

$$\mathbf{U} = -(0,4\,,\ 0,8)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -0,8\,.$$

Шаг 3. Формируется оператор

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}(0,4\,,\ 0,8) = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,4 \\ -0,4 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Вычисляется вектор направления

$$\mathbf{p}_0 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & -0,4 \\ -0,4 & 0,8 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4,4 \\ 2,2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5а. Если вектор $\mathbf{p}_0 \neq 0$, то, положив $k = 0$, происходит переход к шагу 6а, иначе – к шагу 5б.

Шаг 5б. Если вектор $\mathbf{p}_0 = 0$ и все компоненты вектора $\mathbf{U} \geq 0$,
то $\mathbf{x}_0$ – решение задачи, и необходимо перейти к шагу 7, иначе к шагу 6а.

Шаг 6а. Вычисляется вектор

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 = -\begin{pmatrix} 4,4 \\ 2,2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 6б. Вычисляется α и m:

$$\alpha = -(4,3)\begin{pmatrix} -4,4 \\ -2,2 \end{pmatrix} / \left[(4,4\ ,\ 2,2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} \right] = 1;$$

$$m = (b_1 - (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0)) / (\mathbf{a}_1, \mathbf{p}_0) = \left(-2 - (-2,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) / \left[(-2,1)\begin{pmatrix} -4,4 \\ -2,2 \end{pmatrix} \right] = 0,45 .$$

Шаг 6в. Если $\alpha > m$, то переход к шагу 6г.

Шаг 6г. Вычисляется

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,45\begin{pmatrix} -4,4 \\ -2,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Полагается $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{k+1} = (2,\ 2)^T$ и выполняется переход к шагу 1б.

Начинается новая большая итерация метода.

Шаг 1б. Строится индексное множество $\overline{J}_0 = \{1\}$ (Элемент $i = 2$ исключается из $\overline{J}_0$, проверьте это самостоятельно.)

Шаг 1в. Поскольку $\overline{J}_0 \neq \varnothing$, то переход к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляется матрица $\mathbf{W}_0$ и вектор $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{W}_0 = \left[(-2\,,1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (-2\,,1) = -(0{,}4\,,\,0{,}2)\,;$$

$$\mathbf{U} = -(0{,}4\,,\; 0{,}2)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0{,}4\,.$$

Шаг 3. Вычисляется оператор

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}(-0{,}4\,,\; 0{,}2) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Определяется вектор $p_0 = -(1{,}2\,,\; 2{,}4)^T$.

Шаг 5а. Поскольку $\mathbf{p}_0 \neq 0$, то происходит переход к шагу 6б, положив $k = 0$.

Шаг 6б. Вычисляется $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 = -\left(1{,}2\,,\; 2{,}4\right)^T$.

Шаг 6в. Вычисляются α и m:

$$\alpha = -(2{,}2)\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} / \left[(-1{,}2\,,\; -2{,}4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} \right] = 1;$$

$$m = (b_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}_0)) \,/\, (\mathbf{a}_3, \mathbf{p}_0) =$$

$$= -0 - (-0{,}25\,,\; 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} / \,(-0{,}25\,,\; 1)\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = 0{,}72\,.$$

Шаг 6г. Если $\alpha > m$, то переход к шагу 6г, иначе – к шагу 6.7.

Шаг 6з. Вычисляется вектор

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}72\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}14 \\ 0{,}28 \end{pmatrix}.$$

Полагается $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{k+1}$ и происходит переход к шагу 1б.

Новая большая итерация метода.

Шаг 1б. Строится индексное множество $\overline{J}_0$, которое для данного вектора $\mathbf{x}_0 = -(1{,}14\,,\ 0{,}28)^T$ имеет вид $\overline{J}_0 = \{1, 3\}$.

Шаг 1в. Поскольку $\overline{J}_0 \neq \varnothing$, то – переход к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляются векторы $\mathbf{W}_0$ и $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{W}_0 = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0{,}25 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0{,}25 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0{,}25 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}57 & -0{,}14 \\ -0{,}57 & -1{,}14 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{U} = -\begin{pmatrix} 0{,}57 & -0{,}14 \\ -0{,}57 & -1{,}14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}14 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}69 \\ 0{,}97 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Вычисляется оператор

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0{,}25 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}57 & -0{,}14 \\ -0{,}57 & -1{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Определяется вектор $\mathbf{p}_0(0,\ 0)^T$.

Шаг 5а. Поскольку $(\mathbf{E} - \mathbf{P}_1)\varphi'(\mathbf{x}_0) = (0, 0)^T$ и все компоненты вектора $\mathbf{U} > 0$, то $\mathbf{x}_0$ – решение задачи, далее происходит переход к
шагу 7.

Шаг 7. Останов.

Можно построить допустимую область, определяемую, системой неравенств, рассматриваемых в данной задаче. Пусть $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})^T = (4,\ 3)^T$ – исходная допустимая точка (находится путем решения неравенств), а точка $\mathbf{x}_1 = (2,\ 2)^T$ получена после первой большой итерации метода. *Активное многообразие* соответствует двум неравенствам (1 и 2 на 1 рис. 4.1; 3 и 4 соответствуют неактивным, многообразиям), выполняющимся как равенства. Точка $\mathbf{x}_2 = (1{,}14,\ 0{,}28)^T$ - оптимальное решение.

Характерно, что геометрически условия оптимальности означают возможность представления вектора антиградиента функционала в виде положительной линейной комбинации векторов нормалей активных ограничений. Такой вывод следует из условия $[\mathbf{E}-\mathbf{P}]\varphi'(\mathbf{x}_0)=0$, преобразуя которое можно получить (при $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\bar{J}_0}$):

$$-\varphi'(\mathbf{x})=-\mathbf{P}\varphi'(\mathbf{x})=-\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\varphi'(\mathbf{x})=\mathbf{A}^T\mathbf{W}_0\varphi'(\mathbf{x})=\sum_{i\in\bar{J}_0}\mathbf{a}_i\mathbf{u}_i\ .$$

Таким образом, метод проекции градиента использует утверждения теоремы Куна-Таккера для контроля выполнения условий оптимальности на каждой итерации метода, формирует семейство активных многообразий, на которых решаются задачи условной минимизации.

Таким образом, метод позволяет получить точное решение за конечное число итераций, а также может быть основой решения более сложных выпуклых задач минимизации функционалов при условии нелинейных ограничений.

4.4. Метод минимизации и условные квадратичные оценки на компактных множествах

Рассматриваемая задача квадратичного программирования имеет вид: вычислить вектор, минимизирующий квадратичный функционал на допустимом множестве, в котором параллелепипед ограничений аппроксимирован эллипсоидом

$$X^*=\arg\min\ \{\varphi=(X-c)^T(X-c)\,|\quad Ax=b,\quad x^TQx\le r^2\ \}.\ (1)$$

Задача (1) представляет собой минимизацию квадратичного функционала на допустимом множестве. Это допустимое множество представляет собой пересечение линейного многообразия и шара. Для решения задачи можно воспользоваться необходимыми и достаточными условиями Куна-Таккера для задач выпуклого программирования. Далее рассматривается другой подход к решению задачи, исходя из того, что точка минимума квадратичного функционала либо принадлежит границе допустимой области или находится внутри допустимой области.

В этой ситуации можно воспользоваться ***раздельным отысканием решений*** с последующим их объединением в предикатной форме, представленной соотношением

$$X^* = \begin{cases} X_1^* = \arg\min\{\varphi \mid AX = b\}, & \text{если } X^* \in \operatorname{int} D, \\ X_2^* = \arg\min\left\{\varphi \,\middle|\, \begin{matrix} AX = b \\ X^T X = r^2 \end{matrix}\right\}, & \text{если } X^* \notin \operatorname{int} D, \end{cases} \quad (2)$$

где int D – внутренность множества D, аппроксимирующего параллелепипед в задачах, сформулированных в предыдущих разделах данной работы.

Если точка минимума X^* принадлежит границе допустимой области, то для решения вспомогательной задачи, когда в (1) все ограничения выполнены как равенства можно использовать следующую методику. Тогда задача примет следующий вид:

$$X^* = \arg\min\left\{\varphi = (X - C)^T (X - C) \,\middle|\, \begin{matrix} AX = b, \\ X^T X = r^2, \\ rang\ \ A = m \end{matrix}\right\},$$

что позволяет использовать необходимые условия для ограничений типа равенств, формулируемые с помощью функции Лагранжа для рассматриваемой задачи. Далее используется внутренняя аппроксимация параллелепипедов ограничений.

Возможно также применение «внешней» аппроксимации параллелепипедов.

Функция Лагранжа для задачи, полученной переходом от квадратичных неравенств к равенствам, имеет вид

$$L = (x - C)^T (x - C) + \lambda_0^T (Ax - b) + \lambda (x^T x - r^2). \qquad (3)$$

На основе функции Лагранжа можно получить численно-аналитическое решение задачи. Необходимые условия экстремума для функции Лагранжа типа (3) представляются в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. Эти уравнения следуют из общей схемы формирования необходимых условий для задач условной оптимизации, полученных с помощью операций дифференцирования функции Лагранжа по исходным переменным и по множителям Лагранжа для ограничений типа линейных и нелинейных равенств. В результате:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial X} = 2X - 2C + A^T \lambda_0 + 2\lambda X = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial \lambda_0} = AX - b = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = X^T X - r^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Решение системы (4) относительно λ_0 определяет $X^*(\lambda_0)$, поскольку, если умножить первое уравнение на матрицу A, то можно получить:

$$2\underbrace{AX}_{=b} - 2AC + AA^T\lambda_0 + 2\lambda\underbrace{AX}_{=b} = 0,$$

где в силу второго уравнения системы (4) вида: $Ax = b$. Тогда последняя алгебраическая система уравнений примет вид

$$2b - 2AC + AA^T\lambda_0 + 2\lambda b = 0\,,$$

а вектор множителей Лагранжа λ_0 для ограничений типа линейных равенств равен:

$$\lambda_0 = (AA^T)^{-1}\left[-2b + 2AC - 2\lambda b\right]. \qquad (5)$$

Если подставить значение множителя Лагранжа (5) в первое уравнение системы необходимых условий для функции Лагранжа (4), то можно вычислить оптимальное решение $X^*(\lambda_0)$ (решение как функция скалярного параметра, соответствующего квадратичным ограничениям) как функцию множителя Лагранжа для квадратичных ограничений типа равенств. Поскольку в результате подстановки можно получить равенство

$$2X - 2C + A^T(AA^T)^{-1}\left[-2b + 2AC - 2\lambda b\right] + 2\lambda X = 0\,,$$

то преобразованное уравнение относительно $X^*(\lambda_0)$ примет вид:

$$X(1-\lambda) = C = A^T(AA^T)^{-1}\left[-b + AC - \lambda b\right] = C + A^T(AA^T)^{-1}b -$$

$$- A^T(AA^T)^{-1}AC + A^T(AA^T)^{-1}\lambda b = P^0(C) + \lambda P^A b\,. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) вектор оптимального решения как функция скалярного множителя Лагранжа λ определяется следующим равенством:

$$X^*(\lambda) = X^* = \left[P^0(C) + \lambda P^A b\right]\frac{1}{1+\lambda}. \qquad (7)$$

Для получения окончательного решения необходимо подставить вектор (7) в квадратичное уравнение ограничений системы необходимых условий (4). Целесообразно сначала вычислить $X^T X$. Величина $X^T X$ в третьем уравнении системы необходимых условий (4) принимает вид:

$$X^T X = \left[P^0(C) + \lambda P^A b\right]^T \left[P^0(C) + \lambda P^A b\right]\frac{1}{(1+\lambda)^2} =$$

$$= \left[P^{0T}(C) + \lambda b^T P^{AT}\right]\left[P^0(C) + \lambda P^A b\right]\frac{1}{(1+\lambda)^2} =$$

$$= \left[P^{0T}(C)P^0(C) + 2\lambda b^T P^{AT} P^0(C) + \lambda^2 b^T P^{AT} P^A b\right]\frac{1}{(1+\lambda)^2},$$

где для преобразования матриц в последнем равенстве использованы следующие матричные соотношения для операторов проектирования на линейные многообразия, подпространства и связанных с ними вспомогательных матриц:

$$P^{0T}(C)P^0(C) = \left[\tilde{P}^0 C + A^T(AA^T)^{-1}b\right]^T \left[\tilde{P}^0 C + A^T(AA^T)^{-1}b\right] =$$

$$= C^T \tilde{P}^{0T}\tilde{P}^0 C + 2b^T(AA^T)^{-1}A\tilde{P}^0 C + b^T \underbrace{(AA^T)^{-1}AA^T}_{E}(AA^T)^{-1}b =$$

$$= C^T \tilde{P}^0 C + 2b^T(AA^T)^{-1}A\left[E - A^T(AA^T)^{-1}A\right]C + b^T(AA^T)^{-1}b =$$

$$= C^T \tilde{P}^0 C + 2b^T \left[\underbrace{(AA^T)^{-1} A - (AA^T)^{-1} AA^T (AA^T)^{-1} A}_{O_{n\times n}} \right] C + b^T (AA^T)^{-1} b =$$

$$= C^T \tilde{P}^0 C + b^T (AA^T)^{-1} b,$$

$$P^{AT} P^0 (C) = (AA^T)^{-1} A \left[(E - A^T (AA^T)^{-1} A) C + A^T (AA^T)^{-1} b \right] =$$

$$= \left[(AA^T)^{-1} A - \underbrace{(AA^T)^{-1} AA^T}_{E} (AA^T)^{-1} A \right] C + (AA^T)^{-1} b =$$

$$= O_n + (AA^T) b,$$

$$P^{AT} P^A = (AA^T)^{-1} AA^T (AA^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}.$$

Справедливость последних равенств установлена приведенными вычислениями. Для матриц операторов проектирования на линейное подпространство имеют место следующие матричные соотношения, подтверждающие свойства матрицы оператора проектирования:

$$\tilde{P}^{0T} \tilde{P}^0 = \tilde{P}^0 \tilde{P}^0 = \tilde{P}^0 = \left[E - A^T (AA^T)^{-1} A \right] \left[E - A^T (AA^T)^{-1} A \right] =$$

$$= E - A^T (AA^T)^{-1} A - A^T (AA^T)^{-1} A + \underbrace{A^T (AA^T)^{-1} AA^T (AA^T)^{-1} A}_{= A^T (AA^T)^{-1} A} = \tilde{P}^0.$$

Поэтому последнее свойство оператора проектирования вектора на линейное многообразие (или подпространство) означает, что суперпозиция операторов проектирования совпадает с оператором проектирования на многообразие (или подпространство).

В результате квадратичное уравнение в системе необходимых условий (4) преобразуется к квадратичному уравнению относительно скалярного множителя Лагранжа λ:

$$r^2 = X^T(\lambda)X(\lambda) =$$

$$= \left[C^T \tilde{P}^0 C + b^T (AA^T)^{-1} b + 2\lambda b^T (AA^T)^{-1} b + \lambda^2 b^T (AA^T)^{-1} b\right] \frac{1}{(1+\lambda)^2}. \quad (8)$$

В результате уравнение (8) относительно множителя $\lambda \in R^1$ преобразуется к следующему квадратному уравнению:

$$r^2(1+\lambda)^2 = C^T \tilde{P}^0 C + b^T (AA^T)^{-1} b + 2\lambda b^T (AA^T)^{-1} b + \lambda^2 b^T (AA^T)^{-1}.$$

Последнее уравнение можно привести к стандартному виду с учетом того, что справедливо равенство относительно скалярного множителя Лагранжа:

$$r^2 + 2\lambda r^2 + \lambda^2 r^2 =$$

$$= C^T \tilde{P}^0 C + b^T (AA^T)^{-1} b + 2\lambda b^T (AA^T)^{-1} b + \lambda^2 b^T (AA^T)^{-1} b.$$

Окончательный вид квадратного уравнения для определения скалярного множителя Лагранжа для квадратичных ограничений системы необходимых условий (4) представляется квадратным уравнением:

$$\alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0, \quad (9)$$

параметры которого определены равенствами:

$$\alpha_1 = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b, \qquad \alpha_2 = -2b^T (AA^T)^{-1} b,$$

$$\alpha_3 = r^2 - C^T \tilde{P}^0 C - b^T (AA^T)^{-1} b.$$

Тогда в зависимости от принадлежности точки минимума функционала границе или внутренней части допустимого множества решение задачи доставляется предикатным соотношением следующего вида:

$$X^* = X^*(\lambda) = \begin{cases} X^* = \left[P^0(C) + \lambda P^A b\right]\dfrac{1}{(1+\lambda)^2}, \text{ если } X^* \notin \operatorname{int} D; \\ \\ X^{0*} = P^0(C), \text{ если } X^{0*} \in \operatorname{int} D, \end{cases} \qquad (10)$$

где параметр λ определяется из (9), а допустимое множество, на котором вычисляется минимум рассматриваемого функционала, имеет вид:

$$D = \left\{ X \in D^0 \cap D^2 \left| \begin{matrix} D^0 = \{X | AX = b\}, \\ \\ D^2 = \{X | X^T X \le r^2\} \end{matrix} \right. , D^0 \cap D^2 - \textit{непустое} \right\}, \quad (11)$$

причем символом int D (как и выше) обозначена внутренность множества D, которая определяется как множество точек открытого множества, полученного из исходного множества исключением точек, принадлежащих границе. Параметр λ в оптимальном решении (10) определяется из квадратного уравнения (9). При этом из пары решений квадратного уравнения (9) выбирается значение, соответствующее минимуму функционала. Знак параметра λ может быть также определен из условий теоремы Куна-Таккера, определяющей необходимые и достаточные условия оптимальности для задач выпуклого программирования.

Достаточный критерий совместности ограничений задачи. На основе приведенных выше результатов можно сформулировать критерий совместности ограничений рассматриваемых задач математического программирования. Этот критерий формулируется как условие существования вещественных решений квадратного алгебраического уравнения (9). Очевидно, что условие совместности имеет вид:

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0, \qquad (12)$$

где параметры, связанные с параметрами исходной экстремальной задачи, определены в соотношении (9).

Таким образом, численно-аналитический метод минимизации квадратичных функционалов на компактных множествах может быть использован в качестве базового или вспомогательного метода.

4.5. Контрольные вопросы

1. Какие общие принципы положены в основу методов безусловной и условной минимизации выпуклых функционалов.
2. Какие общие и отличительные особенности вычислений имеются в методах условной и безусловной минимизации.
3. Какую геометрическую интерпретацию можно дать утверждениям теоремы Куна-Таккера на основе неравенств седловой точки.
4. Какие основные идеи положены в основу методов, основанных на применении теоремы Куна-Таккера.
5. Какова основная идея метода проекции градиента в части применения минимизации на линейных многообразиях и условий теоремы Куна-Таккера.
6. Как формулируется идея метода условной минимизации и вычисления квадратичных оценок функционала на компактном множестве.

5. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Метод динамического программирования используется для анализа и исследования оптимального управления динамическими системами на основе минимизации интегральных или суммарных функционалов качества замкнутых систем управления. Необходимое условие оптимальности в виде уравнения Р. Беллмана применяется для широкого класса задач анализа и оптимизации.

5.1. Постановки задач оптимального управления

Пусть заданы непрерывные и дискретные объекты или системы автоматического управления, определяемые совокупностью уравнений в непрерывном или дискретном времени:

для непрерывного времени	*для дискретного времени*	
$\dot{x} = f(x,u,t),\ x(t_0) = x^0,$	$x_{t+1} = f(x_t,u_t,t),\ x_{t_0} = x^0,$	(1)

где $x \in R^n, u \in R^m$, определены на конечных интервалах времени функционалы качества процессов в непрерывных (слева) и дискретных (справа) системах автоматического управления:

$J = \int\limits_{t_0}^{t_k} \omega(x,u,t)\,dt + \Phi(x(t_k),t_k),$	$J = \sum\limits_{t=t_0}^{t_k} \omega\left(x_t,u_t,t\right) + \Phi\left(x_k,t_k\right).$	(2)

Требуется сформулировать необходимые условия оптимальности для вычисления оптимальных управлений в системах с обратной связью

$u = u(x),$	$u_t = u(x_t),$	(3)

обеспечивающие минимум интегрального (для непрерывной системы) или суммарного (для дискретной системы) функционала (2) и стабилизацию САУ.

Сформулированные задачи называются ***задачами оптимальной стабилизации.*** Для решения задачи будут использоваться ***необходимые условия оптимальности***, следующие из метода динамического программирования Р. Беллмана.

5.2. Необходимые условия оптимальности динамического программирования как уравнения Р. Беллмана

Рассмотрим вывод функционального ***уравнения Беллмана как необходимого условия оптимальности*** для задачи оптимальной стабилизации. Пусть уравнение возмущенного движения объектов, обобщающее уравнение (1), п. 5.1, для непрерывного времени, имеет вид

$$\dot{x} = f\,(x,u,t)\,, \tag{1}$$

а функционал качества определяется соответствующим выражением (2), п. 5.1. Введем функцию Ляпунова–Беллмана аргументов t и $x(t)$ и рассмотрим ее значения для моментов t и $(t+s)$:

$$V(x,t) = \min_{u}\left[\int_{t}^{t_k} \omega\,(x,u,\tau\,)\,d\tau\; + \Phi\,(x(t_k),t_k\,)\right], \tag{2}$$

$$V(x(t+s),\,t+s) = \min_{u}\left[\int_{t+s}^{t_k} \omega\,(x,u,\tau\,)\,d\tau\; + \Phi\,(x(t_k),t_k\,)\right]. \tag{3}$$

Управление u должно доставлять минимум J для любого значения $s > 0$. Следовательно, уравнение (2) для любого значения $s > 0$ можно переписать с учетом определения функционала (3) в преобразованном виде

$$V(x(t),t) = \min_u \left[\int_t^{t+s} \omega\,(x,u,\tau)\,d\tau \;+ V\,(x(t+s),t+s) \right]. \qquad (4)$$

Если $V(.\,,\,.)$ – гладкая функция, то существует предел

$$\lim_{s\to 0} \frac{V\,(x(t+s),t+s) - V\,(x(t),t)}{s} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\,.$$

Учитывая это, а также независимость V от u можно из функционального уравнения (4) получить преобразованное уравнение:

$$0 = \min_u \left[\omega^*(x^*,u^*,t) + \frac{V\,(x(t+s),\,t+s) - V\,(x(t),t)}{s} \right] s\,, \qquad (5)$$

где $\omega^*(\cdot)$ – значение, соответствующее теореме о среднем для интеграла в равенстве (4). После сокращения в (5) на s и перехода к пределу при $s \to 0$ получим ***необходимое условие оптимальности в виде уравнения Беллмана***

$$\min_u \left[\dot{V}(x) + \omega(x,u,t) \right] = 0, \qquad (6)$$

обеспечивающего минимум интегрального функционала в (2) п. 5.1, для открытой области изменения $u \in R^m$. Если область определения ограничена, т.е. $u \in D$, то уравнение (6) запишется в виде:

$$\inf_{u \in D} \left[\dot{V}(x) + \omega\,(x,u,t) \right] = 0\,. \qquad (7)$$

Основную роль в уравнениях (6) и (7) играет функция $V(x(t),t)$, которая является ***функцией Ляпунова***, удовлетворяющей граничным условиям: $V(x(t_k),t_k)=\Phi(x(t_k),t_k)$ при $t_k<\infty$; $V(x(t_k),t_k)=0$ для $t_k=\infty$.

Уравнение Беллмана для дискретных систем, описываемых разностными уравнениями в (1) п. 5.1, имеет вид:

$$\min_{u_t}\,[\Delta V_t+\omega(x_t,u_t,t)]=0, \tag{8}$$

где ΔV_t – приращение функции Ляпунова на траекториях дискретной системы.

Таким образом, уравнения Р. Беллмана определяет необходимые условия оптимальности для задач оптимальной стабилизации, которые требуют решения уравнений Риккати.

5.3. Вычисление оптимальных управлений и матричные уравнения Риккати

Рассмотрим применение уравнений Р. Беллмана для оптимизации линейных систем. Линейные уравнения динамики непрерывных и дискретных объектов, имеют формы для:

Непрерывных объектов:	*дискретных объектов*:
$\dot{x}=A\,x+B\,u,\ x(0)=x^0,$	$x_{t+1}=Ax_t+Bu_t,\ x_0=x^0.$ (1)

Пусть интегральные и суммарные функционалы, используемые для оптимизации систем управления, описываемых непрерывными и дискретными уравнениями типа (1), имеют вид

$J=\int_0^{\infty}\left(x^TQ\,x+u^TR\,u\right)dt,$	$J=\sum_{t=0}^{\infty}\left(x_t{}^TQ\,x_t+u_t{}^TR\,u_t\right),$ (2)

где $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ - положительно-определенные симметричные матрицы.

Предполагается, что объект вполне управляемый. Требуется вычислить управления с обратной связью, минимизирующие функционалы (2) на траекториях систем (1).

Представим уравнения Беллмана для непрерывных и дискретных систем в соответствующих формах:

для непрерывных объектов	*для дискретных объектов*
$\min\limits_{u \in R^m} (\dot{V} + x^T Q\, x + u^T R\, u) = 0$	$\min\limits_{u_t \in R^m} (\triangle V_t + x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t) = 0.$ (3)

Выберем функции Ляпунова для непрерывных и дискретных объектов в виде соответствующих квадратичных форм:

$V = V(x) = x^T P\, x,$	$V_t = V(x_t) = x_t^T P\, x_t\,,$ (4)

где $P = P^T > 0$. Для преобразования необходимых условий (3) вычислим полную производную $\dot{V}(x)$ и приращение ΔV_t ***в силу дифференциальных и разностных уравнений (1)***.

Тогда можно получить два класса уравнений для непрерывных и дискретных систем, полученные вычислением полной производной или приращения функций Ляпунова в силу исследуемых систем. Получим для непрерывных и дискретных систем соответствующие полные производные и приращения, вычисленные в силу:

дифференциальных уравнений:

$$\dot{V} = (\dot{x}^T P\, x + x^T P\, \dot{x})\Big|_{\dot{x}=Ax+Bu} = x^T A^T\, Px + x^T PAx + 2u^T B^T Px,$$

разностных уравнений:

$$\triangle V_t = (x_{t+1}^T P x_{t+1} - x_t^T P x_t)\Big|_{x_{t+1}=Ax_t+Bu_t} =$$

$$= x_t^T A^T P A x_t - x_t^T P x_t + 2u_t^T B^T P A x_t + u_t^T B^T P B u_t\,.$$

Далее необходимо подставить полную производную функции Ляпунова $\dot{V}(x)$ и приращение функции Ляпунова ΔV_t в соответствующие дифференциальные и разностные уравнения Р. Беллмана как необходимые условия оптимальности.

В результате можно получить преобразованные уравнения Р. Беллмана рассматриваемых задач оптимизации в непрерывном и дискретном времени. Условия оптимальности, соответствующие непрерывному и дискретному времени обладают специальной правой частью, представляющей собой конечномерную экстремальную задачу:

$$\min_{u\in R^m} (x^T A^T P\, x + x^T PA x + 2u^T B^T P\; x + x^T Q\; x + u^T R\, u) = 0\,,$$

$$\min_{u\in R^m} (x_t{}^T A^T P\, A x_t - x_t{}^T P\, x_t + 2u_t{}^T B^T P\, A\, x_t + \qquad (5)$$

$$+ u_t B^T PB u_t + x_t{}^T Q\; x_t + u_t{}^T R\, u_t) = 0\;\;.$$

Вычислим минимум в левых частях полученных уравнений Беллмана для непрерывных и дискретных систем, используя правила векторного дифференцирования линейной и квадратичной форм вида: $\left(c^T x\right)_x' = c$, $\left(x^T M\;\, x\right)_x' = 2Mx$. Используя необходимое условие экстремума, можно получить линейные алгебраические уравнения для непрерывных и дискретных объектов:

$$2B^T P\,x + 2R\,u = 0, \qquad \Big|\qquad 2B^T PA\,x_t + 2B^T P\,B\,u_t + 2R\,u_t = 0$$

Тогда минимизирующие элементы u^* и u_t^* примут вид:

$$u^* = -R^{-1}B^T Px, \qquad \Big|\qquad u_t^* = -\overline{R}^{-1}B^T PAx_t, \quad \overline{R} = R + B^T P\,B. \qquad (6)$$

При подставке управлений u^* и u_t^* в уравнения динамики непрерывных и дискретных объектов (5) можно получить уравнения для непрерывного (слева) и дискретного (справа) времени:

$$x^T[A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q]\,x = 0, \qquad \Big|\qquad x_t^T[A^T P\,A - P - A^T PB\overline{R}^{-1}B^T PA + Q]\,x_t = 0.$$

Для выполнения полученных равенств при любых векторах x и x_t необходимо, чтобы были справедливы матричные уравнения:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q, \qquad \Big|\qquad A^T P\,A - P - A^T PB\overline{R}^{-1}B^T PA = -Q, \quad \overline{R} = R + B^T PB, \qquad (7)$$

которые называются ***уравнениями Риккати.*** Уравнения сформулированы относительно матриц P ***квадратичных функций Ляпунова*** для дифференциальных и разностных систем. Решения матричных нелинейных (квадратичных) алгебраических уравнений (7) не единственны. Необходимо с помощью численных методов найти решение, которое является положительно-определенной матрицей. Условия существования таких решений определяются следующей теоремой.

Теорема 1. Для ***существования единственного положительно определенного решения алгебраического уравнения Риккати достаточно*** выполнения условий:

1). Пара матриц *(A,B)* должна быть невырожденной, т.е. объект (1) с параметрами *A, B* – вполне управляемый (выполнен ранговый критерий управляемости Р. Калмана);

2). Матрица R>0, т.е. положительно-определенная;

3). Требуется выполнение одного из двух условий:

а). Матрица $Q > 0$ - положительно-определенная матрица;

б). Матрица $Q \geq 0$ и представима в виде $Q = C^T C$, причем пара (A^T, C^T) – невырожденная.

Тогда оптимальные управления *реализуются управлениями с обратной связью:* $u^* = K\,x$, $u_t^* = Kx_t$, параметры которых определяются уравнениями (7) так, что:

для непрерывных систем	*для дискретных систем*
$K = -R^{-1}B^T P$,	$K = -\overline{R}^{-1}B^T PA$.

Приведенные результаты являются решением задачи оптимальной стабилизации и основой синтеза оптимальных систем.

5.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу оптимального управления динамическими объектами.

2. Какой смысл имеют квадратичные суммарные и интегральные функционалы оценки качества в задачах оптимального управления динамическими объектами в непрерывном и дискретном времени.

3. Какой принцип положен в основу метода динамического программирования Р. Беллмана.

4. Поясните общность решения задач оптимального управления для динамических объектов, функционирующих в непрерывном и дискретном времени.

5. Изложите основную идею вычисления оптимальных управлений на основе функций Ляпунова и уравнения Риккати.

6. Какие вычислительные методы могут быть использованы для численного решения алгебраических матричных уравнений Риккати.

7. В чем состоит особенность необходимых условий для задач оптимального управления.

ЧАСТЬ 3. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ОЦЕНКИ ВАРИАНТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрен ряд методов принятия решений: метод системных (решающих) матриц, классические и комбинированные критерии принятия решений, методы минимизации риска и комбинаторной аппроксимации, методы теории нечетких множеств, чисел и уравнений.

6. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ОЦЕНКИ ВАРИАНТОВ

6.1. Метод системных (решающих) матриц и экспертные оценки в пространстве «варианты-условия»

Рассмотрим место теории и методов принятия решений в прикладных задачах. Как было отмечено выше, теория и методы принятия решений используются, как правило, когда имеет место ***неопределенность*** – *отсутствует полная информация* о ситуации, явлении, модели объекта, а *принятие решения связано* *с риском принятия ошибочного решения*. Часто принятие решений осуществляется в условиях неполной информации, когда формулируется некоторая экстремальная задача с ограничениями. В этом случае при корректной постановке задачи и условии использования адекватной постановки проблемы решение принимается с нулевым риском.

Выбора решения из множества допустимых решений осуществляется на основе регулярной процедуры. Поэтому необходимо выделить особенности методов и теории принятия решений, классификация которых использует следующие варианты неопределенности:

1). Отсутствует информация о полной совокупности характеристик и оценок вариантов, а ***известен только дискретный ряд оценок в пространстве «варианты – условия»***, что означает принятие решений, если задано дискретное (обычно конечное) множество оценок вариантов при различных условиях. Для принятия решений в этой ситуации используется ***«метод системных матриц»,*** сущность которого состоит в применении различных *алгоритмов обработки этих матриц*, состоящих из оценок вариантов.

2). *Заданы вероятностные или статистические характеристики (оценки) явления, процесса, совокупности* и требуется ***минимизировать вероятность неправильного решения***. В подобной ситуации используются ***методы минимизации риска,*** причем модели риска строятся на основе вероятных моделей случайных событий и функций от случайных аргументов.

3). Заданы ***«графовые предпочтения»*** между вариантами, что требует ***преобразования графа*** с целью линейного упорядочения, когда выбор решения тривиален. Для принятия решений в данной ситуации используются методы комбинаторной аппроксимации.

4). Неопределенность задана в виде чисел и множеств, требуется создание адекватного ***исчисления нечетких чисел*** и множества для преобразования задачи принятия решений к задаче линейного упорядочения. К задачам с нечеткими переменными относятся задачи с лингвистическими переменными, для которых введены нечеткие числа.

5). Неопределенность задана вероятностно или статистически, а для принятия решений используется ***проверка вероятностно–статистических гипотез.***

Основные методы теории принятия решений, которые базируются на том или ином принципе обработки оценок, согласованном с техническим критерием выбора варианта. Мотивация выбора варианта позволяет в условиях наличия риска принять верное решение и определяет принцип выбора.

Примеры таких мотиваций часто носят качественный характер. Например, методы системных матриц используют минимаксный критерий, критерий Байеса-Лапласа и другие при обработке матриц. Эти критерии определяют ***оптимистические, пессимистические стратегии, стратегии нейтралитета или уравновешенного типа.*** Изучение методов получения оценок (на основе методов системного анализа) и методов обработки оценок (методов принятия решений) позволяет сформировать необходимые методы.

1. Основные принципы и определения. В различных областях науки и техники существуют ситуации, когда необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т.е. в условиях неполного знания о параметрах. В связи с этим, а также в связи с весомостью последствий от принятия тех или иных решений требуется определенная технология принятия решений. Для повышения надежности принятия правильного решения следует сформулировать ряд принципов, которыми целесообразно пользоваться:

– ***принцип формализации в условиях полной определенности*** на основе экстремальных методов системного анализа предполагает строгую формулировку целей, условий и ограниченный экстремальных задач при принятии решений. Адекватная формализация определяющим фактором при решении детерминированных прикладных задач.

– ***принцип объективной неопределенности*** предлагает адекватное описание совокупности неизвестных факторов, образующих ***класс неопределенности***. Определение класса неопределенности в сложных системах позволяет принимать решение на основе *адекватных методов и алгоритмов для заданного класса неопределенности*, отличающихся от *«субъективно эффективных методов и алгоритмов»*.

– ***принцип руководящих критериев*** позволяет осознанно решать проблему принятия решений. Практически данный принцип не исключает принятие решений на основе интуиции проектировщика или исследователя.

- ***«принцип формализации в условиях неопределенности»*** основан на методах и алгоритмах принятия решений в различных условиях на основе адекватного описания неполной информации о классе неопределенности в рамках обобщения логических заключений о критериях выбора решения на основе формализованной постановки задачи принятия решений в условиях *объективно существующей неопределенности*.

– ***принцип минимизации риска*** применительно к проблеме принятия решений предполагает минимизацию опасности, угрозы, связанных с принятием решений. Первоначально термин «риск» использовался в коммерции, и с ними связывалась неудача в каком-либо предприятии и величина потерь или выигрыша.

Постепенно, по мере психологической готовности, понятие риска стало привычным и получило объективные количественные характеристики, дифференцированные для каждой из задач. Минимизация риска является одним из методов принятия решений.

Многие прикладные задачи (особенно неформализованные) имеют много факторов, расстановка которых первоначально не является однозначной. Руководствуясь перечисленными принципами, можно в первом приближении E_i осознанно подойти к постановке задачи принятия решений.

2. Основная формальная структура принятия решений. В соответствии формулировкой основных принципов принятия решений можно дать ряд определений, способствующих адекватной формализации задачи принятия решений.

Определение 1. Под ***принятием решений*** будем понимать выбор одного варианта E_i из некоторого множества вариантов $\{E_i\} = E$. Далее будем полагать, что имеется конечное число вариантов

$$E_1 ,..., E_i ,..., E_m .$$

Понятия варианта обычно интуитивно ясно. Однако необходимо использовать строгое определение варианта, без которого принятие решений как выбор не может быть выполнено корректно.

Определение 2. ***Вариантом*** E_i будем называть одним из способов построения системы или выбора стратегии, допускающие получение результата с оценкой e_i. Другими словами, с вариантом E_i связана соответствующая ему оценка e_i.

В рассматриваемой ситуации имеется одномерная совокупность вариантов и соответствующих оценок, а выбор оптимального варианта производится по критерию

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge (e_{i0} = \max_i e_{i0})\}, \tag{1.а}$$

где целевые условия сформулированы как стремление достижения максимума оценок. Это правило выбора читается следующим образом: множество E_0 оптимальных вариантов состоит из тех вариантов E_{i0}, которые принадлежат множеству вариантов E, и оценка E_{i0}, которая максимальна среди всех оценок E_i (логический знак «$\wedge$» читается как «И»). Здесь учитывается факт наличия нескольких вариантов. Если целевые условия формулируются как достижение минимума оценок, то выбор оптимального варианта производится на основе критерия

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge (e_{i0} = \min_i e_{i0})\}, \tag{1.б}$$

Процедура выбора усложняется, когда принятие решений происходит на множестве многих вариантов E_i, соответствующих различным условиям (состояниям) F_j, что соответствует двумерной совокупности вариантов-условий и соответствующих им оценок. В этой ситуации совокупность оценок образует матрицу системных оценок, поскольку принятие решений происходит в ***пространстве «варианты-условия».*** Термин ***«системные оценки»*** отражает факт рассмотрения всей совокупности вариантов и условий, в которых происходит процесс принятия решений.

Определение 3. ***Матрицей системных оценок*** (матрицей решений) будем называть матрицу, приведенную в табл. 3.1,

Таблица 3.1.

Матрица системных оценок

ВАРИАНТЫ	**У С Л О В И Я**					
F_n	F_1	F_2	$\dots$	F_j	$\dots$	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	$\dots$	e_{1j}	$\dots$	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	$\dots$	e_{2j}	$\dots$	e_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
E_i	e_{i1}	e_{i2}	$\dots$	e_{ij}	$\dots$	e_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
E_m	e_{m1}	e_{m2}	$\dots$	e_{mj}	$\dots$	e_{mn}

описывающую экспертные оценки вариантов в пространстве «варианты-условия».

Таким образом, ***алгоритм принятия решений*** позволяет выбрать пару оценок $\left(E_{i^*}, F_{j^*}\right)$, которая является предпочтительной по выбранному критерию оптимальности, рациональности, полезности. Варианты критериев являются основой для алгоритмов принятия решений, аргументирующих позицию ***«лица принимающего решение»*** (ЛПР). Введение исходных определений позволяет перейти к рассмотрению элементов, характеризующих процесс принятия решений на основе обработки оценок e_{ij}.

Для принятия решений в рамках метода матриц системных оценок необходима формулировка основных алгоритмов обработки таблиц. Введем дополнительные понятия оценочной функции. В соответствии с понятиями оценочной функции сформулируем правила принятия решений с помощью оценочной функции и простейших критериев. Матрица системных оценок характеризует набор вариантов решений. Для однозначного принятия решений необходимо сформулировать критерии выбора. Введение оценочных (целевых) функций вариантов – первый этап на пути к однозначному и к наилучшему варианту решения.

Определение 4. Пусть различным вариантам E_i соответствуют различные условия F_j, порождающие матрицу оценок e_{ij} (см. табл. 3.1.). Оценочной функцией e_{ir} будем называть функцию, соответствующую каждому варианту E_i и характеризующую в целом все последствия выбора этого варианта (решения).

Другими словами, оценочная функция должна характеризовать ***правило «свертки» по условиям*** F_j. После введения оценочной функции e_{ir} варианта E_i процедура выбора сводится к применению критерия (1). Важное значения приобретает правило формирования величины e_{ir}, которое может быть различным в зависимости от позиции ЛПР.

3. Классические критерии, методы и оценочные функции для принятия решений. Рассмотрим комплекс оценочных функций и алгоритмов обработки таблиц оценок в пространстве «варианты-условия».

1). Допустим, что последствия каждого из альтернативных решений характеризуются суммой его наибольшей и наименьшей оценок. Тогда алгоритм формирования оценочной функции в рассматриваемой логике принятия решений примет следующий вид

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}. \qquad (2)$$

Объединение критериев (1) и (2) дает наилучший результат с оценкой:

$$\max_i e_{ir} = \max_i(\min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}). \qquad (3)$$

Формирование результата в соответствии с алгоритмом (3) имеет содержательный определенный смысл. Принятое решение соответствует «***стратегии компромисса*** между оптимистическим и пессимистическим подходами». В этом случае величина $\min_j e_{ij}$ соответствуют «***стратегии пессимизма***», а величина $\max_j e_{ij}$ – ***«стратегии оптимизма»***, сумма этих величин в (2) дает оценку компромисса.

2). ***«Последовательная оптимистическая стратегия»*** на этапах «свертывания» оценок варианта E_i и при выборе варианта приводит к алгоритму:

$$\max_i e_{ir} = \max_i(\max_j e_{ij}). \qquad (4)$$

В этом случае из матрицы решений (табл. 3.1) выбирается максимальный элемент. Стратегия выбора (4) – это ***«стратегия азартного игрока».***

3). Следующей стратегией выбора является ***«стратегия нейтралитета»:***

$$\max_i e_{ir} = \max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right), \qquad (5)$$

которой соответствует логическое обоснование: все встречающиеся отклонения от среднего допустимы и выбор параметров с этой точки зрения - оптимальный.

4). После приведенных ранее рассуждений ***«пессимистическая стратегия»*** или ***«стратегия пессимизма»*** лица, принимающего решение, характеризуется следующим критерием:

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\min_j e_{ij}) . \qquad (6)$$

5). Промежуточная стратегия лица, принимающего решение, в частности, ***«стратегия относительного пессимизма***», соответствует критерию

$$\max_i e_{ir} = \min_i \max_j (\max_j e_{ij} - e_{ij}). \qquad (7)$$

В этом случае решение, оценивает потери по сравнению с определенным по каждому варианту наилучшим результатом, а затем из совокупности наихудших результатов выбирает наилучший результат согласно представленной оценочной функции варианта.

6.2. Экспертные оценки, минимаксный метод, методы Байеса-Лапласа и Сэвиджа

Приведенные в п. 6.1 простейшие критерии и стратегии принятия решений (1) – (5) имеют ясное и логическое объяснение мотивов, которыми руководствуются лица, принимающие решения. Далее можно перейти к рассмотрению обобщенных классических критериев принятия решений. К ним относятся минимаксный критерий, критерий Байеса-Лапласа, критерии Сэвиджа, а также другие обобщения.

1. Минимаксный критерий и метод. Минимаксный критерий использует оценочную функцию (1.б) п. 6.1, соответствующую пессимистической позиции:

$$Z_{mm} = \max_i e_{ir} , \qquad (1)$$

где

$$e_{ir} = \min_i e_{ij}. \qquad (2)$$

Справедливо соотношение

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge (e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij})\}, \qquad (3)$$

причем Z_{mm} в соотношениях (1) – оценочная функция минимаксного критерия.

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием интерпретируется следующим образом. Матрица решений $\{e_{ij}\}$ дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. При принятии решения следует выбрать такие варианты E_{i0}, строки которых соответствуют наибольшим значениям e_{ir} этого столбца. Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск, поскольку лицо, принятие решение, ориентировано на пессимистическую позицию, что не позволяет получить худший результат. Вне зависимости от условий F_j результат выбора не может оказаться ниже Z_{mm}. Минимаксный критерий относит к числу фундаментальных, поскольку используется весьма часто. Применение минимаксного критерия оправдано в ситуациях:

1). О возможности появления внешних состояний (условий) F_j ничего неизвестно (например, неизвестны вероятности появления состояний F_j);

2). Приходится считаться с появлением различных внешних состояний F_j;

3). Решение реализуется только один раз;

4). Необходимо исключить всякий риск (недопустимо получение результата ниже значения Z_{mm}).

2. Критерий и метод Байеса–Лапласа. Для построения оценочной функции при данном критерии используется априорная информация о вероятностях q_j появления внешних условий F_j. Тем самым в рамках простейшей вероятностной модели учитывается каждое из возможных последствий.

Итак, пусть q_j – вероятность появления внешнего состояния (условия) F_j. Тогда для критерия Байеса-Лапласа

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir}, \qquad (4)$$

где

$$e_{ir} = \left(\sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \right), \qquad (5)$$

что соответствует множеству

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge (e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1)\}. \qquad (6)$$

Фактически в данном критерии в качестве оценочной функции выбирается математическое ожидание оценки, соответствующей j-му варианту, причем усреднение происходит по множеству условий F_j.

Правило принятия решений (4) – (6) имеет вероятностную интерпретацию. При этом ситуация, в которой принимаются решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний (условий) F_j известны и не зависят от времени;

– решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;

– для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

Позиция лица, принимающего решения на основе критерия Байеса-Лапласа, более оптимистична, чем по минимаксному критерию.

3. Критерий и метод Сэвиджа. Этот критерий основывается на предварительном преобразовании матрицы системных оценок в соответствии с соотношениями:

$$e_{ij} \to a_{ij} = (\max_i e_{ij} - e_{ij}). \qquad (7)$$

Оценочная функция имеет вид:

$$e_{ir} = \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}), \qquad (8)$$

$$Z_s = \min_i e_{ir} = \min_i [\max_j \max_i e_{ij} - e_{ij}]. \qquad (9)$$

Множество оптимальных вариантов решения определяется соотношением

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge (e_{i0} = \min_i e_{ir})\}. \qquad (10)$$

Смысл критерия (9) становится ясным после анализа соотношений (7) – (10).

Величины $a_{ij} = (\max_i e_{ij} - e_{ij})$, вычисляемые в соответствии (7), можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии F_j вместо варианта E_i выбрать другой, оптимальный для этого внешнего состояния. Величины $a_{ij} = (\max_i e_{ij} - e_{ij})$ можно также интерпретировать и как потери (штрафы), возникающие в состоянии F_j при замене оптимального для него варианта E_i. Тогда величина e_{ir}, определенная равенством (5), представляет собой – при интерпретации a_{ij} как потерь – максимально возможные (по всем внешним состоянием F_j) потери в случае выбора варианта E_i. Согласно соотношениям (8), (10) максимально возможные потери минимизируются за счет выбора E_i.

С точки зрения матрицы $\{e_{ij}\}$ критерий Сэвиджа связан с риском, однако с позиции матрицы $\{a_{ij}\}$ он от риска свободен, поскольку использует стратегию минимаксного критерия.

4. Обобщенный минимаксный критерий и метод. Этот критерий использует расширение доли вероятностно заданной неопределенности. Предположим, что для каждого из возможных внешних состояний F_j определена вероятность его появления $q_j : 0 < q_j < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$ Введем вероятность P_i применения i-го варианта решения E_i и будем предполагать возможность реализации m вариантов решения. Тогда среднее значение

$$e(P,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j P_i \, , \qquad (11)$$

где $P = (P_1, ..., P_m), \ q = (q_1, ..., q_n)$.

В реальной ситуации вектор q неизвестен. В этом случае, ориентируясь на наименее выгодное распределение q состояний F_j, можно добиться максимального увеличения $e(P,q)$ за счет выбора наиболее удачного распределения P вариантов решения E_i. Подобная стратегия соответствует расширенному минимаксному критерию, причем в данной ситуации реализуется игровая стратегия: состояния F_j минимизируют критерий, а варианты E_i его максимизируют. Общая формулировка расширенного минимального критерия имеет вид:

$$E(P_0) = \{E(P_0) \mid E(P_0) \in \hat{E} \wedge e(P_0, q_0) = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j P_i \,, \qquad (12)$$

где векторы P и q определены в (11).

Таким образом, цель расширенного минимаксного критерия нахождение наилучшего распределения вероятностей на множестве вариантов E_i, когда в многократно воспользовавшейся ситуации ничего неизвестно о вероятностных состояний F_j, относительно которых предполагается невыгодное распределение.

6.3. Производные критерии и методы принятия решений

Данный класс критериев позволяет рассматривать задачи принятия решения с обобщенных позиций, причем обобщение предполагает более полный учет априорно известных факторов, а также введение новых функциональных элементов.

Следует иметь в виду, что для интерпретации критериев можно воспользоваться идеями п. 6.1. В соответствии с п. 6.1 целесообразно свести производные (обобщенные) критерии в табл. 3.2.

1. Критерий Гурвица. Оценочная функция критерии Гурвица находится между точками предельного оптимума (C = 0) и крайнего пессимизма (C = 1). Характерно, что при C = 1 критерий Гурвица превращается в минимаксный критерий (см. п. 6.1).

2. Критерий Ходжа-Лемана. Критерий основан на минимаксном критерии и критерии Байеса-Лапласа, характеризуется тем, что с помощью параметра ν выражает степень доверия к используемому распределению вероятностей. При $\nu = 1$ критерий переходит в критерий Байеса-Лапласа, а при $\nu = 0$ – в минимаксныйкритерий. Ситуация, в которой рекомендовано применение этого критерия, характеризуется следующими условиями: вероятности появления состояний F_j неизвестны, но некоторые предположения о распределениях вероятностей возможны; принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций: при малых числах реализации допускается некоторый риск.

Таблица 3.2.

Производные критерии принятия решений

Тип Критерия	Оценочная функция	Множество оптимальных вариантов решения
Критерий Гурвица	$z_{HW} = \max\limits_i e_{ir},$ $e_{ir} = c \min\limits_j e_{ij} +$ $+(1-c)\max\limits_j e_{ij}$	$E_0 = \{E_{i0} \| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} =$ $= \max\limits_i \left[C \min\limits_j e_{ij} + (1-c)\max\limits_j e_{ij} \right] \wedge \| 0 \le c \le 1$
Критерий Ходжа-Лемана	$z_{HL} = \max\limits_i e_{ir},$ $e_{ir} = \nu \sum\limits_{j=1} e_{ij} g_j +$ $+(1-\nu)\min\limits_j e_{ij},$ $0 \le \upsilon \le 1$	$E_0 = \{E_{i0} \| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} =$ $= \max\limits_i \left[\nu \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} g_i + (1-\nu)\min\limits_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1\}$
Критерий Гермейера	$z_G = \max\limits_i e_{ir},$ $e_{ir} = \min\limits_j e_{ij} q_j$	$E_0 = \{E_{i0} \| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max\limits_i \min\limits_j e_{ij} \wedge e_{ij}\}$

Критерий Байеса-Лапласа (минимаксный)	$Z_{MM} =$ $= \min e_{ir} =$ $= \max\limits_{i} e_{i0\,j0}$	$E_0 = \left\{ E_{i0} \middle\| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max\limits_{i \in I_1 \cap I_2} \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij}\, q_i \right\},$ $I_1 = \left\{ i \middle\| i \in [1,\ldots,m] \wedge e_{i_0 j_o} - \min\limits_{j} e_{ij} \le \underbrace{\varepsilon_{gan}} \right\},$ $I_2 = \left\{ i \middle\| i \in [1,\ldots,m] \wedge \max\limits_{j} e_{ij} - \right.$ $\left. - \max\limits_{j} e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min\limits_{j} e_{ij} = \varepsilon_i \right\}$

3. Критерий Ю.Б. Гермейера. Данный критерий ориентирован на оценочные функции, отражающие величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех e_{ij} матрицы оценок, и применяется в хозяйственных задачах и ориентирован на цены и затраты. Смысл остальных параметров: q_j – вероятность условия F_j, а e_{ir} – минимум математического ожидания затрат. В критерии Ю.Б. Гермейера допускается некоторый риск при принятии решения, а также должны быть известны вероятности q_j.

4. Минимаксный критерий и метод Байеса-Лапласа. Метод позволяет лучше адаптироваться к ситуации за счет введения составных частей, логически унаследованных от других критериев (см. табл. 3.2). На первом этапе формирования критерия фиксируется опорное значение Z_{mm}, задаваемое минимаксным критерием. Затем задается допустимый риск $\xi_{доп} > 0$ и определяется множество согласия I_1. Величины $\xi_i = \xi_{i0\,j0} - \min\limits_{i} e_{ij},\ i \in I_1$. характеризуют наиболее возможные потери в сравнении с $e_{i0\,j0}$. После этого формируется выигрышное множество I_2. Множеству $I_1 \cap I_2$ принадлежат варианты решений, для которых в определенных состояниях могут иметь потери по сравнению с состоянием, задаваемых минимаксным критерием, однако в других состояниях имеется, по меньшей мере, прирост выигрыша.

6.4. Контрольные вопросы

1. Какое содержание соответствует различным критериям и методам принятия решений на основе обработки таблиц оценок вариантов в пространстве «варианты-условия».
2. Какие интерпретации имеют статистические оценки вариантов минимаксного метода и оценки методов Байеса-Лапласа, Сэвиджа.
3. Какие дополнительные возможности имеют производные оценки вариантов и методы принятия решений относительно упомянутых в п. 1 и 2.

7. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Методы минимизации риска основаны на различных стохастических моделях и оценках, которые существенно расширяют возможности принятия решений.

7.1. Методы минимизации риска и алгебры событий

Рассмотренные в разделе 6.1 методы принятия решений основались на обработке элементов матрицы системных оценок. При этом отмечалось, что используемые критерии допускают некоторый риск принятия неправильного или неэффективного решения. В данном разделе изучаются методы и алгоритмы ЛПР на основе явного определения и минимизации риска в рамках аксиоматических вероятностно-статистических моделей.

Числовые характеристики риска можно использовать при формировании матрицы системных оценок для последующего принятия решений на основе критериев, описанных выше.

Следует иметь в виду, что рассматриваемые вероятностные модели характеризуют некоторые подходы к принятию решений на основе минимизации риска.

Требования практики являются существенными для класса вероятностных моделей, однако приводимые результаты позволяют получить первые навыки в принятии решений на основе аксиоматических моделей.

1. Определение и минимизация риска. Решение задачи основано на простейших моделях вероятностей событий. В понятие риска в приложениях вкладывается самый различный смысл. Общим является то обстоятельство, что, это понятие связано с неуверенностью, произойдет или не произойдет нежелательное событие. Рассмотрим понятие риска с учетом содержания задачи принятия решений. Учитывая необходимость количественных оценок, можно использовать следующую формулировку: ***величина риска*** определяется как произведение «величины события» на меру возможности его наступления. Последствия A нежелательного события или состояния может описываться и оцениваться специфическими параметрами. Диапазон изменения этих параметров при этом весьма широк – от экономических параметров до этнических ценностей.

Вероятность q является первой мерой возможности наступления события. Следовательно, риск

$$R = A\,q. \qquad (1)$$

Источники риска исследуются при систематическом анализе. Вспомогательным средством является дерево ошибок, которое строят аналогично дереву решений.

Количественное описание риска может определяться с помощью теоретико-вероятностного подхода и соответствующих моделей. При анализе и построении вероятностных моделей риска (на основе анализа алгебры событий) можно описать множество S возможных неблагоприятных элементарных событий.

Определение 1. События

$$\{S_1, ..., S_i, ..., S_n\} = S \qquad (2)$$

называются ***элементарными событиями***, если они отражают весь комплекс исходных неблагоприятных событий, определяющих риск.

Введем понятие события, определяемого на основе элементарных событий.

Определение 2. ***Событием*** K будем называть ***сочетания элементарных событий*** (сочетания отличаются хотя бы одним событием).

Определение 3. Множество всех возможных сочетаний K будем называть ***булеаном*** S - множеством всех подмножеств.

В состав события K целесообразно включить само множество S и ***пустое множество*** $\varnothing$ (пустое множество соответствует отсутствию неблагоприятных событий).

Определенное подмножество K является подмножеством неблагоприятных событий множества S

$$K = \{S_{k1}, S_{k2}, ..., S_{kl}\}, \;\; S_{kj} \in S, \;\; j = 1, ..., l \, . \qquad (3)$$

На множестве всех событий можно выполнить ***операции алгебры множеств.*** Если символом $K_1 K_2$ определено объединение двух неблагоприятных событий, то можно определить их следующие свойства:

1). ***Объединение*** $K_1 \bigcup K_2$ образует объединение событий, т.е. событие, включающее все элементарные события, принадлежащие K_1 или K_2;

2). ***Пересечение*** $K_1 \bigcap K_2$ образует пересечение событий, т.е. событие, включающее все элементарные события, одновременно принадлежащие K_1 и K_2;

3). ***Разность*** K_1 / K_2 образует событие, включающее все элементарные события, принадлежащие K_1, но не принадлежащее K_2;

4). ***Дополнение*** $S \setminus K$ образует сочетание, включающее все элементарные события S, не принадлежащие K.

Пусть с некоторым рискованным вариантом E связаны элементарные сочетания неблагоприятных событий $K_{i1},...,K_{ij},...,K_{ik_i}$. Формула «элементарные сочетания неблагоприятных событий» означает, что никакое собственное подмножество сочетаний K_{ij} не может само встречаться как сочетание неблагоприятных событий. Тем самым определена ***структура неблагоприятных событий***. Если N_i – события, соответствующее гарантированному отсутствию неблагоприятных свойств рискованного варианта решения E_i то множество $\overline{K_i} = \left\{K_{i1}, K_{i2},...,K_{ij},...,K_{ik_i}, N_i\right\}$ образует полную, связанную с решением E_i систему событий.

На множестве рассмотренных событий введем меру в виде вероятности. Допустим, что каждому сочетанию неблагоприятных событий K_{ij}, $(j = 1,...,k_i)$, которое может реализовываться в результате принятия решений $E_i \subset E$, а также событию N_i можно приписывать вероятности $P(K_{ij})$ и, соответственно:

$$P(N_i):\ O \le P\left(K_{ij}\right) \le 1, \quad \sum_{j}^{k_i} P\left(K_{ij}\right) + P\left(N_i\right) = 1.$$

Если каждому сочетанию K_{ij} соответствует количественно описываемое последствие A_{ij}, то величина риска R_i, соответствующего решению E_i, определяется формулой математического ожидания

$$R_i = \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} P\left(K_{ij}\right). \quad (4)$$

Величина риска определяется величинами A_{ij} и $P(K_{ij})$, поэтому для выбора значений этих параметров можно сформулировать задачу минимизации риска (4) при ограничениях на параметры. Соответствующая экстремальная задача примет следующий вид:

$$\left(A_{ij}^*, P^*\left(K_{ij}\right)\right) = \arg\min\left\{\sum_{j=1}^{K_i} A_{ij} P\left(K_{ij}\right) \middle| A_{ij}^- \le A_{ij} \le A_{ij}^+,\ 0 \le P\left(K_{ij}\right) \le P^+\left(K_{ij}\right)\right\}. \quad (5)$$

Решение задачи (5) можно получить аналитическими или численными методами условной минимизации в конечномерных пространствах. Следует иметь в виду, что величина R_i представляет собой ***среднюю величину ущерба*** при принятии варианта решения E_i, поскольку соответствует математическому ожиданию ущерба.

Иногда с риском связывают вероятность наступления определенного сочетания неблагоприятных событий $S_0 \in \bar{K}_i$. Такой подход целесообразен, если последствия A_{i0} риска E_i и S_0 неизвестны. В этом случае при использовании функции – индикатора $S_j \to 1_0(S_j)$ определяемой условиями:

$$1_0\left(S_j\right)=\begin{cases}1, S_i=S_0,\\ 0, S_j\neq S_0,\end{cases} \quad S_j\in K_i, \qquad (6)$$

для $A_j=1_0(S_j)$ на основании равенства (4) справедливо следующее соотношение:

$$R_i=P_i\left(S_0\right). \qquad (7)$$

Если при принятии решения E_i все вероятности реализации сочетания неблагоприятных событий $K_{ij}\in \bar{K}_i$ одинаковы, ($P=\left(K_{ij}\right)=P_i$), то на основе (7) можно получить

$$R_i=P_i\sum_{j=1}^{K_i}A_{ij}. \qquad (8)$$

Для принятия решения E_i при определенном сочетании неблагоприятных событий K_{ij} и последствий A_{ij} функции риска $A_i:K_{ij}\rightarrow A_{ij},\, j=j=\overline{1,K_i}$, представляют особый интерес два частных случая:

а). Если для двух взаимоисключающих сочетаний K_{ij} и K_{il}, $j\neq l$ т.е. $K_{ij}\bigcap K_{il}=K_{ij}\cap K_{il}=\varnothing$, справедливо равенство:

$$A_i\left(K_{ij}\cup K_{il}\right)=A_i\left(K_{ij}\right)+A_i\left(K_{il}\right), \qquad (9)$$

то говорят об аддитивных штрафных функциях и, соответственно, об ***аддитивных функциях риска***. В этом случае для сочетаний, которые состоят из единственного неблагоприятного события $K_{i1}=\left\{S_1\right\}, K_{i2}=\left\{S_1\right\},\ldots,K_{in}=\left\{S_n\right\}$, справедливо соотношение:

$$A_i[S_1\bigcup S_2\bigcup\ldots\bigcup S_n]=A(S_1)+A(S_2)+\ldots+A(S_n), \qquad (10)$$

а риск

$$R_i = \sum_{s \in S} A_i(S) P_i(S). \qquad (11)$$

При нормальной штрафной функции K_i и функции риска A_i для двух взаимоисключающих сочетаний K_{ij} и K_{il}, $j \neq l$, справедливо равенство

$$\max\left\{A_i(K_{ij}), A_i(K_{il})\right\} = A_i(K_{ij} \cup K_{il}) = A_i(K_{ij}) + A_i(K_{il}). \qquad (12)$$

Этот случай наглядно характеризует свойства аддитивной штрафной функции.

б). Для K_{il}, $(K_{il} \in \bar{K}_i)$ дополнительный ущерб за счет K_{il} при K_{ij} на основании соотношения

$$A_i(K_{il} | K_{ij}) = A_i(K_{ij} \cup K_{il}) - A_i(K_{ij}).$$

Откуда следует совокупность соотношений

$$A_i(K_{ij} \cup K_{il}) = A_i(K_{il} | K_{ij}) + A_i(K_{ij}),$$

$$A_i(K_{i1} \cup K_{i2} \cup \ldots \cup K_{ik_i}) =$$

$$= A_i(K_{i1}) + A_i(K_{i2} | K_{i1}) + A_i(K_{i3} | K_{i1} \cup K_{i2}) + \ldots \qquad (13)$$

$$\ldots + A_i(K_{ik_i} | K_{i1} \cup \ldots \cup K_{ik_{i-1}}).$$

В случае аддитивной штрафной функции можно получить равенство

$$A_i\left(K_{il}\,\middle|\,K_{ij}\right)=A\left(K_{il}\right). \quad (14)$$

Вариант решения $E_i \in E$ без учета возможности неблагоприятных последствий будет иметь полезность I_i. Соответствующая варианту решения E_i величина

$$G_i = l_i - R_i \quad (15)$$

называется ***суммарным эффектом решения.***

Множество рациональных вариантов решения обозначают следующим образом:

$$\overline{E}^{+} = \left\{E_i \in E : G_i > 0\right\}. \quad (16)$$

Вариант решения E_i^* называют ***оптимальным вариантом***, если

$$G_i^* = \max_{E_i \in E} G_i. \quad (17)$$

Таким образом, соотношение (17) иллюстрирует формализованное определение риска, которому соответствует числовые вероятностные характеристики в рамках теоретико-множественно-вероятностной схемы.

7.2. Методы минимизации риска и обобщенные модели вероятностей событий

Для описания неблагоприятных событий K_{ij} в случае сложной вероятностной схемы используются специальные методы. Ранее данное определение риска основывалось на известных вероятностях неблагоприятных событий. Однако практические задачи по вычислению риска могут опираться на более сложные вероятностные модели. К ним относятся модели, использующие условные вероятности, обобщенные модели умножения вероятностей и формулы Байеса. Естественно предположить, что неблагоприятные события зависят от других событий, вероятности которых заданы.

1. Исходные предпосылки. Рассмотрим классическую ***схему введения условной вероятности*** применительно к вычислению вероятности неблагоприятного события. Пусть в серии из M испытаний M_1 благоприятных и M_2 неблагоприятных исходов. Какова вероятность того, что при проведении очередного испытания имеют место благоприятный и неблагоприятный исходы. Ответить на этот вопрос позволяет понятие условной вероятности, причем вопрос можно сформулировать следующим образом: Какова вероятность того, что, например, второе испытание будет иметь благоприятный исход (событие B) при условии, что в первом испытании имело место также благоприятное событие (событие A). Рассуждения строятся в рамках **«урновой схемы без возвращения».**

Если первое испытание имеет благоприятный исход, то перед вторым испытанием возможно $(M-1)$ вариантов исходов, из которых (M_1-1) благоприятных исходов, а M_2 – неблагоприятных. Поэтому предположим, что условная вероятность равна $(M_1-1)/(M-1)$.

Далее перейдем к строгому определению условной вероятности в соответствии с интуитивными представлениями о ней. Для этого введем конечное вероятностное пространство (Ω, A, P) где Ω – множество элементарных событий, A – алгебра события, P – вероятностная мера.

Определение 1. ***Условной вероятностью события*** B при осуществлении события K с вероятностью $P(K)$ (обозначается P(B/K)) принимается величина

$$P\left(B\middle|K\right)=P\left(KB\right)/P\left(K\right). \qquad (1)$$

В случае классического способа задания вероятностей:

$$P\left(K\right)=\frac{N\left(K\right)}{N\left(\Omega\right)},\ P\left(KB\right)=\frac{N\left(KB\right)}{N\left(\Omega\right)},\ P\left(B\middle|K\right)=\frac{N\left(KB\right)}{N\left(K\right)}. \qquad (2)$$

и, следовательно, для вычисления вероятностей благоприятных и неблагоприятных событий можно использовать свойства условных вероятностей:

$$P\left(K\middle|K\right)=1,\ P\left(\varnothing\middle|K\right)=0,\ P\left(B\middle|K\right)=1,\ B\supseteq K,$$

$$P\left(B_1+B_2\middle|K\right)=P\left(B_1\middle|K\right)+P\left(B_2\middle|K\right).$$

При этом следует иметь в виду соотношение:

$$P\left(B\middle|K\right)+P\left(\overline{B}\middle|K\right)=1.$$

Рассмотрим модель для вычисления вероятностей неблагоприятных событий согласно известной формуле ***полной вероятности***. Предположим, что имеется некоторое разбиением множества $D=\{K_1,...,K_n\}$, $P(K_i)>0,\ i=1,...,n$, которое часто называют также ***полной группой*** несовместных событий, когда $B=BK_1+...+BK_n$, и, следовательно

$$P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(BK_i\right). \qquad (3)$$

Однако

$$P\left(BK_i\right)=P\left(B\middle|K_i\right)P\left(K_i\right), \qquad (4)$$

поэтому справедлива ***формула полной вероятности***

$$P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(B\middle|K_i\right)P\left(K_i\right). \qquad (5)$$

В частности, поскольку $0 < P(K_i) < 1$, то справедливо следующее равенство

$$P(B) = P(B|K)P(K) + P(B|\bar{K})P(\bar{K}). \qquad (6)$$

Вероятностные модели (5) могут использоваться для вычисления вероятностей неблагоприятных событий В, когда заданы условные вероятности Р(В|К). Основные вероятностные модели, используемые при принятии решений, приведены в табл. 3.3.

Пример 1. Пусть имеется ситуация, в которой возможно М исходов, из которых m – неблагоприятных. Какова вероятность

Таблица 3.3.

Вероятности сложных событий

Формулы полной вероятности	Формулы Байеса
1. $B = BK_1 + ... + BK_n$ 2. $P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(BK_i)$ 3. $P(BK_i) = P(B\|K_i)P(K_i)$ 4. $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\|K_i)P(K_i)$	1. $P(P_iB) = P(K_i\|B) \cdot P(B)$ 2. $P(BK_i) = P(B\|K_i)P(K_i)$ 3. $P(K_i\|B) = \frac{P(B\|K_i)P(K_i)}{P(B)} = \frac{P(B\|K_i)P(K_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B\|K_i)P(K_i)}$

того, что на втором испытании будет неблагоприятный исход. Предполагается, что исход первого испытания известен, рассматривается выборка объема (n–2), и все исходы являются равновозможными.

Решение задачи. Далее используется «урновая схема». Пусть К – первое неблагоприятное испытание, а В – второе неблагоприятное испытание. Тогда вероятность:

$$P\left(B\middle|K\right)=\frac{P\left(BK\right)}{P\left(K\right)}=\frac{\dfrac{m\left(m-1\right)}{M\left(M-1\right)}}{m/M}=\frac{m-1}{M-1},$$

$$P\left(B\middle|\bar{K}\right)=\frac{P\left(B\bar{K}\right)}{P\left(\bar{K}\right)}=\frac{\dfrac{m}{M}\dfrac{\left(M-m\right)}{\left(M-1\right)}}{\dfrac{m-M}{m}}=\frac{m}{M-1}.$$

В соответствии с (7)

$$P\left(B\right)=P\left(B\middle|K\right)P\left(K\right)+P\left(B\middle|\bar{K}\right)\cdot P\left(\bar{K}\right)=\frac{m-1}{M-1}\cdot\frac{m}{M}+\frac{m}{m-1}\cdot\frac{M-m}{M}=\frac{m}{M.}\ .$$

Рассмотрим очередную вероятностную модель. Из определения условной вероятности следует

$$P\left(KB\right)=P\left(B\middle|K\right)P\left(K\right). \qquad (7)$$

Эта формула как ***«формула умножения вероятностей»*** обобщается по индукции следующим образом: если события $K_1,...,K_{n-1}$ таковы, что $P(K_1...K_{n-1})$, то

$$P\left(K_1...K_n\right)=P\left(K_1\right)P\left(K_2\middle|K_1\right)...P\left(K_n\middle|K_1...K_{n-1}\right), \qquad (8)$$

где $K_1...K_n=K_1\cap...\cap K_n$.

2. Формула Байеса. Важное место при определении вероятности неблагоприятных исходов занимает ***классическая формула Байеса***, существенно расширяющая возможность вероятностного описания риска.

Пусть события К и В таковы, что Р(К) > 0 и Р(В) > 0. Тогда вместе с (8) справедлива формула

$$P(KB) = P(K|B)\,P(B). \qquad (9)$$

Из равенств (7) и (9) можно получить ***формулу Байеса,*** представляемую следующим равенством

$$P(K \mid B) = \frac{P(K)P(B \mid K)}{P(B)}. \qquad (10)$$

Если события $K_1,...,K_n$ образуют разбиение множества Ω, то из (5) и (10) следует ***теорема Байеса***:

$$P(K_i \mid B) = \frac{P(K_i)P(B \mid K_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(K_i)P(B \mid K_i)}. \qquad (11)$$

В статистических приложениях события вида $K_1,...,K_n$, $(K_1 + ... + K_n) = \Omega$, часто называют ***«гипотезами»***, а $P(K_i)$ ***– априорной вероятностью гипотезы*** K_i.

Определение 2. ***Условной вероятностью*** $P(K_i \mid B)$ называется апостериорная вероятность гипотезы K_i после того, как наступило событие В.

Рассмотрим пример применения формулы Байеса.

Пример 2. Пусть ситуация для принятия решения характеризуется наличием двух агрегатов: K_i – неблагоприятное состояние первого агрегата с вероятностью 1/2 и K_2 – неблагоприятное состояние второго агрегата с вероятностью 1/3 . Производиться испытание одного из агрегатов. Установлено, что в результате испытания агрегат находится в неблагоприятном состоянии, тогда требуется найти вероятность того, что выбран первый агрегат.

Для решения задачи построим ***вероятностную модель***. В качестве пространства элементарных событий естественно взять множество $\Omega=\{K_1H, K_1\ \ ,\ \ _2\ \ ,\ \ _2\ \ \}$, описывающие все исходы выбора агрегата и проверки (K_1H – выбран первый агрегат, и в результате проверки установлено, что он находится в неблагоприятном состоянии и т.д.). Вероятности $P(\omega)$ исходов

$$P(K_1)=P(K_2)=1/2,\ P(H|K_1)=1/2, P(H|K_2)=1/3.$$

Этими условиями вероятности исходов определяются однозначно

$$P(K_1H)=1/4,\ P(K_1\ \ )=1/4,\ \ (\ \ _2\ \ )=1/6,\ \ (\ \ _2\ \ )=1/3.$$

Тогда:

$$P(K_1|H)=\frac{P(K_1)P(H|K_1)}{P(K_1)P(H|K_1)+P(K_2)P(H|K_2)}=\frac{3}{5}.$$

Рассмотренные выше модели вычисления вероятностей неблагоприятных событий в условиях, когда известны оценки ущерба от неблагоприятных событий A_i, позволяют вычислить ***риск***

$$R=\sum_{i=1}^{n} A_i P(K_i\,|\,H), \qquad (12)$$

где вероятности неблагоприятных событий определяют соответствующими вероятностными схемами (5), (8) или (11). Для определения величин $P_i(K_i\,|\,B)$ из условия минимизации риска необходимо решить экстремальную задачу: вычислить

$$R(K_i)=\arg\min\ \{\ \sum_{i=1}^{n} A_i P(K_i)\ \ |\ \ P^-(K_i)\le P(K_i)\le P^+(K_i),\ i=1,...,n\ \}. \qquad (13)$$

Приведенные результаты иллюстрируют методы принятия решений в рамках концепции риска на основе моделей теории вероятностей событий и их обобщений. Эти методы позволяют сформулировать комплекс необходимых моделей для анализа полного набора совокупности ситуаций, адекватных рассматриваемым моделям процессов.

7.3. Методы минимизация риска и модели случайных величин

Классификация моделей риска на основе моделей элементов теории случайных величин предполагает наличие двух характеристик – распределений и моментов, приведенных в табл. 3.4. Прежде чем рассматривать содержательные задачи, необходимо дать описание моделей в виде функций случайных величин.

Обращение к моделям данного типа связано с тем, что риск является во многих практических задачах следствием ряда аргументов, учитываемых в рассматриваемых ранее моделях. Рассматриваемые модели характеризуются наличием детерминированной функциональной связи между случайными аргументами.

Естественно, что возможны другие типы вероятностных моделей, однако данный класс моделей охватывает широкий набор прикладных задач.

Модели случайных величин. В табл. 3.4 даны ***законы распределения*** и некоторые ***моменты функций непрерывных случайных величин.***

Модель 1. Функция $Y = \varphi(X)$ характеризует простейшую схему, для которой имеются – плотность распределения, начальные и центральные моменты.

Использование моделей данного класса позволяет вычислить оценку величины риска в виде вероятности $P(y \geq a)$ превышения величиной Y некоторого заданного значения: оценку величины риска в виде вероятности $P(y^{-} \leq y \leq y^{+}$ вывода координаты y из некоторого интервала $[y^{-}, y^{+}]$.

Модель 2. Пусть $y = \varphi(x_1, x_2)$, причем вероятностное описание выхода y возможно, если случайные величины x_1 и x_2 рассматривать как систему случайных величин, распределение которой имеет вид $f_x(x_1, x_2)$.

Вычисление распределения случайной величины $F_y(y)$ и ее моментов $\bar{y}$ и $D[y]$ позволяет выбрать различные модели риска и параметры функции $y = \varphi(x_1, x_2)$ из условия минимума по критерию риска.

Модель 3. Пусть: $Y = \varphi(X)$ обобщает модель 2 на случай нескольких слагаемых, причем аргументы $X_1, ..., X_n$ (определяющие окончательную оценку риска) описываются плотностью системы случайных величин. На основе исходных характеристик аргументов определяются математическое ожидание $\bar{Y}$ и дисперсия $D[Y]$.

Необходимо обратить внимание, что аргументы случайных величин, определяющие характеристики риска, задаются распределением X_i, $i = 1, ..., n$, (моделей 2 и 3) как ***системы случайных величин***. Практически более распространен случай, когда известны распределения отдельных аргументов. Этому условию удовлетворяют следующие модели 4 и 5.

Таблица 3.4.

Распределения и моменты случайных величин

Вид случайной функции	Распределения непрерывных величин	Моменты непрерывных величин
1. $Y=\varphi(x)$ – (монотонная); $x,Y\in R^1$; $x\sim f_x(x)$	$f_y(y)=f_x[\psi(y)]\lvert\psi'(y)\rvert$	$\bar{y}=M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f_x(x)dx,$ $D[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)]^2 f(x)dx, y^{-2},$ $m_k[-Y]=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)]^k f(x)dx;$ $M_k[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\bar{y}]^k f(x)dx,$ $k=1,2...$
2. $Y=\varphi(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\sim f_x(x_1,x_2)$ Y – плотность вероятностей случайных величин	$F_y(y)=\int_{D_y} f_x(x_1,x_2)dx_1dx_2,$ D_y – область на плоскости $x_1\otimes x_2$ для которой $-Y<y$ $f_y(y)=\frac{d}{d_y}F_y(y)$	$\bar{Y}=M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2$ $D[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1,x_2)]^2\times$ $\times f_x(x_1,x_2)dx_1dx_2$
3. $Y=\varphi(x)$, $Y_1x\in R^n$, $f_x(x_1...x_n)$ – плотность системы $x_1,...,x_n$, φ – взаимно-однозначное отображение	$f_y(y_1,...,y_n)=\lvert D\rvert f_x(x_1,...,x_n),$ $D=\frac{\partial(x_1...x_n)}{\partial(y_1...y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix},$ $x_1,...,x_n$ определены с помощью $y_1,...,y_n$	$m_k[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1...x_n)]^k\times$ $\times f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n, M_k[Y]=$ $=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1,...,x_n)]-\bar{Y}]^k\times$ $\times f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n$

Вид случайной функции	Распределения непрерывных величин	Моменты непрерывных величин
4. $Z = X + Y$, $x \sim J_x(x)$, $Y \sim f_y(y)$	$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x)dx = f_x * f_y$, $F_z(Z) = \iint_{x+y<z} f_x(x) f_y(y)dxdy$	-
5. $Y = x_1 - x_2$, $x_i \sim f_i(x_i), i = 1,2$	$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y+z) f_2(z)dz$	-
6. $Y = x_1 + \ldots + x_n$, $x_j \sim f_{x_j}(x_j)$	$f_Y(y) = \frac{1}{2\prod} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \times$ $\times \left\{ \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(t) \right\} dt$, $2geE_{x_j}(t) = \int_{-\infty}^{ixt} e^{ixt} f_{x_j}(x)dx$	-

Модель 4. Эта модель позволяет характеризовать величину риска плотностью $f_z(Z)$ случайной величины Z =X+Y, которая вычисляется в виде ***свертки распределения*** $f_x * f_y$.

Модель 5. Характеризует плотность распределения $f_y(Y)$ разности $X_1 - X_2 = Y$. Модель обобщает характеристики распределений для суммы нескольких случайных величин.

Плотность распределения суммы $f_y(Y)$ определяется с помощью характеристических функций $E_{X_i}(*)$, преобразования Фурье для плотности каждого из слагаемых X_j. При этом моменты функций случайных величин методами теории вероятностей.

Существенное расширение класса вероятностных моделей риска может быть достигнуто при рассмотрении моделей принятия решений на основе ***детерминированных функций случайных величин,*** в частности, целочисленных аргументов.

Некоторые примеры моделей данного класса представлены в табл. 3.5.

В таблице приведены модели типа функционального преобразования (модель 1), модели в виде суммы целочисленных двух (модель 2) и нескольких (модель 3) переменных. Приведенные модели расширяют возможности аналитических моделей риска, которые иллюстрируются далее примерами.

Рассмотрим содержательные примеры вычисления технического риска, используемые в приложениях. Известно, что установки и приборы имеют некоторые пределы (например, прочности), превышение которых обуславливает выход системы из строя.

Риск здесь можно охарактеризовать вероятностью превышения предела $\bar{P}$. Если X и Y – случайные величины, причем X характеризует нагрузку, а Y – несущую способность, то для технического риска справедливо соотношение

$$R_f = P = \hat{P}(x > Y)\,. \qquad (1)$$

В случае известных плотностей f_x и f_y, соответственно, для нагрузки несущей способности и при стохастической независимости X и Y дает несущую способность, то для технического риска справедливо соотношение

$$R_f = P = \hat{P}(x > Y)\,, \qquad (2)$$

Таблица 3.5.

Распределения и моменты дискретных величин и функций

Вид случайной функции	Распределения дискретных величин	Моменты дискретных величин
1. $Y=\varphi(x_1,x_2)$, (x_1,x_2) – система случайных величин	-	$\bar{Y}=M[Y]=$ $=\sum_i\sum_j\varphi(x_{1j},x_{2j})\times$ $\times P(x_1=x_{1i},x_2=x_{2j})$; $D[Y]=$ $=\sum_i\sum_j\left[\varphi(x_{1u},x_{2j})-\bar{y}\right]^2\times$ $\times P(x_1=x_{1i};x_2=x_{2j})$
2. $Y=x_1+x_2$, x_i – целочисленные, $x_i\sim P_i(x_i)$	$P(x_1+x_2=n)=$ $=\sum_{m=-\infty}^{\infty}P_1(m)P_2(n-m)$	-
3. $Y=$ $=x_1+...+x_n$, x_i – целочисленные, $x_i\sim P_i(n_i)$	$P(x_1+...+x_n=n)=$ $=\sum P_1(n_1)...P_k(nk)$, $n_1+...+n_k=n$	-

что в случае известных плотностей распределений случайных величин f_x и f_y, соответственно, для нагрузки несущей способности и при стохастической независимости X и Y приводит к равенству

$$R_t=\hat{P}=\int_{-\infty}^{v=0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(x+v)\,f_Y(u)\,du\right]dv. \qquad (3)$$

Интеграл в квадратных скобках равенства (3) представляет собой ***плотность разности*** величин X и Y: $(X-Y)$, что соответствует модели 5 (см. табл. 3.4). Интегрирование плотности вероятности в пределах от $-\infty$ до $v = 0$ определяет вероятность

(X–Y) < 0.

В случае нестационарных плотностей случайных величин $f_x(x,t)$ и $f_Y(x,t)$ можно получить зависимость вероятности от времени:

$$R_t = \hat{P}(t) = \int_0^{v=0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u + v_1 t)\, f_y(u_1 t)\, du \right] dv. \qquad (4)$$

Таким образом, величину риска на этапе управления можно оценить как меру превышения нагрузкой несущей способности.

Перейдем к иллюстрации понятия технико-экономического риска, основываясь на условиях предыдущего примера. Последствия при конкретной нагрузке X и несущей способности Y можно описать функцией $\varphi : (X,Y) \to \varphi(x,y)$. Прежде всего, рассмотрим критический случай при условии $Y < X$, т.е. случай, когда несущая способность ниже уровня нагрузки. В этом случае $\varphi(X,Y) = 0$ при $Y < 0$, а критический случай $Y < X$ можно оценить простым утверждением: $\varphi(X,Y) = 1$. Однако реальные данные показывают, что такая характеристика ситуации (0 или 1) неточна. Поэтому введем детерминированную функцию $\varphi(X,Y)$ случайных величин, которая позволяет оценить экономический риск $R_э$ (предполагая стохастическую независимость X и Y):

$$R_э = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, f_y(y)\, f_x(x)\, dxdy. \qquad (5)$$

В равенстве (5) использовалось понятие математического ожидания функции случайных величин, в котором детерминированная функция $\varphi(x,y)$ играет роль цены функции x и y, что соответствует модели 2, табл. 3.5. В силу независимости X и Y вместо плотности системы случайных величин (x,y) используется произведение плотностей x и y. Для заданного значения X нагрузки математическое ожидание риска имеет вид

$$R_Э = \int\limits_{y=-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, f_y(y)\, dy. \qquad (6)$$

Математические модели экономического риска переносятся на случай описания нагрузки x и несущей способности y дискретными случайными величинами, соответственно, с распределениями, приведенными в табл. 3.6.

Пусть величины x и y задания, а ущерб характеризуется функцией $\varphi(x,y) = a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$. Тогда экономический риск определяется равенством, соответствующим математическому ожиданию детерминированной функции дискретных случайных

Таблица 3.6.

Дискретные случайные величины и их вероятности

Случайные дискретные величины	Значения	Вероятности
x	$x_1,...,x_m$	$g_1,...,g_m$
y	$y_1,...,y_m$	$P_1,...,P_m$

величин: $R_Э = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} P_i g_i$, что соответствует модели 1, табл. 3.6.

Таким образом, рассмотренные модели иллюстрируют применение теории случайных функций для формирования моделей риска.

7.4. Контрольные вопросы

1. Какие основные понятия теории вероятностей и математической статистики используются в методах теории риска.

2. Какие принципы определяют методы принятия решений на основы теории риска. Какие интерпретации имеют оценки и методы минимизации риска, использующие вероятностно-статистические модели.

3. Сформулируйте классы задач, для которых целесообразно использовать оценки рисков, заданные на основе алгебр событий, моделей случайных величин и случайных функций.

4. Каким образом можно использовать детерминированные оценки, полученные в результате решения оптимизационных задач раздела 2 для формирования статистических оценок риска в данном разделе.

5. Каким образом можно использовать вероятностно-статистические модели риска для формулировки комплекса задач оптимизации и обобщения процедур принятия решений на основе оптимизационных методов, изложенных в разделе 2.

6. Сформулируйте примеры задач конечномерной условной оптимизации с применением моделей риска, полученных на основе алгебр событий, теории случайных величин и случайных функций.

8. КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ, ОЦЕНКИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФОВ

Методы комбинаторной аппроксимации используются в условиях отсутствия информации о точной структуре парных соотношений и дополняют известные методы.

8.1. Принятие решений и методы комбинаторной аппроксимации

Принятие решений методами комбинаторной аппроксимации основано на последовательном ***преобразовании системного графа или матрицы предпочтений в конечный граф или матрицу***. Это преобразование осуществляется путем ряда промежуточных операций. Исходный системный граф характеризует исходное описание ситуации принятия решений. Конечный граф характеризует ситуацию, конструктивную для принятия решений. Приведены типовые задачи - выделение лучшего объекта, линейное упорядочение и другие подходы. Проведено исследование процесса решения как преобразования исходной структуры в финальную структуру, оптимальным образом, аппроксимирующую исходную.

1. Уровни принятия решений, структуры предпочтений и алгоритмы. Обычно задачи принятия решений характеризуются слабой структурированностью, когда деформации поддаются лишь отдельные фрагменты общей постановки. Исходная информация часто неполна и/или противоречива, поскольку для ее получения используются не только строгие объективные измерения или формальные методы, но и экспертные оценки. Корректное принятие решений в этом случае требует дополнительной структуризации проблемы, пополнения имеющейся информации и устранения (хотя бы частично) противоречий. Тогда исходная проблема может быть аппроксимирована некоторой хорошо структурированной проблемой, близко к исходной. В данном разделе изучается классификация таких аппроксимаций, которые базируются на ***теоретико-графовых моделях***, определяющих предпочтения или уровни (этапы) принятия решений. В соответствии с изложенным выше, можно выделить следующие уровни принятия решений:

– ***уровни архитектуры*** интерактивных систем принятия решений;

– ***общая схема процесса принятия решений*** (генерация альтернатив, их оценка и анализ);

– ***цепочки последовательных аппроксимации*** имеющейся структуры предпочтений.

Рассмотрим особенности уровней интерактивных систем принятия решений. На целевом уровне определяются цели, которым подчинена система. На уровне постановок задач принятия решений выбирается одна из постановок:

1). Линейное упорядочение альтернатив.

2). Выделение лучшей альтернативы.

3). Выделение подмножества (упорядоченного или неупорядоченного) лучших альтернатив.

4). Частичное упорядочение подмножества лучших альтернатив.

5). Упорядоченное разбиение альтернатив (стратификация, групповое упорядочение).

На уровне процедур рассматриваются общие процедуры принятия решений, процедуры обработки результатов измерений, характеристик альтернатив, получения и обработки экспертных оценок, организации диалога с лицом, принимающим решение. В качестве основной процедуры сравнивания и оценивания используются парные сравнения и ***теория бинарных отношений***.

На уровне формальных моделей широко применяются модели дискретной оптимизации и оптимизационные задачи на графах. Для описания степени превосходства одной альтернативы над другой и возникающей структуры предпочтений используется аппарат теории ориентированных графов. В этом случае задача может ставиться как ***задача аппроксимации*** построенной структуры ***наилучшим графом*** из заданного класса.

Для пояснения вернемся к рассуждениям раздела, посвященного методу системных (решающих) матриц. Совокупность оценок, отвечающая «условиям-вариантам», обрабатывается с помощью специальных алгоритмов. В результате обработки принимается решение, приемлемое в определенном смысле. В рассматриваемой ситуации согласно анализу оценок строится ***структура предпочтений*** – ***ориентированный граф предпочтений*** на основе парных сравнений. Если в процессе ***парного сравнения*** выявляется факт превосходства объекта i над объектом j, то в графе проводится дуга из узла i в узел j, причем ***превосходство*** понимается в смысле соотношения оценок.

В соответствии с оценками строится граф или матрица. На дугах графа можно отразить не только факт, но и степень предпочтения (превосходства) с весом a_{ij}.

Определение 1. Дополнительные ограничения на симметричные элементы матрицы вида: $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1}^{j=n}$, называются ***калибровками***.

Калибровки позволяют придать различный смысл соотношениям между оценками. Далее можно перейти к формализованным методам обработки структур предпочтений.

2. Методы обработки формализованных структур предпочтений. Примеры ***методов комбинаторной оптимизации***, основанных на теории графов, могут быть различными. На классическом уровне оптимизации на множестве объектов с заданной структурной предпочтений может рассматриваться комплекс задач дискретной оптимизации. Это задачи о рюкзаке, о назначениях, об оптимальной упаковке и другие. Важную роль имеет аппроксимация структур с учетом разрешимости оптимизационных проблем в условиях ограничений. Решение задач этого класса должно обеспечиваться адекватным программным обеспечением. Описание ранее формализованные модели могут также допускать принятие решений на основе известных оптимизационных методов – ветвей и границ, динамического программирования и других.

Рассматриваемые понятия концептуально касаются общей схемы принятия решений в определенных структурах предпочтения. При этом для эффективного оценивания или сравнения альтернатив целесообразно ввести понятие базовых структур. ***Базовые графовые структуры*** представления данных и их преобразования формируются следующим образом. Выбор типовых структур графов связан с оцениванием альтернатив при принятии решений и с процессом обработки данных. Преобразование графов предпочтений рассматривается как задача выявления и устранения противоречий (которые обычно выступают в форме контуров), формирование упорядочения вершин, наиболее близко отвечающих исходному графу, выявление подмножества наиболее предпочтительных вершин (альтернатив). В некоторых случаях целесообразно преобразование исходного орграфа с последующим распределением вершин по слоям или с выделением наиболее предпочтительных вершин.

Предположим, что ***исходная структура предпочтений*** задана орграфом G самого общего вида. Далее вводятся ***базовые аппроксимирующие структуры***. Переход от структуры предпочтений к некоторой базовой структуре определенного класса, аппроксимирующей исходную структуру, определяет конкретное решение задачи принятия решений. Поэтому для данной схемы принятия решений необходимо выделить ***основные этапы алгоритма***:

1). Выбор типа финальной аппроксимирующей структуры.

2). Определение пути достижения финальной структуры.

3). Определение этапа аппроксимации на основе выбранного пути.

4). Формализация этапов и определение модели.

Можно установить ***взаимосвязь*** задач принятия решений ***на основе исходных и аппроксимирующих структур***. Динамику преобразования можно отметить стрелками и штрихами. Направление стрелок указывает возможные пути аппроксимации, а штрихам отмечаются случаи, когда преобразованиям подвергается не вся структура, а лишь некоторые ее подграфы. Можно получить классификацию финальных структур.

Анализ схемы позволяет выделить возможные **типы структурных преобразований.** Можно установить количество уровней аппроксимации. Для преобразований графов можно использовать следующие ***базовые операции***: а) удаление дуг; б) добавление дуг; в) переориентация (инверсия) дуг; г) удаление вершин с дугами; д) замена некоторого подграфа одной вершиной (стягивание, склеивание вершин); е) удаление вершин с заменой исключаемых дуг; ж) удаление некоторого подграфа; з) удаление подграфа с заменой исключаемых дуг; и) добавление вершины с дугами; к) добавление некоторого подграфа; л) замена некоторой вершины подграфом.

Описанные выше преобразования графов носят графический характер и определяются ***критериями близости и текущей структурой графа***. При этом помимо отмеченного варианта принятия решений целесообразно использовать формализованные модели принятия решений, основанные на ***матрицах парных сравнений.***

3. Формализованные модели принятия решений. Выше анализировались ***три уровня принятия решений***: *целевой, постановочный и процедурный*. Далее рассматриваются задачи уровня формализованных моделей.

Для этой цели необходимо рассмотреть описание структур предпочтений. Структуру предпочтений, возникающую на множестве объектов (например, оценок качества, риска и т. д.) в результате парных сравнений, можно описать матрицами парных сравнений или графом. Эти описания в определенном смысле эквивалентны.

Определение 2. Пусть задано множество объектов $x=\{x_1,...,x_n\}$, которые сравниваются попарно с точки зрения предпочтительности, важности или других характеристик. ***Матрицей парных сравнений*** будем называть матрицу $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, содержащую в качестве элементов a_{ij} результаты сравнений элементов с номерами i и j множества $x=(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)$, причем здесь отражается возникающее

бинарное отношение предпочтения (безразличия на множестве).

Если парное сравнение выявляет лишь факт превосходства одного объекта над другим, то множеству можно однозначно поставить граф, в частности, граф простой структуры предпочтений.

Определение 3. Если множеству x соответствует орграф, будем называть ориентированный граф (орграф) ***графом простой структуры***, $G=(\mathrm{v},v)$, причем: 1). Множество вершин v соответствует объектам множества $x=(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$; 2). Дуга из вершины i в вершину j проводится, если объект x_i превосходит объект x_j, т.е. $x_i > x_j$.

Если результат сравнения отражает также степень (силу, интенсивность и т.п.) превосходства, то во вводимом орграфе G некоторая дуга взвешена элементом a_{ij}. Такой граф есть ***граф предпочтения***.

Симметричные элементы матрицы $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ парных сравнений a_{ij} и a_{ji} должны быть равными, если соответствующие объекты (x_i и x_j) равноценны ($x_i \sim x_j$). Если же $x_i > x_j$, то $a_{ij} > a_{ji}$. На элементы матрицы a_{ij} накладываются дополнительные ***калибровочные ограничения***, связывающие попарно симметричные элементы a_{ij} и a_{ji}.

Калибровочные соотношения расширяют варианты описания соотношений между элементами множества. Ряд калибровок дан в табл. 3.7.

Таблица 3.7.

Калибровочные соотношения

Наименование калибровки	**Соотношение между элементами**
1. Простая структура	$\forall i, j, \quad i \neq j:$ $a_{ij} = \begin{cases} 1, x_i > x_j; \\ 0, x_j > x_i; \\ 1/2, x_i \sim x_j \end{cases}$
2. Турнирная калибровка	$\forall i, j: \quad a_{ij} \geq 0, \; a_{ij}\; a_{ji} = c$
3. Степенная калибровка	$\forall i, j: \quad a_{ij} \geq 0, \; a_{ij}\; a_{ji} = 1$
4. Кососимметричная калибровка	$\forall i, j: \; a_{ij} + \; {}_{ji} = 0$
5. Вероятностная калибровка	$\forall i, j: \; 0 < a_{ij} < 1, \; a_{ij} + a_{ji} = 1$

Рассмотрим конкретное содержание отдельных вариантов калибровок. В первом случае интерпретация соответствует простому превосходству. В случае турнирной калибровки: a_{ij} – число очков, набранных игроком x_i во всех случаях встречах с игроком x_j, $c = const$ – количество встреч. В варианте ***степенной калибровки*** объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j в a_{ij}. Для ***кососимметричной калибровки*** характерно, что объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j на величину a_{ij}. Наконец, в ***вероятностной калибровке*** величина a_{ij} предполагает вероятность превосходства x_i над x_j. При фиксации калибровочных соотношений (см. табл. 3.7) переход от матрицы парных сравнений A к орграфу $G = (V, v)$ взаимно-однозначный.

Модели принятия решений в рамках описанного подхода должны удовлетворять условиям корректности, адекватности, полноты и универсальности. Под корректностью понимается математическая и формально-логическая непротиворечивость. Адекватность традиционно определяет соответствие оригиналу. Полнота характеризуется спектром анализируемых вариантов для принятия решений.

4. Стандартные типы формализованных моделей. В рамках аппроксимации на классе структур необходимо ввести стандартные понятия. Одно из первых понятий – ***понятие метрики***, которое обычно является обобщением понятия расстояния. На множестве структур введем метрику $\rho(x,y)$ и рассмотрим задачу поиска «наилучшей аппроксиманты»

$$\rho(x,y) \to \min_{Y \in y}, \tag{1}$$

где x – *аппроксимируемая структура*, а $Y \in y$ – множество *аппроксимирующих структур*. Как правило, в подобных задачах используется ***метрика «хемингового» типа***:

$$\rho\left(A^{(1)}, A^{(2)}\right) \stackrel{\Delta}{=} \alpha \sum_{i \neq j} \left| a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)} \right|, \tag{2}$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $a_{ij}^{(2)}$– элементы квадратных матриц $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$; α – масштабный параметр.

Далее можно конкретизировать задачи определения ***«наилучших аппроксимант»***, при этом модели согласования дают возможность решить задачу следующими способами.

1). ***Аппроксимация*** *с максимальным сохранением исходной структуры за счет сохранения дуг*. Пусть исходная структура предпочтений задана взвешенным орграфом $G=(V,U)$ и соответствующей матрицей парных сравнений $A=(a_{ij})$. Назовем произвольную ***структуру*** $L=(V,U_L)$ ***согласованной (частично совпадающей) с*** $G=(V,U)$, если веса дуг e_{ij} структуры $L=(V,U_L)$ такие, что

$$\forall(i,j)\in U_L\cap U\colon e_{ij}=a_{ij},\quad \forall(i,j)\in U\setminus U_L\colon e_{ij}=0. \tag{3}$$

Тогда согласованная структура $L=(V,U_L)$ получается из исходной структуры за счет удаления произвольных дуг и добавления дуг нулевого веса. При этом справедливо соотношение:

$$\rho(G,L_0)>\rho(G,L)=\sum_{i\neq j}a_{ij},\quad (i,j)\in U\setminus U_L, \tag{4}$$

причем в (6.4) метрика понимается в смысле определения (2).

2). ***Аппроксимация*** *с минимальным рассогласованием в смысле некоторого веса*. В этом случае аппроксимации необходимо решить задачу

$$\sum_{(i,j)\in U\setminus U_L}a_{ij}+\sum_{(i,j)\in U_L\setminus U}a_{ij}\to\min_{L\in Q_G}. \tag{5}$$

3). ***Неравномерная аппроксимация*** при учете неравнозначности отдельных дуг. Введем для произвольной пары вершин (i,j) симметричную функцию расстояния $d(i,j)$ вдоль аппроксимирующей структуры, полагая, что при отсутствии соответствующих дуг $d(i,j)=0$, а в противном случае:

а) *в порядковых структурах* величина $d(i,j)$ равна длине наибольшего ориентированного пути от i к j;

б) *в слоистых структурах* $d(i,j)$ равно модулю разности номеров страт, в которых находится i и j. Тогда модель дальних связей можно записать в виде

$$\sum_{(i,j)\in U\cap U_L} a_{ij}\varphi\left(d(i,j)\right)\to\min_{L\in Q_G}, \qquad (6)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная монотонно возрастающая функция. Аналогично обобщим (5) так, что

$$\sum_{(i,j)\in U\setminus U_L} a_{ij}\varphi\left(d(i,j)\right) + \sum_{(i,j)\in U_L\setminus U} a_{ij}\varphi\left(d(i,j)\right)\to\min_{L\in Q_G}. \qquad (7)$$

4) ***Минимаксная аппроксимация*** приводит к оптимизационным задачам вида:

$$\max_{(i,j)\in U\setminus U_L} a_{ij}\to\min_{L\in Q_G}. \qquad (8)$$

Соответствующим образом формулируется минимаксная модель неравномерного типа:

$$\max_{(i,j)\in U\setminus U_L} a_{ij}d(i,j)\to\min_{L\in Q_G}. \qquad (9)$$

Конкретные задачи аппроксимации, аналогичные задачам (6) – (9), будут рассматриваться далее.

5. Методы линейного упорядочения. Рассмотрим некоторые модели линейного упорядочения, изучив на первом этапе их свойства. «Разумно» сконструированные модели должны обладать определенными свойствами.

Определение 4. Произвольным ***линейным упорядочением объектов*** из множества $x=(x_1,...,x_n)$ будем называть кортеж из номеров $I=(i_1,...,i_n)$, где $N_m(I)$ – номер места объекта x_m в упорядочении I.

Множество всевозможных упорядочений (перестановок) над $x=(x_1,...,x_n)$ обозначим $I^*=|I^*|=n!$. Поскольку задана матрица парных сравнений A и некоторая модель упорядочения, то множество оптимальных с ее точки зрения упорядочений обозначим $I^*_{\mathrm{opt}}(A)$, причем $|I^*_{\mathrm{opt}}(A)|>1$.

Рассмотрим возможные изменения множества $I^*_{\mathrm{opt}}(A)$ в зависимости от допустимых изменений исходной матрицы парных сравнений A, обращая инвариантность этого множества относительно стандартных преобразований.

Свойство 1 (*инвариантность к растяжению*). Умножения всех элементов матрицы A на число $K>0$ не изменяют оптимальных упорядочений: $\forall_k>0\ \ I^*_{\mathrm{opt}}(A)=I^*_{\mathrm{opt}}(KA)$.

Свойство 2 (*инвариантность к сдвигу*). Замена всех элементов a_{ij} на элементы $(a_{ij}+b)$, где $b>0$ не влияет на I^*_{opt}: $\forall b>0,\ \ I^*_{\mathrm{opt}}(A)=I^*_{\mathrm{opt}}(A+bE_n)$.

Свойство 3 (*транспонируемость*). Замена всех предпочтений на противоположные, т.е. инверсия всех дуг в структуре предпочтений должна приводить к тотальной инверсии оптимальных упорядочений: $\forall I\in I^*,\ \ I\in I^*_{\mathrm{opt}}(A)\Leftrightarrow I^T\in I^*_{\mathrm{opt}}(A^T)$, где A^T – транспонированная матрица парных сравнений, описывающая инвертированную структуру предпочтений; I^T –

зеркально инвертированное упорядочение, при котором если $I = (i_1, ..., i_m)$, то $I^T = (i_m, ..., i_1)$.

С в о й с т в о 4 (*устойчивость «в малом»*). Достаточно малые допустимые изменения матрицы A должны сохранять оптимальность хотя бы одного элемента из $I^*_{\text{opt}}(A)$: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall B \in A^*, \; \|B - A\| < \varepsilon \Rightarrow I^*_{\text{opt}}(B) \subseteq I^*_{\text{opt}}(A)$ где A – множество матриц с заданной калибровкой.

Определение 5. Оптимальное упорядочение будем называть ***кусочно-оптимальным упорядочением***, если отбрасывание произвольного количества объектов с самого начала или с самого конца его сохраняет оптимальность оставшегося фрагмента.

С в о й с т в о 5 («*кусочная*» *оптимальность*). Для любой матрицы парных сравнений A любое упорядочение $I \in I^*_{\text{opt}}(A)$ является кусочно-оптимальным.

8.2. Специальные комбинаторные модели, методы, оценки и их свойства

Используемые на практике модели линейного упорядочения традиционно разделяются на две большие группы. В ***моделях первой группы***, тяготеющих к статистическим методам обработки матриц парных сравнений, каждому объекту x_i сопоставляется определенный интегральный показатель π_i, оценивающий итоги его сравнения с остальными объектами, а далее объекты просто упорядочиваются по убыванию значений этого ранжирующего фактора.

Модели второй группы используют комбинаторно-логические и теоретико-графовые методы, при этом оцениваются показатели не отдельных объектов, а всего упорядочения в целом.

Такое разделение условно, поскольку методы первой группы характеризуют оптимизационные задачи: $\sum_{t=1}^{n} \pi_{i_\tau} \cdot t \to \max\limits_{I \in I^*}$.

1. Модели «спортивного» типа. В качестве ранжируемого фактора здесь используется набранная объектом сумма очков:

$$\forall i, j = \overline{1,n}: \ S_i = \sum_{i=j} a_{ij} , \qquad (1)$$

что фактически соответствует суммированию элементов в строке матрицы A. Далее в наиболее часто встречающейся схеме объекты упорядочиваются по убыванию S_i. Обрабатываемая матрица может иметь калибровку турнирного типа или типа простой структуры.

2. Модель упорядочения, близкая к «спортивной». Модель предложена В.Е. Жуковиным для кососимметричных матриц. Для произвольной пары объектов введем понятие *интегральной степени превосходства*

$$\overline{\Phi}(x_i, x_j) \overset{\Delta}{=} \sum_{t=1}^{n} \lambda_t (a_{it} - a_{jt}), \qquad (2)$$

оценивающее превосходство x_j в сравнении с прочими объектами. Функцию $\overline{\Phi}(x_i, x_j)$ можно представить в виде:

$$\overline{\Phi}(x_i, x_j) = f(x_i) - f(x_j), \qquad (3)$$

при этом $\forall i: \ f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{\quad} (x_i \ x_j)$.

Функция f в данной модели имеет смысл *функции полезности* на множестве X, и объекты предлагается упорядочивать по убыванию ее значений. Коэффициенты λ_j – весовые, и если их заранее определить невозможно, то можно выбрать $\lambda_j = 1/n$. Тогда

$$\forall i, j: \quad (x_i \;\; x_j) = \sum_{t=1}^{n} (a_{it} - a_{jt})/n = (s_i - s_j)/n \quad . \tag{4}$$

В силу (4) следует, что если $\forall i, j: \; f(x_i) = s_i / n$, то данная модель полностью сводится к турнирной моделью.

3. Минимаксные модели спортивного типа. Для «спортивных» моделей можно ввести минимаксный критерий, в котором сила объекта оценивается по наиболее крупному проигрышу. В модели функции доминируемости, ориентированной на обработку нечетких предпочтений, выбор строится на основе следующих рассуждений. Если $a_{ij} \in [0,1]$ – степень принадлежности пары (x_i, x_j) к нечеткому отношению предпочтения, заданному на X, то **«*функция доминируемости*»**

$$l_x(x_i) \stackrel{\Delta}{=} \max_{j \neq i^*} a_{ij} \tag{5}$$

характеризует максимальную «силу», с которой объект x_i доминируется остальными объектами множества X. При $l_x(x_i) = 0$ объект x_i абсолютно не доминируется; при $l_x(x_i) = 1$ – абсолютно доминируется; при $0 < l_x(x_i) < 1$ – слабо доминируется. Для ранжирования объектов вместо функции $l_x(x_i)$ удобно рассматривать ***двойственную функцию недоминируемости***

$$m_x(x_i) = 1 - l_x(x_i), \qquad (6)$$

упорядочивая объекты по убыванию соответствующих ей значений.

Модель функций доминирования предназначена для обработки матриц в вероятностной калибровке.

4. Многоступенчатые модели. Естественной альтернативой турнирной модели являются *многоступенчатые модели*, например, модель последовательного вычленения лидера (по Льюсу). В качестве наилучшего объекта выбирается объект с наибольшей суммой, он помещается на первое место в строящемся упорядочении, а далее соответствующие столбец и строка из матрицы A вычеркиваются, строчные суммы пересчитываются, вновь выбирается лидер и т.д.

5. Модель Бредли-Терри. Эта модель для простых структур без равноценных элементов и целочисленных турнирных матриц. Каждому объекту в модели Бредли-Терри сопоставляется его сила π_i, причем предполагается, что вероятность превосходства в парном сравнении $P(x_i > x_j)$ прямо пропорциональная π_i:

$$P(x_i > x_j) = \pi_i / (\pi_i + \pi_j) = 1 - P(x_j > x_i). \qquad (7)$$

Допуская, что для каждой пары (i, j) проводится n парных сравнений и все парные сравнения независимы, выпишем условную вероятность матрицы A (функцию правдоподобия):

$$L(\pi) = c\pi \left(\frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \right)^{a_{ij}} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \right)^{a_{ij}} = c \frac{\prod_{i=1}^{n} \pi_i^{s_i}}{\prod_{1 \le i < j \le n} (\pi_i + \pi_j)^K}, \qquad (8)$$

где $C = \prod_{1\le i<j\le n}(a_{ij}^k)$; а S_i – строчные суммы (1).

Для вычисления нормализованного вектора π: $\sum_{i=1}^{n}\pi_i = 1$, максимизирующего функцию правдоподобия $L(\pi)$, прологарифмируем (8), и после вычисления частных производных и приравнивания их нулю, получим:

$$\begin{cases} S_i \big/ \pi_i = K\sum_{j=1}^{n}(\pi_i + \pi_j)^{-1}, \ i = \overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{n}\pi_i = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Решив систему (9) численными методами, можно найти π_i, которые затем упорядочиваются по убыванию. Получаемое упорядочение качественно совпадает с турнирным упорядочением: если $S_i < S_j$, то и $\pi_i < \pi_j$.

6. Модель Бержа и ее обобщения. Берж предложил модель для обработки простых структур предпочтений. Затем эта модель была обобщена Бруком и Бурковым для матриц со степенной калибровкой. При использовании модели Бержа-Брука-Буркова предполагается, что матрица A неразложима (т.е. G – сильно связанный граф). В противном случае выделяются неразложимые подматрицы, которые обрабатываются отдельно, а получаемые фрагменты оптимального упорядочения объединяются.

Каждому объекту x_i в данной модели ставится в соответствие цепочка *итерированных сил* $P_i^{(1)}$, $P_i^{(2)}$, …, в которой сила K-го порядка $P_i^{(K)}$ определяется как сумма элементов i-й строки в матрице A^K:

$$\forall i=\overline{1,n}: P_i^{(K)} \overset{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{n} (A^K)_{ij}, \; K=1,2,..., \qquad (10)$$

где $(A^K)_{ij} - (i,j)$ элемент матрицы A^K. При этом, когда $K \to \infty$, справедливо $\lim_{K\to\infty} (P_i^{(K)} \Big/ \sum_{j=1}^{n} P_j^{(K)}) = \pi_i$, $i=\overline{1,n}$, где нормализованный собственный вектор: $\pi = (\pi_1,...,\pi_n)$ матрицы A, соответствующий максимальному по модулю собственному числу в соответствие с теоремой Перрона-Фробениуса, может быть выбран положительным. Далее объекты упорядочиваются по убыванию соответствующих компонент вектора π.

7. Стохастическая модель Ушакова. В данном методе используются матрицы, заданные в степенной и вероятностной калибровках. Матрица A преобразуется в вероятностную матрицу P, произвольный элемент которой определен как вероятность превосходства x_j над x_i. Если A задана в вероятностной калибровке, то $P = A^{\mathrm{T}}$, а если в степенной, то $p_{ij} = a_{ji}(1+a_{ji})^{-1} = 1 - p_{ij}$. Далее строится стохастическая матрица $p = (p_{ij})_{n\times n}$:

$$p_{ij} = p_{ij} \big/ (n-1), \; i \neq 1; \quad p_{ij} = 1 - \sum_{j\neq 1} p_{ij}, \; i,j = \overline{1,n}, \qquad (11)$$

которая имеет смысл ***переходных вероятностей марковской цепи***.

Упорядочение объектов в данной модели производится по убыванию компонент финального распределения вероятностей, вычисляемых по совокупности следующих формул:

$$p_i = \Delta_{ii} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jj}, \; i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

где Δ_{ii} – минор, полученный из $\det(\tilde{E} - \tilde{P})$ исключением i-го столбца и i-ой строки. Положительность всех p_i заведомо гарантируется только для неразложимых матриц $\tilde{P}$, т.е. для сильно связных графов $\tilde{G}$, а если это условие не выполнено, некоторые компоненты могут оказаться нулевыми.

8. Модель равномерного сглаживания. Эта модель предложена Киселевым для обработки положительных матриц с калибровкой турнирного типа и опирается на аксиому Льюса, устанавливающую однозначное соответствие между неявно заданными «силами» отдельных объектов. Если A – турнирная матрица, то по аксиоме Льюса

$$\forall i: \; \pi_i \big/ \pi_j = a_{ij} \big/ a_{ji} = a_{ij} \big/ (c - a_{ij}), \tag{13}$$

где π_i – «сила» объекта x_i, $c = a_{ij} + a_{ji}$ – турнирная константа. Тогда

$$\pi_i = \pi_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \pi_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j / \pi_i \right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \right)^{-1}, \tag{14}$$

где $b_{ij} = a_{ji} \big/ a_{ij}$ – элементы матрицы B, имеющей степенную калибровку. Обозначив $\forall i, j: \; z_{ij} = \ln b_{ij}$, можно видеть, что из (13) следует

$$\forall i, j, K: \; z_{ij} = z_{iK} + z_{Kj} = -z_{Ki} + z_{Kj}, \tag{15}$$

так что матрица $z = (z_{ij})_{n \times n}$ обладает известной избыточностью и может быть восстановлена целиком по любой своей строке.

Реальные матрицы редко удовлетворяют аксиоме Льюса. Поэтому от исходной матрицы A (или B, если исходная матрица задана в степенной калибровке) предложено перейти к матрице z и построить n различных матриц $z^{(1)},...,z^{(n)}$, полагая, что матрица $z^{(K)}, K=\overline{1,n}$ порождается K-й строкой матрицы z с помощью (13). Введя усредненную матрицу: $z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z$, легко убедиться, что она кососимметрическая и удовлетворяет (15), причем имеет место

$$\forall i,j:\ z_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}(z_{iK}+z_{Kj}). \qquad (16)$$

Выполнив обратные преобразования: $\forall i,j\ :\ \overline{b}_{ij}=\exp z_{ij}$, $\overline{a}_{ij}=c\overline{b}_{ij}(1+\overline{b}_{ij})^{-1}$, можно получить матрицы B и A, удовлетворяющие аксиоме Льюса и допускающие однозначное определение ранжирующего вектора π, удовлетворяющего соотношению (14):

$$\pi_i=\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{b}_{ij}\right)^{-1}=\left(\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln(b_{jr}\,b_{ri}\right)\right)^{-1}=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{r=1}^{n}\frac{a_{jr}\,a_{ri}}{a_{ir}a_{rj}}\right)^{\frac{1}{n}}\right], i=\overline{1,n}. \qquad (17)$$

Нетрудно убедиться, что модель равномерного сглаживания инвариантна к растяжению (в турнирной калибровке). Коэффициенты π_i можно использовать для количественной оценки важности объектов в пропорциональной шкале.

9. Модель максимального согласования. Модель максимального согласования предложена Слейтером для анализа без равноценных элементов, она основана на определении.

Определение 6. ***Элементарным несогласием по Слейтеру*** *упорядочения* I *с матрицей* A, называется состояние, когда несогласие имеет место, если для некоторой пары объектов (x_i, x_j) *выполнено условие* $x_i > x_j$, т.е. для матрицы A выполнены условия: $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = 0$, *однако* x_j *предшествует* x_i в упорядочении I.

Оптимальным упорядочением предполагалось считать максимальное согласованное с A упорядочение, которое имеет минимальное число таких элементарных несогласий. Если $v_A(I)$ – ***слейтерово число несогласий*** I с A, а $B(I)$ – матрица линейного порядка, задаваемая I, то можно показать, что

$$\rho(A, B(I)) = 2\alpha v_A(I). \qquad (18)$$

Слейтерово число несогласий можно представить в виде: $v_A(I) = (n)(n-1)/2 - \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{S=r+1}^{n} a_{i_r} i_S$, а задача определения оптимального упорядочения может быть записана в канонической форме:

$$G_A(I) \overset{\Delta}{=} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{S=r+1}^{n} a_{i_r i_s} \to \max_{I \in I^*}, \qquad (19)$$

представляющую собой задачу поиска структуры, наиболее совпадающей с исходной. Экстремальная задача (19) предписывает необходимость одновременной перестановки строк и столбцов, максимизирующей сумму наддиагональных элементов в получаемой матрице, и известна под названием задачи о ***наилучшей приближенной триангуляции матрицы*** A. Показатель $G_A(I)$ может интерпретироваться как показатель качества аппроксимации исходной структуры линейным упорядочением.

8.3. Контрольные вопросы

1. Какова общая идея, положенная в основу методов комбинаторной аппроксимации.
2. Поясните сущность методов и алгоритмов принятия решений на основе комбинаторной аппроксимации.
3. Каковы основные идеи принятия решений на основе моделей «спортивного типа» и других моделей.

9. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ И УРАВНЕНИЙ

9.1. Нестатистические модели нечетких чисел и функции принадлежности

Рассмотрим выбор одной из альтернатив в условиях применения и обработки нечетких оценок, что обусловлено нечеткой исходной информацией. Приведены конкретные результаты принятия решений на основе лингвистического подхода, в котором используются модели и методы принятия решений, базирующиеся на построении функций принадлежности нечетких множеств, операциях над нечеткими множествами и числами.

Методы построения функций принадлежности основаны на обработке матриц оценок, отражающих мнение эксперта об относительной принадлежности элементов множеству. Введем определенные характеристики принадлежности, позволяющие дать количественные оценки качественных явлений, сформулируем некоторые методы формализации качественных свойств явлений.

1. Вычисление функций принадлежности методом парных сравнений. Функции принадлежности могут быть построены на основе парных сравнения. В предыдущих разделах метод парных сравнений уже был использован. Пусть $x = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ множество из n элементов. Определим понятие нечеткого множества.

Определение 1. Подмножество S множества X называется ***нечетким множеством***, если на основе множества X определена совокупность пар

$$S = \{\mu_S(x)/(x)\}, \ x \in X, \qquad (1)$$

где $\mu_S(x)$ – степень принадлежности элемента x множеству X. Если функция принадлежности $\mu(x)$ принимает значения только 0 или 1, то множество S становится обычным. Для всех элементов S требуется выполнение условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_S(x_i) = 1. \qquad (2)$$

Как и ранее определим степень принадлежности элементов множеству с помощью ***матрицы парных сравнений***. Обратимся сначала к табл. 3.8. Оценку элемента x_i по сравнению с элементом x_j с точки зрения свойства S обозначим a_{ij}.

Для обеспечения согласованности симметричные относительно элементы предположим, что: $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$, что соответствует одному из *вариантов калибровки*. Такие матрицы называют ***обратно-симметричными матрицами.***

Таблица 3.8.

Шкала определения матрицы суждений

Оценка важности	Качественная оценка	Примечание
1	Одинаковая значимость	По данному критерию альтернативы имеют одинаковый ранг
3	Слабое превосходство	Соображения о предпочтении одной альтернативы другой малоубедительны
5	Сильное (существенное) превосходство	Имеются надежные доказательства существенного превосходства одной альтернативы
7	Очевидное превосходство	Существуют убедительные свидетельства в пользу альтернативы
9	Абсолютное превосходство	Свидетельство в пользу предпочтения одной альтернативы перед другими в высшей степени убедительно
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними оценками	Используется, когда необходим компромисс

Оценки a_{ij} позволяют составить матрицу парных сравнений $A = (a_{ij})$. Далее найдем собственный вектор матрицы A, решив уравнение: $A_w = \lambda w$, где λ – собственное число матрицы A.

Очевидно, что собственные числа матрицы A являются корнями характеристического уравнения, которое определяет наличие нетривиальных решений системы $(A-\lambda E)w=0$. Примем вычисленные компоненты собственного вектора $w=(w_1,...,w_i,...,w_n)^{\mathrm{T}}$ в качестве ***степени принадлежности элементов множеству*** S **:**

$$\mu_S(x_i)=w_i,\quad i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Если элементы x сравниваются только между собой, то матрица A – диагональная, и ей соответствуют собственные числа, равные единице. Элементы функции принадлежности также равны единице, деленной на n, что соответствует обычному множеству A. В общем случае собственные числа определяют величину растяжения (сжатия) векторов при действии на них оператора, заданного матрицей A.

Равенство $Aw=nw$ выполняется всегда, поэтому найденные значения тем точнее, чем ближе $\lambda_{\max}$ к числу n. Тогда отклонение $\lambda_{\max}$ от n можно принимать в качестве меры согласованности суждений экспертов.

Пример 1. Оценим освещенность предметов, основываясь на том, что освещенность поверхности определяется количеством светового потока на единицу площади. Для определения отличий в освещенности четырех объектов как функции от их расстояния до источника проведен следующий эксперимент. Визуальное сравнение интенсивности освещенности независимо друг от друга проводили две группы людей. Предметы находились на следующих расстояниях от источника света: 9, 15, 21 и 28 единиц длины. Матрица парных сравнений в первом эксперименте равна:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим собственный вектор w из условия $(A-\lambda E)w=0$, получив предварительно характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E_n)=0$, которое имеет следующие решения: $\lambda_{2,3} -0{,}140 \pm i1{,}305$; $\lambda_4 = 4{,}390$. Поскольку $\lambda_{\max} = 4{,}390$, то собственный вектор, соответствующий этому собственному числу, можно найти из соответствующей системы: $(A-\lambda_{\max}E_4)w = \mathrm{O}_4$, которая имеет неединственное решение. Вектор w называется ***вектором приоритетов***. Для нахождения единственного решения заменим одно из уравнений на уравнение нормировки: $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$.

В результате решения получаем собственный вектор, который удовлетворяет дополнительному условию нормировки: $w = (0{,}619 \quad 0{,}235 \quad 0{,}101 \quad 0{,}045)^{\mathrm{T}}$, когда $\lambda_{\max} = 4{,}390$. При подстановке условия нормировки вместо каждого из уравнений системы результат решения не изменяются. Мы определили степень принадлежности элементов x множеству S, согласно определению 1: $w_1 = 0{,}619$, $w_2 = 0{,}235$, $w_3 = 0{,}101$, $w_4 = 0{,}045$, причем $\mu_S(x_i) = w_i$, $i=\overline{1,4}$.

Рассмотрим обоснование изложенного метода. Пусть имеются элементы $c_1, \ldots, c_n$. Требуется определить веса $w_1, \ldots, w_n$ и их влияние на принятие решения путем приоритетов. Покажем, что для представления приоритетов можно выбрать собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному числу. Обозначим a_{ij} – число, соответствующее значимости элемента c_i по сравнению с элементом c_j.

Матрицу, состоящую из этих чисел, обозначим $A=(a_{ij})$. Как отмечалось ранее, матрица A – обратно-симметричная, т.е. $a_{ij}=(a_{ij})^{-1}$. Если наше рассуждение совершенно при всех сравнениях, то $a_{iK}=a_{ij}a_{jK}$ для всех i,j,k и ***матрица*** A ***называется согласованной.***

Очевидно, для согласованной матрицы является случай, когда сравнения основаны на точных измерениях, т.е. веса – w_1, …, w_n известны. Тогда $a_{ij}=w_i/w_j$, $i,j=\overline{1,n}$, и поэтому $a_{ij}a_{jk}=\frac{w_i}{w_j}\frac{w_j}{w_k}=w_i/w_k=a_{ik}$. Пусть также выполнено условие: $a_{ij}=1/a_{ji}$.

Рассмотрим подробнее этот случай. Поскольку матричное уравнение $Ax=y$, где $x=(x_1,...,x_n)^T$, $y=(y_1,...,y_n)^T$ соответствует записи $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=y_i$ $i=\overline{1,n}$, то из условия $a_{ij}=w_i/w_j$ $a_{ij}\frac{w_j}{w_i}=1$, $i,j=\overline{1,n}$, и, следовательно, $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j\frac{1}{w_i}=n$, $i=\overline{1,n}$, или $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j=nw_i$, что эквивалентно уравнению: $Aw=nw$. Эта формула подтверждает, что w – собственный вектор A, отвечающий собственному значению n.

В случае, когда определение a_{ij} ***основано не на точных измерениях, а на субъективных суждениях***, то a_{ij} отклоняется от идеальных отношений w_i/w_j, и поэтому уравнение не имеет места. Для дальнейших рассуждений полезны три факта из теории матриц таких, что: $Aw=nw$.

Утверждение 1. Если $\lambda_1,...,\lambda_n$ – собственные числа матрицы $A: Ax=\lambda x$ и если $a_{ij}=$ 1, $i=\overline{1,n}$, то $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=n$. Поэтому, если

$a_{ij} = w_i / w_j$, то все $\lambda_j = 0$, кроме одного $\lambda_k = n$. Отсюда ясно, что ***в случае согласованности число*** n ***есть наибольшее собственное число матрицы*** A**.**

Утверждение 2. Для обратно-симметричной матрицы A *малое изменение элементов влечет малое изменение собственных векторов.*

Утверждение 3. Если A – матрица значений парных сравнений, то для нахождения ***вектора приоритетов*** надо найти вектор w, который удовлетворяет уравнению $Aw = \lambda_{\max} w$.

Необходимо иметь нормализованное решение, поэтому следует несколько изменить w. Предположение $\alpha = \sum_{i=1}^{n} w_i$ и замена w на $\left(\frac{1}{\alpha}\right)w$ обеспечивает единственность вектора w и выполнение условия: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

2. Построение функций принадлежности лингвистических термов на основе статистических данных. Рассмотрим еще один способ определения функции принадлежности. В качестве степени принадлежности элементов множеству примем оценку частоты использования понятия, задаваемого нечетким множеством, для характеристики элемента. Благодаря применению «матриц-подсказок» можно использовать гладкие функции принадлежности. Проиллюстрируем метод на примере.

Пример. При построении автоматизированных систем управления возникает задача моделирования деятельности человека-оператора. Один из путей ее решения – использование теории нечетких множеств и понятия функции принадлежности. Функция принадлежности $\mu_A(u)$ определяет соответствие каждого элемента $u \in V$ числу из интервала [0, 1], характеризующего степень принадлежности элемента u множеству A. Человек, воспринимая информацию, обычно не пользуется конкретными числами, а переводит их в свои понятия – значения лингвистических переменных.

Задача. Предположим, что, наблюдая за объектом в течение некоторого времени, человек n раз фиксирует свое внимание на том, имеет место факт A или нет. Событие, заключающееся в n проверках наличия факта A, назовем ***оценочным событием***. Пусть в k проверках имел место факт A. Тогда оператор регистрирует частоту $p = k / n$ появления факта A и оценивает ее словами «часто», «редко» и т.п. Оценивая частоту p, человек опирается на свой опыт, который отражает частоту появления факта A в событиях прошлого, представляющихся ему аналогичными оцениваемому событию. Поступает также информация о появлении факта A, основанная на наблюдении других людей. В зависимости от степени доверия к источнику такого рода информация запоминается с различными весами. ***Лингвистика*** (языкознание) – наука, используемая при принятии решений, изучает общие законы строения и функционирования человеческого языка. В соответствии с этим на универсальной шкале [0, 1] необходимо «разместить» значения лингвистической переменной:

ВЕСЬМА РЕДКО, БОЛЕЕ-МЕНЕЕ РЕДКО,
БОЛЕЕ-МЕНЕЕ ЧАСТО, ВЕСЬМА ЧАСТО.

Тогда степень принадлежности некоторого значения вычисляется как отношение числа экспериментов, в которых оно встречалось в определенном интервале шкалы, к максимальному для этого значения числу экспериментов по всем интервалам.

Метод основан на условии, что в каждый интервал шкалы попадает одинаковое число экспериментов. Это условие часто не соблюдается. Тогда в реальных условиях составляется эмпирическая таблица, в которой эксперименты могут быть распределены неравномерно по интервалам, а в некоторые интервалы эксперименты могут вообще не попасть (табл. 3.9).

На основе данных вычисляются величины:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} K_{\max}}{K_j}, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,20}.$$

Для столбцов, где $k_j = 0$, применяется линейная аппроксимация:

$$c_{ij} = \frac{c_{i,\,j-1} - c_{i,\,j+1}}{2}, \; i = \overline{1,5}, \; j = \overline{1,20}.$$

Для построения функций принадлежности находят максимальные элементы по строкам табл. 3.10: $c_{ij_{\max}} = \max c_{ij}$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,20}$. Далее функция принадлежности вычисляется по формулам:

$$\mu_{ij} = c_{ij} / c_{i_{\max}} \; . \qquad (4)$$

Необходимо иметь в виду, что функции принадлежности построены для лингвистических переменных (табл. 3.11). Значения функции принадлежности даны при использовании в качестве аргумента величины $\Delta B/B$.

Приведенные результаты иллюстрируют факт количественной характеристики (описания) лингвистических переменных, возникающих в трудно формализуемых задачах принятия решения. Имеются другие приемы построения функций принадлежности на основе экспертных, интервальных оценках, параметризации.

9.2. Методы принятия решений на основе нечетких чисел и множеств

1. Основные определения теории нечетких чисел и множеств. Введенное выше понятие функции принадлежности позволяет определить нечеткие числа и операции над ними для принятия решений в условиях нечетко заданной информации.

Определение 1. ***Нечеткое число*** $\tilde{A}$ определяется равенством:

$$\tilde{A} = \int \mu_{\tilde{A}}(x)/x, \qquad (1)$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ – ***степень принадлежности*** $x \in \mathbb{R}^1$ множеству $\tilde{A}$, характеризуемая ***функцией принадлежности*** $\mu_{\tilde{A}}(x): \mathbb{R}^1 \to [0,1]$, символ $\int$ определяет *объединение по всем* $x \in \mathbb{R}^1$; символ $\mu_{\tilde{A}}(x)/x$ означает, что *степень принадлежности* x множеству $\tilde{A}$ равна $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Определение 2. Нечеткое число $\tilde{A}$ на действительной прямой называется ***выпуклым нечетким числом***, если для каких-либо реальных чисел $x, y, z \in \mathbb{R}^1$, $x \le y \le z$ справедливо соотношение

$$\mu_{\tilde{A}}(y) \ge \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(z)\right). \qquad (2)$$

Определение 3. Нечеткое число $\tilde{A}$ на действительной прямой называется ***нормальным нечетким числом***, если $\max \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Таблица 3.9

μ_i	$\Delta B / B$																			
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0
μ_1	1,0	1,0	0,75	0,47	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_2	0	0	0,25	0,52	0,8	1,0	1,0	0,67	0,33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_3	0	0	0	0	0	0	0	0,33	0,67	1,0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	1,0	1,0	1,0	0,83	0,5	0,33	0	0	0
μ_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,16	0,5	0,55	1,0	1,0	1,0

Таблица 3.10

I	J																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	9	9	7,2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1,8	6	9	7	3,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	5,1	9	9	9	9	2,3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6,8	9	9	9	7,7	5,4	4,5	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,3	3,6	4,5	9	9

Таблица 3.11

μ_i	$\Delta B / B$																			
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0
μ_1	1,0	1,0	0,8	0,333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_2	0	0	0,2	0,666	1	0,777	0,43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_3	0	0	0	0	0	0,22	0,57	1	1	1	1	0,26	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,76	1	1	1	0,86	0,6	0,5	0	0
μ_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,16	0,14	0,4	0,5	1	1

Согласно определениям нечеткие числа являются функциями аргумента x, поэтому они могут быть изображены графически.

Введем некоторые ***операции над нечеткими числами.*** Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – нечеткие числа на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Выполним ***гипотетическую операцию «$*$»*** над нечеткими числами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ с помощью соотношения:

$$\widetilde{A}*\widetilde{B}=\int\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\big/(x*y)\,. \tag{3}$$

Если символическую операцию «$*$» заменить арифметическими операциями, то получим ***арифметические операции над двумя нечеткими числами:***

сложение: $$\widetilde{A}+\widetilde{B}=\int\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\big/(x+y)\,; \tag{4}$$

вычитание: $$\widetilde{A}-\widetilde{B}=\int\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\big/(x-y)\,; \tag{5}$$

умножение: $$\widetilde{A}\times\widetilde{B}=\int\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\big/(x\times y)\,; \tag{6}$$

деление: $$\widetilde{A}\big/\widetilde{B}=\int\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\big/(x/y)\,. \tag{7}$$

Введенные операции пригодны для любых нечетких чисел, и, в частности, для ***дискретных нечетких чисел***, однако они громоздки. Для ***непрерывных нечетких чисел***, функцию принадлежности которых можно определить в условиях, когда известны ее границы, можно использовать другой подход.

Определение 4. Число «a» назовем ***границей функции принадлежности,*** если выполнены следующие соотношения:

$$\forall\delta\ \mu(a)=0,\ \ \mu(a-\delta)=0,\ \ \mu(a+\delta)\neq 0\,. \tag{8}$$

Функции принадлежности имеют две границы: нижнюю – a и верхнюю – b, поэтому ***нормальное выпуклое нечеткое число*** имеет вид

$$\widetilde{A}=\int_a^A (x-a)/x+\int_A^b (b-x)/x, \tag{9}$$

где a, b – ***нижняя и верхняя границы функции принадлежности***. Например, ***нечеткое число*** $\tilde{2}$ – ***приблизительно 2***, когда $a=1$, $b=3$ можно представить в виде: $\tilde{2}=\int_1^2 (x-1)/x+\int_2^3 (3-x)/x$.

2. Алгебраические операции над нечеткими числами. Рассмотрим алгебраические операции над нечеткими числами, расширяющими применение подхода.

Пусть «$*$» – символ двухместной операции, а $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – непрерывные нормальные выпуклые нечеткие числа. Тогда ***результат операции «$*$» над нечеткими числами*** имеет следующий вид:

$$\widetilde{A}*\widetilde{B}=\left(\int_a^A \mu_{\widetilde{A}}(x)/x+\int_A^b \mu_{\widetilde{A}}(x)/x\right)*\left(\int_{a'}^B \mu_{\widetilde{B}}(x)/x+\int_B^b \mu_B(x)/x\right)=$$

$$=\int_{a''}^{A*B} \mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}(x)/x+\int_{A*B}^{b''} \mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}(x)/x, \tag{10}$$

причем a'' и b'' получают из a и b; a' и b' – в зависимости от конкретной операции, функция $\mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}$ определяется также в зависимости от операции и нормировки μ.

Рассмотрим арифметические операции с нечеткими числами.

а) ***сложение нечетких чисел*** определяет их сумму:

$$\widetilde{A}+\widetilde{B}=\left(\int_{a}^{A}\mu_{\widetilde{A}}(x)/x+\int_{A}^{b}\mu_{\widetilde{A}}(x)/x\right)+\left(\int_{a'}^{B}\mu_{\widetilde{B}}(x)/x+\int_{B}^{b'}\mu_{\widetilde{B}}(x)/x\right)=$$

$$=\int_{a''}^{c}\mu_{\tilde{c}}(x)/x+\int_{c}^{b''}\mu_{\tilde{c}}(x)/x=\tilde{c}, \tag{11}$$

$c=A+B$, $a''=a+a'$, $b''=b+b'$.

Функцию $\mu_{\tilde{c}}$ будем искать в виде $\mu_{\tilde{c}}=k_1x+k_2$. Исходя из нормировки, имеем:

для $a''\le x\le c$: $\begin{cases}k_1c+k_2=1\\ k_1a''+k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=\dfrac{1}{c-a''},k_2=-\dfrac{a''}{c-a''},\mu_{\tilde{c}}=\dfrac{x-a''}{c-a''};$

для $c\le x\le b''$: $\begin{cases}k_1c+k_2=1\\ k_1b''+k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=\dfrac{1}{c-b},k_2=-\dfrac{b''}{c-b''},\mu_{\tilde{c}}=\dfrac{x-b''}{c-b''}.$

Таким образом, имеет место следующий результат

$$\widetilde{A}+\widetilde{B}=\int_{a''}^{c}\frac{x-a''}{c-a''}\Bigg/x+\int_{c}^{b''}\frac{b''-x}{b''-c}\Bigg/x=\tilde{c}; \tag{12}$$

б) ***вычитание нечетких чисел*** приводит к результату в виде разности нечетких чисел:

$$\widetilde{A}-\widetilde{B}=\int_{a'}^{c}\frac{x-a''}{c-a''}\Bigg/x+\int_{c}^{b''}\frac{b''-x}{b''-c}\Bigg/x=\tilde{c}, \tag{13}$$

где $a''=a-b'$, $b''=b-a'$, $c=A-B$;

в) ***операция умножения нечетких чисел*** позволяет определить произведение нечетких чисел в следующем виде:

$$\widetilde{A}\times\widetilde{B}=\int_{a''}^{c}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a''}}{\sqrt{c}-\sqrt{a''}}\Bigg/x+\int_{c}^{b''}\frac{\sqrt{b''}-\sqrt{x}}{\sqrt{b''}-\sqrt{c}}\Bigg/x=\tilde{c}, \tag{14}$$

где $a'' = a \times a'$, $b'' = b \times b'$, $c = A \times B$;

г) ***деление нечетких чисел*** определяет частное от деления нечетких чисел:

$$\tilde{A} : \tilde{B} = \int_{a''}^{c} \frac{(x - a'')}{(c - a'')x} \Big/ x + \int_{c}^{b''} \frac{(b'' - x)c}{(b'' - c)x} \Big/ x = \tilde{c}, \qquad (15)$$

где $a'' = a : a'$; $b'' = b : a'$; $c = A : B$.

Пример 1. Выберем два нечетких числа ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО $6 = \tilde{6}$ и ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО $8 = \tilde{8}$ с функциями принадлежности: $\tilde{6} = \int_5^6 (x - 5)/x + \int_6^7 (7 - x)/x$.

Пусть первое «нечеткое число $x = 5$» имеет вид:

$$\tilde{6}\big|_{x=5} = \int_5^6 (x - 5)\big|_{x=5} = 5 - 5 = 0; \;\; x = 5{,}5 : \tilde{6}\big|_{x=5{,}5} = 5{,}5 - 5 = 0{,}5;$$

Второе «нечеткое число $x = 6$» (значение подставляется только в одно из слагаемых): $\tilde{6}\big|_{x=6} = 6 - 5 = 1$;

$x = 6{,}5 : \tilde{6}\big/_{x=6{,}5} = \int_6^7 (7 - x)\big|_{x=6{,}5} = 7 - 6{,}5 = 0{,}5$; $x = 7 : \tilde{6}\big/_{x=7} = 7 - 7 = 0$.

Итак, имеем следующее представление для «нечеткого числа 6»: $\tilde{6} = \{0/5;\; 0{,}5/5{,}5;\; 1/6;\; 0{,}5/6{,}5;\; 0/7\}$.

Аналогично для «нечеткого числа 8» имеем представление:

$$\tilde{8} = \int_6^8 \frac{(x - 6)}{8 - 6} \Big/ x + \int_6^{10} \frac{(10 - x)}{10 - 8} \Big/ x.$$

Пусть

$$x=6:\tilde{8}\big|_{x=6}=\int_0^8\frac{(x-6)}{8-6}\Big|_{x=6}=6-6=0;\ x=7:\tilde{8}\big|_{x=7}=\frac{x-6}{8-6}\Big|_{x=7}=\frac{7-6}{2}=0,5;$$

$$x=8:\tilde{8}\big|_{x=8}=\frac{8-6}{2}=1;$$

$$x=9:\tilde{8}\big|_{x=9}=\int_8^{10}\frac{10-x}{2}\Big|_{x=9}=\frac{10-9}{2}=0,5;\qquad x=10:\tilde{8}\Big|_{x=10}=\frac{10-10}{2}=0.$$

Итак, ***«нечеткое число 8»*** определяется соотношением: $\tilde{8}=\{0/6;\ 0,5/7;\ 1/8;\ 0,5/9;\ 0/10\}$.

В соответствии с принятыми ранее обозначениями определим верхние и нижние границы и вершины чисел: для нечеткого числа $\tilde{6}$ значении нижней и верхней границ равны: $a=5$, $b=7$, $A=6$; для нечеткого числа $\tilde{8}$ эти значения равны: $a'=6$, $b'=10$, $B=8$.

Перейдем к рассмотрению арифметических операций над нечеткими числами $\tilde{6}$ и $\tilde{8}$.

Сложение. Согласно формуле (11) найдем границу и вершину результата, соответствующего сумме двух нечетких чисел $\tilde{6}$ и $\tilde{8}$: $a''=a+a'=5+6=11$; $b''=b+b'=7+10=17$; $C=A+B=6+8=14$. Тогда в соответствии с (12)

$$\tilde{6}+\tilde{8}=\int_{11}^{14}\frac{x-11}{3}\Big/x+\int_{14}^{17}\frac{17-x}{3}\Big/x=\widetilde{14}.$$

Вычислим значение функции принадлежности результата в нескольких точках:

$$x=12,5;\ \widetilde{14}\big|_{x=12,5}=\int_{11}^{14}\frac{x-11}{3}\Big|_{x=12,5}=\frac{12,5-11}{3}=0,5;$$

$$x=15,5;\ \widetilde{14}\big|_{x=15,5}=\int_{14}^{17}\frac{17-x}{3}\Big|_{x=15,5}=\frac{17-15,5}{3}=0,5.$$

Итак, получен результат: $\widetilde{14} = \{0/11;\ 0,5/12,5;\ 1/14;\ 0,5/15,5;\ 0/17\}$.

Вычитание. Значения границ и вершины результата, соответствующего разности нечетких чисел $\tilde{8}$ и $\tilde{6}$ равны: $a'' = a' - a = 6 - 5 = 1$; $b'' = b' - b = 10 - 7 = 3$; $C = B - A = 8 - 6 = 2$. Согласно (13) результат вычитания имеет вид:

$$\tilde{8} - \tilde{6} = \int_1^2 \frac{x-1}{2-1} / x + \int_2^3 \frac{3-x}{3-2} / x = \tilde{2}.$$

Значения *функции принадлежности* определяются в нескольких точках следующими соотношениями:

при $x = 1,5$: $\tilde{2}\Big|_{x=1,5} = \int_1^2 (x-1)\Big|_{x=1,5} = 1,5 - 1 = 0,5;$

при $x = 2,5$: $\tilde{2}\Big|_{x=2,5} = \int_2^3 (3-x)\Big|_{x=2,5} = 3 - 2,5 = 0,5.$

Тогда результат вычитания двух определенных выше чисел определится *«величиной нечеткого числа* $\tilde{2}$ *и его функцией принадлежности»:* $\tilde{8} - \tilde{6} = \tilde{2} = \{0/1;\ 0,5/1,5;\ 1/2;\ 0,5/2,5;\ 0/3\}$.

Умножение. Вычислим границы и вершину результата ***умножения*** *«нечетких чисел* $\tilde{6}$ *и* $\tilde{8}$*»* следующими соотношениями: $a'' = aa' = 5 \cdot 6 = 30;$ $b'' = bb' = 7 \cdot 10 = 70;$ $C = AB = 6 \cdot 8 = 48$.

***Функция принадлежности произведения*:**

$$\tilde{6} \times \tilde{8} = \int_{30}^{48} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{30}}{\sqrt{48} - \sqrt{30}} \Big/ x + \int_{48}^{70} \frac{\sqrt{70} - \sqrt{x}}{\sqrt{70} - \sqrt{48}} \Big/ x = \int_{30}^{48} \frac{\sqrt{x} - 5,48}{1,45} \Big/ x + \int_{48}^{70} \frac{8,37 - \sqrt{x}}{1,44} \Big/ x = \widetilde{48}.$$

Вычислим значение функции принадлежности в промежуточных точках. Пусть

$$48\Big|_{x=34} = \int_{30}^{48} \frac{\sqrt{x} - 5,48}{1,45}\Big|_{x=34} = \frac{\sqrt{34} - 5,48}{1,45} = 0,24.$$

Аналогично: $X = 39$: $\widetilde{48}\big|_{x=39} = \dfrac{\sqrt{39}-5,48}{1,45} = 0,53;$

$$X = 44:\ \widetilde{48}\big|_{x=44} = 0,8; \qquad X = 53:\ \widetilde{48}\big|_{x=53} = 0,76;$$

$$X = 58:\ \widetilde{48}\big|_{x=58} = 0,52; \quad X = 64:\ \widetilde{48}\big|_{x=64} = 0,26.$$

Итак, результат произведения нечетких чисел $\tilde{6}$ и $\tilde{8}$:

$$\tilde{6}\times\tilde{8} = \widetilde{48} = \{0/30;\ 0,24/34;\ 0,53/39;\ 0,8/44;\ 1/48;\ 0,76/53;\ 0,52/58;\ 0,26/64;\ 0/70\ .$$

Деление. Вычислим границы и вершину результата деления «нечеткого числа $\tilde{8}$» на «нечеткое число $\tilde{6}$»: $a'' = a' : a = 6:5 = 1,2;$ $b'' = b' : b = 10:7 = 1,43;$ $c = B : A = 8:6 = 1,33$.

Функция принадлежности данной операции будет иметь следующий вид:

$$\tilde{8}:\tilde{6} = \int_{1,2}^{1,33} \frac{(x-1,2)\cdot 1,33}{(1,33-1,2)x}\Big/x + \int_{1,33}^{1,43} \frac{(1,43-x)\cdot 1,33}{(1,43-1,33)x}\Big/x =$$

$$= \int_{1,2}^{1,33} \frac{(x-1,2)\cdot 1,33}{0,13x}\Big/x + \int_{1,33}^{1,43} \frac{(1,43-x)\cdot 1,33}{0,1x}\Big/x = \widetilde{1,33}.$$

При этом *значения функции принадлежности* в промежуточных точках определяются соотношениями:

при $X = 1,24$: $\widetilde{1,33}\big|_{x=1,24} = \int_{1,2}^{1,33} \dfrac{(x-1,2)\cdot 1,33}{0,11x}\Big|_{x=1,24} = \dfrac{(1,24-1,2)\cdot 1,33}{0,11\cdot 1,24} = 0,39;$

при $X = 1,28$: $\widetilde{1,33}\big|_{x=1,28} = 0,76;$ X = 1,36: $\widetilde{1,33}\big|_{x=1,36} = 0,68;$

при $X = 1,39$: $\widetilde{1,33}\big|_{x=1,39} = 0,38.$

Итак, результат деления определяется соотношением: $\tilde{8}:\tilde{6} = \widetilde{1,33} = \{0/1,2;\ 0,39/1,24;\ 0,76/1,28;\ 1/1,33;\ 0,68/1,39;\ 0,38/1,39;\ 0/1,43\}.$

Операции дополнительного вычитания и деления. Введение основных арифметических операций обусловливает расширение классов математических моделей, где используются нечеткие числа. Такими простейшими обобщенными моделями являются линейные алгебраические уравнения с нечеткими числами. Рассмотрим эти классы моделей и операции над ними. Во многих задачах теории нечетких множеств возникает необходимость решения нечетких уравнений

$$AX + B = D, \tag{16}$$

где A, B, D – нечеткие числа; X – неизвестное. Вычислить решение уравнения (16).

Для точного решения (в соответствующем смысле) уравнения (16) введем операцию дополнительного вычитания, обозначаемую символом (– –) и дополнительного деления – (//).

Определение 5. Пусть имеется уравнение с нечеткими переменными:

$$X + B = D. \tag{17}$$

Решение уравнения (17), которое является множеством $X = D - B$, будем определять операцией ***дополнительного вычитания*** (– –) (ОДВ).

Для решения уравнений необходимо изучить свойства ОДВ.

1) Свойство носителя множества, определяемого ОДВ. Пусть *носитель множества* B - интервал $S_B = [b_1, b_2]$, а *носитель множества* D – интервал $S_D = [d_1, d_2]$. Тогда ***носитель множества*** $X = D - B$, определяемого ОДВ, имеет вид:

$$S_x = [d_1, d_2] -- [b_1, b_2] = [d_1 - b_1, d_2 - b_2]. \tag{18}$$

2) Свойства функции принадлежности ОДВ. Функция принадлежности множества X задается соотношениями:

$$\mu_x(x) = \inf \sup(a \in [0,1] \big| \min(\mu_B(z-x), a) \le \mu_D(z)) = \inf_z 1, \begin{cases} \text{если } \mu_D(z-x) \le \mu_D \\ \mu_{D,} \text{ если } \mu_B(z-x) \ge \mu_D(z). \end{cases} \quad (19)$$

3) Условия определения ОДВ. Операция дополнительного вычитания определена только для нечетких чисел D и B, у которых выполнены условия:

$$d_1 - b_1 \le d_2 - b_2 \text{ или } d_2 - d_1 \ge b_2 - b_1, \quad (20)$$

т.е. ***длина интервала носителя уменьшаемого должна быть больше, чем у вычитаемого.***

Определение 6. Пусть имеется уравнение $AX = D$. ***Операцией дополнительного деления*** (ОДД) называется операция, которая определяет решение уравнения $X == D//A$.

Свойства ОДД представляются соотношениями.

1) Свойства носителя ОДД. Пусть носителем множеств A и D являются соответственно интервалы: $S_A = [a_1, a_2]$ и $S_D = [d_1, d_2]$. Тогда носитель множества, заданного ОДД, задается условиями:

$$S_x = [d_1, d_2]//[a_1, a_2] = \begin{cases} d_1 : a_1, d_2 : a_2, & S_A > \quad S_D > \\ d_1 : a_2, d_2 : a_1, & S_A > \quad S_D < \\ d_2 : a_1, d_1 : a_2, & S_A < \quad S_D > \\ d_2 : a_2, d_1 : a_1, & S_A < \quad S_D < \end{cases}$$

2) Свойства функции принадлежности ОДД. Функция принадлежности множества X задается равенствами:

$$\mu_x(x) = \inf_t \sup\left(a \in [0,1] \;\middle|\; \min(\mu_A(t/x, a) \right) \geq \mu_D(t) =$$

$$= \inf_t \begin{cases} 1, & \mu_A(t/x) < \mu_D(t) \\ \mu_D(t), & \mu_A(t/x) \geq \mu_D(t) \end{cases} \qquad (21)$$

3) Свойства носителей ОДД. Операция дополнительного деления определена не для любых нечетких чисел A и D. Интервалы-носители чисел должны удовлетворять условиям:

$$d_2 : d_1 > a_2 : a_1, \text{ если } S_A > 0,\ \ S_D > 0;$$
$$d_2 : d_1 > a_1 : a_2, \text{ если } S_A > 0,\ \ S_D < 0;$$
$$d_1 : d_2 > a_2 : a_1, \text{ если } S_A < 0,\ \ S_D > 0; \qquad (22)$$
$$d_1 : d_2 > a_1 : a_2, \text{ если } S_A < 0,\ \ S_D < 0.$$

Пример 2. Решить уравнение $X + B = D$, где

B = ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО 8 = {0/6; 0,5/7; 1/8; 0,5/9; 0/10};
D = ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО 14 = {0/10; 0,5/12; 1/14; 0,5/16; 0/18}.

Решение. Определим интервалы-носители множеств $S_B = [16;10]$; $S_D = [10;18]$. Условие (18) выполняется, так как 18 – 10 > 10 – 6, следовательно, можно использовать **операцию дополнительного вычитания.** Вычислим носитель множества X в соответствии с (16): $S_x = [10-6;18-10] = [4;8]$. Значения функции принадлежности множества для элементов S_x вычисляются согласно формуле (17). Тогда X = {0/4; 0,5/5; 1,0/6; 0,5/7; 0/8}. Нечеткое уравнение решено.

Пример 3. Решить уравнение $AX = D$, если:
A = ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО 8 = {0/6; 0,5/7; 0,5/9; 0/10},
D = ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО 24 = {0/6; 0,5/14; 1,0/24; 0,5/36; 0/50}.

Решение. Определим интервалы-носители множеств: $S_A = [6;10]$; $S_D = [6;50]$. Так как 50:6 > 10:6, то условие (22) выполняется и можно использовать *операцию дополнительного деления*. Вычислим *носитель множества* X согласно (20): $S_x = [6:6;50:10] = [1,5]$.

Определим значения *функции принадлежности* в соответствии с (21). Решением рассматриваемого уравнения является множество X = ={0/1; 0,5/2; 1,0/3; 0,5/4; 0/5}.

Таким образом, введены нечеткие числа и определены арифметические и расширяющие операции, необходимые для решения алгебраических нечетких чисел. Это позволяет получать различные оценки для принятия решения в условиях достаточно сложных математических моделей явлений реального мира.

Методы принятия решения на основе нечетких чисел и множеств. Введенные определения и основные операции над нечеткими числами и множествами позволяют рассмотреть методов принятия решений, которое удобно начать с классической задачи упорядочения нечетких множеств с использованием отношений. Упорядочение альтернатив выполняем путем нахождения их принадлежности оптимальному множеству, которое определяется как пересечение критериальных оценок альтернатив и нечеткого отношения предпочтения.

Пусть имеется n ***альтернатив***: $(a_1,...,a_i,...,a_n)$, каждая из которых характеризуется ***нечетким множеством***: $A_i = \{\mu_{Ai}(x)/x\}$, $x \in \mathbb{R}^1$, причем в дальнейшем будем считать, что $x \in [0,1]$.

Требуется определить множество оптимальных альтернатив $0 = \{\mu_0(i)/i\}, i \in \mathbb{N}\}$, где $\mu_0(i)$ может рассматриваться как степень соответствия альтернативы a_i понятию ***«наилучшая альтернатива»***. Для этой цели введем нечеткое отношение:

$$P_{ij} = \left\{ \mu_{P_{ij}}(x_i, x_j) \big/ (x_i, x_j) \right\},$$

где $\mu_{P_{ij}}(x_i, x_j)$ выражает степень превосходства x_i над x_j или насколько x_i лучше x_j.

Пусть функция $f(x_i, x_j)$ задает различие в полезностях значений x_i и x_j; $f(x_i, x_j) = u(x_i) - u(x_j)$, т.е. $\mu_{P_{ij}} = f(x_i, x_j)$. В простейшем случае это линейная функция

$$\mu_{P_{ij}} = x_i - x_j .$$

Множество оптимальных альтернатив определяется **пересечением** декартова произведения *нечетких оценок*, задающих альтернативы, и *отношения предпочтения*: $P_{ij} : \mathrm{O} = P_{ij} \bigcap (A_i \times A_j)$.

Степень принадлежности альтернативы a_i множеству О определяется как максимальное значение соответствующих функций принадлежности:

$$\mu_{\mathrm{O}} = \sup_{x_i, x_j} \min \Big(\mu_{A_i}(x_i); \mu_{A_j}(x_j); \mu_{P_{ij}}(x_i, x_j) \Big), \quad i \neq j, i \in \{1, 2\}. \qquad (23)$$

Рассмотрим пример использования данного метода упорядочения альтернатив.

Пример 1. Пусть имеются два нечетких множества:

A_1 = {0,2/0,5; 0,8/0,6; 1/0,7; 0,8/0,8; 0,1/0,9},

A_2 = {0,1/0,1; 0,8/0,2; 1/0,3; 0,8/0,4; 0,1/0,5},

представленные соответствующими значениями функций принадлежности. Тогда *декартово произведение* множеств представляется матрицей:

$$A_1 \times A_2 = \begin{array}{c} \\ 0,5 \\ 0,6 \\ 0,7 \\ 0,8 \\ 0,9 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 1,0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{array} \right\|,$$

которая соответствует первой операции вычисления минимума в (23). В операции $A_1 \times A_2$ значения базового множества определяются из значений базовых множеств нечетких множеств A_1 и A_2, причем на первом месте находится значение базового множества A_1 и выбирается наименьшее значение из нечетких множеств A_1 и A_2.

Далее по определяемой ниже методике строятся функции принадлежности P_{12} и P_{21}. Так как $\mu_{P_{12}}(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, то это выражение имеет смысл для $x_1 \geq x_2$:

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9.

Поэтому соответствующая матрица имеет вид:

$$P_{12}(x_1, x_2) = \begin{array}{c} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,6 \\ 0,7 \\ 0,8 \\ 0,9 \\ 1,0 \end{array} \left\| \begin{array}{cccccccccc} 0,1 & & & & & & & & & \\ 0,2 & 0,1 & & & & & & & & \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & & & & & & & \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & & & & & & \\ 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & & & & & \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & & & & \\ 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & & & \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & & \\ 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & \\ 1,0 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{array} \right\|.$$

Отношение P_{21} записывается аналогично P_{12} с заменой x_1 на x_2 и x_2 x_1. Находим пересечение полученных множеств: 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5, которое имеет вид:

$$
P_{12} \bigcap (A_1 \times A_2) = \begin{matrix} 0,5 \\ 0,6 \\ 0,7 \\ 0,8 \\ 0,9 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & - \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{matrix} \right\| .
$$

Для выполнения операции $P_{12} \bigcap (A_1 \times A_2)$ сравнивались базовые значения множеств P_{12} вида $A_1 \times A_2$, выбиралось слагаемое с меньшим значением μ в соответствии с выражением (23) и для первой альтернативы получено: $\mu_0(1) = 0,6$. Найдено пересечение для второй альтернативы: $P_{21} \bigcap (A_1 \times A_2) \neq \varnothing$, следовательно, $\mu_0(2) = 0$. Итак, множество оптимальных альтернатив 0 = {0,6/a_1, 0/a_2}.

Принятие решений в условиях неопределенности. Рассмотрим метод анализа в случае, когда критериальные оценки задаются как степени соответствия альтернатив заданным критериям. Пусть имеется множество из m альтернатив: A = {a_1, a_2, … a_m}. Тогда для критерия C может быть рассмотрено нечеткое множество

$$
C = \{\mu_c(a_1)/a_1, \mu_c(a_2)/a_2, ..., \mu_c(a_m)/a_m\},
$$

где $\mu_c(a_i) \in [0,1]$ – оценка альтернативы a_i по критерию C, характеризует степень соответствия альтернативы понятию, определенному критерием C. Если же имеется n критериев: C_1, C_2, …, C_n, то лучшей считается альтернатива, удовлетворяющая и критерию C_1, и критерию C_2, и …, и C_n. Тогда правило для выбора наилучшей альтернативы может быть записано в виде пересечения соответствующих (нечетких) множеств:

$$
D = C_1 \bigcap C_2 \bigcap ... \bigcap C_n .
$$

Операции пересечения нечетких множеств соответствует операции min, выполняемая функциями принадлежности:

$\mu_D(a_j) - \min\limits_{j=\overline{1,n}} \mu_{c_j}(a_j),\ j=\overline{1,m}.$ В качестве лучшей альтернативы выбирается альтернатива a*, имеющая наибольшее значение функции принадлежности: $\mu_D(a^*) = \max\limits_{j=\overline{1,m}} \mu_D(a_j).$ В случае, если критерии C_i, то каждому из них приписывается число $\alpha_i > 0$ (которое тем больше, чем важнее критерий), и правило выбора имеет вид:

$$D = C_1^{\alpha_1} \cap C_2^{\alpha_2} \cap ... \cap C_n^{\alpha_n}.$$

Коэффициенты относительной важности определяются на основе процедуры парного сравнения критериев. Вначале формируется матрица B, элементы которой определяются в соответствии с табл. 3.12 и удовлетворяют следующим условиям калибровки: $b_{ij} = 1;\ b_{ij} = 1/b_{ji}$.

После этого согласно процедуре, изложенной выше, находится собственный вектор матрицы w, соответствующий максимальному собственному значению $Bw = \lambda_{\max} w$. Искомые значения коэффициентов λ_i определяются умножением элементов: $\alpha_1 = nw_i$.

Таблица 3.12. Относительная важность критериев

Относительная важность критериев	Элемент
Равная важность	1
Немного важнее	3
Важнее	5
Заметно важнее	7
Намного важнее	9
Промежуточные значения	2, 4, 6, 8

Таким образом, в случае многих критериев за счет учета их важности существует возможность свести процедуру выбора к простейшим вариантам.

Пример 2. Рассмотрим вариант принятия решений в случае критериев различной важности. Пусть необходимо выбрать место для строительства химического комбината, исходя из следующих критериев: C_1 – близость к потребителю; C_2 – близость к источникам сырья; C_3 – наличие в городе свободной рабочей силы.

Предполагаемые места строительства: a_1, a_2, a_3, a_4. нечеткие множества, характеризующие альтернативные варианты с точки зрения различных критериев:

$$C_1 = \{0,5/a_1;\ 0,7/a_2;\ 0,3/a_3;\ 0,6/a_4\};$$
$$C_2 = \{0,5/a_1;\ 0,4/a_2;\ 0,8/a_3;\ 0,4/a_4\};$$
$$C_3 = \{0,2/a_1;\ 0,1/a_2;\ 0,6/a_3;\ 0,9/a_4\}.$$

Критерии имеют различную важность, результаты их попарного сравнения даны матрицей C_1 , C_2, C_3

$$B = \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/9 \\ 3 & 9 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Собственные элементы матрицы В равны: $w_1 = 0,06$; $w_2 = =0,27$; $w_3 = 0,67$. Тогда коэффициенты относительной важности критериев

$$\alpha_1 = 3\times 0,06 = 0,18;\ \ \alpha_2 = 3\times 0,27 = 0,81;\ \ \alpha_3 = 3\times 0,67 = 2,01.$$

Модификация множества C_i дает:

$$C_1^{0,18} = \{0,5^{0,18}/a_1; 0,7^{0,18}/a_2; 0,3^{0,18}/a_3; 0,6^{0,18}/a_4\} =$$
$$= \{0,88/a_1; 0,94/a_2; 0,81/a_3; 0,91/a_4\};$$

$$C_2^{0,81} = \{0,57/a_1; 0,48/a_2; 0,83/a_4; 0,48/a_4\};$$

$$C_3^{0,81} = \{0,04/a_1; 0,01/a_2; 0,36/a_4; 0,81/a_4\}.$$

В результате множество $D=\{0,04/a_1;0,01/a_2;0,36/a_4;0,48/a_4\}$. Максимальное значение принадлежности имеет альтернатива a_4 , поэтому ее следует выбрать в качестве возможного места строительства.

В данном разделе мы познакомились с элементами исчисления нечетких числе и множеств, а также с основными операциями над этими категориями. Введенные понятия существенно расширяют круг задач с неопределенностями и допускают либо применение специальных методов, либо сочетание с изученными ранее методами принятия решения.

9. 3. Контрольные вопросы

1. Какие формы неопределенности в задачах управления требуют применения методов принятия решений.

2. Как формулируются критерии принятия решений на основе собственных чисел матриц предпочтений.

3. Укажите основные идеи описания неопределенности при использовании нечетких чисел.

4. Как вычисляются функции предпочтения при выполнении различных операций над нечеткими числами и нечеткими уравнениями.

Библиографический список

1. Астафьев Н.Н. Линейные неравенства и выпуклость. М.: Наука, 1982. 153 с.

2. Быстров И.Е., Задонцев А.Ф., Козлов В.Н. Прогнозирование и определение потребности в специалистах: методы и модели. СПб.: СПбГПУ, 2005. 117 с.

3. Борисов В.А. и др. Методы принятия решений. Рига. Изд. Зинатне. 1980. 320 с.

4. Булаев Н.И., Козлов В.Н., Оводенко А.А., Рудской А.И. Системные ресурсы качества высшего образования России и Европы. СПб.: Изд-во политехн. ун-та. 2007. 498 с.

5. Васильев Ю.С., Козлов В.Н., Попова Е.П. и др. Математические методы формирования содержания высшего профессионального образования. СПб. Изд-во политехн. ун-та. 2003. 95 с.

6. Гасс С. Линейное программирование. М.: ФМ. 1961. 304 с.

7. Гасс С. Путешествие в страну линейного программирования. М.: Наука. 1982. 190 с.

8. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1979. 230 с.

9. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1982. 220 с.

10. Козлов В.Н. Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем. Л.: ЛГУ им. А.А. Жданова. 1986. 168 с.

11. Козлов В.Н. Математика и информатика. СПб.: Изд-во «Питер». 2004.- 230 с.

12. Козлов В.Н. К аналитическому решению систем линейных алгебраических неравенств // Автоматика и телемеханика, 1989, № 4. с. 104-107.

13. Козлов В.Н., Колесников Д.Н. Решение задач автоматики и

вычислительной техники методами исследования операций. Л.: ЛПИ. 1982. 105 с.- 92 с.

14. Козлов В.Н. Управление энергетическими системами и объединениями. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2008. 298 с.

15. Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Заборовский В.С. Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. Л.: Изд-во Ленингр.

ун-та, 1989. 224 с.

16. Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Шашихин В.Н. Вычислительная математика и теория управления: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. 284 с.

17. Козлов В.Н., Магомедов К.А., Хлопин С.В. Нелинейные задачи и разностные схемы теплопроводности. СПб.: СПбГПУ. 2008.- 298 с.

18. Козлов В.Н., Пономарев А.Г. Управление энергетическими системами. Часть 6. Обобщенные математические модели для управления электромеханическими процессами. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та.-2008. 130 с.

19. Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Шашихин В.Н. Теория автоматического управления: Учеб. пособие под ред. В.Н. Козлова. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2006. 284 с.

20. Кузнецов В.Н., Кузубов В.А., Волощенко Н.П. Математическое программирование. М.: «Высш. школа». 1976. 270 с.

21. Линейные неравенства и смежные вопросы: Сборник / под ред. Куна и Таккера. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 470 с.

22. Мушик П., Мюллер Э. Методы принятия технических решений. М.: Наука. 1980. 290 с.

23. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука. 1975. 580 с.

24. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука. 1975. 290 с.

25. Системный анализ и принятие решений / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. М.: Изд-во «Высш. школа». 2004. 800 с.

26. Троицкий В.А. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Сер. «Математика в политехническом университете». СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2003. 190 с.

27. Троицкий В.А. Системный анализ и принятие решений. Дополнительные главы / под ред. В.Н. Козлова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2009. 137 с.

28. Холод Н.И. Решение задач линейного программирования. Минск. БГУ. 1974. 180 с.
29. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
30. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука. 1980. 540 с.

Козлов Владимир Николаевич

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать Формат Печать цифровая.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета, представленного автором
в цифровом типографском центре Издательства Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.
Тел. (812) 540-40-14
Тел./факс: (812) 927-57-76