

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет

В. Н. Козлов

**УПРАВЛЕНИЕ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ
И ОБЪЕДИНЕНИЯМИ**

в предаварийных режимах

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2011

УДК 681.5: 519.71(075.8)
ББК 32.965:22.18
К 592

Рецензенты:

Академик РАН *Ю. С. Васильев*,
член-корр. РАН *П. А. Бутырин*,
д. ф-м. н., проф. *А.В. Белоцерковский*
(Тверской государственный университет)

Козлов В. Н. Управление энергетическими системами и объединениями в предаварийных режимах. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011.- 479 с.

В монографии предложены модели и методы предаварийного ограничения перетоков активной мощности по линиям и управления частотой и активной мощностью для Единой энергосистемы России («Системного диспетчера»). Разработан комплекс конструктивных динамических и квазистационарных математических моделей электромеханических процессов объекта, оптимизационные методы ограничения перетоков и управления частотой и обменной мощностью энергетических объединений энергосистем. Созданы методы совместного и автономного прогнозирования необходимых генерируемых ресурсов активной мощности энергосистем и передающих ресурсов для линий электропередач, гарантирующие сохранение устойчивой параллельной работы в предаварийных режимах и условиях рынка энергоресурсов.

Предназначено для научных работников и специалистов, занимающихся разработкой и исследованием систем автоматического управления энергетическими системами и объединениями.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики»

Печатается по решению Издательской комиссии СПбГПУ и Ученого совета Санкт-Петербургского института электрофизики и энергетики РАН

© Санкт-Петербургский
государственный политехнический
университет, 2011
© Санкт-Петербургский институт
электрофизики и энергетики РАН,
2011
© В.Н. Козлов, 2011

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список принятых сокращений.....	6
Введение.....	7
1. Электромеханические процессы и управление частотой и активной мощностью энергетических объединений.....	15
1.1. Состояние, проблемы, задачи, модели и методы предаварийного управления частотой и активной мощностью	15
1.2. Постановки задач моделирования, анализа и синтеза предаварийного управления частотой и активной мощностью	25
2. Математические модели переходных процессов и квазистационарных состояний энергетических систем и объединений в предаварийных режимах.....	41
2.1. Линейные дифференциальные уравнения электромеханических процессов в абстрактных базисах.....	41
2.2. Линейные дифференциальные уравнения электромеханических процессов для физических координат...	67
2.3. Линейные динамические структурно-инвариантные уравнения процессов и квазистационарного потокораспределения.....	75
2.4. Кусочно-линейные и разрывные дифференциальные уравнения электромеханических процессов.....	107
2.5. Асимптотические, квазистационарные и структурно-инвариантные кусочно-линейные уравнения электромеханических процессов.....	144
2.6. Кусочно-линейные модели квазистационарного потокораспределения.....	165
2.7. Разностные схемы для линейных уравнений электромеханических процессов.....	173
2.8. Разностные схемы для кусочно-линейных дифференциальных уравнений электромеханических процессов.....	177
2.9. Устойчивость кусочно-линейных разностных схем для анализа электромеханических процессов.....	185
2.10. Основные результаты.....	190

3. Методы и алгоритмы ограничения перетоков и управления частотой и активной мощностью энергосистем и объединений.....	193
3.1. Классические методы и алгоритмы системы управления частотой и активной мощностью.....	193
3.2. Устойчивость нелинейных систем ограничения перетоков и управления частотой и активной мощностью.....	224
3.3. Квазистатическое оптимальное ограничение перетоков по линиям.....	244
3.4. Динамическая оптимизация системы ограничения перетоков.....	256
3.5. Технологические режимы управления частотой и активной мощностью.....	260
3.6. Синтез замкнутых локально-оптимальных систем управления частотой и мощностью на основе операторов оптимизации.....	273
4. Обеспечение энергетической безопасности методами прогнозирования ресурсов управления частотой и активной мощностью.....	309
4.1. Анализ задач прогнозирования ресурсов для ограничения перетоков и управлений частотой и активной мощностью.....	309
4.2. Принципы и задачи прогнозирования генерирующих и сетевых ресурсов для управления активной мощностью.....	315
4.3. Прогнозирование ресурсов и методы управления системы ограничения перетоков.....	326
4.4. Прогнозирование ресурсов для совместного ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности...	335
4.5. Совместное прогнозирование ресурсов и управлений переходными режимами энергообъединений.....	345
4.6. Вычислительные аспекты совместного прогнозирования ресурсов и управлений.....	358

5. Хаотическая динамика и обеспечение безопасности электроэнергетических систем.....	374
5.1. Структуры динамических систем и хаотические режимы электромагнитных процессов в энергетических объединениях.....	374
5.2. Методы исследования хаотических режимов энергетических систем.....	387
5.3. Хаотическая динамика систем управления электромагнитными процессами энергообъединений.....	401
6. Методы ограничения перетоков по линиям в многоуровневых системах управления частотой и активной мощностью энергообъединений.....	411
6.1. Иерархическая система ограничения перетоков по линиям в крупных энергообъединениях.....	411
6.2. Синтез крупномасштабных локально-оптимальных систем управления энергообъединениями.....	429
Заключение	447
Библиографический список.....	451
Приложение. Математическое моделирование и оптимизация гидравлических сетей в установившихся режимах несжимаемой жидкости.....	469

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АРМ	- автоматическое регулирование мощности
АРЧ	- автоматическое регулирование частоты
АРЧМ	- автоматическое регулирование частоты и активной мощности
ТЭС	- тепловая электростанция
ГЭС	- гидроэлектростанция
ЭТА	- эквивалентный турбоагрегат
ЭГА	- эквивалентный гидроагрегат
ЛЭП	- линия электропередач
ОЭС	- объединенная электроэнергетическая система
САУ ЧМ	- система автоматического управления частотой и активной мощностью
ЦСАУ	- централизованная САУ
ИСАУ	- иерархическая САУ
ОМП	- оператор математического программирования
ЭМП	- электромеханические процессы
ЭМгП	- электромагнитные процессы
ЭЭО	- электроэнергетическое объединение
ЭБ	- энергетическая безопасность

ВВЕДЕНИЕ

В третьем издании монографии рассматриваются модели и методы совершенствования автоматизированной системы диспетчерского управления (АСДУ) электроэнергетических объединений (ЭЭО) в предаварийных режимах. Определены цели и задачи управления с учетом *«источников угроз и индикаторов энергетической безопасности (ЭБ)»* и *«средств энергетической безопасности»*. Рассмотрены *индикаторы и методы обеспечения ЭБ*, реализуемые в АСДУ системами ограничения перетоков активной мощности по линиям и управления частотой и активной мощностью энергообъединений типа ЕЭС России.

Обеспечение ЭБ требует определения источников безопасности и синтеза управлений для их ликвидации средствами АСДУ. Рассмотрены *источники угроз, индикаторы ЭБ и соответствующие средства обеспечения ЭБ* системами ограничения перетоков (СОП) по линиям электропередач (ЛЭП) и системами автоматического управления частотой и активной мощностью (САУ ЧМ). Предложенные индикаторы энергетической безопасности положены в основу разработки моделей, методов анализа асимптотической и входо-выходной устойчивости указанного класса систем в предаварийных режимах. Введенные *индикаторы энергетической безопасности ЭЭО* и средства ее обеспечения определены следующим образом:

1). *«Адекватные модели ЭЭО»*, гарантирующие достаточное соответствие, конструктивность и корректность описания электромеханических процессов (ЭМП) как одно из условий обеспечения корректного управления. Для синтеза СОП и САУ ЧМ необходимы адекватные, конструктивные и корректные модели ЭМП. *Адекватность моделей ЭЭО* должна обеспечить

достаточное соответствие процессов в модели и объекте с учетом свойств генерирующих агрегатов и сети. *Адекватность моделей* обеспечивает согласованность и статическую определенность моделей ЭЭО для совместного или независимого синтеза СОП и САУ ЧМ. *Конструктивность моделей*, обладающих *структурной инвариантностью* относительно количества энергосистем, должна обеспечить качественный синтез и анализ управлений при высоких размерностях уравнений ЭМП.

2). **«Корректный синтез управлений частотой и активной мощностью ЭЭО»** на основе адекватных математических моделей объекта, целей и задач для централизованных, децентрализованных или иерархических систем ограничения перетоков (СОП) по линиям и автоматического управления частотой и активной мощностью. Корректность управлений для СОП и САУ ЧМ объединенных энергосистем (ОЭС) должна учитывать возможные противоречивые действия двух систем и обеспечивать асимптотическую и входо-выходную устойчивость.

3). **«Достаточные генерирующие ресурсы активной мощности для управления»**, необходимые для корректного управления, поскольку возникающие отклонения частоты при внеплановых нагрузках являются угрозами ЭБ, приводящими к аварийным режимам. Эта проблема является частью проблемы ЭБ в связи с линейным ростом энергоресурсов до 2050 года по прогнозу Международного энергетического агентства и Департамента энергетики США [13,34,35,172,187]. Сохранение устойчивости параллельной работы ЭЭО требует введения САУ ЧМ, которая должна поддерживать отклонения частоты не более 0,1 герц и подавление 70 % амплитуды колебаний перетоков активной мощности с периодом не более 2 минут [21,159,160].

4). **«Достаточные передающие ресурсы (пропускные способности) линий»**, позволяющие обеспечить необходимое

перераспределение средствами СОП генерируемых активных мощностей станций, которые должны иметь достаточные регулировочные диапазоны [11-13].

5). **«Регулярное управление хаотическими режимами, способствующими возникновению каскадных аварий в ЕЭС»** с учетом особенности электромагнитных процессов ЭЭО, качественно объясняемых структурой и билинейностью уравнений Парка-Горева [7]. Эти уравнения имеют общие свойства с уравнениями Лоренца, описывающими динамический хаос [113,132]. Для обеспечения ЭБ необходима идентификация предаварийных режимов, установления условий возникновения хаотических режимов ЭЭО и синтез управлений напряжением сети ЭЭО, обеспечивающих регулярную динамику на основе «дехаотизации».

Введение перечисленных индикаторов ЭБ ЭЭО требует решения комплекса задач, к которым относятся:

- общие постановки задач управления (раздел 1);
- математические формулировки задач и методов моделирования и вычисления управлений и синтеза замкнутых систем управления частотой и активной мощностью со свойствами асимптотической и входо-выходной устойчивости (разделы 2, 3);
- математические формулировки задач и средства ресурсного обеспечения систем ограничения перетоков и управления частотой и обменной мощностью (раздел 4);
- синтез управлений, исключающих хаотические режимы (раздел 5).

Перечисленный комплекс задач синтеза СОП по линиям и САУ частотой и обменной мощностью по критерию энергетической безопасности определил совокупность задач и подзадач:

1. Разработка корректных математических моделей с учетом взаимодействия СОП и САУ ЧМ для ОЭС по обеспечению

корректных методов синтеза с учетом качественных свойств, рассмотренных в разделах 2, 3 и 5.

2. Создание корректных методов и алгоритмов независимого и совместного ограничения перетоков и систем управления частотой и обменной мощностью для централизованных (раздел 3), иерархических (раздел 6) систем управления ЭЭО.

3. Прогнозирование требуемых *генерирующих ресурсов* активной мощности станций и передающих (*сетевых*) ресурсов ЛЭП для создания гарантии обеспечения ресурсами устойчивой параллельной работы ЭЭО в предаварийных режимах и в условиях рынка энергии (раздел 4).

4. Разработка методов для «дехаотизации» электромагнитных процессов в ЭЭО в условиях регулирования напряжения.

Перечисленные индикаторы и средства ЭБ определяют причины возникновения предаварийных режимов, а предлагаемые подходы к решению охватывают взаимосвязанных методов анализа и синтеза. Поэтому в книге рассмотрены модели и методы для управления в условиях (соответствующих индикаторам) на основе *идентификации причин* и *создания адекватных методов* и систем автоматического ограничения перетоков (СОП) активной мощности по ЛЭП и САУ ЧМ для ЕЭС. Эти две системы, которые могут быть синтезированы независимо или совместно, являются средствами обеспечения устойчивой параллельной работы.

Рассмотрены модели и методы для систем ***предаварийного ограничения перетоков*** активной мощности по различным классам линий ОЭС и ЕЭС и систем ***управления частотой, активной мощностью*** ОЭС. Поставлена задача анализа условий возникновения предаварийных и управления напряжением сети ЕЭС при возникновении ***хаотических режимов и***

адекватного управления. Созданы методы совместного и автономного прогнозирования необходимых *генерируемых ресурсов* активной мощности энергосистем и *передающих ресурсов* для линий электропередач. Предлагаемые решения создают оптимистичные предпосылки для сохранения устойчивой параллельной работы ЭЭО в условиях рынка энергоресурсов.

Как следует из вышеизложенного, проблема обеспечения энергетической безопасности России может быть решена на основе комплексного подхода к управлению. Это предполагает создание систем обеспечения устойчивой параллельной работы отдельных энергосистем и объединений энергосистем и Единой энергосистемы России в условиях централизации или децентрализации энергетических ресурсов. Устойчивость параллельной работы может обеспечивать *корректное автоматическое управление* в условиях возникновения причин нарушения безопасности, характеризуемых введенными индикаторами. Предлагаемый вариант системы обеспечивает безопасность, определяемую пятью индикаторами, и не гарантирует тотальной ЭБ.

Создание *систем управления ЕЭС России* требует определения методов решения комплекса задач управления технологическими режимами линий электропередач, станций, энергосистем и их объединений. Существует ряд работ в области создания моделей и методов управления крупными энергосистемами уровня объединенных энергосистем или сверхмощных систем типа единых энергетических систем государств, создаваемых на принципе разделения плановой и внеплановой нагрузок. Это требует решения трех содержательных задач:

1. *Обеспечение оперативного перераспределения* активной мощности средствами предаварийного *ограничения перетоков* активной мощности по внутрисистемным и межсистемным (транзитным) ЛЭП переменного напряжения [77,79,85].

2. **Обеспечение баланса** активной мощности системами **регулирования частоты и активной мощности ЕЭС**. Эта задача является частью общей проблемы управления, возникающей в связи с линейным ростом энергоресурсов. Однако необходимость транспортировки энергии к потребителям актуализирует необходимость эффективного управления для сохранения устойчивости параллельной работы энергосистем и ЕЭС России [121].

3. **Идентификация нештатных аварийных режимов**, вызванных **хаотической динамикой ОЭС или ЕЭС** в целом, и ликвидация этого вида аварийности средствами управления напряжением электрической сети ЕЭС России и регулирования реактивной мощности. Общие условия возникновения хаотических режимов известны, однако применительно к энергетическим системам возникают характерные особенности, что требует адекватного управления хаотическими режимами в целях их «дехаотизации».

4. **Разработка адекватных конструктивных корректных моделей ЕЭС** для анализа и синтеза систем ограничения перетоков и систем автоматического управления частотой и активной мощностью. **Адекватность моделей** должна обеспечивать требуемое (для задач управления) соответствие модели и ЕЭС с учетом свойств агрегатов и сети. **Корректность моделей** – условия взаимного согласования частных моделей ЕЭС в условиях совместного и независимого синтеза. **Конструктивность моделей** должна обеспечивать целесообразную структурную форму, позволяющую иметь достаточную полноту описания генерирующей и сетевой частей ЕЭС с учетом достаточного представления существенных нелинейностей для анализа и синтеза.

5. Разработка **методов определения необходимых генерирующих и сетевых ресурсов** активной мощности, обеспечивающих

требуемые регулировочные диапазоны управляющих станций и требуемые пределы передаваемой мощности по ЛЭП на основе *индикатора баланса* активной мощности.

Совокупность этих задач общей проблемы ЭБ исследовалась в течение последних десятилетий. Предлагаемые в данной книге результаты посвящены разработке методов квазиоптимального управления электромеханическими и электромагнитными процессами на основе квазистационарных и динамических моделей ЭС, ОЭС и ЕЭС в целом. Представленные модели, методы анализа и синтеза систем управления применялись в ОДУ Северо-Запада при цифровом ограничении перетоков (линия Чудово-Бологое, 1969 г.) [53,54] и в ОЭС Средней Волги (г. Самара, 1985 г.), а также в моделях для расчета «моделей влияния» системы квазиоптимального управления для ОЭС Узбекистана и Закавказья (1988 г.). Эти исследования выполнены в ряде научно-исследовательских хоздоговорных работ ЛПИ им. М.И. Калинина по заказу ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект» с 1970 по 1988 гг.

В монографии предложен *обобщенный подход к моделированию, анализу и синтезу систем управления подсистемами ЭС, ОЭС и ЕЭС*, обеспечивающий устойчивость параллельной работы на этапах предаварийного ограничения перетоков активной мощности, управления частотой и активной мощностью, регулирования напряжения и обеспечения ресурсами для генерации электрической мощности на уровнях ЭС, ОЭС и ЕЭС России. Моделирование, анализ и синтез осуществляются на основе математических обобщенных моделей и методов. На примерах указанного класса процессов выделены проблемы и задачи моделирования, анализа и синтеза систем управления процессами.

Предлагаемые методы развивают численные и аналитические методы теории управления применительно к энергосистемам. Для

синтеза систем управления ЭЭО обобщены методы, изложенные в серии монографий «Управление энергетическими системами», изданной в 7 частях с 2000 по 2008 годы. Новый этап развития связан с расширением сферы аналитических методов и переходом к синтезу адаптивных и крупномасштабных

систем. Адаптивные системы излагаются на уровне применения в рассматриваемых системах управления [7,24-27,29,30].

Разработанная технология синтеза управлений систем управления основана на базовой схеме – **«модели-методы анализа-методы синтеза»**. Эта схема реализуется последовательно, образуя единый комплекс методов анализа статики, динамики и синтеза, включающих вычислительные методы, алгоритмы и анализ устойчивости замкнутых систем [31-35,41,44,79,94-99].

Монография задумана как методологическое руководство по синтезу систем управления ЭЭО в предаварийных режимах. Выбранный класс задач – **«регулирование частоты, активной мощности и ограничение потоков активной мощности»** является иллюстрацией возможностей предлагаемых методов для других систем управления энергосистемами, включая синтез систем противоаварийного управления на основе математического программирования. Раздел 5 написан совместно с И. У. Тросько. Автор надеется, что излагаемые результаты будут способствовать развитию теории и практики создания систем управления ЕЭС.

Санкт-Петербург, сентябрь 2011 г.

1. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕДИНЕНИЙ

1.1. СОСТОЯНИЕ, ПРОБЛЕМЫ, ЗАДАЧИ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРЕДАВАРИЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

К настоящему времени в ЕЭС России создан существенный энергетический ресурс генерирующих и передаваемых мощностей, который может эффективно использоваться в условиях адекватного развития систем управления в структуре АСДУ. Системы управления энергетических объединений (ЭЭО) типа ЕЭС России должны обеспечивать энергообеспечение с учетом технологических режимов ЭС, ОЭС и ЛЭП в рамках генерирующих и передаваемых потребителям ресурсов. Генерация электрической энергии и ее передача потребителям находятся в противоречии с обеспечением безопасности в связи с нарушениями устойчивости параллельной работы ЭС. Поэтому технологические режимы ЕЭС России должны обеспечивать комплекс проблем, связанных с устойчивостью. Рассматриваемая система предаварийного управления частотой и активной мощностью ЕЭС является подсистемой АСДУ ЕЭС, обеспечивающая устойчивость параллельной работы за счет системы ограничения перетоков (СОП) активной мощностью по ЛЭП и системы управления частотой и обменной мощностью ОЭС.

1. Состояние разработки систем управления частотой и активной мощностью ЕЭС. В основу разработанных моделей и методов положены методы ограничения перетоков активной

мощности по ЛЭП и регулирования частоты и обменной мощности, разработанные в 1970-1985 гг. ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект» совместно с ЛПИ им. М.И. Калинина. Разработанные модели для данного класса систем предаварийного управления реализуют ограничение перетоков активной мощности по межсистемным и внутрисистемным ЛЭП, автоматическое управление частотой и активной мощностью (АРЧМ) ОЭС.

Традиционные подходы к созданию моделей для управления частотой, активной мощностью и ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач основаны на расчетных моделях режимов ЭС и ЭЭО. К ним можно отнести известный в теории энергетических систем классический **«метод коэффициентов распределения»**, предложенный для задач ограничения перетоков ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект» совместно с ЛПИ им. М.И. Калинина [24-27,77,79,83], определяющий влияние генерируемых мощностей станций на перетоки по линиям в условиях баланса внеплановых мощностей. Обобщением является **«метод коэффициентов влияния»**, разработанный в ЛПИ им. М.И. Калинина [79] для вычисления управлений на станции для ограничения перетоков в условиях небалансов активных мощностей ЭЭО.

2. Проблемы, общие структуры и задачи предаварийного управления ЭС, ОЭС и ЕЭС. Проблемы и задачи энергетической безопасности и надежного энергообеспечения, устойчивости параллельной работы ЭС, требуют решения в АСДУ уровня ОЭС, ЕЭС или ЦДУ ЕЭС ряда функциональных задач:

- **аварийное и предаварийное ограничение перетоков** активной мощности по ЛЭП для оперативного *перераспределения* внеплановой активной мощности в масштабах ЭС, ОЭС или ЕЭС;

- **регулирование частоты, активной мощности и**

сохранение *баланса* активной мощности по ЭС, ОЭС или ЕЭС;
- *регулирование напряжения и реактивной мощности электрической сети ЭС, ОЭС или ЕЭС*;
- *обеспечение генерирующих элементов адекватными топливно-энергетическими ресурсами.*

Классификация структур систем имеется в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация общих структур и целей управления частотой и активной мощностью различными классами систем

Типы структур	Локальные системы	Централизованные системы	Иерархические системы
	1	2	3
1. Структуры независимого управления	1.1. Независимые СОП и САУ ЧМ с локальной информацией о моделях и режимах локальных генерирующих и сетевых частей ЭС, ОЭС или ЕЭС	1.2. Независимые СОП и САУ ЧМ с ограниченной централизованной информацией о моделях и режимах генерирующих и сетевых (передающих) частей ЕЭС в виде ЭС или ОЭС	1.3. Независимые СОП и САУ ЧМ с информацией о моделях и режимах генерирующей и сетевой частей ЕЭС, необходимой для координации частей ЕЭС или ОЭС
2. Структуры совместного управления	2.1. Совместные СОП и САУ ЧМ с локальной информацией о моделях и режимах генерирующей и сетевой (передающей) частей ЕЭС	2.2. Совместные СОП и САУ ЧМ с централизованной (ограниченной) информацией о моделях и режимах генерирующих и сетевых частей ЕЭС	2.3. Совместные СОП и САУ ЧМ на основе информации о генерирующих и сетевых частях ЕЭС, необходимой для координации локальных подсистем

В этой таблице представлены методы синтеза, включающие независимые и совместные методы синтеза СОП и САУ ЧМ, которые представлены с учетом опыта разработки и проектирования систем данного класса. Определены также различные уровни информации о моделях генерирующих и передающих (сетевых) частей ЕЭС уровней ЭС или ОЭС.

Возвращаясь к состоянию реализации двух видов управления СОП и САУ ЧМ, можно отметить, что эти виды управления частично были реализованы. В частности, реализуется автоматическое ведение частоты выделенными группами станций, в частности, АЭС или гидростанциями, в частности, волжского каскада ГЭС. Реализовано ограничение перетоков по ЛЭП. С 1980 г. ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект» и ЛПИ им. М. И Калинина начали разработку систем управления ЕЭС совместно с Энергосистемой «Мир». Это иллюстрирует актуальность разработки рассматриваемого класса систем управления ЕЭС.

Актуальными являются задачи по созданию математических моделей, методов и алгоритмов управления для перечисленных выше задач, возлагаемых на *«Системного диспетчера»* ЦДУ ЕЭС России. Решение этих задач иллюстрируется на примере системы ограничения перетоков (СОП) и автоматического управления частотой и активной мощностью (АРЧМ) ЭЭО и ЭС.

3. Технологические структуры и модели системы предаварийного управления частотой и активной мощностью ЕЭС России. Структура системы управления частотой и активной мощностью предназначена для управления предаварийными режимами на различных уровнях ЭС, ОЭС или ЕЭС. Классификация структур систем ограничения перетоков и САУ ЧМ приведена в табл. 1.2, где выделены технологические системы:

1). *Системы децентрализованного, централизованного*

или иерархического ограничения перетоков (СОП) активной мощности по внутрисистемным и межсистемным ЛЭП при наличии различного уровня информации о моделях.

Таблица 1.2

Классификация структур СОП по ЛЭП уровней ЭС, ОЭС или ЕЭС и САУ частотой и обменной мощностью ОЭС для задач АСДУ

Назначение систем управления	Независимые системы	Совместные системы
	1	2
1. СОП активной мощности по ЛЭП различных классов	1.1. Централизованные, децентрализованные или иерархические СОП раздельного типа для ограничения перетоков по отдельным ЛЭП уровней ЭС, ОЭС или ЕЭС	1.2. Централизованные, децентрализованные или иерархические совместные СОП по заданным группам ЛЭП: - линиям внутрисистемного уровня, соединяющим ЭС; - линиям межсистемного уровня, соединяющим ОЭС; - магистральным линиям, передающим транзитные потоки активной мощности
2. САУ частотой и активной мощностью различных классов	2.1. Централизованные или децентрализованные САУ раздельного управления частотой и обменной мощностью уровня ОЭС выделенными группами станций	2.2. Централизованные, децентрализованные или иерархические СОП по заданным ЛЭП и САУ совместного управления частотой и обменной мощностью ОЭС

2). Децентрализованные, централизованные и иерархические системы управления частотой и активной мощностью уровня ОЭС на принципах независимого и совместного синтеза.

3). *Децентрализованные (локальные) СОП* по ЛЭП в условиях информации о моделях переходных процессов или стационарных режимов в локальных частях объекта, например, регулирование частоты каскадом волжских ГЭС или регулирование обменной мощности отдельных ОЭС.

4). *Регулирование частоты и обменной мощности выделенными станциями или группами станций по критериям*, обеспечивающим энергоавтономность ОЭС в покрытии внеплановой нагрузки (включая метод Гранера-Даррье [205,206] и др.).

Для создания системы управления данного класса необходимо решить проблемы моделирования объекта, поскольку для ограничения перетоков и управления частотой и активной мощностью отсутствует полная информация о структуре и параметрах ЭС и ОЭС, что определяет задачи синтеза в различных классах неопределенности моделей объекта. Поэтому синтез управлений ЕЭС как динамическим объектом возможен на базе ограниченного *класса моделей ЕЭС как объекта*, включающего модели стационарных (квазистационарных) состояний или приближенные (асимптотические) модели динамики. *Класс стационарных моделей* определяется обобщенными методами расчета потокораспределения в ЭЭО. *Класс динамических моделей* – методами редукции и идентификации параметров при заданной структуре генерации (ЭС) и передаче (сети ЕЭС). Эти обобщения могут быть распространены на классы задач управления, использующих «*частотные коэффициенты влияния*» (распределения), представленные матрицами квазистационарных частотных моделей влияния. Для *идентификации ЭЭО* используются методы оценки параметров, методы расчета потокораспределения или методы идентификации параметров [64].

Таким образом, ограничения структур систем управления и

доступные для идентификации модели ЭЭО требуют анализа устойчивости линейных и нелинейных замкнутых систем методами функционального анализа [82].

4. Методы управления частотой и активной мощностью энергосистем. Синтез методов управления ЭС и ЭЭО требует задания целевых условий и ограничений. Классические – экстремальные целевые условия не всегда обеспечивают синтез необходимых управлений. Поэтому требуются методы для обеспечения технологических *режимов* на основе целевых условий, данных в табл. 1.3.

1). «*Точечные*» *целевые условия*, задаваемые в виде системы уравнений, используются для задач стабилизации перетоков по заданным отдельным или группам ЛЭП и стабилизации частоты и обменной мощности ОЭС.

2). «*Интервальные*» *целевые условия* представляются системой неравенств, применяемых для формализации технологических требований к СОП и САУ ЧМ по генерации и перераспределению внеплановой мощности для сохранения устойчивости.

3). «*Экстремальные*» *целевые условия*, формализуемые классическими требованиями минимизации различных функционалов качества СОП по ЛЭП или САУ ЧМ.

Эта совокупность классических и неклассических целевых условия реализует разнообразие технологических требований к режимам энергообъединений и учитывают ограничения на потоки по линиям, обменные мощности ОЭС или активные мощности станций, ЭС или ОЭС. Эти цели и требования формализуются в задачах анализа и синтеза на основе математического программирования и теории устойчивости [90-103]. При этом часть целевых условий может быть задана в ограничениях, а часть – с помощью минимизируемых функционалов, что дает возможность

Таблица 1.3

**Функциональное назначение целевых условий для обеспечения
технологических режимов по поддержанию частоты и
передаче мощности**

Типы целевых условий (ЦУ)	Точечные ЦУ, задаваемые равенствами	Интервальные ЦУ, задаваемые неравенствами	Экстремальные ЦУ, задаваемые функционалами
	1	2	3
1. Система ограничения перетоков по ЛЭП	1.1.1. Стабилизация перетоков по ЛЭП на заданных значе- ниях	1.2.1. Ограниче- ние перетоков по ЛЭП – под- держание пере- токов в заданных интер- валах	1.3.1. Минимизация отклонений перето- ков от заданных значений или затрат мощности регули- рующих ТЭС, ГЭС на перераспреде- ние внеплановой нагрузки
2. САУ частотой и активной мощностью	2.1.1. Стабилизация частоты 2.1.2. Стабилизация обменной мощно- сти 2.1.3. Совместная стабилизация час- тоты и обменной мощности 2.1.4. Стабилизация частоты со статиз- мом по обменной мощности (метод Гранера-Даррье)	2.2.1. поддержа- ние частоты в заданном интер- вале 2.2.2. поддержа- ние обменной мощности в ин- тервале (в задан- ных пределах) 2.2.3. поддержа- ние комбина- ции отклоне- ний частоты и обменной мощ- ности в задан- ных интервалах	2.3.1. Минимизация отклонений коор- динат от заданных значений или затрат регулирующих ТЭС, ГЭС на под- держание частоты и обменной мощно- сти
3. Совместное управление СОП по линиям и САУ ЧМ	3.1.1. Целевые ус- ловия типа 1.1.1, 2.1.1 – 2.1.4	3.2.1. Целевые условия: 1.2.1, 2.2.1 - 2.2.3	3.3.1. Целевые условия: 1.3.1, 2.3.1 – 2.3.3

синтезировать адекватные управления в виде счетной последовательности решений конечномерных задач оптимизации [79,86].

Предложенный подход к синтезу управлений требует создания конструктивных математических моделей замкнутых систем управления ЭС или ОЭС, которые представлены *операторами математического программирования* (ОМП) [84,101,107].

Синтез управлений ЭЭО основан на методах, ориентированных на применении в отдельных подсистемах энергетики. СОП синтезируется на основе «*метода коэффициентов влияния*», предложенного в [79]. Для регулирования частоты и обменной мощности ОЭС могут использоваться *методы раздельного регулирования частоты и обменной мощности* или «*метод регулирования по частоте и обменной мощности*», известный под названием метода Гранера-Даррье, Германия, 1933 г. [205,206]. Последний метод определяет условия локальной энергоавтономности ОЭС или энергорайонов, поскольку обеспечивает компенсацию внеплановых отклонений режимов ЭС и станциями ОЭС (энергорайона). Применяются «методы регулирования частоты выделенными группами станций», в частности, атомными или гидравлическими станциями. В качестве законов на первых этапах создания таких систем использовались классические пропорционально-интегральные законы управления, дополненные управляющими логическими переменными. Эти переменные обеспечивали участие ЭС (станций) в управлении, включение и выключение ЛЭП с учетом аварийных блокировок, и были введены в алгоритмы, разработанные ЛПИ им. М.И. Калинина для ОДУ Северо-Запада в 1972 г. [54].

На современном этапе перехода к локально-оптимальным системам управления частотой и активной мощностью необходимы адекватные математические модели ЭЭО как объекта

управления и методы вычисления управлений на основе оптимизационных формулировок [79,24-26,83,101]. В задачах разработки моделей и методов для управления ЭЭО можно выделить *три основных этапа*:

- *разработка комплекса математических моделей ЭС и ОЭС* как объектов управления для описания переходных и установившихся режимов работы для вычисления оптимальных или рациональных управлений уровня ЭС, ОЭС, ЕЭС или ее части;

- *синтез методов и алгоритмов системы управления в соответствии с технологическими требованиями* к структуре, функциям и заданным режимам, включающем операторные математические модели оптимизационных методов и алгоритмов СОП и САУ ЧМ на основе задач оптимизации для уровней управления;

- *анализ устойчивости и качества* замкнутых подсистем ограничения перетоков по линиям и регулирования частоты и активной мощности, включая анализ асимптотической и входо-выходной устойчивости и качества замкнутой системы для заданных уровней управления ЭС, ОЭС и ЕЭС России.

5. Задачи математического моделирования и управления электромеханическими процессами ЭЭО. В настоящее время существует целый ряд научных работ, в которых излагаются различные подходы к решению указанной задачи. В данной работе в качестве исходных моделей рассматриваются классические модели ЭЭС на основе линейных дифференциальных уравнений, а также ряд обобщенных моделей с типовыми нелинейностями, задаваемыми кусочно-линейными операторами. Для анализа процессов и синтеза управлений разработан комплекс линейных и кусочно-линейных моделей в виде дифференциальных уравнений, разностных схем и математических квазистационарных моделей режимов.

Технологические требования к режимам ЭС, ОЭС или ЕЭС на этапе синтеза СОП или САУ ЧМ формулируются в виде ограничений на мощности генерирующих станций, перетоков активной мощности по ЛЭП, а также необходимости обеспечения потребителей электроэнергией при внеплановом изменении нагрузки. Целью управления является минимизация отклонения мощностей регулирующих станций и перетоков от исходных значений или от заданных соотношений, которые являются экономически оптимальными. Эти задачи решаются в алгоритмической форме линейного или квадратичного программирования. Однако эта форма управлений ограничивает анализ качественных свойств замкнутой системы. Актуальной задачей синтеза управлений является разработка операторов конечномерной оптимизации, аналитически задающих решения аппроксимирующих оптимизационных задач [80,81,86].

Таким образом, создание эффективных предаварийных СОП по линиям и САУ частотой и обменной мощностью требует разработки и внедрения комплекса методов моделирования, анализа и синтеза на основе теории и практики управления на уровнях энергосистем, объединений энергосистем систем или ЕЭС России в целом.

1.2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ, АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ПРЕДАВАРИЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Для синтеза эффективных методов управления предаварийного ограничения перетоков по ЛЭП и управления частотой и активной мощностью электроэнергетических систем и объединений необходимо решить комплекс задач:

1). Разработка конструктивных *линейных и нелинейных моделей электроэнергетических ЭС, ОЭС или ЕЭС* в форме «вход-состояния-выход» в различных базисах, включая базис физических переменных и обобщение моделей объекта управления на основе кусочно-линейных операторов. Необходимы асимптотические модели для сокращения размерности вектора состояния и модели установившихся состояний для обеспечения энергобезопасности.

2). Разработка *моделей и методов для аналитической оптимизации и обеспечения конструктивного анализа и синтеза методов и алгоритмов* предаварийного управления ЭЭО частотой и активной мощностью с учетом технологических требований к предаварийным режимам работы СОП по ЛЭП и САУ ЧМ для ОЭС.

3). Исследование *устойчивости и качества свойств замкнутой нелинейной системы ограничения перетоков* активной мощности по ЛЭП и *регулирования частоты и обменной мощностью* ОЭС на основе методов конструктивной теории управления, функционального анализа и алгебры. При этом применительно к ЭЭО целесообразно исследование два вида устойчивости замкнутых СОП и САУ ЧМ:

– *асимптотическую устойчивость* методами А.М. Ляпунова, позволяющую исследовать устойчивость при отклонении координат ЭЭО в предаварийных состояниях от стационарных режимов;

– *входо-выходную устойчивость* на основе методов функционального анализа, позволяющую анализировать свойства замкнутых систем при воздействии внеплановой нагрузки ЭЭО.

Таким образом, для решения перечисленных задач синтеза СОП активной мощности по ЛЭП и САУ ЧМ целесообразно

использовать методы математического моделирования, вычислительной математики [41,45], теории конечномерной оптимизации, теории автоматического управления [65,66,154] и функционального анализа [86,178].

Для эффективного решения комплекса перечисленных проблем противоаварийного управления для сохранения устойчивости параллельной работы ЭС и ЭЭО необходимо разработать комплекс линейных и нелинейных моделей электромеханических процессов. Модели ЭМП энергообъединений должны быть представлены в различных базисах, включая базисы абстрактных и физических координат, кусочно-линейных преобразований (операторов) координат и управлений в исходных линеаризованных уравнениях. Это необходимо для создания методов разработки асимптотических линейных, кусочно-линейных моделей предаварийных переходных и квазистационарных режимов.

1. Основы математического моделирования электромеханических процессов. Решение задач разработки математических моделей и методов для синтеза системы управления ЭС, ЭЭО и ЕЭС России рассматривается в соответствии с предлагаемой схемой исследования: «модели-методы анализа-методы синтеза». Последовательная реализация этой схемы предполагает разработку комплекса моделей ЭЭО как объекта управления, рассмотрение их особенностей и ограничений, выбор методов анализа статических и динамических свойств моделируемого объекта. На основе математических моделей и формализованных требований к системе управления частотой и активной мощностью необходимо разработать модели для синтеза системы управления и анализа ее качества.

Разработка комплексных моделей определяется постановкой задач и соответствующими ограничениями. При этом требования

к режимам управления определяют степень идеализации ЭЭО, что отражается в построении асимптотических моделей, моделей установившихся процессов, способов уменьшения размера векторов состояния. Уравнения для моделирования переходных процессов ЭЭО можно представить двумя типами уравнений: 1). Уравнения, описывающие динамику системы в базисе физических переменных; 2). Уравнения объекта в базисе абстрактных координат состояния. Основу моделирования ЭС, ЭЭО и ЕЭС определяют уравнения электромагнитных и электромеханических процессов, соответствующие физическим процессам генерации и распределения электрической и механической энергии в электрических сетях.

Уравнения электромагнитных процессов описывают первый класс «быстрых» процессов – распределение электромагнитной энергии в электрической сети, и должны учитывать соответствующие параметры – активные и реактивные проводимости линий электропередачи, законы изменения токов и напряжений в зависимости от мощностей и частот генераторов. При этом управление такими процессами относится к функции *систем аварийного управления*.

Второй класс уравнений, описывающих **электромеханические процессы**, соответствует относительно медленным процессам, которые характеризуют превращения механической энергии в электрическую энергию в узлах сети и ее передачу по ЛЭП. Эти уравнения должны адекватно отражать динамику генерирующих агрегатов и обмен энергией между генерирующими узлами. Этот класс моделей соответствует процессам и *системам предаварийного управления*.

Уравнения электромеханических процессов описывают балансы в i -м узле сети ЕЭС генерируемой ЭА активной мощности

ЭА, внеплановой активной нагрузки и активных мощностей ЛЭП. **Уравнения балансов генерируемых и передаваемых активных мощностей**, определяющих динамику роторов ЭА, представляющих ЭС или ЭЭО ЕЭС, имеют вид

$$T_a^2 \omega_i'' + T_y \omega_i' + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j) = p_i - \mu_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В уравнениях использованы обозначения для i -го ЭА: ω_i – отклонение частоты (скорости) вращения ротора; p_i – отклонение активной мощности i -го ЭА от заданного значения; μ_i – приращение внеплановой активной нагрузки, приведенной к валу i -го ЭА; T_{ai}^2 и T_{yi} – постоянные механической инерции и успокоения (коэффициент демпфирования) ротора ЭА; ρ_{ij} – удельные синхронизирующие мощности ЛЭП между i -м и j -м ЭА.

Описание суммы перетоков активной мощности по ЛЭП, передаваемых (принимаемых) i -м узлом, представлено слагаемым в левой части системы уравнений (1), имеющим вид

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j) = \sum_{j \in Q_i} s_j, \quad (2)$$

где Q_i – множество ЛЭП, примыкающих к i -му ЭА и связывающих ЭА (эквивалентный ЭС или ОЭС) с другими ЭА, эквивалентными ЭС или ОЭС в зависимости от уровня эквивалентирования.

Таким образом, уравнения описывают физические процессы в ЭЭО, связывающие переменные состояния электрической сети. Кроме этого, уравнения определяют координаты, соответствующие электромеханическим процессам в агрегатах, ЭС или ОЭС в зависимости от уровня эквивалентирования. К переменным

первой группы могут относиться значения напряжений на шинах эквивалентных агрегатов, частоты колебаний напряжения и тока, активное и реактивное сопротивление ветвей электрической сети, активная и реактивная мощность, генерируемая в узлах, активная и реактивная нагрузка, перетоки мощности по ветвям электрической сети. Возможна некоторая идеализация рассматриваемой системы, что приводит к упрощению уравнений за счет приближенного отражения электромагнитных процессов в моделях второй группы.

В рассматриваемых моделях предполагается постоянство узловых напряжений [108]. При этом существенно упрощаются уравнения для перетоков активной мощности по ЛЭП. Эти уравнения связывают мощность, передаваемую между двумя ЭА, с фазой, модулем и частотой напряжения на шинах генераторов.

В систему уравнений динамики агрегата необходимо включить уравнения, описывающие системы регулирования. Это уравнения парового объема (для турбоагрегата) или напорного трубопровода (для гидроагрегата), уравнения сервомотора и уравнения электрической части регулятора, связывающие сигнал, подаваемый на золотник сервомотора, с частотой вращения ротора. Также необходимо ввести в систему уравнение, связывающее электрические параметры (частоту и амплитуду синусоидального напряжения на выходе генератора) с механическими параметрами (частотой вращения ротора). Конкретный вид этих соотношений определяется типом рассматриваемого генератора (синхронный, асинхронный) и соответствующими моделями. Система уравнений электромагнитных и электромеханических процессов полностью описывает динамику системы в физических переменных.

2. Обобщенные модели управляемых энергообъединений в предаварийных режимах. В рассматриваемых задачах синтеза системы управления энергетическим объединением вектор состояния может включать переменные, характеризующие узлы и линии электрической сети – частоты эквивалентных генераторов, мощности, генерируемые агрегатами, узловые нагрузки, а также производные от этих величин в различных комбинациях. Ряд моделей такого типа приведен в работе [58]. Для упрощения рассматриваемых моделей можно использовать *принцип декомпозиции* [78, 82,121,122,123] и *асимптотические модели* [69].

Большинство рассматриваемых в литературе моделей относятся к классу линейных. Однако при проектировании систем управления ЭЭО возникает необходимость формирования моделей, учитывающих существенные нелинейности объекта.

В исследованиях [64,52,54,50] описаны подходы, сущность которых состоит в аналитическом описании типовых нелинейных элементов и формулировке *адекватных нелинейных дифференциальных уравнений*. При моделировании нелинейных систем автоматического управления (САУ) в настоящее время типовые кусочно-линейные нелинейные элементы (НЭ) (звенья) описываются условными выражениями, модифицированными полиномами, алгебраическими соотношениями и другими способами. В настоящее время предложено описание простейших НЭ алгебраическими операторами, введены операторы дифференциального и интегрального типов, позволяющие расширить класс НЭ, описываемых в алгебраической форме [49]. Такой подход применительно к задачам управления энергетическими системами подробно изложен в работе [58].

На этапе синтеза систем управления ЭЭО необходимо задать цели управления, комплекс задач управления в виде задач

математического программирования для учета многорежимных особенностей функционирования ЭЭО, разработать модели оптимизации в виде операторов и методы реализации. Для решения этой задачи может использоваться ограниченный комплекс моделей. Это связано с отсутствием полной информации о параметрах дифференциальных уравнений электромеханических процессов. Модели, используемые в практике управления частотой и активной мощностью, формируют систему обобщенных «сетевых моделей» на уровне ЦДУ и ОДУ для синтеза систем ограничения перетоков активной мощности. К ним относятся:

- модели в виде классических **«сетевых коэффициентов распределения»** для стационарных режимов энергосистем, применяемых при выполнении условий балансов внеплановых активных нагрузок и генерируемой мощности объекта, которые используются при решении задач потокораспределения [54,141];

- модели в виде **«сетевых коэффициентов влияния»** для квазистационарных режимов энергосистем, адекватные предаварийным режимам при отсутствии балансов активных нагрузок и внеплановой генерируемой активной мощности [84,93,106-107];

- модели в виде **«сетевых частотных коэффициентов влияния»**, определяющих влияния активных мощностей станций на перетоки активной мощности по линиям *для заданного спектра частот*, характеризующего объект управления в переходных режимах, которые могут быть определены экспериментально для ограниченной части сети объекта управления [165];

- модели в виде разностных уравнений (схем) для локальных частей ЭЭО или энергосистем, которые можно рассматривать как **«динамические модели влияния»** [79,84,94,115].

Существует достаточно широкий класс других моделей ЭЭО, параметры которых оцениваются экспериментальными

способами. Перечисленные модели и другие характеристики ЭЭО могут быть заданы «*системными матрицами*» для стационарных, квазистационарных и переходных режимов.

3. Развитие общих методов управления и методов предаварийного управления частотой и активной мощностью. К классическим методам управления энергосистемами можно отнести «метод регулирования частоты со статизмом по обменной мощности», упомянутый выше метод Гранера-Даррье (1933 г.). В этом методе регулирование частоты и обменной мощности по ЛЭП реализуется в форме пропорционально-интегрального закона регулирования с учетом ряда алгоритмических особенностей, определяемых режимными требованиями к объекту управления.

Практические методы регулирования частоты и активной мощности использовали пропорционально-интегральные законы в функции отклонения частоты и мощности от заданных значений, что соответствовало «методам регулирования частоты выделенными регулируемыми станциями» или другие методы. Используются также частотные методы, которые позволяют получить «частотные характеристики влияния» в определенном спектре частот. Применяются *методы нечеткого и интервального анализа*, направленные на реализацию управлений в условиях неопределенности, заданной статистическими и нестатистическими методами.

Расширение спектра задач потребовало совершенствования алгоритмов автоматизированного диспетчерского управления, в частности, методов, ориентированных на создание системных диспетчеров. С помощью модернизированных автоматизированных систем управления появилась возможность решать вопросы оптимального (квазиоптимального) управления с учетом экономических критериев, противоаварийного управления, а также

регулирования мощности, напряжения и частоты на основе современных достижений теории управления.

Одним из направлений развития и совершенствования систем управления рассматриваемого класса является переход к управлению на основе **принципов оптимизации и адаптации**. Высокий порядок уравнений объекта управления приводит к необходимости рассматривать энергосистемы как крупномасштабные объекты, и использовать для анализа и синтеза систем управления современные принципы агрегирования и декомпозиции.

Классификация адаптивных алгоритмов и управляющих структур, которые могут быть принципиально использованы для синтеза управлений нормальными и аварийными режимами энергетическими объединениями при решении задач управления частотой и активной мощностью, можно дать следующим образом. Высокий уровень технических и экономических требований к управлению режимами энергетических объединений требует применения современных методов исследования при разработке алгоритмов адаптивного диспетчерского управления.

К настоящему времени разработан ряд методов синтеза адаптивных регуляторов. Существующие методы синтеза адаптивных регуляторов можно разделить на отдельные группы, к числу которых относится целый ряд систем управления.

Классические адаптивные системы имеют основной контур управления и контур адаптации, причем контур адаптации обеспечивает, как правило, подстройку параметров. Основной контур может формировать управление как решение определенной оптимизационной задачи на основе алгоритмических или аналитических методов. При этом в силу специфики замкнутой системы и их моделей возможно возникновение хаотических режимов.

К другому классу систем относятся **интервальные системы управления**, синтезируемые на основе обеспечения требований робастной устойчивости или робастной оптимальности. Системы данного класса разрабатываются на основе интервальных критериев устойчивости соответствующих характеристических полиномов для непрерывных или дискретных систем управления. Для синтеза таких систем могут быть использованы интервальные алгебраические методы и соответствующие критерии интервальной устойчивости. Широкий класс адаптивных регуляторов разработан на основе *методов функционального анализа*, в частности, **методов синтеза систем управления в пространстве Харди**, позволяющей синтезировать робастные системы. Данный класс систем синтезируется путем минимизации функционалов, которые представляют собой нормы соответствующих функциональных пространств. Развиваются методы геометрической теории управления, позволяющие линеаризовать определенные классы нелинейных моделей [96-99].

Практическая задача управления частотой и активной мощностью при ограничениях, соответствующих технологическим требованиям к режимам работы энергосистем – необходимость поддержания перетоков активной мощности по линиям и узловых мощностей регулирующих агрегатов в заданных границах – приводит к задачам вычисления управлений как оптимальных решений экстремальных задач. Задачи такого рода могут быть решены различными способами, среди которых **методы линейного и нелинейного программирования** [9,27,32,37,39], **методы аналитического вычисления минимизирующих элементов** [55,56], а также другие подходы к оптимизации [32].

В системах с поиском оптимальных элементов на основе итерационных методов исследование качественных свойств

затруднительно в результате трудности формирования уравнений, описывающих динамику объекта, замкнутого управлением. Это приводит к необходимости рассмотрения различных способов аналитической оптимизации, которые являются задачами разработки аппроксимирующих операторных представлений аналитических решений.

Аналитическое вычисление оптимальных управлений для ЭЭО возможно на основе аппроксимирующих экстремальных задач вычисления оптимальных распределений внеплановой активной мощности между регулирующими станциями. В этой ситуации аналитические решения определяют приближенные значения перетоков по линиям и генерируемых активных мощностей регулирующих станций.

Анализ выбранной модели, рассмотрение динамической и статической устойчивости, исследование грубости может быть проведено с помощью различных методов. К ним можно отнести: методы на основе частотного анализа и теории преобразований Лапласа (частотные критерии устойчивости), методы и критерии теории устойчивости Ляпунова, исследование асимптотической устойчивости методами функционального анализа.

Таким образом, анализ проблем математического моделирования современных систем управления крупными энергосистемами типа Единой энергосистемы России требует решения рассмотренного комплекса задач, позволяющих обеспечить безопасность ее функционирования.

4. Направления и задачи развития методов синтеза управлений энергообъединениями. Для решения задач синтеза алгоритмов необходимо разработать:

- новые методы аналитического решения аппроксимирующих оптимизационных задач на основе канонических форм

ограничений (в виде пересечения линейного многообразия и шара), аппроксимирующих модели технологических режимов ЭС, ЭЭО и ЕЭС для математического моделирования систем управления частотой и мощностью в предаварийных режимах;

- сформулировать математические модели замкнутых систем и достаточные условия устойчивости систем управления на основе принципа сжимающих отображений, функционального анализа и метода функций Ляпунова.

Разработаны модели алгоритмически заданных законов управления в аналитической форме на основе использования нелинейных операторов конечномерной оптимизации. Это позволяет исследовать свойства замкнутой системы и получить достаточные условия асимптотической устойчивости. Использование методов теории автоматического управления и функционального анализа позволяют исследовать замкнутые системы управления частотой и активной мощностью ЭЭО в случае существенных нелинейностей.

Разработанные модели и методики могут использоваться при создании автоматизированных систем управления ЭЭО различного назначения. Полученные результаты могут служить основой для распространения предлагаемых результатов на системы управления другого класса, в частности, на системы противоаварийного управления для обеспечения энергетической безопасности ЕЭС России.

5. Направления развития математического моделирования систем управления частотой и активной мощностью. Обзор существующих методов позволяет выделить основные направления и этапы разработки системы управления частотой и активной мощностью. Основу разрабатываемых математических моделей и методов систем управления частотой и активной

мощностью ЭЭО должны составлять математические модели, описывающие динамику объекта управления в непрерывном или дискретном времени линейными и нелинейными уравнениями.

Задачи разработки математических моделей объекта. В качестве исходных уравнений для разработки математических моделей могут быть выбраны известные уравнения электромеханических процессов, описывающие динамику системы, состоящей из синхронных генераторов, дополненные уравнениями, описывающими работу гидро- и турбогенераторов. Уравнения используются в линеаризованной форме, и могут быть обобщены для учета нелинейностей с использованием типовых кусочно-линейных операторов. Упомянутые уравнения могут быть использованы для разработки различных классов асимптотических моделей, которые приближенно описывают переходные процессы в ЭЭО в условиях пренебрежения динамикой в отдельных звеньях нелинейной математической модели объекта. В связи с возможными вычислительными трудностями вследствие большой размерности задачи возможны способы сокращения вычислительной работы. Это можно достичь декомпозицией уравнений объекта управления на взаимосвязанные подсистемы или сокращением размерности вектора состояния в результате исключения ряда компонент. Вторая возможность приводит к рассмотрению способов создания асимптотических моделей.

Необходимо также разработать математические модели установившихся состояний ЭЭО, которые относятся к классу «алгебраических моделей влияния» активных мощностей регулирующих станций на перетоки активных мощностей по линиям электропередач энергообъединений. Аналогичный класс математических моделей можно принципиально разработать в частотной области, что важно с практической точки зрения. Данные

классы моделей могут рассматриваться как модели влияния, приводящие к параметрическим задачам оптимизации.

Разработка математических моделей для синтеза управлений в предаварийных режимах ЭС, ЭЭО и ЕЭС необходима для синтеза систем регулирования по частоте и обменной мощности на основе задания алгебраических характеристик влияния внешних воздействий на управляемые координаты в статических (квазистатических) режимах. Методика вычисления коэффициентов влияния для линейной системы при ненулевых отклонениях частоты должна быть обобщена на случай объекта управления, описываемого нелинейными (кусочно-линейными) уравнениями объекта.

Математические модели замкнутых систем управления частотой и активной мощностью ЭС, ЭЭО и ЕЭС в предаварийных режимах должны обеспечивать выполнение требований к технологическим целям и ограничениям с учетом предаварийных режимов ЭЭО, и минимизировать определенный функционал качества, то задача формирования управляющих воздействий может быть поставлена как задача условной оптимизации на допустимом множестве. Проблема состоит в том, что классические методы конечномерной оптимизации задают управляющие воздействия как решения конечномерных задач оптимизации в численном виде, что не позволяет использовать эти результаты для качественного исследования замкнутых систем. Существует мнение, что в данной ситуации «отсутствует обратная связь». Однако в данной ситуации отсутствует не обратная связь, а ее явное аналитическое представление. Поэтому необходимо создать численно-аналитические процедуры для аналитического представления решений конечномерных задач операторами математического программирования.

Задачи качественного исследования замкнутых систем управления ЭС, ЭЭО и ЕЭС с учетом аналитического представления управлений на основе решений задач математического программирования приводят к задачам синтеза систем управления, обеспечивающих управление объектом при изменении параметров режимов в заданном диапазоне. При синтезе может использоваться комплекс целевых условий – интервальные целевые условия для систем ограничения перетоков и оптимизационные целевые условия для системы управления в целом, включая ограничение перетоков по линиям и регулирование частоты и обменной мощности по внешним.

Таким образом, исследование качественных свойств замкнутой системы управления приводит к необходимости *модельного представления* решений счетного семейства оптимизационных задач в операторной форме, т. е. в виде **операторов математического программирования**. В связи с тем, что оператор управления в общем случае будет представлять собой нелинейный оператор, определенный на множестве координат состояния или выходных координат ЭЭО как объекта управления, применение классических критериев для анализа устойчивости может быть ограничено. Это обстоятельство приводит к использованию при анализе устойчивости современных методов теории устойчивости и методов функционального анализа.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОБЪЕДИНЕНИЙ В ПРЕДАВАРИЙНЫХ РЕЖИМАХ

2.1. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АБСТРАКТНЫХ БАЗИСАХ

Аналитическое исследование сложных объектов автоматического управления в условиях трудностей, обусловленных большой размерностью задачи, в ряде случаев не возможно без использования приближенного описания процессов. Наибольшее распространение для приближенного описания получили методы динамического «эквивалентирования» (редукции). Применительно к электроэнергетическим объединениям (ЭЭО) вопрос «эквивалентирования» достаточно подробно рассмотрен в литературе [37,94,203]. В большинстве опубликованных работ проблема «эквивалентирования» решена на базе классической теории управления, использующей аппарат преобразования Лапласа. Как известно, при применении вычислительных методов исследования аппарат классической теории управления менее эффективен по сравнению с аппаратом современной теории управления, базирующей на концепции состояния. Так, например, использование аппарата преобразования Лапласа для исследования сложных многосвязных систем требуют выполнения операций над операторными матрицами. Ниже для решения задач управления ЭЭО по частоте и перетокам активной мощности рассматриваются вопросы математического описания электромеханических процессов (ЭМП) и редукции уравнений, описывающих отклонения

процессов от установившихся состояний. При этом задача эквивалентирования сведена к задаче определения уравнений асимптот, под которыми понимаются асимптотические или «усредненные» составляющие движения. Формулировка асимптотических моделей ЭМП может быть выполнена на основе уравнений в различных базисах координат состояния. Ниже рассматриваются различные координаты состояния ЭЭО, что позволяет получить различные методики и асимптотические модели.

1. Модели электромеханических процессов ЭЭО в пространстве состояний. Эквивалентирование дифференциальных уравнений, описывающих динамику ЭЭО, предполагает предварительное представление в виде уравнений состояния. Переход к новым координатам требует приведения уравнений электромеханических процессов к общей форме, выбора вектора состояния ЭЭО и вычисления матриц уравнений состояния. Способы решения перечисленных выше задач во многом определяются структурой сети ЭЭО и методикой формирования уравнений асимптотического движения. Фрагмент схемы электрической сети ЭЭО, соединяющей генерирующие узлы сети дается на рис. 2.1. В узлах сети генерируется электрическая энергия, преобразуемая из механической энергии тепловыми и гидравлическими станциями.

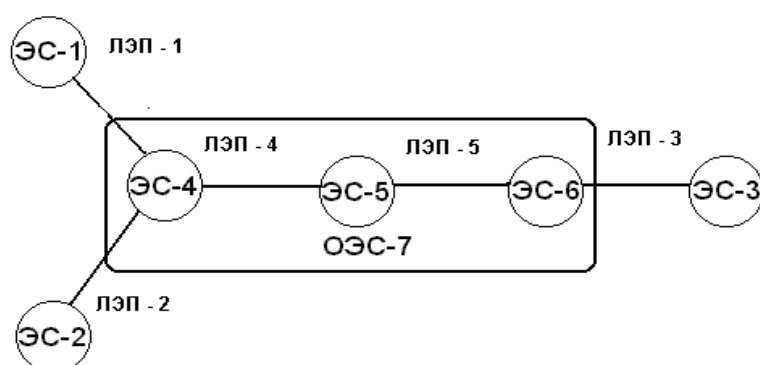


Рис. 2.1. Обобщенная схема Единой энергетической сети России:
ЭС-1 – ОЭС Северо-Запада, ЭС-2 – ОЭС Юга, ЭС-3 – ОЭС Дальнего Востока, ЭС-4 – ОЭС Центра, ЭС-5 – ОЭС Урала, ЭС-6 – ОЭС Сибири

Схема сети свидетельствует о многообразии соединений между отдельными узлами сети, которая является исходной для разработки моделей типа «вход-выход» и «вход-состояния-выход» в непрерывном и дискретном времени.

Исходные дифференциальные уравнения ЭЭО представляют собой совокупность уравнений эквивалентных агрегатов (ЭА), представляющих станции, ЭС или ЭЭО, и уравнения электрической сети. Эти уравнения являются общепринятыми для исследования динамики процессов по частоте и активной мощности. С учетом постоянства напряжений сети система линеаризованных уравнений, описывающих генерирующие ЭА совместно с электрической сетью, имеет вид для объединений, состоящих из *эквивалентных турбоагрегатов* (ЭТА)

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^2 D^2 \varphi_i + T_{\gamma i} D \varphi_i + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) &= p_{Ti} - \mu_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ (T_{Ti} D + 1) p_{Ti} &= q_{Ti}, \quad (T_{Ci} D + 1) q_i = -k_{\omega i} D \varphi_i + \sigma_i, \\ (T_{Hi} D + 1) \sigma_i &= u_i. \end{aligned} \quad (1.a)$$

Уравнения ЭЭО, в составе которых имеются *эквивалентные гидроагрегаты* (ЭГА), с учетом явления гидроудара имеют вид

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^2 D^2 \varphi_i + T_{\gamma i} D \varphi_i + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) &= p_{Ti} - \mu_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ (0,5 g_0 T_{Gi} D + 1) p_{Gi} &= (1 - g_0 T_i D) q_i, \quad (T_{Ci} D + 1) q_i = -k_{\omega i} D \varphi_i + \sigma_i, \\ (T_{Hi} D + 1) \sigma_i &= u_i. \end{aligned} \quad (1.б)$$

В последних уравнениях использованы обозначения: d / dt – оператор дифференцирования по времени; φ_i и $\varphi_{ig} = \varphi_i - \varphi_j$ – соответственно отклонения от исходных значений для абсолютных и относительных углов агрегатов; p_i – суммарное приращение мощностей ЭА, равное приращению мощностей ЭТА – p_{Ti} или ЭГА – p_{Gi} ; μ_i – внеплановое изменение нагрузки i -го ЭА;

T_{ai}^2 – приведенная постоянная механической инерции ротора ЭА;
 T_{yi} – постоянная ускорения; ρ_{ig} – коэффициент синхронизирующего момента (мощности) между i -м и g -м агрегатами ЭЭО;
 T_{Pi} – постоянная времени парового объема ЭТА; T_{Ci} – постоянная времени гидравлического усилителя ЭТА; k_{oi} – коэффициент усиления первичного регулятора скорости турбины ЭТА или ЭГА; T_{Ti} – постоянная времени трубопровода ЭГА; g_0 – начальное открытие направляющего аппарата ЭГА; T_{Pi} – постоянная времени вторичного (исполнительного) регулятора ЭА.

Присутствие в уравнениях ЭГА (1.6) неминимально-фазовых звеньев, описывающих гидроудар, ограничивает применение ряда методов синтеза стабилизирующих управлений. Влияние вторых производных отклонений мощностей на динамику относительно мало, поэтому этими координатами можно пренебречь. Тогда дифференциальные уравнения динамики ЭА ЭЭО, связывающие отклонения генерируемых агрегатом мощностей, частот и перемещений первичных и вторичных регуляторов скоростей ЭТА и ЭГА, примут вид:

$$(T_{\Sigma i} D + 1) p_{Pi} = -k_{oi} D \varphi_i + \sigma_i, \quad (T_{\Sigma i} D + 1) p_{Gi} = -k_{oi} D \varphi_i + \sigma_i. \quad (2)$$

где $T_{\Sigma i} = T_{Pi} + T_{Ci}$ для ЭТА, а для ЭГА $T_{\Sigma i} = 0,5 g_0 T_{Ti} + T_{Ci}$.

Третье слагаемое в левой части (1.а) или (1.б) представляет сумму отклонений перетоков активной мощности по линиям, примыкающим к i -му ЭА. Отклонения перетоков по j -й ЛЭП от исходного значения имеет вид:

$$\tilde{s}_j = \rho_{ig} \varphi_{ig}, \quad (3)$$

где j – номер линии; i, g – номера агрегатов, непосредственно связанных между собой j -й линией (см. уравнения в п. 1.2).

Уравнения состояния ЭЭО формируются на основе общей формы уравнений (1.а) или (1.б), представленных дифференциальными операторами, в которых обе части уравнений являются полиномами от оператора дифференцирования (линейными комбинациями производных входов и выходов) имеют вид

$$Q(D)\Phi(t) = P(D)u(t) + W(D)\mu(t), \quad (4)$$

где векторы переменных определяются следующими равенствами $\Phi(t) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$, $u(t) = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, $\mu(t) = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$. Для приведения уравнений ЭЭО к матричной полиномиальной форме (4) с учетом условий (2) необходимо выполнить ряд операций. С учетом порядка дифференциальных уравнений ЭА (1) и (2) полиномы от оператора дифференцирования примут вид

$$Q(D) = \sum_{h=0}^4 Q^h D^{4-h}, \quad P(D) = \sum_{h=0}^4 P^h D^{4-h}, \quad W(D) = \sum_{h=0}^4 W^h D^{4-h},$$

Матрицы полиномов равны: $Q^h = [q_{il}^h]$, $P^h = [p_{il}^h]$, а соответствующие ненулевые элементы, определяемые параметрами агрегатов и линий, приведены в табл. 2.1. Из данных таблицы следует, что ЭЭО, имеющие в составе ЭГА, характеризуются отдельными ненулевыми элементами матриц P^2 и P^4 . В уравнениях асимптот в ряде случаев можно исключить первые и вторые производные вектора управлений, что эквивалентно условиям: $P^2 = P^3 = 0_{n \times n}$.

Для перехода к уравнениям состояния необходимо выполнить преобразования (4) с учетом операторов дифференцирования относительно управлений и возмущений. В результате уравнения динамики ЭЭО типа (4) с учетом управляющих воздействий и внеплановых нагрузок определяются равенствами [79]

$$\begin{aligned} D[D[D[D[Q^0\Phi] + Q^1\Phi - P^1u - W^1\mu] + Q^2\Phi - P^1u - W^1\mu] + \\ + Q^3\Phi - P^3u - W^3\mu] + Q^4\Phi - P^4u - W^4\mu = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Таблица 2.1

Параметры общей формы дифференциальных уравнений ЭЭО

q_{il}^h, p_{il}^h	Для энергообъединений из турбоагрегатов	Для энергообъединений с гидроагрегатами
q_{ii}^0	$T_{ai}^2 T_{\mathcal{E}i} T_{\mathcal{I}i}$	$T_{ai}^2 T_{\Gamma i} T_{\mathcal{E}i}$
q_{ii}^1	$T_{yi} T_{\mathcal{E}i} T_{\mathcal{I}i} + T_{ai}^2 (T_{\mathcal{I}i} + T_{\mathcal{E}i})$	$T_{yi} T_{\Gamma i} T_{ai}^2 + T_{ai}^2 (T_{\Gamma i} + T_{\mathcal{E}i}) -$ $- k_{ai} g_0 T_{\Gamma i} T_{\mathcal{E}i}$
q_{ii}^2	$T_{yi} \left(\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} T_{\mathcal{E}i} + T_{yi} + k_{ai} \right) +$ $\sum_{i=1}^n X_i Y_i + T_{yi} T_{\mathcal{E}i} + T_{yi}^2$	$T_{\mathcal{I}i} \left(\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} T_{\mathcal{E}i} + T_{yi} + k_{ai} \right) +$ $+ k_{ai} T_{\mathcal{E}i} + T_{yi} T'_{\mathcal{E}i} + T_{ai}^2$
q_{ii}^3	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} (T_{\mathcal{I}i} + T_{\mathcal{E}i}) + k_{ai} + T_{yi}$	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} (T'_{\mathcal{E}i} + T_{\Gamma i}) + k_{ai} + T_{yi}$
q_{ii}^4	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig}$	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig}$
q_{ig}^2	$-\rho_{ig} T_{\mathcal{E}i} T_{\mathcal{I}i}$	$-\rho_{ig} T_{\Gamma i} T_{\mathcal{E}i}$
q_{ig}^3	$-\rho_{ig} (T_{\mathcal{E}i} + T_{\mathcal{I}i})$	$-\rho_{ig} (T'_{\mathcal{E}i} + T_{\Gamma i})$
q_{ig}^4	$-\rho_{ig}$	$-\rho_{ig}$
p_{ii}^2	0	$-T_{\Gamma i} T'_{\mathcal{E}i}$
p_{ii}^3	0	$(T'_{\mathcal{E}i} - T_{\Gamma i})$
p_{ii}^4	1	1

Далее необходимо ввести новые координаты, равные переменным в скобках. В результате можно получить систему дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
x_4 &= Q^0 \Phi, \\
x_3 &= x'_4 + Q^1 \Phi - P^1 u - W^1 \mu = x'_4 + Q^1 (Q^0)^{-1} x_4 - P^1 u - W^1 \mu, \\
x_2 &= x'_3 + Q^2 \Phi - P^2 u - W^2 \mu = x'_3 + Q^2 (Q^0)^{-1} x_4 - P^2 u - W^2 \mu, \\
x_1 &= x'_2 + Q^3 \Phi - P^3 u - W^3 \mu = x'_2 + Q^3 (Q^0)^{-1} x_4 - P^3 u - W^3 \mu, \\
x'_1 + Q^4 \Phi - P^4 u - W^4 \mu &= x'_1 + Q^4 (Q^0)^{-1} x_4 - P^4 u - W^4 \mu = 0.
\end{aligned}$$

Эти уравнения преобразуются к форме

$$\begin{aligned}
\Phi &= (Q^0)^{-1} x_4, \\
x'_4 &= x_3 - Q^1 (Q^0)^{-1} x_4 + P^1 u + W^1 \mu, \\
x'_3 &= x_2 - Q^2 (Q^0)^{-1} x_4 + P^2 u + W^2 \mu, \\
x'_2 &= x_1 - Q^3 (Q^0)^{-1} x_4 + P^3 u + W^3 \mu, \\
x'_1 &= -Q^4 (Q^0)^{-1} x_4 + P^4 u + W^4 \mu.
\end{aligned}$$

Векторно-матричная форма этих уравнений имеет вид [79]

$$\begin{bmatrix} x'_4 \\ x'_3 \\ x'_2 \\ x'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q^1 \bar{Q}^0 & E & 0 & 0 \\ -Q^2 \bar{Q}^0 & 0 & E & 0 \\ -Q^3 \bar{Q}^0 & 0 & 0 & E \\ -Q^4 \bar{Q}^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^1 & W^1 \\ P^2 & W^2 \\ P^3 & W^3 \\ P^4 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \mu \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$s \triangleq \Phi = \bar{Q}^0 x_4, \quad \bar{Q}^0 \triangleq (Q^0)^{-1}.$$

где $s \in \mathbb{R}^v$ – вектор выходных координат, включающий управляемые координаты, которыми для СОП и САУ ЧМ являются отклонения перетоков активной мощности по ЛЭП и частоты сети.

Полученные результаты определяют утверждение.

Утверждение. Пусть уравнения «входы-выходы» ЭОО описываются уравнениями типа (4). Тогда уравнения ЭЭО в форме «входы-состояния-выходы» представляются соотношениями (6). В результате входо-выходные уравнения (6) запишутся в виде

$$x' = A_1 x + B_1 u + W_1 \mu, \quad s = C_1 x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad s \in \mathbb{R}^v, \quad (7)$$

Матрицы A_1 , B_1 , W_1 и C_1 в уравнениях состояния (7) имеют блочные структуры, заданные в (6), определяющие взаимосвязи координат состояния, управлений и внеплановых нагрузок ЭЭО:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -Q^1 \bar{Q}^0 & E & 0 & 0 \\ -Q^2 \bar{Q}^0 & 0 & E & 0 \\ -Q^3 \bar{Q}^0 & 0 & 0 & E \\ -Q^4 \bar{Q}^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \\ P^4 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \\ W^4 \end{bmatrix},$$

где $E = E_{4 \times 4}$ и $0 = 0_{4 \times 4}$ – единичные и нулевые матрицы размера (4×4) , а $\bar{Q} = (Q^0)^{-1}$ – неособенная матрица для уравнений ЭЭО.

Уравнения (7) описывают ЭМП в пространстве состояний, в которых вектор x связан с вектором отклонений углов Φ и их производными Φ', Φ'', Φ''' равенством

$$x = Fy, \quad (8)$$

где $x = (\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''')^T$. Преобразующая матрица имеет вид:

$$F = \begin{bmatrix} Q^0 & 0 & 0 & 0 \\ Q^1 & Q^0 & 0 & 0 \\ Q^2 & Q^1 & Q^0 & 0 \\ Q^3 & Q^2 & Q^1 & Q^0 \end{bmatrix}.$$

Как видно из (8), вектор x определяет **«абстрактные» координаты** ЭЭО в виде линейной комбинации физических координат – отклонений углов и их производных.

Переход к физическим координатам, необходимый для эквивалентирования с учетом процессов в ЭЭО, выполняется неособым преобразованием базиса пространства состояний

$$y = F^{-1}x. \quad (9)$$

В результате уравнение динамики ЭЭО (7) в форме Коши для **физических координат первого типа** примут вид:

$$y' = \bar{A}y + \bar{B}u + \bar{W}\mu, \quad s = \bar{C}y \in \mathbb{R}^v, \quad y, \mu \in \mathbb{R}^N, \quad (10)$$

где матрицы определены следующими равенствами: $\bar{A} = F^{-1}A_1F$, $\bar{B} = F^{-1}B_1$, $\bar{W} = F^{-1}W_1$, $\bar{C} = C_1F$.

Из (3) и физических представлений следует, что вектор состояния должен включать отклонения относительных (взаимных) углов. Переход к наблюдаемым координатам (взаимным углам и их производным) выполняется неособенным преобразованием

$$y = Gz, \quad (11.a)$$

где вектор частично наблюдаемых координат имеет вид

$$z = (\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''')^T, \quad (11.б)$$

а его компоненты определяются вектором

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1j}, \dots, \varphi_{1n})^T \quad (11.в)$$

и его производными до третьего порядка включительно, причем вектор взаимных углов: $\varphi_{1j} = \varphi_1 - \varphi_j$. В равенстве (11.a) матрица G , имеющая размер $(4n \times 4n)$, является блочно-диагональной и определяется следующим образом: $G = \text{diag} \{\bar{G}\} \in R^{4n \times 4n}$. Подматрица $\bar{G} \in R^{n \times n}$ размера $(n \times n)$ определяется равенством [79]

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Структура матрицы $\bar{G}$ определяется условиями преобразования вектора Φ и его производных к вектору Z и его производным. Как следует из (11.в), этот вектор включает отклонение угла первого ЭА и базисных взаимных углов ЭА, поскольку эти взаимные углы являются максимальными линейно-независимым семейством, позволяющим представить все взаимные углы ЭА равенством, справедливость которого иллюстрируют равенства

$$\varphi_{ij} = \varphi_{1i} - \varphi_{1j} = \varphi_1 - \varphi_i - (\varphi_1 - \varphi_j) = \varphi_j - \varphi_i. \quad (11.г)$$

Таким образом, форма уравнений ЭЭО «вход-состояния-выход» описывает динамику с учетом регулируемых координат для СОП и САУ ЧМ. В результате уравнения ЭМхП ЭЭО записываются в форме

$$z' = Az + Bu + W\mu, \quad s = Cz, \quad (12)$$

где выделены векторы состояний, выходных координат как вектор перетоков. Матрицы в уравнениях (12) определяются равенствами: $A = G^{-1}\bar{A}G$, $B = G^{-1}\bar{B}$, $W = G^{-1}\bar{W}$, $C = \bar{C}G$. Алгебраическое уравнение в (12) определяет отклонение перетоков как функции взаимных углов ЭА. После аналитического обращения матрицы F и вычисления матриц в (12), можно представить их в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix},$$

где $A_{4l} = -\bar{G} (Q^0)^{-l} Q^{5-l} \bar{G}$, $B_4 = \bar{G} (Q^0)^{-l} P^4$, $l = 1, 2, 3, 4$, поскольку $\bar{G} = (\bar{G})^{-l}$.

Дополнительным требованием к физическим координатам

ЭЭО для анализа и синтеза является *свойство управляемости* по Р. Калману, которая анализируется с помощью рангового критерия управляемости

$$\text{rang} [A^{N-1}B | A^{N-2}B | \dots | AB | B] = N,$$

где N – размер вектора состояний ЭЭО.

Для систем уравнений ЭМП необходимо выполнение свойства наблюдаемости координат, наблюдаемые по отключениям частоты и перетоков, причем *свойство наблюдаемости* можно анализировать с помощью рангового критерия Р. Калмана [155]

$$\text{rang} [A^{N-1}C | A^{N-2}C | \dots | AC | C] = v.$$

Таким образом, уравнения ЭМП ЭЭО вида (1) и (2) преобразуются к уравнениям состояния (12) с матрицами A, B, W, C для выходных координат объекта $z \in \mathbb{R}^N$, имеющих смысл базисного угла, взаимных углов и их производных до третьего порядка включительно, которые должны удовлетворять условиям управляемости и наблюдаемости по Р. Калману.

2. Методы анализа переходных процессов на основе линейных уравнений состояния ЭЭО. Задача исследования переходных процессов решается в следующей постановке.

Постановка задачи. Пусть имеются линеаризованные уравнения ЭМП типа (12), сформулирована задача исследования переходных процессов как задача Коши: вычислить решение системы при заданных начальных условиях и входных воздействиях для СОП или САУ ЧМ в виде управлений или нагрузок:

$$Z'(t) = AZ(t) + Bu(t) + W\mu, \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad Z(0) = Z^0.$$

Решение задачи определяется *формулой Коши*:

$$z(t) = e^{At}z^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} [Bu(\tau) + W\mu(\tau)] d\tau.$$

Решение задачи анализа переходных процессов будет:

выполнено с помощью преобразования матрицы системы к **канонической жордановой форме**. Это преобразование позволяет преобразовать вычисление матричной экспоненты в формуле Коши в вычисление скалярных экспоненциальных функций и выполнить при необходимости преобразования Лапласа или Фурье выходных координат (частоты и перетоков) для получения частотных характеристик ЭЭО. Для этого в уравнении ЭЭО выполняется переход к новому базису пространства состояний с помощью **преобразования подобия**: $z = SZ$, где $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ S – неособенная матрица. Тогда

$$Z' = S^{-1}ASZ + S^{-1}Bu + S^{-1}W\mu = JZ + S^{-1}Bu + S^{-1}W\mu, \quad s = CSZ.$$

При этом матрицы A и J называются **подобными**, если они связаны равенством $J = S^{-1}AS$, которое называется **преобразованием подобия**. Числовую квадратную матрицу можно привести с помощью преобразования подобия: $J = S^{-1}AS$ к канонической форме – квазидиагональной матрице J , называемой **матрицей Жордана**.

Структура канонической формы матрицы Жордана определяется распределением некрatных и кратных **собственных чисел** и соответствующих **собственных или корневых векторов** (геометрический подход) и **элементарных делителей матрицы A** (алгебраический подход), а также **ранговыми критериями** [106].

Пусть среди n собственных чисел λ_i матрицы A имеется p простых (некратных): $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, и s кратных: $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+i}, \dots, \lambda_{p+s}$ собственных чисел с кратностями $m_1, \dots, m_i, \dots, m_s$. Некратным собственным числам соответствует матрица J_0 , а каждому кратному собственному числу – «ящик» **Жордана J_i** .

Поэтому матрица в форме Жордана имеет следующий канонический вид:

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & & & & 0 \\ & J_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_i & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & J_s \end{bmatrix}.$$

Простые (некратные) собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ составляют элементарные **клетки «ящика» Жордана** J_0 диагональной формы

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p).$$

Каждая клетка в матрице J_0 имеет размер 1.

«Ящик» Жордана J_i , соответствующий собственному числу λ_{p+i} кратности m_i , может содержать **сложные «клетки Жордана»** $J_{i1}, \dots, J_{ik}$ — квадратные матрицы размера от 1 до m_i . Сложный «ящик Жордана» имеет стандартный вид:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & 0 \\ & J_{i2} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & J_{ik} \end{bmatrix},$$

где первый индекс – номер «ящика», а второй – номер «клетки». Главная диагональ содержит числа λ_{p+i} , а первая наддиагональ – число «1», если размер «клетки» не меньше двух.

Пример. «Ящик» Жордана для собственного числа λ_{p+i} кратности «3» можно представить одним из приведенных ниже вариантов:

$$1). J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{p+i} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p+i} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p+i} \end{bmatrix} - \text{три клетки размера «1»}.$$

$$2). J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{p+i} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{p+i} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p+i} \end{bmatrix} - \text{две клетки размеров «1» и «2»}.$$

$$3). J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{p+i} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{p+i} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_{p+i} \end{bmatrix} - \text{одна клетка размера «3»}.$$

Для задания структуры «ящика» определяется число клеток g_h размера $(h \times h)$. **Число «клеток» g_h размера $(h \times h)$ для кратных собственных чисел λ_{p+i}** определяется ранговым критерием:

$$g_h = \text{rang}(A - \lambda_{p+i}E_n)^{h-1} - 2\text{rang}(A - \lambda_{p+i}E_n)^h + \\ + \text{rang}(A - \lambda_{p+i}E_n)^{h+1}, \quad h = \overline{1, m_i}.$$

Сумма размеров всех клеток «ящика» равна кратности соответствующего собственного значения, что в примере определяет равенство: $g_1 \cdot 1 + g_2 \cdot 2 + \dots + g_{m_i} \cdot m_i = m_i$.

Таким образом, число и структура «ящиков» J_i , определяемые ранговым критерием, задают жорданову форму матриц.

После перехода к жордановой форме матриц уравнения ЭЭЭ имеют связанные решения на основе формулы Коши

$$Z(t) = e^{Jt} S^{-1} Z(0) + \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B u(\tau) d\tau + \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} W \mu(\tau) d\tau,$$

$$s(t) = CSZ(t),$$

где $J = S^{-1}AS$, матрица S вычисляется далее, а матричная экспонента имеет вид:

$$e^{Jt} = \text{diag} \left[e^{J_0 t}, e^{J_1 t}, \dots, e^{J_i t}, \dots, e^{J_s t} \right].$$

Матричные экспоненты для жордановых клеток в последней диагональной матрице будут иметь следующие представления:

$$e^{J_0 t} = \text{diag} \left[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_p t} \right],$$

$$e^{J_i t} = \text{diag} \left[e^{J_{i1} t}, \dots, e^{J_{ih} t}, \dots, e^{J_{il} t} \right],$$

где J_{ih} – h -я клетка k -го порядка i -го «ящика». Матричная экспонента для этой клетки имеет вид

$$e^{J_{ih} t} = e^{\lambda_{p+i} t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{k-2}/(k-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t^{k-3}/(k-3)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку для решения системы необходимо вычислить

матрицу S , то для ее определения можно рассмотреть уравнение

$$A[s^1, s^2, \dots, s^n] = [s^1, s^2, \dots, s^n]J,$$

где s^l – l -й столбец матрицы S . Пусть в l -ом столбце матрицы J единственным отличным от нуля элементом является λ_{p+i} . Тогда l -му столбцу этого уравнения соответствует равенство $As^l = \lambda_{p+i} s^l$, имеющее эквивалентный вид

$$(A - \lambda_{p+i} E_n) s^l = 0.$$

Последнее равенство определяет выбор в качестве l -го столбца матрицы S собственного вектора матрицы A , соответствующего собственному числу λ_{p+i} . Если в l -ом столбце матрицы J выше главной диагонали имеется единица, то можно получить равенства

$$A \cdot s^l = s^{l-1} + \lambda_{p+i} \cdot s^l \quad \text{или} \quad (A - \lambda_{p+i} E_n) s^l = s^{l-1},$$

где s^{l-1} – $(l-1)$ -й вектор матрицы S , являющийся или собственным вектором матрицы A для собственного числа λ_{p+i} или ранее определенным корневым вектором, если размер «клетки» более «2».

Тогда решение уравнения состояния ЭЭО имеет вид:

$$Z(t) = e^{Jt} S^{-1} Z(0) + \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B u(\tau) d\tau + \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} W \mu(\tau) d\tau,$$

$$s(t) = CSZ(t). \quad (13)$$

Пример. Уравнения переходных процессов в ЭЭО представляются в форме уравнений состояния:

$$Z' = AZ + Bu, \quad Z(0) = Z^0, \quad s = CZ.$$

где матрицы равны: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0 \ 0]$.

Переходные процессы исследуются при типовом единичном входном воздействии по управлению вторичного регулятора $u(t) = l(t)$, где $l(t)$ – единичная функция Хевисайда, определяемая соотношением

$$l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Собственные числа матрицы A определяются из характеристического уравнения для этой матрицы уравнения, которое имеет вид

$$\det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -6 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2(\lambda + 1) = 0.$$

Матрица A имеет некрратное собственное число $\lambda_1 = -1$ и кратное $\lambda_2 = -2$, $m_2 = 2$.

Жорданова форма J матрицы A строится с учетом вида «клеток», соответствующих собственным кратным числам. Определим число и структуру «клеток» на основе рангового критерия. Тогда можно получить следующие результаты по количеству клеток Жордана различного размера:

$$g_1 = \text{rang}(A - \lambda_2 E_3)^0 - 2 \text{rang}(A - \lambda_2 E_3)^1 + \text{rang}(A - \lambda_2 E_3)^2 = 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0,$$

$$g_2 = \text{rang}(A - \lambda_2 E_3)^1 - 2 \text{rang}(A - \lambda_2 E_3)^2 + \text{rang}(A - \lambda_2 E_3)^3 = 2 - 2 + 1 = 1.$$

Жорданова форма матрицы A имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Столбцы s^i матрицы преобразования подобия $S = [s^1, s^2, s^3]$ вычисляются из системы линейных алгебраических уравнений $AS = SJ$.

Столбец s^1 является собственным вектором A , соответствующим $\lambda_1 = -1$, и определяется соотношением: $(A - \lambda_1 E_3)s^1 = 0$. Поскольку $|A - \lambda_1 E_3| = 0$, то линейная система имеет не единственное решение. Произвольно задав третью компоненту вектора s^1 $s_{31} = 1$, вычисляются другие компоненты из уравнений: $2s_{11} - 2s_{21} = -6$, $-2s_{21} = 0$. Тогда можно вычислить $s^1 = [-3, 0, 1]^T$.

Второй столбец s^2 матрицы S является собственным вектором для собственного числа $\lambda_2 = -2$, который определяется системой $(A - \lambda_2 E_3)s^2 = 0$. Решение этой системы не единственное, поскольку собственный вектор определен с точностью до постоянного множителя. Задав произвольное значение первой компоненты $s_{12} = 1$, можно получить систему линейных алгебраических уравнений: $-2s_{22} + 6s_{32} = -3$, $s_{22} - 2s_{32} = 1$, решение которой определяет собственный вектор $s^2 = [1, 0, -0.5]^T$.

Вектор s^3 является **корневым вектором «высоты 2» для этой матрицы**, удовлетворяющим линейному алгебраическому уравнению:

$$(A - \lambda_2 E_3)^2 s^3 = 0 \text{ или } (A - \lambda_2 E_3)s^3 = s^2:$$

$$(A - \lambda_2 E_3) s^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Положив $S_{13} = 1$, можно вычислить вектор $s^3 = [1, -0.5, -0.5]^T$. В результате преобразующая матрица и обратная для этой матрицы имеют вид:

$$S = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналитическое решение задачи Коши для уравнений состояния ЭЭО используется для анализа процессов при различных начальных условиях и входных переменных, которыми являются управляющие воздействия вторичного регулирования или внеплановые отклонения активных мощностей нагрузки. Тогда

$$x(t) = Sz(t) = S \left\{ \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} z^0 + \right. \\ \left. + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} S^{-1} B d\tau \right\},$$

где вектор $z^0 = S^{-1}x^0$.

Пример. Пусть соотношения для вычисления переходного процесса ЭЭО, описываемого дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.125 & 25 & -1.25 \\ -0.060 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -25 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Для вычисления решения $x(t)$ используется замена: $x = Sz$, с помощью которой матрица A приводится к форме Жордана: $J = S^{-1}AS$. Вычислим собственные числа матрицы A из ее характеристического уравнения $\det(\lambda E_3 - A) = 0$. Решения уравнения: $\lambda_{1,2} = -0.414 \pm 1.325i$, $\lambda_3 = -1.298$, тогда жорданова форма с учетом комплексных собственных чисел матрицы:

$$J = \begin{bmatrix} -0.414 + 1.325i & 0 & 0 \\ 0 & -0.414 - 1.325i & 0 \\ 0 & 0 & -1.298 \end{bmatrix}.$$

Столбцы s^i матрицы преобразования подобия $S = [s^1, s^2, s^3]$ вычисляются как собственные векторы матрицы A из условия $(A - \lambda_i E_3)s^i = 0$:

$$S = \begin{bmatrix} 0.729 - 0.356i & 0.729 + 0.356i & -0.790 \\ -0.0096 + 0.0215i & -0.0096 - 0.0215i & 0.0675 \\ -0.401 - 0.425i & -0.401 + 0.425i & 0.609 \end{bmatrix}.$$

Переходные процессы в ЭЭО описываются формулой Коши:

$$y(t) = C(S e^{Jt} S^{-1} x^0 + S \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B u(\tau) d\tau) + D u(t).$$

Так как D – нулевая матрица, а J – неособая матрица, то процессы при условии $u(t) = G \cdot 1(t)$, где $G = \text{const}$, имеют вид:

$$y(t) = C(e^{At}x^0 + (e^{At} - E_n)A^{-1}Bu(t)), \text{ где } e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}.$$

На рис. 2.2 приведены результаты исследования процессов $y(t)$: при нулевых входных воздействиях и начальных условиях $x^0 = (10, 0, 0)^T$ – зависимость «1»; при нулевых начальных условиях, нулевой нагрузке и единичном управлении $\mu = 0$, $u = 1(t)$

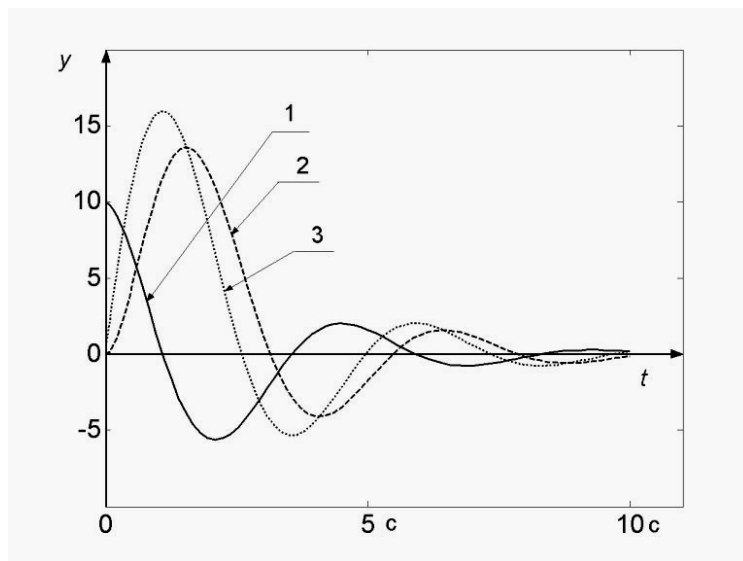


Рис. 2.2. Переходные процессы в электроэнергетическом объединении

– зависимость «2»; процесс с нулевыми начальными условиями, единичном возмущении и нулевом управлении: $\mu = -1(t)$, $u = 0$ – зависимость «3».

3. Линейные асимптотические модели электромеханических процессов на основе метода разделения и редукции. Метод разделения движений может быть реализован в нескольких формах. В частности, известны способы получения дифференциальных уравнений быстрых и медленных движений с использованием метода малого параметра [86,178], спектральные методы и методы прямого исключения [94].

Спектральный метод редукции использует разделение движений и переход к канонической форме уравнений состояния

[94]. При этом **критерием** выделения различных составляющих движения являются **собственные числа матрицы** уравнений ЭЭО. Данный метод в общем случае требует обращения комплексной матрицы при переходе к каноническому базису.

Метод прямого исключения. Высокие размерности уравнений ЭЭО требуют использования различных способов редукции (эквивалентирования) уравнений движения. Один из них – понижение порядка уравнений путем прямого исключения, которому может предшествовать спектральный анализ составляющих движения, рассмотренный выше. Использование уравнений состояния в базисе физических координат ЭЭЭ позволяет эквивалентировать с учетом характеристик процессов. Критериями эквивалентности исходной и редуцированной моделей в смысле описания асимптотических составляющих движения ЭЭО могут быть спектральные свойства или минимум интегрального квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} (S(t) - s(t))^2 dt,$$

где векторы $S(t)$ и $s(t)$ определяют переходные процессы, описываемые исходными и асимптотическими моделями.

Введенный функционал ограничен снизу нулевым значением, что соответствует получению идеальной приближенной модели. Ограниченность функционала сверху означает совпадение установившихся состояний в точной и приближенной моделях при одинаковых внешних воздействиях. Критерий эквивалентности позволяет формально поставить задачу эквивалентирования как задачу аппроксимации и решать ее методами теории оптимизации. Однако такой метод является достаточно трудоемким в случае высоких размерностей уравнений электромеханических процессов ЭЭО.

Задачу редукции уравнений динамики можно конструктивно решить при учете характеристик процессов ЭЭО и формировании приближенных моделей в виде асимптот движения в узком смысле, описывающих усредненные составляющие движения. Для процессов ЭЭО характерно наличие двух движений – основного (медленного) и относительного (быстрого). Относительное движение соответствует относительным «качаниям» роторов эквивалентных агрегатов, а основное движение можно рассматривать как асимптоту движения. Исследования подтвердили, что указанное свойство процессов сохраняется при изменении параметров линеаризованной модели (13) в интервалах: $0,02 \text{ с}^2 \leq T_{ai}^2 \leq 0,04 \text{ с}^2$, $0,003 \text{ с} \leq T_{yi} \leq 0,005 \text{ с}$, $1 \text{ с} \leq T_{Pi} \leq 2 \text{ с}$, $1 \text{ с} \leq T_{ci} \leq 2 \text{ с}$, $1 \text{ с} \leq T_{Hi} \leq 2 \text{ с}$, $0,02 \leq \rho_{ig} \leq 0,4$, $0,016 \text{ с} \leq k_{oi} \leq 0,032 \text{ с}$. Тогда в соответствии с изложенным подходом вектор состояния ЭЭО можно разделить на две составляющие.

4. Линейные асимптотические модели электромеханических процессов на основе метода разделения и редукции. Метод разделения движений реализуется в нескольких формах.

Спектральный метод редукции использует разделение движений и переход к канонической форме уравнений состояния [94]. При этом *критерием* выделения различных составляющих движения являются *собственные числа матрицы* уравнений ЭЭО. Данный метод в общем случае требует обращения комплексной матрицы при переходе к каноническому базису

$$Z = (Z^I, Z^{II})^T, \quad (14.a)$$

где Z^I – вектор асимптот движения, а Z^{II} – вектор относительного движения агрегатов ЭЭО, которое имеет затухающий колебательный характер. Признаки компонент вектора асимптот вводятся на основе соответствия между *экспоненциальными*

«медленными» составляющими движения и вещественными собственными числами матрицы объекта. Сопоставление собственных чисел матрицы объекта с компонентами вектора состояния позволило установить, что векторы Z^I и Z^{II} равны:

$$Z^I = (z, z')^T, \quad Z^{II} = (z'', z''')^T. \quad (14.6)$$

Приведенные структуры векторов имеют место для двухмашинных объединений (равной и неравной мощности) и для многомашинных ЭЭО с типовыми значениями параметров.

Определение вектора асимптот позволяет исключить компонент вектора относительного движения из уравнения состояния. Для этого уравнение (13) представляется в регулярном (ε)= и сингулярном (θ)→ блочном виде [37,79,209]

$$\begin{aligned} Z'^I &= A_{11}Z^I + A_{12}Z^{II} + B_1u, \\ \varepsilon Z'^{II} &= A_{21}Z^I + A_{22}Z^{II} + B_2u, \\ S &= C_1Z^I + C_2Z^{II}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ – малый параметр. Далее в соответствии с гипотезой квазистационарности можно положить $\varepsilon = 0$. Тогда из второго уравнения определяется вектор:

$$Z^{II} = -(A_{22})^{-1} (A_{21}Z^I + B_2u).$$

Подстановка Z^{II} в первое уравнение (15) приводит к асимптотическому уравнению состояния (для вектора асимптот Z^I):

$$Z'^I = A_M Z^I + B_M u, \quad S = C_1 Z^I, \quad (16)$$

где $A_M = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_M = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, а матрица C_1 –

подматрица матрицы C , соответствующая компонентам вектора асимптотического движения.

Матрицы уравнения асимптотического движения (16) можно определить как подматрицы уравнения (13) с помощью матриц в (4), а матрицу $\bar{G}$ с учетом неособенности матрицы Q^2 . Тогда матрицы линейной асимптотической системы имеют вид

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & E \\ A_{21}^M & A_{22}^M \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^M \end{bmatrix},$$

где матричные параметры равны: $A_{21}^M = -A_{43}^{-1}A_{41} = -\bar{G}[Q^2]^{-1}Q^4\bar{G}$, $A_{22}^M = -A_{43}^{-1}A_{42} = -\bar{G}[Q^2]^{-1}Q^3\bar{G}$, $B_2^M = -\bar{G}[Q^2]^{-1}P^4$.

Таким образом, предлагаемый метод использует **прямое исключение компонент** относительного движения. При этом параметры модели асимптотического движения могут быть представлены через параметры общей формы дифференциальных уравнений движения ЭЭО.

Свойства линейных асимптотических моделей движения ЭЭО. Свойства асимптотических моделей анализировались на основе результатов исследования. Цель исследования – подтверждение теоретических результатов на примере эквивалентирования уравнения электромеханических процессов различных ЭЭО. В частности, построение моделей асимптотического движения выполнялось для ЭЭО трех типов: двухмашинных ЭЭО равной и неравной мощности, а также для шестимашинного ЭЭО.

Типовые параметры уравнений исследуемых ЭЭО выбраны для ЭС средней мощности и соответствовали значениям, используемым при анализе систем управления ЭЭО по частоте и активной мощности. Конкретные значения параметров удовлетворяют приведенным выше ограничениям, что подтверждает условия, при которых допустимо эквивалентирование по данной методике.

В результате исследования были получены уравнения в общей форме, уравнения состояния, а также уравнение асимптот в соответствии с приведенными выше соотношениями. Сравнение процессов для координат объекта в исходных и асимптотических уравнениях выполнялось методами моделирования соответствующих уравнений состояния на ЭВМ с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка.

В результате была получена серия процессов изменения отклонений перетоков в исходной модели и в модели асимптотического движения *при эквивалентных начальных условиях*. Анализ процессов изменения отклонений перетоков активной мощности по линиям в точной и приближенной моделях показывает, что асимптоты характеризуют усредненные составляющие движения для различных начальных состояний ЭЭО типа «система-шины бесконечной мощности» неизменного напряжения и частоты. Размер исходной матрицы A в (13) равен (4×4) , а размер матрицы A_M в (16) составляет (2×2) , т. е. размер вектора состояний уменьшается в два раза.

Результаты исследования двухмашинного ЭЭО, состоящего из ЭС равной мощности, также подтверждают возможность получения асимптот движения с помощью предлагаемого метода. В данном случае размер матрицы объекта уменьшается в два раза – от (8×8) до (4×4) . Процессы изменения перетоков в ЭЭО типа Единой энергосистемы России, описываемые уравнениями асимптотического движения, характеризуют усредненные составляющие движения. Размеры матрицы в уравнениях сокращается от (24×24) до (12×12) .

Применимость метода подтверждена путем моделирования точного и асимптотического движения сложных электроэнергетических объединений. Применение метода может найти для

приближенного описания динамики процессов управления частотой и активной мощностью ЭЭО на этапах динамической оптимизации систем ограничения перетоков активной мощности по ЛЭП, а также при качественном исследовании процессов.

Таким образом, прямой метод исключения компонент относительного движения и одновременное выделение асимптотического движения энергообъединений позволяет существенно сократить порядок уравнений ЭМП (размеры векторов состояния) при анализе и совместном синтезе СОП и САУ ЧМ в условиях предаварийного управления частотой активной мощностью ЭЭО как объекта управления.

2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Классические математические модели электромеханических процессов для анализа и синтеза систем управления частотой и активной мощностью являются основой для формирования моделей. Далее рассматриваются классические линейные модели, являющиеся исходными для разработки линейных моделей для *«физических координат второго типа»* и *обобщенных кусочно-линейных уравнений* электромеханических процессов ЭЭО [85,107].

1. Уравнения электромеханических процессов для физических координат. Классические модели строятся на основе уравнений электромеханических процессов, происходящих в многомашинной ЭЭС. Пусть имеется объединенная электроэнергетическая система, состоящая из n генерирующих станций, соединенных m линиями электропередачи (ЛЭП). Уравнения энергетического баланса в узлах сети ЭЭО имеют вид [50,57]:

$$T_{ai}^2 \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + T_{yi} \frac{d\varphi_i}{dt} + \sum_{k \in M_i} S_k = p_i - \mu_i, i = 1, 2 \dots n, \quad (1)$$

где φ_i – отклонение абсолютного угла ротора i -го генератора (эквивалентного агрегата); T_{ai}^2 , T_{yi} – приведенные постоянные механической инерции и постоянная ускорения ротора ЭА; S_l – переток активной мощности по l -й ЛЭП, L_i – множество индексов, соответствующих внешним ЛЭП для i -й станции; p_i – суммарное приращение мощности i -ой станции; μ_i – внеплановое изменение нагрузки i -й станции (генерирующего узла электрической сети).

Переток активной мощности по l -й ЛЭП, соединяющей i -ю и j -ю ЭС, определяется равенством

$$S_{ij} = \rho_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (2)$$

где ρ_{ij} – удельный синхронизирующий момент (мощность) между i -м и j -м эквивалентными генерирующими агрегатами. С учетом соотношения для перетоков (2) уравнение (1) принимает вид

$$T_{ai}^2 \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + T_{yi} \frac{d\varphi_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j) = p_i - \mu_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Предполагается, что для узлов, не соединенных ЛЭП, $\rho_{ij} = 0$.

В линеаризованной форме уравнений, когда взаимные углы $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ достаточно малы, уравнения (2.3) принимают следующую форму

$$T_{ai}^2 \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + T_{yi} \frac{d\varphi_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) = p_i - \mu_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Уравнение (4) соответствует балансу мощности i -го эквивалентного агрегата. Уравнения динамики ЭЭО, состоящего из нерегулируемых турбоагрегатов, регулируемых турбоагрегатов, и регулируемых гидроагрегатов, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T'_{\Pi} \frac{dp'_{\Pi}}{dt} + p'_{\Pi} &= q'_{\Pi}, & T_{\Pi} \frac{dp_{\Pi}}{dt} + p_{\Pi} &= q_{\Pi}, \\
 0.5g_0 T_{\Gamma i} \frac{dp_{\Gamma i}}{dt} + p_{\Gamma i} &= q_{\Gamma i} - g_0 T_{\Gamma i} \frac{dq_{\Gamma i}}{dt}, \\
 T'_{ci} \frac{dq'_{\Pi}}{dt} + q'_{\Pi} &= -\alpha'_{\Pi} k_{\omega i} \frac{d\varphi_i}{dt}, & T_{ci} \frac{dq_{\Pi}}{dt} + q_{\Pi} &= -\alpha_{\Pi} k_{\omega i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \sigma_{\Pi}, \\
 T_{ci} \frac{dq_{\Gamma i}}{dt} + q_{\Gamma i} &= -\alpha_{\Gamma i} k_{\omega i} \frac{d\varphi_i}{dt} + \sigma_{\Gamma i}, \\
 T_{\Pi} \frac{d\sigma_{\Pi}}{dt} + \sigma_{\Pi} &= \alpha_{\Pi} u_i, & \sigma_{\Gamma i} &= \alpha_{\Gamma i} u_i.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В системе уравнений (5) использованы обозначения: $T_{\Pi i}$ – постоянная времени парового объема ЭТА; $T_{\Gamma i}$ – постоянная времени трубопровода ЭГА; g_0 – начальное открытие направляющего аппарата гидростанции; T_{ci} – постоянная времени гидравлического усилителя; $\alpha_{\Pi i}$, $\alpha_{\Gamma i}$ и $\alpha'_{\Pi i}$ – доли мощности регулируемых ЭТА и ЭГА и нерегулируемых ЭТА i -й станции, при этом выполняются условия: $\alpha_{\Pi} + \alpha_{\Gamma i} + \alpha'_{\Pi} = 1$; $T_{\Pi i}$ – постоянная времени вторичного регулятора; $k_{\omega i}$ – коэффициент усиления первичного регулятора скорости турбины. Переменные и параметры нерегулирующих эквивалентных турбоагрегатов отмечены штрихом.

Система (4) и (5) описывает динамику i -го ЭА в физических переменных. Для исследования можно перейти к уравнениям,

описывающим динамику уравнениями «вход-состояния-выходы». Так как на практике влияние вторых производных отклонений мощностей p_i достаточно мало, то ими можно пренебречь.

Выполнив преобразования можно привести линеаризованные уравнения, связывающие отклонения мощности и частоты с перемещениями вторичного регулятора ЭТА и ЭГА

$$T_{ai}^2 D^2 \varphi_i + T_{yi} D \varphi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) = p_i - \mu_i, \\ p_i = p_{Ti} + p_{Gi}, \quad (6)$$

$$(T_{\Xi i} D + 1) p_{Ti} = -k_{\omega i} D \varphi_i + \sigma_{Ti}, \quad (T_{Gi} D + 1) p_{Gi} = -k_{\omega i} D \varphi_i + \sigma_{Gi},$$

где $T_{\Xi i} = T_{Pi} + T_{Ci}$, $T_{Gi} = 0,5 g_0 T_{Ti} + T_{Ci}$, $D = d / dt$ – оператор дифференцирования по времени.

Как и в п. 2.1, уравнения (6) преобразуются к общей форме, в которой правые и левые части уравнений – матричные полиномы от оператора дифференцирования D . Тогда векторно-матричные уравнения принимают вид [58]:

$$Q(D)\Phi(t) = P(D)u(t) + W(D)\mu(t), \quad (7)$$

где $\Phi(t) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$ – вектор отклонений углов роторов ЭА; $u(t) = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ – вектор управлений; $\mu(t) = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ – вектор нагрузок ЭЭО. Матричные полиномы в (7) имеют вид:

$$Q(D) = \sum_{h=0}^4 Q^h D^{4-h}, \quad P(D) = \sum_{h=0}^4 P^h D^{4-h}, \quad W(D) = \sum_{h=0}^4 W^h D^{4-h}, \\ Q^h = (q_{il}^h), \quad P^h = (p_{il}^h), \quad W^h = (w_{il}^h), \quad (8)$$

а ненулевые элементы матриц определяются данными табл. 2.2.

Таблица 2.2

Параметры уравнений с физическими координатами второго типа

q_{il}^h, p_{il}^h	Объединения из тепловых агрегатов	Объединения из тепловых и гидравлических агрегатов
q_{ii}^0	$T_{ai}^2 T_{\Xi i} T_{\Pi i}$	$T_{ai}^2 T_{\Gamma i} T_{\Xi i}$
q_{ii}^1	$T_{yi} T_{\Xi i} T_{\Pi i} + T_{ai}^2 (T_{\Pi i} + T_{\Xi i})$	$T_{yi} T_{\Gamma i} T_{\Xi i}^2 + T_{ai}^2 (T_{\Gamma i} + T_{\Xi i}) -$ $-k_{\omega i} \alpha_{\Gamma i} g_0 T_{\Gamma i} T'_{\Xi i}$
q_{ii}^2	$T_{yi} \left(\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} T_{\Xi i} + T_{yi} + k_{\omega i} \right) +$ $+T_{yi} T_{\Xi i} + T_{yi}^2$	$T_{\Pi i} \left(\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} T'_{\Xi i} + T_{yi} + k_{\omega i} \alpha'_{\Gamma i} - k_{\omega i} \alpha_{\Gamma i} \right) +$ $+k_{\omega i} \alpha'_{\Gamma i} T_{\Xi i} + T_{yi} T'_{\Xi i} + T_{ai}^2$
q_{ii}^3	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} (T_{\Pi i} + T_{\Xi i}) + k_{\omega i} + T_{yi}$	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig} (T'_{\Xi i} + T_{\Gamma i}) +$ $+k_{\omega i} (\alpha'_{\Gamma i} + \alpha_{\Gamma i}) + T_{yi}$
q_{ii}^4	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig}$	$\sum_{\substack{g=1, \\ i \neq g}}^n \rho_{ig}$
q_{ig}^2	$-\rho_{ig} T_{\Xi i} T_{\Pi i}$	$-\rho_{ig} T_{\Gamma i} T'_{\Xi i}$
q_{ig}^3	$-\rho_{ig} (T_{\Xi i} + T_{\Pi i})$	$-\rho_{ig} (T'_{\Xi i} + T_{\Gamma i})$
q_{ig}^4	$-\rho_{ig}$	$-\rho_{ig}$
p_{ii}^2	0	$-\alpha_{\Gamma i} T_{\Gamma i} T'_{\Xi i}$
p_{ii}^3	0	$\alpha_{\Gamma i} (T'_{\Xi i} - T_{\Gamma i})$
p_{ii}^4	$\alpha_{\Gamma i}$	$\alpha_{\Gamma i}$

Уравнения определяют модели ЭЭО в форме «вход-состояния-выход» с абстрактными координатами [58], что не всегда конструктивно, так как требования к режимам ЭЭО сформулированы в физических координатах.

Уравнения «вход-состояния-выход» в физических координатах требуют перехода к форме Коши в каждом из уравнений системы (6). В результате можно получить уравнения ЭМП в форме «вход-состояния-выход», где переменные состояния ЭЭО соответствуют *«физическим координатам второго типа»*. Уравнения ЭМП ЭЭО (4)-(6) можно записать в форме:

$$T_{ai}^2 D^2 \varphi_i + T_{yi} D \varphi_i + j \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) = p_i - \mu_i, \quad (9)$$

$$(T_{\Pi i} D + 1) p_i = q_i, \quad (T_{ci} D + 1) q_i = -k_{\omega i} D \varphi_i + \sigma_i, \quad (T_{\Pi i} D + 1) \sigma_i = u_i.$$

Поскольку $D \varphi_i = \omega_i$, то можно преобразовать слагаемые левой части дифференциальных уравнений, содержащие первые производные по времени координат $\varphi, \omega, p, q, \sigma$, и представить уравнения динамики энергообъединений в форме, соответствующей форме Коши

$$\varphi'_i = \omega_i,$$

$$\omega'_i = -\frac{1}{T_{ai}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{ai}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{ai}^2} p_i - \frac{1}{T_{ai}^2} \mu_i, \quad (10)$$

$$p'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} p_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} q_i, \quad q'_i = -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \sigma_i, \quad \sigma'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \sigma_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.$$

Описание ЭЭО в форме «вход-состояния-выход» для второй формы физических координат требуют определения вектора состояний в виде совокупности физических координат энергообъединения, вектора управлений, вектора внешних воздействий в

виде внеплановых отклонений активных нагрузок и вектора перетоков активной мощности по линиям. Все перечисленные координаты и входные воздействия (управления и внеплановые нагрузки) определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} X &= [\varphi, \omega, p, q, \sigma]^T \in \mathbb{R}^N, \\ \varphi &= [\varphi_1, \dots, \varphi_n], \quad \omega = [\omega_1, \dots, \omega_n], \quad p = [p_1, \dots, p_n], \\ q &= [q_1, \dots, q_n], \quad \sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_n], \quad u = [u_1, \dots, u_n], \quad \mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда уравнения процессов (10), (11) запишутся в форме Коши:

$$x' = Az + B_U u + B_M \mu, \quad z(0) = x_0, \quad (12)$$

где $A = (A)_{lm}$, $B_U = (B_U)_{rs}$, $B_M = (W_M)_{rs}$ – блочные матрицы, причем $l, m, r = 1, 2, \dots, 5$, $s = 1, 2$, а клетки A_{lm} , B_{rs} имеют соответствующие размеры.

Анализ системы (10) позволяет определить ненулевые элементы матриц A , B_U , B_M . Компоненты вектора перетоков определяются равенствами

$$s = [s_1, s_2, \dots, s_v], \quad S_l = \rho_{ig} (\varphi_i - \varphi_g), \quad l = 1, 2, \dots, v, \quad (13)$$

где i, g – узлы ЭЭО, соединяемые l -й линией. Учитывая (14), вектор перетоков представляется как функция вектора состояния

$$s = Cx \in \mathbb{R}^v, \quad (14)$$

где $C = [C_1 | \dots | C_{1v} | \dots | C_{15}]$ – блочная матрица, клетки которой имеют размер $(m \times n)$, причем $C_2, \dots, C_5$ – нулевые блоки матрицы, а элементы ненулевого блока C_1 имеют вид:

$$\begin{aligned} (C_1)_{li} &= \rho_{ig}, \quad (C_1)_{lg} = -\rho_{ig}, \quad \text{если } l\text{-я ЛЭП соединяет } g\text{-ю и } i\text{-ю ЭС;} \\ (C_1)_{li} &= 0, \quad (C_1)_{lg} = 0, \quad \text{если } l\text{-я линия не соединена с } i\text{-й ЭС.} \end{aligned}$$

Тогда, приняв в качестве вектора выходных координат вектор отклонений перетоков s , можно получить систему уравнений ЭМП в форме «входы-состояния-выходы»

$$x' = Ax + Bu + W\mu, \quad s = Cx, \quad x(0) = x_0, \quad (15)$$

где вектор входных координат U , вектор состояния X и вектор выходных координат Y заданы в форме (11), (14), а матрицы A , B , C вычисляются на основе (13) и (14). Эти уравнения описывают динамику ЭЭО в пространстве **физических координат состояния второго типа**.

Исследовался комплекс математических моделей ЭЭО, один из вариантов которых иллюстрируется на рис. 2.3. Параметры ЭЭО, схема сети которого представлена на рис. 2.3, определяются равенствами: $T_{a1} = 0,02$, $T_{a2} = 0,017$, $T_{a3} = 0,02$, $T_{y1} = 0,027$, $T_{y2} = 0,025$, $T_{y3} = 0,025$, $k_{\omega 1} = 0,017$, $k_{\omega 2} = 0,032$, $k_{\omega 3} = 0,016$, $\rho_{12} = 0,02$, $\rho_{13} = 0$, $\rho_{23} = 0,04$, $T_{ni} = 1,5$, $T_{ci} = 0,5$, $i = 1, 2, 3$.

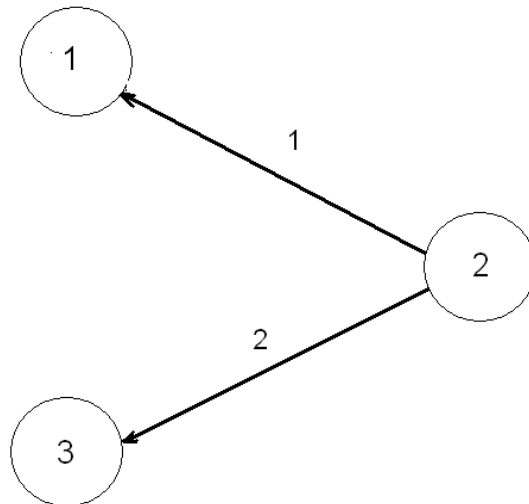


Рис. 2.3. Схема исследуемого энергообъединения

Для данной энергосистемы уравнения «входы-состояния-выходы» будут иметь вид, соответствующий (15), в которых

форма матриц A, B, C соответствует моделям в физических координатах ЭЭО. Числовые значения элементов матриц получены на основе приведенных выше соотношений. Математические модели этого ЭЭО будут использованы в вычислительных экспериментах по расчету коэффициентов влияния, анализу структуры оптимизирующих управлений на станции и при исследовании динамики СОП по ЛЭП и управления частотой и обменной мощностью ОЭС при ограничениях на регулировочные диапазоны станций. ЭЭО будут использованы в вычислительных экспериментах по расчету коэффициентов влияния, анализу структуры оптимизирующих управлений на станции и при исследовании динамики СОП по ЛЭП и управления частотой и обменной мощностью ОЭС при ограничениях на регулировочные диапазоны станций.

Таким образом, сформулированные математические модели ЭЭО в физических координатах второго типа позволяют перейти к формулировке кусочно-линейных обобщенных и асимптотических моделей ЭЭО, которые учитывают существенные нелинейности, влияющие на динамику предаварийного управления энергообъединений.

2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРНО-ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССОВ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Уравнения квазистационарных режимов используются для вычисления управлений и анализа потокораспределения в предаварийных СОП по ЛЭП и САУ ЧМ в ЭЭО. Линейные уравнения, представленные соответствующими операторами, могут формулироваться на основе общей формы уравнений ЭЭО, позволяющими выполнить обращение операторами методами вычисления

резольвенты, асимптотическими преобразованиями и методами алгебраизации уравнений ЭМП.

Постановки задач. Рассматриваются исходные регулярные модели и методы разработки квазистационарных моделей ЭЭО на основе следующих методов обращения операторов:

1. *Метода вычисления резольвенты* линейного дифференциального оператора.

2. *Метода квазистационаризации* линейных или кусочно-линейных дифференциальных операторов.

В рамках этих методов можно разработать линейные и нелинейные *квазистационарные модели влияния ЭЭО* на основе линейных и кусочно-линейных дифференциальных уравнений ЭМП. Кроме этого, можно определить *предельно-корректные квазистационарные модели*, сохраняющие асимптотические свойства с учетом статической определимости алгебраизованных подсистем дифференциальных уравнений.

1. Формулировка линейных моделей на основе метода вычисления резольвенты. Линейные модели, формулируемые для дифференциальных или разностных уравнений с помощью оператора резольвенты, могут описывать режимы ЭЭО, обладающие свойством асимптотической устойчивости.

Линейные полиномиальные модели ЭЭО «вход-выход» на основе дифференциальных уравнений. Пусть уравнения линейной модели ЭЭО типа «вход-состояния-выход» (дифференциальный оператор) имеют вид

$$(DE_n - A)x = Bu, \quad s = Cx, \quad x(0) = x_0, \quad (1.a)$$

где $D = d / dt$ – оператор дифференцирования по времени.

Тогда вектор выходных координат объекта управления определится оператором резольвенты:

$$s = C(DE_n - A)^{-1} Bu. \quad (1.6)$$

Определение. Матричные функции $f(\lambda) = (\lambda E_n - A)$ и $f(\lambda)$ – называются *характеристической функцией* и *характеристическим полиномом* A , а $f(\lambda)^{-1} = (\lambda E_n - A)^{-1}$ – **резольвентой матрицы** A .

Таким образом, вычисление моделей влияния требует определения резольвенты матрицы системы A , где $\lambda = D = d/dt$. Для определения резольвенты можно использовать лемму [107].

Лемма (о вычислении резольвенты). Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – постоянная квадратная матрица с действительными коэффициентами. Тогда резольвента $(\lambda E_n - A)^{-1}$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} (\lambda E_n - A)^{-1} &= \tilde{B}(\lambda) / \chi_n(\lambda), \quad \chi_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \\ \tilde{B}(\lambda) &= \tilde{B}_1 \lambda^{n-1} + \tilde{B}_2 \lambda^{n-2} + \dots + \tilde{B}_{n-1} \lambda + \tilde{B}_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты a_k полинома $\chi_n(\lambda)$ и матричные коэффициенты $\tilde{B}_k$ присоединенной матрицы $\tilde{B}(\lambda)$ вычисляются рекуррентно:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= E_n, & a_1 &= -\text{tr}(A), \\ \tilde{B}_k &= \tilde{B}_{k-1} A + a_{k-1} E_n, & a_k &= -\frac{1}{k} \text{tr}(\tilde{B}_k A), \\ \tilde{B}_n A + a_n E_n &= 0, & k &= 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (1.a) можно преобразовать, вычисляя резольвенту $(DE_n - A)^{-1}$ по формулам (2), (3), используя оператор дифференцирования вместо параметра λ . В результате вектор выходных координат – перетоков примет вид

$$Y = C\tilde{B}(D)BU / \chi_n(D). \quad (4)$$

Умножение (4) на полином $\chi_n(D)$ приводит к уравнению

$$\chi_n(D)s = B_{n-1}(D)u, \quad \chi_n(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \quad (5)$$

где полиномы от оператора дифференцирования имеют вид:

$$\begin{aligned}\chi_n(D) &= D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \\ B_{n-1}(D) &= b_1 D^{n-1} + b_2 D^{n-2} + \dots + b_{n-1} D + b_n, \quad s \in \mathbb{R}^v, \quad u \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Коэффициенты a_k операторного полинома $\chi_n(D)$ вычисляются по формулам (3), а коэффициенты b_k матричного операторного полинома $\xi_{n-1}(D)$ вычисляются умножением числовых матриц B , C и операторной матрицы $\tilde{B}(D)$, вычисляемой по формулам (2). При этом в уравнении (5) матрица b_n имеет размер $(v \times 2n)$, где v – количество линий, соединяющих узлы ЭЭО, n – количество ЭА. Скалярное линейное уравнение установившегося режима, следующее из модели (5) при условии $D = 0$, определяет переток равенством

$$s = (b_n / a_n) u, \quad (6)$$

где (b_n / a_n) – «коэффициент влияния» скалярного управления на переток по одной ЛЭП.

Линейные полиномиальные модели ЭЭО «вход-выход» на основе разностных уравнений. Данные уравнения следуют из модели ЭЭО «вход-состояния-выход» в форме

$$\xi x_k = Hx_k + Fu_k, \quad s_k = Cx_k,$$

и имеют вид

$$(\xi E - H)x_k = Fu_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (7)$$

где $\xi x_k = x_{k+1}$ – оператор сдвига вперед по дискретному времени $k \in \mathbb{N}$. На основе уравнений (7) можно записать соотношение с помощью оператора резольвенты

$$y_k = C(\xi E - H)^{-1} Fu_k. \quad (8)$$

Вычисление резольвенты определяет следующую «входо-выходную» модель электроэнергетического объединения как объекта управления

$$\begin{aligned}\chi_n(\xi)y_k &= B_{n-1}(\xi)u_k, \quad \chi_n(\xi) = \xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\xi + a_n, \\ B_{n-1}(\xi) &= b_1\xi^{n-1} + b_2\xi^{n-2} + \dots + b_{n-1}\xi + b_n.\end{aligned}\tag{9}$$

Коэффициенты полиномов от оператора сдвига по времени в (9) определяются по формулам (2), (3), где матрица A заменяется матрицей H , а матрица B - матрицей F .

Таким образом, линейные уравнения ЭМП определяют специальные модели влияния ЭЭО с учетом свойств электрической сети ЭЭО, механических свойств ЭА и отклонений частоты в объекте управления.

2. Линейные модели влияния на основе метода асимптотических преобразований уравнений ЭЭО. Для вычисления управлений для СОП по ЛЭП и САУ ЧМ для ЭЭО в качестве моделей квазистационарных состояний могут использоваться *коэффициенты распределения*. Как было отмечено в п. 1, эти модели применяются при нулевых отклонениях частоты, и синтезированы на основе уравнений электрической сети ЭЭО, и учитывают установившиеся значения углов генераторов ЭТА и ЭГА. Однако для корректности моделей и управлений СОП и САУ ЧМ в последнее время разработаны модели ЭЭО, описывающие квазистационарные режимы при ненулевых отклонениях частоты на основе ряда подходов [5, 10, 11, 14, 19, 21, 27, 69, 107, 108, 124, 126, 131, 166]. Общие требования к моделям приведены в табл. 2.3.

Постановки задач. Сложность структур ЭС, ОЭС и ЕЭС требует разработки методов и алгоритмов вычисления управлений на основе динамических или квазистационарных *моделей*

Таблица 2.3

Модели влияния, информация и задачи синтеза СОП активной мощности по ЛЭП и САУ частотой и обменной мощностью для АСДУ ЕЭС

Назначение систем управления ЭЭО и методы синтеза	Модели влияния и информация для независимых СОП и САУ ЧМ	Модели влияния и информация для синтеза совместных СОП и САУ ЧМ
	1	2
1. Централизованные СОП по ЛЭП уровней ЭС, ОЭС или ЕЭС. <i>Синтез управлений</i> – методами математического программирования (МП)	Задача 1.1.1. Модели влияния ЭА на потоки по внутрисистемным, межсистемным и транзитным ЛЭП и <i>информация о потоках</i> уровней ЭС (ОЭС)	Задача 1.2.1. Модели влияния ЭА на потоки по внутрисистемным, межсистемным и транзитным ЛЭП, частоте и обменным мощностям ЭС или ОЭС и <i>информация о потоках</i> по ЛЭП, частоте и обменным мощностям уровней ЭС, ОЭС
2. Централизованные САУ ЧМ на уровне ОЭС или ЕЭС. <i>Синтез управлений</i> – методами МП	Задача 2.1.1. Модели влияния ЭА на <i>поддержание частоты</i> («ведения частоты») на уровне ЕЭС Задача 2.1.2. Модели влияния ЭА на <i>обменные мощности</i> ОЭС	
3. Децентрализованные СОП для ограничения потоков по ЛЭП уровней ОЭС или ЕЭС. <i>Синтез управлений</i> – методами МП	Задача 3.1.1. Модели влияния ЭА локальных СОП на внутрисистемные потоки и <i>значения потоков по прилегающим ЛЭП</i> к ЭС	Задача 3.2.1. Модели влияния ТЭС и ГЭС на потоки по ЛЭП и информация о потоках, частоте и обменной мощности ОЭС.
4. Децентрализованные САУ ЧМ уровня ОЭС <i>Синтез управлений</i> – методами МП	Задача 4.1.1. Модели влияния ЭА на частоту и обменные мощности ОЭС для САУ ЧМ уровня ЕЭС и информация о координатах	

Назначение систем управления ЭЭО и методы синтеза	Модели влияния и информация для независимых СОП и САУ ЧМ	Модели влияния и информация для синтеза совместных СОП и САУ ЧМ
	1	2
5. Иерархические СОП по межсистемным и транзитным ЛЭП. Синтез управлений – методами МП	Задача 5.1.1. Модели влияния ЭА на перетоки по внутрисистемным, межсистемным и магистральным ЛЭП и информация о перетоках	Задача 5.2.1. Модели влияния ЭА на перетоки по ЛЭП, частоту и обменные мощности ОЭС для САУ ЧМ уровня ЕЭС и информация об управляемых координатах
6. Иерархические САУ ЧМ уровня ОЭС (или ЕЭС) Синтез управлений – методами МП	Задача 6.1.1. Модели влияния ЭА на частоту и обменные мощности ОЭС для САУ ЧМ и информация о частоте, обменной мощности	

влияния для анализа систем управления энергообъединениями, включающим два класса систем – СОП по ЛЭП и САУ ЧМ.

Варианты централизованных, децентрализованных и иерархических структур СОП и САУ ЧМ, классы моделей влияния и необходимая для управления информация о перетоках и частоте представлены в приведенной табл. 2.3.

Модели влияния должны удовлетворять требованиям:

1). Характеризовать качественно и количественно **влияния управлений** ТЭС или ГЭС на перетоки активной мощности по линиям ЭЭО, что необходимо для вычисления управлений методами **независимого или согласованного синтеза двух систем** – СОП по заданным классам линиям и САУ частотой.

2). Характеризовать качественные и количественные *влияния управления* ТЭС и ГЭС на отклонения частоты и обменные мощности ОЭС как суммы перетоков по различным классам ЛЭП. Классы ЛЭП включают межсистемные линии, связывающие ОЭС с другими ОЭС, а также транзитные ЛЭП, передающие энергию между заданными узлами сети ЭЭО, для вычисления управлений методами и алгоритмами *независимых или согласованных САУ ЧМ*.

3). Характеризовать обобщенные *влияния управлений ТЭС и ГЭС в условиях действия совместных СОП* активной мощности по ЛЭП *и САУ ЧМ* для регулирования частоты и обменной мощности ОЭС.

При решении задач необходимо учесть существующий опыт. Как следует из изложенного выше, модели влияния регулирующих ТЭС и ГЭС, удовлетворяющие сформулированным требованиям, могут быть получены на основе моделей электро-механических процессов в ЭС, ОЭС или ЕЭС.

Адекватность моделей объекта определяется их соответствием требованиям и задачам управления, синтезируемых на основе прогнозирования режимов по потокораспределению и частоте электрической сети. Повышение точности корректных моделей для оперативных расчетов, прогнозирования и управления потокораспределением по ЛЭП сети ЭЭО возможно с учетом отклонений частоты. Решению этой задачи посвящен ряд исследований, которые направлены на формирование моделей, учитывающих отклонения частоты при анализе потокораспределения на основе ряда моделей.

Методы учета отклонений частоты в моделях потокораспределения ЭЭО исследованы в ряде исследований. В ряде работ предложены *консервативные модели ЭМП энергосистем*.

В этих моделях используются стационарные связи с исключением из уравнений динамики ЭЭО статически определимых подсистем, в частности, полагая, что стационарные связи устанавливаются между разностями углов ЭА сети. Это допущение существенно снижает размерность пространства состояний. На этом предположении основаны *позиционные модели ЭМП и электрической части энергосистем*, учитывающие генераторы ЭТА или ЭГА синусоидальными функциями от разности фазовых углов, используемые, в частности, для решения задач статической устойчивости. Модели, учитывающие отклонения частоты, представлены алгебраическими уравнениями, полученными преобразованиями дифференциальных уравнений ЭМП.

Ниже предлагаются *квазистационарные модели*, которые формируются декомпозицией уравнений ЭМП ЭЭО, преобразованные к моделям (уравнениям) различных *классов квазистационарности*.

Определение. Уравнения ЭЭО на основе преобразований уравнений ЭМП $(x'_1, x'_2)^T = f(x_1, x_2, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ относительно координат $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^N$ путем перехода от дифференциальных уравнений для координат $x_2 \in \mathbb{R}^v$ к дифференциально-алгебраическим уравнениям заменой производных координат $x'_2 \in \mathbb{R}^v$ нулевыми значениями $x'_2 = 0_v \in \mathbb{R}^v$, называются *дифференциальными квазистационарными уравнениями (ДКУ)* класса квазистационарности типа $K_{kc} = \{x'_2 = 0_v\}$, имеющими вид

$$x'_2 = f_2(x_2, u) \in \mathbb{R}^{N-v} \times \mathbb{R}^n.$$

Ранее было показано, что корректные квазистационарные модели формулируются на основе сингулярных преобразований исходных дифференциальных уравнений по методике, описанной

выше. В этих случаях корректный переход от асимптотически устойчивых линейных дифференциальных уравнений к дифференциально-алгебраическим уравнениям определяет асимптотически устойчивые квазистационарные уравнения.

Для моделей, используемых для вычисления управлений СОП по линиям и САУ ЧМ, целесообразно определить *предельно корректные ДКУ*, которые являются асимптотически устойчивыми и статически эквивалентными для исходных дифференциальных уравнений ЭМП ЭЭО.

Определение. *Предельно корректные КДУ (ПКДУ)* – это приближенные дифференциальные уравнения объекта (ЭЭО) минимального порядка, учитывающие минимальное количество дифференциальных подсистем, например, описывающих связи отклонений частот и углов, обладающих свойствами:

1). ПКДУ как *асимптотически устойчивые подсистемы уравнений ЭЭО*, формируемые асимптотическими преобразованиями.

2). *Входо-выходные свойства ПКДУ* являются *эквивалентными* в стационарных состояниях (режимах по частоте и перетокам ЭЭО) входо-выходным свойствам исходных моделей.

Таким образом, статическая эквивалентность ПКДУ ЭЭО обеспечивает совпадение входо-выходных характеристик (моделей влияния ТЭС или ГЭС на перетоки по ЛЭП и частоту) в установившихся режимах и минимальный порядок описывающих уравнений. Система ПКДУ, формируемая из КДУ, включает статически определимую подсистему, которую при формировании моделей влияния можно заменить алгебраической подсистемой, сингулярной относительно исходной системой КДУ.

Способы формирования ПКДУ. Для создания корректных моделей влияния могут быть использованы два подхода:

1). Формирование ПКДУ относительно статически определенных координат ЭЭО без введения управлений. В ряде приближенных методик формирования уравнений квазистационарных режимов ЭЭО используются сингулярные преобразования к алгебраическим уравнениям, исключающие операции интегрирования между координатами, в частности, отклонения частот и углов ЭТА и ЭГА. Уравнения установившихся режимов ЭЭО, полученные приравниванием нулю производных отклонений углов ЭТА или ЭГА, приводят к статически неопределимым уравнениям, требующим разработки корректных квазистационарных моделей. Признаком статически неопределимых систем или подсистем уравнений могут быть нулевые корни характеристических уравнений дифференциальных уравнений ЭМП.

2). Формирование ПКДУ с учетом астатического регулирования частоты. Этот способ соответствует реально существующего астатического регулирования частоты выделенными группами станций. В результате уравнения динамики ОЭС или ЕЭС с регулируемой астатически частотой преобразуются с учетом интегральных законов управления по отклонению частоты. В связи с этим необходимо исследовать статическую определенность входо-выходных моделей (ВВМ) замкнутых систем управления по отклонению частоты и перетокам.

Линейные входо-выходные модели влияния на основе преобразования уравнений ЭЭО. Предварительное преобразование линейных моделей позволяет понизить размерность вектора состояния с учетом динамических свойств эквивалентных агрегатов ЭС и параметры электрической сети ЭЭО. Эти уравнения определяют линейные входо-выходные модели в виде *матрицы коэффициентов влияния квазистационарного потокораспределения* для квазистационарных режимов. Комплекс этих моделей

используется для расчета потокораспределения, удовлетворяющего законам Кирхгофа для электрической сети при определенных ограничениях. Эти ограничения относятся к режимам и требуют постоянства напряжения в узлах сети, реактивной мощности источников, разности фаз между напряжениями узлов сети. Выходно-выходные модели формируются в следующей постановке.

Постановка задачи. Пусть заданы уравнения ЭЭО с выделенными структурными особенностями ЭЭО, учитывающими основные элементы ЭТА.

Требуется синтезировать входно-выходные модели стационарных состояний режимов ЭТА и ЭЭО в целом на основе преобразования ПКДУ при условии стационарной эквивалентности.

Модели данного класса дополняют линейные входно-выходные модели, синтезируемые на основе вычисления резольвенты (см. п. 1), и расширяют классы моделей для вычисления матриц влияния на основе исходных и асимптотических (статически эквивалентных) уравнений ЭЭО.

Решение задачи. Линейные дифференциальные уравнения ЭМП ЭЭО с матричными параметрами в базисе физических координат имеют вид

$$T_a^2 \Omega' + T_y \Omega + R_\rho \Phi = P - M, \\ T_\Pi P' + P = -K_\omega \Omega + K_\Pi \Sigma, \quad T_C \Sigma' + \Sigma = K_C U, \quad S = C\Phi. \quad (10)$$

После введения вектора координат $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ система (10) преобразуется к эквивалентной форме

$$T_a^2 \Phi'' + T_y \Phi' + R_\rho \Phi = P - M, \\ T_\Pi P' + P = K_\omega \Phi' + K_\Pi \Sigma, \quad T_C \Sigma' + \Sigma = K_C U, \quad S = C\Phi, \quad (11.a)$$

где $\Phi'(t) = \Omega(t)$, $\Phi''(t) = \Omega'(t)$, причем векторы $\Phi(t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$,

$\Omega(t) = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ – отклонения углов и отклонений частоты в узлах электрической сети (соответствующих ЭС); $P(t) = (p_1, \dots, p_n)^T$, $\Sigma(t) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^T$ $M(t) = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ – отклонения генерируемых ЭС мощностей в узлах, сигналов вторичного регулятора ЭА и внеплановых нагрузок ЭС, приведенных к валу ЭТА или ЭГА.

Матрицы размера $(n \times n)$ в уравнениях (10) и (11.а) равны:

$$T_a^2 = \text{diag}\{T_{ai}^2\}, \quad T_y = \text{diag}\{T_{yi}\}, \quad T_{\Pi} = \text{diag}\{T_{\Pi i}\}, \quad K_{\Pi} = \text{diag}\{k_{\Pi i}\},$$

$$K_{\Omega} = \text{diag}\{ \} - |k_{oi}|, \quad T_c = \text{diag}\{T_{ci}\}, \quad K_c = \text{diag}\{k_{ci}\}.$$

Форма Коши уравнений ЭМП имеет эквивалентный вид

$$\Phi' = \Omega, \quad \Omega' = \bar{T}_a \left[-T_y \Omega - R_{\rho} \Phi + P - M \right],$$

$$P' = \bar{T}_{\Pi} \left[-P + K_{\Omega} \Omega + K_{\Pi} \Sigma \right], \quad \Sigma' = \bar{T}_c \left[-\Sigma + K_c U \right],$$

где матричные параметры $|\bar{T}_a \triangleq [\bar{T}_a]^{-1}, \quad \bar{T}_{\Pi} = [T_{\Pi}]^{-1}, \quad \bar{T}_c \triangleq [T_c]^{-1}.$

Тогда матричная форма дифференциальных уравнений (11.б) с блочно-матричными параметрами представляется в виде

$$x' = Ax + B_U U + B_M M, \quad S = Cx. \quad (11.б)$$

Определение. Уравнения (11.б), описывающие ЭМП в ЭЭО с различной структурой, которые являются инвариантными относительно числа ЭА в ЭЭО, при учете схемы сети матрицей R_{ρ} , определяют **структурно-инвариантную форму**:

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ P' \\ \Sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & E_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \bar{T}_{\Pi} K_{\Omega} & -\bar{T}_{\Pi} & \bar{T}_{\Pi} K_{\Pi} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\bar{T}_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \\ \bar{T}_c K_c \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a \\ 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M,$$

$$S = C\Phi, \quad (11.в)$$

где $\bar{T}_a = \text{diag} \left\{ \left(T_{ai}^2 \right)^{-1} \right\}_{i=1}^n$ – диагональная матрица характеристик инерционностей роторов ЭТА или ЭГА.

Уравнения для выходных координат – перетоков по ЛЭП

$$s = C\Phi = (s_1, \dots, s_l, \dots, s_m)^T, \quad s_l = \rho_{ik}(\varphi_i - \varphi_k), \quad (12)$$

определяют перетоки по l -й ЛЭП как функции разности углов i -го и k -го эквивалентных агрегатов ЭС, связанных линией. Параметры $\rho_{ik}=0$, если i и k ЭС не соединены ЛЭП. Матрица синхронизирующих мощностей $R_\rho \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяет перетоки по ЛЭП, примыкающих к ЭС, причем с учетом перетоков как функций разностей углов указанная матрица имеет вид:

$$R_\rho = \begin{bmatrix} \sum_{q \in Q_1} \rho_{1q} & -\rho_{12} & \dots & -\rho_{1n} \\ -\rho_{21} & \sum_{q \in Q_2} \rho_{2q} & \dots & -\rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_{n1} & -\rho_{n2} & \dots & \sum_{q \in Q_n} \rho_{nq} \end{bmatrix} \quad (13)$$

где Q_i , $i=1, \dots, n$, – множество ЭС, соединенных линией электропередач с i -й ЭС.

Свойства матрицы синхронизирующих моментов. Это свойство исследуется в утверждении.

Утверждение (о свойстве матрицы синхронизирующих моментов). Пусть элементы матрицы R_ρ типа (13) удовлетворяют условию $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $\rho_{ij} \geq 0$. Тогда определитель $\det R_\rho = 0$.

Случаи невыполнения условий, ограничивающих отмеченные выше свойства синхронизирующих мощностей линий, отмечены в работе [13].

Доказательство проводится сложением первого столбца с другими столбцами, что приводит к матрице с нулевым первым столбцом

$$R_\rho = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_{12} & \dots & -\rho_{1n} \\ 0 & \sum_{q \in Q_2} \rho_{2q} & \dots & -\rho_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\rho_{n2} & \dots & \sum_{q \in Q_n} \rho_{nq} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

поэтому в силу теоремы Лапласа разложение определителя по элементам первого столбца доказывает утверждение.

Исследовать матрицу (11.в) можно с помощью леммы.

Лемма Шура (об определителе блочной матрицы). Если $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – такие блоки матрицы, что $\det \bar{A} \neq 0$ или $\det \bar{D} \neq 0$, то справедливо равенство

$$\det \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \det \bar{A} \cdot \det(\bar{D} - \bar{C} \bar{A}^{-1} \bar{B}) = \det \bar{D} \cdot \det(\bar{A} - \bar{B} \bar{D}^{-1} \bar{C}).$$

Следствие (из леммы). Определитель блочной матрицы

$$\det \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0_{n \times n} & \bar{D} \end{bmatrix} = \det \bar{D} \times \det \bar{A}.$$

Лемма. Обратная блочная матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

Утверждение. Определитель матрицы системы (11.в) с учетом матрицы (13) определяется равенством

$$\det A = \prod_{i=1}^n T_{ai}^{-1} T_{\Pi i}^{-1} T_{Ci}^{-1} \times \det R_\rho. \quad (15)$$

Доказательство утверждения, как следует из утверждения теоремы, основано на лемме об обращении блочных матриц. Тогда справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\det A = \det \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} &= \det \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & E & 0 & 0 \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0 \\ 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega & -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{T}_C \end{array} \right] = \\
&= \det \bar{D} \times \det (\bar{A} - \bar{B} \bar{D}^{-1} \bar{C}) = \det \begin{bmatrix} -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ 0_{n \times n} & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \times \\
&\times \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{T}_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det [-\bar{T}_\Pi] \times \det [-\bar{T}_C] \times \\
&\times \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{T}_\Pi & K_\Pi \bar{T}_C \\ 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det [-\bar{T}_\Pi] \times \det [-\bar{T}_C] \times \\
&\times \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\bar{T}_\Pi^{-1} \bar{T}_\Pi K_\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det [-\bar{T}_\Pi] \times \det [-\bar{T}_C] \times \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det [-\bar{T}_\Pi] \times \det [-\bar{T}_C] \times \det [\bar{T}_a R_\rho] = \prod_{i=1}^n T_{ai}^{-1} T_{\Pi i}^{-1} T_{Ci}^{-1} \times \det R_\rho,
\end{aligned}$$

где $0 = 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – нулевые, а $E_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – единичные матрицы.

Определители блочных матриц при доказательстве вычислены с помощью лемм и следствий.

Таким образом, поскольку в силу доказанного выше утверждения матрица R_p – особенная, то определитель матрицы $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ уравнений ЭЭО (11.в) равен нулю. Следовательно, ЭЭО при отсутствии управлений – **статически неопределимый объект**, поскольку невозможно вычислить квазистационарные характеристики влияния на основе уравнений ЭЭО при отсутствии управлений. Кроме этого, уравнения (11.в) не обладают свойством диффеоморфизмов, поскольку не могут быть взаимнооднозначно разрешены относительно координат. Поэтому корректные квазистационарные модели влияния не определяются из (11.а) и соответствующей системы (11.в).

Квазистационарные модели влияния ЭЭО для синтеза СОП и САУ ЧМ можно формировать следующими способами:

1). Формирование *моделей влияния* на основе статически определенных уравнений, при введении управлений по отклонениям *частоты* (возможно и перетоков) от заданных значений.

2). Формирование *моделей влияния* на основе максимально допустимой статически определимой системы уравнений ЭЭО заданного класса квазистационарностью, например, относительно координат P и Σ .

3). Формирование *моделей влияния* на основе аналитических решений уравнений состояния с помощью формулы Коши.

4). Формирование *моделей влияния* на основе кусочно-линейных статически определимых уравнений квазистационарных состояний.

При этом ряд моделей влияния следует из уравнений (11.в) при условии, что производные указанных выше координат равны нулю, что определяет ряд *условий квазистационарности*.

3. Корректные квазистационарные модели влияния ЭЭО

с учетом САУ частотой. Как отмечено выше, целесообразно исследовать решение уравнений стационарного режима ЭЭО (11.в) при регулировании частоты всеми или выделенными ЭС.

Утверждение. Пусть выполнены условия:

1). Пусть $U = u_1 + u$, где $u_1 = K_1\Phi + K_2\Omega$ формируется САУ частотой в ЭЭО в виде пропорционально-интегрального закона (ПИ-закона) при выполнении следующих условий: $K_1 = \text{diag}(K_{1i})_{i=1}^n$, $K_2 = \text{diag}(K_{2i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а вектор u – на уровне ЭС или ОЭС для СОП.

2). Дифференциальные уравнения замкнутой САУ частотой ЭЭО имеют вид $x' = (A + B_U K)x + B_U u + B_M M = A_1 x + B_U u + B_M M$, который представляется в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ P' \\ \Sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \bar{E}_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \bar{T} K_\Omega & -\bar{T} & \bar{T} K \\ \bar{T}_C K_1 & \bar{T}_C K_2 & 0_{n \times n} & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a \\ 0_{\times} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M, \quad (16)$$

$$s = C_1 x = C\Phi = (s_1, \dots, s_l, \dots, s_m)^T, \quad s_l = \rho_{ik}(\varphi_i - \varphi_k),$$

следуют из (11.в), (12) и являются асимптотически устойчивыми, т. е. $\text{Re } \lambda_j(A_1) < 0$, $j = 1, \dots, N$, с учетом ПИ-закона САУ частотой.

Тогда справедливы следующие результаты:

1). Система стационарных уравнений, следующая из (16) при условии: $[\Phi', \Omega', P', \Sigma'] = 0 = 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, однозначно разрешена относительно координат ЭЭО (при равенстве нулю производных в левой части этой системы).

2). Существуют такие матрицы: $K_1 = \text{diag}(K_{1i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $K_2 = \text{diag}(K_{2i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, при которых в (16) матрица A_1 – неособенная, так как ее определитель может быть не равным нулю:

$$\det A_1 = d_1 d_2 = \prod_{i=1}^n T_{ai}^{-1} [(K_{\omega i} + K_{\Pi i} T_{Ci}^{-1} \tilde{K}_{2i}) \times (K_{\omega I} + K_{\Pi i} T_{Ci}^{-1} \tilde{K}_{2i}) \times \times \det(R_{\rho} + K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_1)] \neq 0. \quad (17)$$

3). Модели влияния управлений и внеплановых нагрузок на отклонения перетоков, получаемые из уравнений замкнутой САУ частотой: $x' = A_1 x + B_U u + B_M M$ и квазистационарных уравнений для этой системы: $0 = A_1 x + B_U u + B_M M$ и уравнений для перетоков $s = C_1 x = C\Phi = (s_1, \dots, s_l, \dots, s_m)^T$, имеют вид

$$s = C_1 x = -C_1 A_1^{-1} (B_U u + B_M M). \quad (18)$$

Доказательство. Вектор управлений САУ частотой $u_1 = u$ для (11.в) определен равенством

$$U = B_U [u_1 + u] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} [Kx + u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{T}_C K_C K_1 & \bar{T}_C K_C K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + B_U u,$$

где $\bar{T}_C K_C K_i \triangleq \tilde{K}_i$, $i = 1, 2$, – обобщенные параметры обратной связи. Замкнутая система с ПИ-законом САУ частотой описывается дифференциальной системой

$$x' = (A + B_U K)x + B_U u + B_M M,$$

которая эквивалентна следующей векторно-матричной системе с блочными матрицами параметров агрегатов и линий

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ P' \\ \Sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0 \\ 0 & \bar{T}_{\Pi} K_{\Omega} & -\bar{T}_{\Pi} & \bar{T}_{\Pi} K_{\Pi} \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{T}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M = \\
& = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0 \\ 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega & -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{T}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M = \\
& = A_1 x + B_U u + B_M M, \quad A_1 \triangleq A + B_U K,
\end{aligned}$$

где $\bar{T}_C K_C K_i \triangleq \tilde{K}_i$, $i=1,2$, $\tilde{K}_1 = \text{diag}(\tilde{K}_{1i})_{i=1}^n$, $\tilde{K}_2 = \text{diag}(\tilde{K}_{2i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональные матрицы параметров обратной связи по отклонению частоты и ее интегралу; $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ - матрица обратной связи по вектору $x \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Для анализа статической определимости САУ частотой можно вычислить определитель матрицы замкнутой системы A_1 на основе леммы об обращении блочных матриц при разделении матрицы на 4 блока $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Тогда определитель матрицы:

$$\det A_1 = \det \bar{D}_1 \times \det(\bar{A}_1 - \bar{B}_1 \bar{D}_1^{-1} \bar{C}_1),$$

определяется блочными матрицами так, что

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0 \\ 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega & -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} -\bar{T}_{\Pi} & \bar{T}_{\Pi} K_{\Pi} \\ 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \times \\
&\times \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{T}_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{T}_{\Pi} & \bar{T}_{\Pi} K_{\Pi} \\ 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_{\Pi} K_{\omega} \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \right), \quad (1)
\end{aligned}$$

где определитель первой матрицы: $d_1 = \det[-\bar{T}_{\Pi}] \times \det[-\bar{T}_C]$, а второй определитель вычисляется соотношениями

$$\begin{aligned}
&\det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{T}_a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{T}_{\Pi} & -K_{\Pi} \bar{T}_C \\ 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_{\Pi} K_{\omega} \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{T}_a \bar{T}_{\Pi}^{-1} & -\bar{T}_a \bar{T}_C^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_{\Pi} K_{\omega} \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{T}_a K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_1 & -\bar{T}_a K_{\omega} - \bar{T}_a K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \det \begin{bmatrix} 0 & E \\ -\bar{T}_a (R_{\rho} + K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_1) & -\bar{T}_a (K_{\omega} + K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_2) \end{bmatrix} = \\
&= \det [-\bar{T}_a (K_{\omega} + K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_2)] \times \\
&\times \det \{ [\bar{T}_a (K_{\omega} + K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_2)]^{-1} \times [-\bar{T}_a (R_{\rho} + K_{\Pi} \bar{T}_C \tilde{K}_1)] \} \triangleq d_2.
\end{aligned}$$

Вычисление $\det A_1 = d_1 \times d_2$ можно получить результат (17), причем определитель $A_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ вычислен с учетом свойства определителя произведения числовых матриц и их диагональности.

Из (17) следует, что неособенность матрицы замкнутой САУ частотой можно обеспечить выбором матриц, определяющей воздействия по интегралам от отклонений частот во всех или

отдельных ЭС, «ведущих частоту», например, волжским каскадом ГЭС.

Таким образом, определитель матрицы замкнутой системы при соответствующем выборе матриц обратной связи может быть отличным от нуля. Из этого результата следуют выводы, имеющие практическую значимость для обеспечения корректного действия управлений различных подсистем, в частности, СОП и САУ частотой в предаварийных режимах:

1). Введение астатического регулирования частоты обеспечивает *статическую определенность* матрицы замкнутой системы. Из этого следует, что «*модели влияния*» управляющих ЭС на перетоки по ЛЭП можно *корректно определить* из уравнений замкнутой САУ частотой.

2). В предаварийных режимах для корректного действия СОП по ЛЭП должно обеспечиваться *гарантированное регулирование частоты* (например, многократным резервированием) не только для обеспечения качества частоты, а для корректного действия других подсистем АСДУ, в частности, СОП по ЛЭП, синтезированных на основе моделей влияния.

Таким образом, уравнения (18) соответствуют *статически определенной системе* уравнений стационарного режима астатической САУ частотой.

4. Линейные квазистационарные дифференциальные уравнения ЭЭО. Квазистационарные состояния системы дифференциальных уравнений ЭЭО можно задать условиями для производных уравнения: $P' = 0_n$, $\Sigma' = 0_n$. Последние условия определяют соответствующий класс квазистационарности

$$K_{КС} = \{ P' = 0_n, \Sigma' = 0_n \} \quad (19)$$

на основе условий стационарности для уравнений динамики исполнительных механизмов первичного и вторичного регуляторов агрегатов, что является корректным.

Определение. Исходные (полные) дифференциальные уравнения динамики ЭМП в ЭЭО называются *статически эквивалентными* системе дифференциально-алгебраических уравнений, если решения двух систем в стационарных состояниях единственны и совпадают относительно всех координат состояния, причем алгебраическая подсистема второй системы следует из статически определимой подсистемы исходных уравнений.

При этом разрешимостью обладают алгебраические уравнения, следующие из уравнений динамики при условии условий квазистационарности. В частности, это относится к уравнениям исполнительных механизмов, обладающих «статической разрешимостью». Перечисленные условия для квазистационарных моделей определяются параметрами ЭС, которые можно определить на основе испытаний или идентификации. Тогда квазистационарная дифференциально-алгебраическая система, следующая из (16) при условии $K_{\Pi} = K_C = E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & E_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \bar{T}_\Pi K_\Omega & -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ \bar{T}_C K_1 & \bar{T}_C K_2 & 0_{n \times n} & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a \\ 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} M,$$

$$s = C_1 x = C \Phi = (s_1, \dots, s_l, \dots, s_m)^T, \quad s_l = \rho_{ik} (\varphi_i - \varphi_k). \quad (20)$$

Для формулировки асимптотических уравнений можно использовать методику, разработанную в п. 2.1 (уравнения (16)). Тогда уравнения (20) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1U} \\ B_{2U} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_{1M} \\ B_{2M} \end{bmatrix},$$

где $z_1 = (\Phi, \Omega)^T$, $z_2 = (P, \Sigma)^T$. Элементы блочных матриц определяются однозначно структурой векторов z_1 , z_2 .

Тогда уравнения, представляющие асимптотические уравнения состояния для вектора z_1 можно представить в виде

$$z_1' = A_a z_1 + B_{au} u + B_{aM} M, \quad S = C_{a1} z_1 = C_a \Phi, \quad (21)$$

где матрицы равны: $A_a = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$, $B_{au} = B_{1U} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{2U}$, $B_{aM} = B_{1M} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{2M}$, а матрица C_{a1} – как подматрица матрицы C , соответствующая вектору асимптот. Блоки матриц равны:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & E_{n \times n} \\ -\bar{T}_a R_\rho & \bar{T}_c \tilde{K}_2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ \bar{T}_a & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad B_{1U} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad B_{1M} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \bar{T}_\Pi K_\omega \\ \bar{T}_c \tilde{K}_1 & \bar{T}_c \tilde{K}_2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ 0_{n \times n} & -\bar{T}_c \end{bmatrix}, \\ B_{2U} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_c K_c \end{bmatrix}, \quad B_{2M} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку матрица

$$A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -T_\Pi & -K_\Pi T_c \\ 0_{n \times n} & -T_c \end{bmatrix},$$

то после вычисления матриц **асимптотические уравнения динамики ЭЭО** представляются системой

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & E_{n \times n} \\ -\bar{T}_a R_\rho + \bar{T}_a K_\Pi T_c \tilde{K}_1 & -\bar{T}_a \bar{T}_y + \bar{T}_a K_\omega + \bar{T}_a K_\Pi T_c \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a K_\Pi K_c \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -\bar{T}_a \end{bmatrix} M. \end{aligned}$$

На основе уравнений (21) можно исследовать свойства матрицы квазистационарных асимптотических уравнений ЭЭО.

Таким образом, предложены корректные математические модели квазистационарных режимов ЭЭО, сформулированные на основе ЭМП, которые позволяют определить матрицы влияния управлений и возмущений на перетоки и частоту.

Решение систем уравнений ЭМП вида (11.в), (16) и (21) определяется формулой Коши

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} [B_U u(\tau) + B_M M(\tau)] d\tau, \quad S(t) = CZ(t), \quad (22)$$

где матрицы являются функциями матричных параметров ЭЭО, учитывающие инерции и успокоения роторов, коэффициенты усиления первичных регуляторов скоростей турбины ЭТА. Характерно, что система (11.в) не является асимптотически устойчивой в связи с наличием нулевых собственных чисел, что приводит к трудностям синтеза СОП по ЛЭП. Система (16) является асимптотически устойчивой, и это свойство будет использовано при формулировке достаточных условий асимптотической устойчивости замкнутых СОП по линиям. Асимптотические модели типа (20) позволяют развивать методы описания ЭЭО асимптотическими моделями, которые могут использоваться для синтеза модальных регуляторов локальных СОП.

5. Линейные уравнения и квазистационарные модели влияния по частоте и обменным мощностям. Рассматриваются регулярные уравнения ЭМП, которые описываются дифференциальными статически определенными координатами для формирования приближенных моделей квазистационарного влияния относительно ограниченной структуры координат. Регулярность моделей и допущения позволяют сформулировать приближенные квазистационарные модели при учете параметров ЭЭО.

Модели ЭЭО в базисе физических координат. Математическая модель ЭЭО как квазистационарная «моделей влияния» формулируется в базисе физических координат уравнений ЭМП:

$$\begin{aligned} T_{ai}^2 \omega_i' + T_{yi} \omega_i + s_{oi} &= P_i - M_i, & T_{\partial i} P_i' + P_i &= -k_{oi} \omega_i + \sigma_i, \\ T_{Ci} \sigma_i' + \sigma_i &= u_i, & i &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (23)$$

где ω_i, s_{oi} – отклонение частоты и обменной мощности i -го узла сети, равное алгебраической сумме перетоков активной мощности по линиям, примыкающим к данному узлу; σ_i – сигнал вторичного регулятора i -й станции (ЭТА); n – число станций ЭЭО. Параметры (23) определены в п. 2.1.

Квазистационарные модели можно формировать при условии равенства нулю производных отклонений частоты, причем данный класс условий квазистационарности сохраняет корректность модели, поскольку основан на замене дифференциального уравнения корректным алгебраическим уравнением (системой), которая является статически определимой подсистемой. Это предположение связано с тем, что в данном случае преобразования выполняются для асимптотически устойчивых дифференциальных подсистем, которые заменяются корректными алгебраическими подсистемами для формирования квазистационарных моделей (в смысле их квазистационарности). Данные модели формируются в предположении равенства стационарных отклонений частот во всех узлах сети ЭЭО. Это условие используется при анализе режимов.

Рассматриваемые модели удовлетворяют свойству статической определенности и оперируют со статически определенными координатами, состоящими из отклонений частот и перетоков как функций первичных регуляторов скоростей, успокоений ЭА и

удельных синхронизирующих мощностей ЛЭП. Относительно указанных координат уравнения квазистационарных режимов ЭЭО являются статически определимыми, что позволяет использовать преобразования уравнений для координат. Векторно-матричные преобразованные линейные уравнения (1) (23) для режимов по частоте и обменной мощности имеют вид

$$\begin{aligned}\Omega' + \bar{T}_a T_y \Omega + \bar{T}_a s_o &= \bar{T}_a (P - M), \quad \bar{T}_a = \text{diag} \left(T_{ai}^{-1} \right)_{i=1}^n, \quad T_y = \text{diag} \left(T_{yi} \right)_{i=1}^n, \\ P' + \bar{T}_\omega P &= -\bar{T}_\omega K_\omega + \bar{T}_\omega \Sigma, \quad \bar{T}_\omega = T_\omega^{-1} = \text{diag} \left(T_{\omega i}^{-1} \right), \\ \Sigma' + \bar{T}_C \Sigma &= \bar{T}_C U, \quad \bar{T}_C = T_C^{-1} = \text{diag} \left(T_{Ci}^{-1} \right)_{i=1}^n,\end{aligned}\quad (24)$$

Из уравнений (24) следуют математические модели различных классов квазистационарности. При условиях квазистационарности: $\Omega' = 0_n$, $P' = 0_n$, $\Sigma' = 0_n$, (24) преобразуются к форме

$$T_y \Omega + s_o = P - M, \quad P = -K_\omega \Omega + \Sigma, \quad \Sigma = U.$$

Преобразованная алгебраическая подсистема имеет вид

$$T_y \Omega + s_o = -K_\omega \Omega + \Sigma - M \Rightarrow \Gamma \Omega + s_o = U - M, \quad \Gamma = T_y + K_\omega, \quad (25)$$

где векторы и матрица определены равенствами: $s_o = (s_{o1}, \dots, s_{om})^T \in \mathbb{R}^m$, $U = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \text{diag} \left(T_{yi} + k_{\omega i} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, задающими векторы отклонений обменных мощностей узлов (ЭА), управлений, внеплановых нагрузок и статизмов, а m – количество обменных мощностей ЭЭО.

Таким образом, синтезированная «модель влияния» управлений и внеплановых нагрузок на частоту и обменные мощности энергетических объединений позволяет сформулировать задачи математического программирования для вычисления управлений совместных или независимых СОП и САУ частотой и обменной мощностью.

Вектор отклонений обменных мощностей s_o в (25) определяются отклонениями перетоков по ЛЭП матрицей инцидентий:

$$s_o = Is, \quad (26)$$

где $s = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_m)^T$ – вектор отклонений перетоков по ЛЭП; $I = \{I_{ij}\}$ – матрица инцидентий, элементы которой $I_{ij} = +1$, если j -я ЛЭП передает мощность в i -й узел сети в положительном направлении; $I_{ij} = 0$, если j -я ЛЭП не соединена с i -й станцией (узлом сети); $I_{ij} = -1$, если j -я линия передает мощность в i -й узел сети в отрицательном направлении; r – число ЛЭП ЭЭО.

Отклонение перетока по j -й линии в линейном приближении определяется разностью углов $\varphi_{ij} = (\varphi_i - \varphi_j)$ агрегатов

$$s_j = \rho_{ig} (\varphi_i - \varphi_g), \quad (27)$$

где $\rho_{ig} = V^2 y_{ig}$ и y_{ig} – удельный синхронизирующий момент и реактивная проводимость j -й линии между i -й и g -й узлами (ЭА) сети ЭЭО; V – эксплуатационное напряжение электрической сети. Матрично-векторная форма (27) с учетом матриц инцидентий и удельных синхронизирующих мощностей примет вид

$$s = RI^T \Phi, \quad (28)$$

где $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ – вектор отклонения углов эквивалентных агрегатов; $R = \text{diag}(\rho_j)$ – диагональная матрица удельных синхронизирующих мощностей ЛЭП, элементы которой пронумерованы в соответствии с номерами линий электрической сети ЭЭО. Тогда отклонения обменных мощностей s_o определяются отклонениями углов с учетом (26)-(28) алгебраическими уравнениями

$$s_o = IRI^T \Phi = W \Phi, \quad (29)$$

где матрица $W = IRI^T$. В результате матричная система уравнений квазистационарных режимов (25) с учетом (29) имеет вид:

$$Fz_1 = U - M, \quad (30)$$

где $z_1 = (\omega, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ – вектор квазистационарного состояния ЭЭО, а $F \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ – матрица параметров ЭЭО размера $n \times (n+1)$. Последняя матрица имеет вид

$$F = [\gamma \mid IRI^T] = [\gamma \mid R_\rho] =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \sum_{q \in Q_1} \rho_{1q} & -\rho_{12} & \dots & -\rho_{1n} \\ \gamma_2 & -\rho_{21} & \sum_{q \in Q_2} \rho_{2q} & \dots & -\rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n & -\rho_{n1} & -\rho_{n2} & \dots & \sum_{q \in Q_n} \rho_{nq} \end{bmatrix}. \quad (31.a)$$

В соотношениях (30), (31.a) можно перейти к линейно-независимым взаимным углам ЭА (станций), используя равенства

$$\varphi_{ij} = \varphi_{1j} - \varphi_{1i} = (\varphi_1 - \varphi_j) - (\varphi_1 - \varphi_i), \quad (31.б)$$

где φ_1 – базисный угол, в качестве которого используется угол первого ЭА (узла сети). Тогда (30) примет вид:

$$G_1 z = U - M, \quad (32)$$

где $z = (f, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \dots, \varphi_{1n})^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния размера $(n \times 1)$; $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица размера $(n \times n)$, полученная из матрицы соответствующими преобразованиями, следующими из (31.б). Уравнение (32) описывает установившиеся значения отклонений частоты и линейно-независимых углов ЭЭО.

Для описания установившихся отклонений частоты, обмен-
ной мощности и перетоков можно использовать уравнения (6),
где после перехода к вектору состояния z можно получить ал-
гебраическое уравнение связи между координатами в виде

$$s = RI_1^T z, \quad (33)$$

где I_1^T – формируется из матрицы инцидентий I .

Рассматривая совместно уравнения (32) и (33), можно полу-
чим уравнения стационарных состояний:

$$Gz = U - M, \quad s = RI_1^T z. \quad (34)$$

Система алгебраических уравнений (34) позволяет опреде-
лить отклонения перетоков под действием векторов управлений
на станции и возмущений нагрузки в узлах сети. Из последней
системы можно определить **характеристики влияния** измене-
ний управлений и внеплановых возмущений на отклонения час-
тоте и перетоков по линиям электропередач ЭЭО

$$\begin{bmatrix} \omega \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & | & 0_{1 \times (n-1)} \\ \hline & & RI_1^T \end{bmatrix} G^{-1} (U - M) = \beta (U - M), \quad (35)$$

где **матрица коэффициентов влияния** управлений на частоту и
перетоки по линиям имеет вид

$$\beta \triangleq \begin{bmatrix} 1 & | & 0_{1 \times (n-1)} \\ \hline & & RI_1^T \end{bmatrix} G^{-1}.$$

Таким образом, сформулированный комплекс математиче-
ских моделей соответствует требованиям к моделям ЭЭО, сфор-
мулированным в табл. 2.6.

**Применение линейных моделей установившихся режи-
мов.** Синтезированная модель ЭЭО позволяет определить задачу
вычисления оптимальных управлений с учетом требований к

регулированию частоты и ограничению перетоков. Эта задача может быть решена методами математического программирования (МП): вычислить управления, минимизирующие кусочно-линейную ($l=1$) или квадратичную ($l=2$) целевые функции

$$J = \sum_{i=1}^n |u_i|^l, \quad l=1,2, \quad (36)$$

при ограничениях

$$\omega^- \leq \beta_\omega U \leq \omega^+, \quad S^- \leq \beta_s U \leq S^+, \quad U^- \leq U \leq U^+, \quad U = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)^T.$$

Первое неравенство ограничений введено для выполнения требования к восстановлению нормального режима САУ частотой, второе неравенство – формализует условия ограничения перетоков, а третье – учитывает ограничения на ресурсы управления.

Таким образом, задача математического программирования (36) является подзадачей вычисления управлений для задачи 2.2, определенной в табл. 1.2 для совместного синтеза централизованных СОП и САУ частотой. Задача МП (36), (37) преобразуется к задаче линейного программирования **методом разности переменных** [79]: $U = U' - U''$, и решается симплекс методом.

Пример. Рассматривается задача оптимального квазистационарного управления для энергосистемы из 6 станций и 5 линий типа Единой энергосистемы России, схема которого приведена на рис. 1.1, п. 1.1, при отсутствии регулирования частоты и при перегрузке 4 линии в пределах λ : $0 \leq \lambda \leq 0,2$, где λ – коэффициент загрузки линий. Матрица коэффициентов влияния:

$$\alpha = \begin{bmatrix} -0.07 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.07 & 0.05 \\ 0.06 & -0.04 & 0.06 & 0.06 & 0.14 & 0.09 \\ 0.03 & 0.03 & -0.07 & 0.03 & 0.07 & 0.05 \\ -0.08 & -0.08 & 0.02 & -0.08 & 0.1 & 0.07 \\ 0.07 & 0.06 & -0.03 & 0.07 & 0.17 & -0.08 \end{bmatrix}.$$

Анализ результатов, приведенных на рис. 2.4, иллюстрирует, что затраты на управление (в виде суммы модулей отклонений управлений) при использовании «моделей влияния» уменьшаются (зависимость – «2») по сравнению с использованием коэффициентов распределения (зависимость – «1») при различных нагрузках ЛЭП.

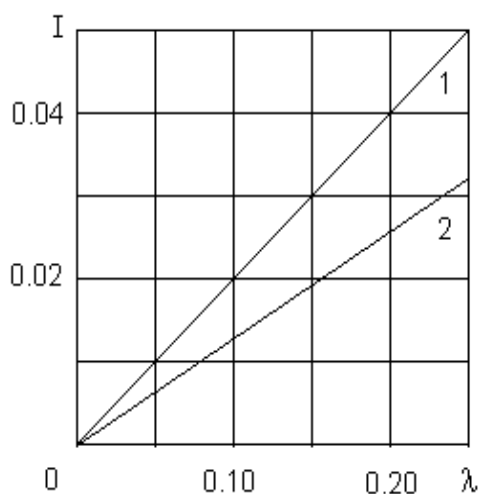


Рис. 2.4. Сравнение затрат на управление при использовании «коэффициентов влияния» (2) и коэффициентов распределения (1) при различной нагрузке линии (λ)

В постановке задачи (36) проводились анализ и решение вычисления оптимальных управлений для ЭС, состоящей из 19 станций и 30 линий. Полученные оптимальные уравнения позволяли восстанавливать требуемое значение частоты и ограничивать перетоки по ЛЭП в условиях ограничения на регулировочные диапазоны станций.

Таким образом, математические модели квазистационарных режимов для СОП и САУ частотой энергообъединений позволяют выполнить квазистационарную оптимизацию при ограничении перетоков средствами перераспределения активных мощностей и потокораспределения по линиям в условиях небаланса активных мощностей электроэнергетического объединения.

2.4. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ И РАЗРЫВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

При разработке и исследовании систем управления ЭЭО возникает проблема формирования моделей, учитывающих существенные нелинейности объекта, определяющие динамику предаварийных режимов. Конструктивное решение проблемы определяет достоверность исследования на основе многомерных нелинейных САУ ЭЭО с аналитическим описанием типовых нелинейных элементов (НЭ) на основе *метода нелинейных операторов*, наиболее полно изложенного в [87,103,82,106-112].

Метод позволяет формировать нелинейные дифференциальные уравнения, адекватные моделям крупных ЭЭО и отдельных ЭС с учетом существенных нелинейностей. При этом можно выделить аналитически интегрируемые нелинейные уравнения (имеющие обратные операторы) и сформулировать *разностные схемы* для численного анализа процессов в системах управления предаварийными режимами. Полученные результаты могут быть использованы для анализа, синтеза и оценки качества СОП по линиям электропередач и САУ частотой и обменной мощностью энергетических объединений.

1. Кусочно-линейные функции и операторы ЭЭО. При моделировании нелинейных систем в настоящее время типовые кусочно-линейные НЭ (звенья) описываются предикатными условиями или алгебраическими полиномами. Ниже рассматривается описание НЭ алгебраическими, дифференциальными и интегральными операторами, расширяющими *конструктивное* описание кусочно-линейными операторами. Операторы типовых кусочно-линейных звеньев описывают типовые нелинейности (табл. 2.4) на основе функций непрерывного и дискретного времени.

Кусочно-линейные функции и операторы можно рассматривать как обобщения линейных функций и операторов [82].

Определение 1. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^m$, $Z \subset \mathbb{R}^n$ – множества в конечномерных пространствах. Оператор $y = A(z)$ называется **кусочно-линейным оператором** (КЛО), если множество прообразов Z можно представить объединением конечного семейства таких непересекающихся подмножеств $Z_i \in \mathbb{R}^n$, что

$$Z = \bigcup_{i=1}^p Z_i, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p < +\infty, \quad (Z_k \cap Z_j = \emptyset \quad k \neq j)$$

и на каждом из подмножеств Z_i оператор $y = A(z)$, $z \in Z_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, является кусочно-аффинным оператором (КАО), т. е. представляется семейством операторов: $y = A_i(z)$, $z \in Z_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, где КЛО – суперпозиция линейных операторов и операторов сдвига.

Из определения следует, что КЛО должны называться «кусочно-аффинными», однако термин «кусочно-линейные» используется по традиции, связанной с графиком кусочно-линейной функции.

Канонические формы КЛО вводятся с помощью линейных и модульных вещественных числовых функций. Эти формы позволяют получить конструктивное описание положительных и отрицательных частей вещественных функций, использованное А. Лебегом в теории интеграла.

Исследование, проведенное З. Семадени [220], позволило получить важные для проведения всестороннего анализа кусочно-линейных функций и операторов следующие основные свойства:

1. $|z| = z^+ \vee (-z)$.
2. $z^+ = (z \vee 0)$, $z^- = (z \wedge 0)$.
3. $|z| = z^+ - z^-$.
4. $-|z| \leq z \leq |z| = |-z|$.
5. $|z + x| \leq |z| + |x|$.
6. $||z| - |x|| \leq |z \pm x| \leq |z| + |x|$.
7. $|z + x|^2 - |z - x|^2 = 2|z|^2 + |x|^2$.
8. $z \vee x = (z + x + |z - x|) / 2$.
9. $z \wedge x = (z + x - |z - x|) / 2$.
10. $(z \vee x) \wedge y = (z \wedge y) \vee (x \wedge y)$.

Определение 1 включает частные случаи КЛО, которые в случае $n = m = 1$ являются кусочно-линейными функциями (КЛФ). Эти функции связывают аналитические, графические и табличные задания функций на основе линейного интерполирования [82].

Утверждение о канонической форме **КЛФ**. *Кусочно-линейные* (кусочно-аффинные) *функции* (КЛФ) $y = a(z)$, отображающие $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, определяются равенством

$$y = a(z) = b_0 + \alpha_0 z + \sum_{i=1}^p \alpha_i |z - z_i|, \quad z_i > z_j, \quad i > j, \quad y, z \in \mathbb{R}^1. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть различные узлы КЛФ $z_i \in \mathbb{R}^1$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, такие, что определяют совокупность подмножеств $Z_i = [z_i, z_{i+1})$. Объединение этих подмножеств и множеств $[-\infty, z_1)$ и $[z_p, +\infty)$ образует множество

$$Z = \bigcup_{i=1}^p [z_i, z_{i+1}) \cup [-\infty, z_1) \cup [z_p, +\infty) \in \mathbb{R}^1,$$

введенное в определении 1. Последовательность узлов $\{z_i\}$ – монотонно возрастающая, поэтому на подинтервалах $[-\infty, z_s)$, $s = 1, \dots, p$, кусочно-аффинная функция можно определить в виде суммы кусочно-аффинных функций

$$y = a_s(z) = b_0 + \alpha_0 z + \sum_{i=1}^s \gamma_i (z - z_i + |z - z_i|) / 2, \quad s = 1, \dots, p.$$

Эта сумма представлена линейной комбинацией постоянной b_0 , линейной функции $\alpha_0 z$ и положительных частей функций: $(z - z_i)_+ = (z - z_i + |z - z_i|) / 2$. Таким образом, эта функция является кусочно-аффинной. Тогда из последнего представления в случае $s = p$ после выполнения элементарных преобразований следует форма КЛФ типа (1).

Утверждение. *Кусочно-непрерывные функции (КНФ) с конечным числом разрывов на числовой оси представляются в следующем виде:*

$$y = a(z) = \gamma_0 + \beta_0 z + \sum_{i=1}^p \beta_i |z - z_i| / (z - z_i), \quad y, z \in \mathbb{R}^1, \quad z_i \neq z_j, \quad i \neq j, \quad (2)$$

или:

$$q = a(z) + b(z), \quad (3)$$

как сумму разрывных $a(x)$ типа (2) и гладких функций $b(x)$.

Доказательство утверждения следует из свойств разрывных функций вида: $|z - z_j| / (z - z_j)$, для которых в точках z_j , $j = 1, 2, \dots, p$, производная имеет разрыв первого рода. Связи между КЛФ и их производными и интегралами дано в [85]. В узлах КЛФ (1) не выполнено условие дифференцируемости, а для КНФ типа (2), (3) – условие непрерывности.

Утверждение о вычислении параметров КЛФ. Пусть КЛФ соответствуют канонической форме (1). Тогда для вычисления параметров (1) по таблице значений узлов интерполирования

$\{\alpha_p\}$ и значений КЛФ $\{a(\alpha_q)\}_{q=1}^p$ можно составить систему $(p+2)$ линейных алгебраических уравнений, соответствующих задаче кусочно-линейного интерполирования [82]:

$$\begin{aligned} a(z_q) &= b + \alpha_0 z_q + \sum_{i=1}^p \alpha_i |z_q - z_i|, \quad q = 1, 2, \dots, p, \\ a(\underline{c}) &= b + \alpha_0 \underline{c} + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\underline{c} - z_i|, \\ a(\bar{c}) &= b + \alpha_0 \bar{c} + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\bar{c} - z_i|, \end{aligned} \tag{4}$$

где $a(\alpha_q)$, $a(\underline{c})$, $a(\bar{c})$ – известные из таблиц и дополнительные значения: $\underline{c} = \left(\min_i z_i\right) - \varepsilon$; $\bar{c} = \left(\max_i z_i\right) + \varepsilon$; $i = 1, 2, \dots, p$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство основано на решении системы (4) относительно параметров КЛФ типа (1) для задачи кусочно-линейного алгебраического интерполирования. В ряде случаев для определения параметров кусочно-линейных функций целесообразно использовать конечные или разделенные разности.

Таким образом, обобщения КЛФ типа (1), (2) и (3) определяют *первый тип* моделей статических нелинейных элементов с кусочно-линейными «входо-выходными» характеристиками, традиционно задаваемые предикатными условиями или алгебраическими полиномами. *Второй тип* моделей нелинейных элементов представляется алгебраическими, дифференциальными и интегральными операторами КЛЮ, расширяющими *конструктивное описание* [82].

В конечномерных пространствах КЛЮ можно определить различными способами. Далее эти операторы будут определены в двух канонических формах. *Первая каноническая форма КЛЮ* определена с использованием КЛФ координатных функций типа (1), а *вторая координатная форма* дана в векторно-матричной форме КЛЮ.

Определение. Пусть $Z \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$ – множества конечно-мерных пространств над вещественным полем. Тогда *первая каноническая форма КЛО* $y = A(z)$, действующего из пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, определяется соотношениями

$$y = A(z) = \left(a_1(z_1), \dots, a_j(z_j), \dots, a_m(z_n) \right)^T, \quad (5)$$

где *координатные функции* $a_j(z_j): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, n$, заданы КЛФ типа (1).

Множество КЛО (5) образует *линейное пространство кусочно-линейных операторов*

$$K(Z, Y) = \{ A(z) \mid z \in Z \in \mathbb{R}^n, A(z) = y \in Y \in \mathbb{R}^n \}, \quad (6)$$

над полем $\mathbb{R}^1$ с вещественными координатными КЛФ. Выполнение аксиом линейных пространств операторов можно установить с учетом результатов [209].

При изменении базиса пространства $\mathbb{R}^n$ с помощью неособенного линейного преобразования

$$y = S\hat{y}, \quad \hat{y} = S^{-1}y, \quad z = S\hat{z}, \quad \hat{z} = S^{-1}z, \quad S \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det S \neq 0, \quad (7)$$

оператор (5) принимает форму

$$y = S\hat{y} = A(z) = A(S\hat{z}) = \left(a_1(\hat{z}_1), \dots, a_j(\hat{z}_j), \dots, a_n(\hat{z}_n) \right)^T, \quad (8)$$

Тогда преобразованная форма этого оператора имеет вид

$$\hat{y} = S^{-1}A(S\hat{z}) = \left(a_1(\hat{z}_1), \dots, a_j(\hat{z}_j), \dots, a_n(\hat{z}_n) \right)^T, \quad (9)$$

где переменные $\hat{z}_j = (s_j, z) = \sum_{k=1}^n s_{jk} z_k$ – определяются скалярными произведениями s_j – j -й строки матрицы S и вектора $z \in \mathbb{R}^n$. Оператор типа (9) обобщает форму КЛО (5), и является суперпозицией трех операторов – линейного оператора S , КЛО $A(z)$ и

линейного оператора S^{-1} . Другими словами, оператор (9) иллюстрирует возможность введения более общих форм КЛО обобщением КЛФ типа (1), приведенных далее [82].

Утверждение. Пусть заданы $Z \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ – множества конечномерных пространств над вещественным полем.

Вторая каноническая форма КЛО с векторными узлами $z_i \in Z$, $i = 1, 2, \dots, s$, действующий из множества Z на множество Y , определяется равенством [14,15]

$$y = A(z) = B + A_0 z + \sum_{i=1}^s A_i |z - z_i| \in K(Z, Y), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Векторы $|z - z_i| \triangleq (|z_1 - z_{i1}|, \dots, |z_j - z_{ij}|, \dots, |z_n - z_{in}|) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, s$, определяются как векторы с компонентами, равными модулям скалярных функций $|z_j - z_{ij}|$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Параметры оператора (10) имеют вид: $A_0, A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – вещественные числовые матрицы размера $(m \times n)$; вектор $B \in \mathbb{R}^m$; различные векторные узлы $z_i \in \mathbb{R}^n$ КЛО: $z_i \neq z_j$, $i \neq j$.

Доказательство. Представление КЛО (10) является векторно-матричным аналогом задания КЛФ (1), которые являются координатными функциями для (10). Тогда доказательство можно выполнить по аналогии с доказательством представления КЛФ в виде (1), основанным на использовании положительных частей координатных функций, заданных на монотонно возрастающей последовательности узлов координатных функций.

Параметры координатного (5) и матрично-векторного (10) представлений КЛО связаны равенствами (8) или (9) так, что для КЛО типа (10) координатные функции оператора (5) имеют вид

$$a_j(z) = B_j + (A_{0j}, z) + \sum_{i=1}^s (A_{ji}, |z - z_i|), \quad (11)$$

где $(A_j, |z - z_i|) = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} |z_k - z_{ik}|$ — скалярное произведение j -й

строки $A_j = (a_{j1}, \dots, a_{ji}, \dots, a_{jn})^T \in \mathbb{R}^n$ матрицы A и модуль-вектора

$$|z - z_i| \triangleq (|z_1 - z_{i1}|, \dots, |z_j - z_{ij}|, \dots, |z_n - z_{in}|)^T \in \mathbb{R}^n,$$

который состоит из модулей компонент.

Таким образом, канонические формы КЛО определяются координатными формами (5), (9) и матрично-векторными формами (10), (11). Это позволяет выполнить обращение КЛО на основе обращения координатных КЛФ этих операторов при условии их монотонности в области задания.

2. Обращение и суперпозиция кусочно-линейных функций и операторов [82,85]. Можно доказать, что для определенных классов КЛО существуют обратные операторы, которые являются также кусочно-линейными. Это наиболее просто доказывается для КЛФ, отображающих пространство $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$. Монотонные в заданной области координатные КЛФ типа (1) имеют обратные КЛФ, что позволяет выполнить обращение КЛО в первой канонической форме. Для этой формы **обратные операторы** действуют из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и образованы обращением соответствующих координатных функций.

Обратные КЛФ можно ввести на основе следующего определения.

Определение. Пусть множество $Z \in \mathbb{R}^1$ взаимно-однозначно отображается на множество Y и КЛФ $a(z): Z \xrightarrow{a} Y \in \mathbb{R}^1$.

Тогда **обратной КЛФ для функции a** называется функция $z = a^{-1}(y)$, $z \in Z$, $y \in Y \in \mathbb{R}^1$, определяющая элемент $z \in Z$ как функцию a^{-1} на элементе $y \in Y$, если выполнено условие, соответствующее суперпозиции: $a^{-1}(y) = a^{-1} \circ a(z) = z$.

Необходимым условием существования обратной КЛФ является монотонность исходной КЛФ.

Критерий монотонности Л. Чуа [85]. КЛФ типа (1) является монотонно возрастающей (строго монотонно возрастающей) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j - \sum_{j=k+1}^p \alpha_j \geq 0, \quad \alpha_j > \alpha_k, \quad j > k,$$

(строго больше нуля) при всех значениях: $k = 0, 1, 2, \dots, p$. При выполнении условий монотонности можно воспользоваться леммой, которая позволяет свести задачу определения параметров КЛФ к задаче кусочно-линейного интерполирования.

Лемма об обращении КЛФ [82,85]. Пусть монотонная КЛФ $y = a(z)$ вида (1) задана по системе узлов $\{a_j\}$, $j \in J$, $J = \{1, \dots, s\}$.

Тогда **обратная КЛФ** $z = a^{-1}(y)$, определяющая элемент z по известному элементу y , может быть определена в канонической форме (1), причем система узлов будет иметь вид: $\{a(z_j)\}$, $j \in J = \{1, 2, \dots, s\}$. Уравнения для определения параметров b', α'_0 и α'_j для обратной КЛФ (1) при $\delta > 0$ имеют вид [85,101]:

$$a^{-1}(a(z_j)) = z_j, \quad j \in J,$$

$$a^{-1}(\bar{c}) = \max_{j \in J} (z_j) + \delta, \quad a^{-1}(\underline{c}) = \min_{j \in J} (z_j) - \delta,$$

где для монотонно возрастающей функции $y = a(z)$ узлы равны

$$\bar{c} = a\left(\max_{j \in J} (z_j)\right), \quad \underline{c} = a\left(\min_{j \in J} (z_j) - \delta\right),$$

а для монотонно убывающей функции $y = a(z)$ узлы имеют вид

$$\bar{c} = \min_{j \in J} (z_j) + \delta, \quad \underline{c} = \max_{j \in J} (z_j) - \delta.$$

Как следует из леммы, обращение сводится к решению линейной алгебраической системы (5) относительно параметров КЛФ. Примеры обращения монотонных КЛФ приведены в [104].

Доказательство основано на использовании решения задачи кусочно-линейного интерполирования для функции (1) с узлами $\varphi(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, сводящего вычисление параметров КЛФ к решению линейной алгебраической системы типа (4).

Применение КЛФ требует определения их суперпозиции.

Определение. Пусть $y = \varphi_1(x)$ и $x = \varphi_2(z)$ – КЛФ.

Тогда суперпозицией (композицией) φ_1 и φ_2 называется КЛФ, имеющая следующее представление $y = \varphi(z) = \varphi_1[\varphi_2(z)] = \varphi_1 \circ [\varphi_2(z)]$. Для вычисления суперпозиции КЛФ используется следующая лемма.

Лемма о суперпозиции. Пусть имеются КЛФ $y = \varphi_1(x)$ и $x = \varphi_2(z)$, заданные в канонической форме (1) по системам узлов $\{a_{j_1}\}$ и $\{a_{j_2}\}$ соответственно, причем $j_1 \in J_1$, $j_2 \in J_2$, $J_1 = \{1, 2, \dots, s_1\}$, $J_2 = \{1, 2, \dots, s_2\}$, где $x = \varphi_2(z)$ – строго монотонная.

Тогда **суперпозиция КЛФ** $y = \varphi(z) = \varphi_1 \circ \varphi_2(z)$ представляет собой КЛФ, определенную на *расширенной системе узлов*

$$\{a_j\} = \{a_{j_2}\} \cup \{\tilde{a}_{j_1}\}, j \in J = J_1 \cup J_2,$$

причем $\{\tilde{a}_{j_1}\} = \{\varphi_2^{-1}(a_{j_1})\}$, где φ_2^{-1} – обратная функция для функции φ_2 . Параметры b, α_0, α_j оператора $y = \varphi(z)$ определяются как решения системы $(s_1 + s_2 + 2)$ линейных алгебраических уравнений следующего вида [82,85]:

$$\varphi(a_j) = (\varphi_1 \varphi_2)(a_j), \quad j \in J, \quad \varphi(\bar{a}) = (\varphi_1 \varphi_2)(\bar{a}), \quad \varphi(\underline{a}) = (\varphi_1 \varphi_2)(\underline{a}),$$

где $\bar{a} = \max_{j \in J} (a_j) + \varepsilon$, $\underline{a} = \min_{j \in J} (a_j) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство леммы использует:

1). Предварительное «отображении» узлов строго монотонной функции φ_2 в пространство $z \in Z \subset \mathbb{R}^1$ и определение расширенной системы узлов.

2). Формирование суперпозиции двух КЛФ по расширенной системе узлов, определенной в утверждении леммы.

3). Вычисление параметров (1) в результате решения задачи кусочно-линейного интерполирования.

3. Обращение и суперпозиция кусочно-линейных операторов в конечномерных пространствах [82]. Пусть КЛО $y = A(z)$ типа (5) отображает нормированное пространство X в нормированное пространство Y .

Определение. Пусть КЛО типа (5) определен равенством:

$$y = A(z): Z \rightarrow Y, \quad z \in Z \subset \mathbb{R}^n,$$

и отображает множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ во множество $Y \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $z = A^{-1}(y): Y \rightarrow Z$, **обратный КЛО** отображает Y в Z такой, что суперпозиция операторов равна

$$A^{-1} \circ A = I_X,$$

где тождественный оператор I_X преобразует пространство X в себя.

Таким образом, оператор $z = A^{-1}(y)$ определяется координатными КЛФ, обратными координатным функциям оператора $y = A(z)$.

Введенные в п. 1 операторы определяют кусочно-линейные алгебраические уравнения, обобщающие линейные уравнения алгебры. Можно полагать, что КЛФ и КЛО определяют элементы **кусочно-линейной алгебры**, в рамках которой для решения кусочно-линейных алгебраических уравнений

используется обращение рассматриваемого класса функций и операторов.

Утверждение. Пусть в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ определен кусочно-линейный оператор типа (5) $A(x) \in K(Z, Z)$, отображающий $\mathbb{R}^n$ на себя:

$$y = A(z), \quad A(z) = (a_1(z_1), \dots, a_j(z_j), \dots, a_n(z_n))^T \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

задается монотонными координатными функциями, удовлетворяющими критерию монотонности Л. Чуа.

Тогда *левый обратный КЛО* будет иметь вид

$$z = A^{-1}(y) \triangleq (a_1^{-1}(y_1), \dots, a_j^{-1}(y_j), \dots, a_n^{-1}(y_n))^T, \quad (13)$$

где координатные функции $a_j^{-1}(y_j)$ обратные КЛФ для функции $a_j(x)$ такие, что справедлива суперпозиция: $a_j^{-1} \circ a_j(z_j) = z_j$. При этом $a_j^{-1}(y_j)$ вычисляются с помощью леммы об обращении КЛФ.

Определение обратных операторов позволяет вычислить обратные КЛО сложной структуры, заданные суперпозициями.

Утверждение. Пусть КЛО $y = A_c(z)$ действует из множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ на себя, имеет координатные функции, заданные суперпозициями g строго монотонных КЛО, и образует подпространство $K_M(Z, Z)$ операторов в пространстве КЛО $K(Z, Z)$ такой, что

$$K_M(Z, Z) = \left\{ A_c(z) = [a_{cl}(z_l)]_{l=1}^n, \mid \exists a_{cl}^{-1}(y_l), \quad l = 1, \dots, n \right\} \subset K(Z, Z),$$

где координатные КЛФ суперпозиции $a_{cl}(z_l) \in K(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $l = 1, \dots, n$, в силу требований леммы о суперпозиции КЛФ являются строго монотонными и имеют монотонные обратные функции $a_{cl}^{-1}(y) \in K_M(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$:

$$A_c = A_1 \circ \dots \circ A_j \circ \dots \circ A_g (z) \triangleq [a_{cl}]_{l=1}^n = \left[(a_{1l} \circ \dots \circ a_{jl} \circ \dots \circ a_{gl})(z_l) \right]_{l=1}^n, \quad (14)$$

Тогда существует **оператор с координатными функциями** как суперпозициями координатных функций, имеющий вид

$$A_c^{-1}(q) \triangleq [\varphi_{cl}^{-1}(q)]_{l=1}^n = [a_{1l}^{-1} \circ \dots \circ a_{jl}^{-1} \circ \dots \circ a_{gl}^{-1}(y_l)]_{l=1}^n \cdot [a_{1l}^{-1} \circ \dots \circ a_{jl}^{-1} \circ \dots \circ a_{gl}^{-1}(y_l)]_{l=1}^n. \quad (15)$$

Доказательство существования обратного оператора можно доказать по индукции для координатных КЛФ, а структура обратного оператора также определяется по индукции для координатных функций оператора суперпозиции.

Можно определить обратимые операторы, представленные суперпозицией линейных и кусочно-линейных операторов.

Утверждение. Пусть КЛЮ определяется равенством

$$q = \Phi(z) \triangleq \left[\prod_{s=1}^{p_1} B_s \right] A \left(\prod_{s=1}^{p_2} C_s z \right), \quad (16)$$

$$\{B\} = \{C_s, D_s, \dots, s = 1, 2, \dots, p \mid \det A_s \neq 0, \det B_s\} \in L(Z, Z),$$

где КЛЮ $v = A(w) = [a_k(w)]_{k=1}^n$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеет строго монотонные координатные функции: $w_k = [a_k]^{-1}(v_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, а $\prod_{s=1}^{p_1} B_s$ и $\prod_{s=1}^{p_2} C_s$ – произведения квадратных неособенных матриц B_s и C_s .

Тогда существует обратный КЛЮ для (16), имеющий вид

$$q = \Phi(z) \triangleq \left[\prod_{s=1}^{p_1} B_{p_1-s+1}^{-1} \right] A^{-1} \left(\prod_{s=1}^{p_2} C_{p_2-s+1}^{-1} z \right), \quad (17)$$

где координатные функции оператора A^{-1} определены на соответствующих элементах вектора $\prod_{s=1}^{p_2} C_{p_2-s+1}^{-1} z$.

Доказательство. При условии $s = 1$ для оператора

$$q = \Phi(z) \triangleq B_1 A_1 (C_1 z) \triangleq \{\varphi_k(y)\}_{k=1}^n$$

существует обратный оператор: $q \triangleq B_1^{-1} A_1 (C_1^{-1} z)$, определенный на основе очевидных операций. В общем случае доказательство формируется на основе обращения произведения матриц B_s и D_s .

Оценка постоянной Липшица для КЛФ. В прикладных задачах, связанных с анализом устойчивости разностных схем и систем управления, используется постоянная Липшица, оценку которой для КЛО можно получить на основе ее оценки для КЛФ.

Лемма (об оценке константы Липшица КЛФ). Пусть непрерывные кусочно-линейные операторы заданы в форме (1).

Тогда для КЛФ $y = \varphi_1(z) = b + \alpha_0 z + \sum_{p=1}^s \alpha_p |z - z_p|$, заданных на числовой оси, неравенство и оценка постоянной Липшица имеют вид [112]:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L \cdot |x - y|, \quad L = \left[|\alpha_0| + \sum_{i=1}^p |\alpha_i| \right].$$

Полученная оценка является достаточно грубой.

Доказательство основано на определении постоянной Липшица и свойств КЛФ.

4. Применение операторов для решения кусочно-линейных уравнений [85]. Обращение КЛО позволяет вычислять решения систем алгебраических кусочно-линейных уравнений (КЛУ).

Пример. Пусть система алгебраических кусочно-линейных уравнений имеет вид:

$$A\Phi(X) = b, \quad A(z) \in K(Z, Y), \quad (18)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных; A – квадратная матрица, такая, что $\det A \neq 0$; $b \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор; $\Phi(X) \in \mathbb{R}^n$ – векторный оператор с монотонными координатными КЛФ $\varphi_i(X_i)$, представленными в канонической форме. Поскольку матрица

A – неособенная, то существует обратная матрица A^{-1} , что позволяет переписать (18) в виде:

$$\Phi(X) = A^{-1}b. \quad (19)$$

Системе (19) соответствует семейство скалярных кусочно-линейных уравнений:

$$\varphi_i(X_i) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}b_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

где $\bar{a}_{ij}$ – элементы матрицы A^{-1} . Поскольку $\varphi_i(X_i)$ – монотонные операторы, то существуют операторы φ_i^{-1} . Применив операторы φ_i^{-1} к обеим частям полученной системы КЛУ, можно получить равенства:

$$(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i)(X_i) = X_i = \varphi_i^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}b_j \right). \quad (21)$$

Решение (18) можно записать в векторной форме

$$X = \Phi^{-1}(A^{-1}b), \quad (22)$$

где $\Phi^{-1} = (\varphi_1^{-1}, \dots, \varphi_i^{-1}, \dots, \varphi_n^{-1})^T$ – КЛО имеет координатные КЛФ φ_i^{-1} , обратные φ_i . Очевидно, что решение (22) следует понимать в том смысле, что координатные функции КЛО Φ^{-1} действуют на соответствующие компоненты вектора $A^{-1}b$. Если φ_i – монотонные КЛФ, то обратные функции можно определить с помощью леммы об обращении.

Пример. Аналогично можно найти решение системы КЛУ

$$\Phi(AX) = b,$$

где переменные, матрицы и КЛО Φ обладают свойствами (18).

Этой системе соответствует система кусочно-линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \right) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где a_{ij} – элементы матрицы A .

Применив КЛФ φ_i^{-1} к обеим частям последней системы КЛУ, можно получить систему:

$$\varphi_i^{-1} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \right) = \varphi_i^{-1} (b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Векторная форма последней системы имеет вид: $AX = \Phi^{-1}(b)$. Умножив обе части последнего уравнения на матрицу A^{-1} , можно получить решение в виде

$$X = A^{-1} \Phi^{-1}(b).$$

Пример. Полученные результаты позволяют решить более сложные системы кусочно-линейных уравнений:

$$A_1 \Phi_1 \left(A_2 \Phi_2 \left(A_3 \Phi_3 \left(\dots \left(A_n \Phi_n (X) \right) \dots \right) \right) \right) = b. \quad (23)$$

Применяя методику решения специальных систем КЛУ можно вычислить вектор X с помощью последовательности линейных и кусочно-линейных преобразований, иллюстрируемых приведенными соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_1(\bullet) &= A_1^{-1} b, \\ A_2 \Phi_2(\bullet) &= \Phi_1^{-1} (A_1^{-1} b), \\ \Phi_2(\bullet) &= A_2^{-1} \Phi_1^{-1} (A_1^{-1} b), \\ A_3 \Phi_3(\bullet) &= \Phi_2^{-1} (A_2^{-1} \Phi_1^{-1} (A_1^{-1} b)), \\ &\dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
A_n \Phi_n(X) &= \Phi_{n-1}^{-1} \left(A_{n-1}^{-1} \Phi_{n-2}^{-1}(\cdot) \right), \\
\Phi_n(X) &= A_n^{-1} \Phi_{n-1}^{-1} \left(A_{n-1}^{-1} \Phi_{n-2}^{-1}(\cdot) \right), \\
X &= \Phi_n^{-1} \left(A_n^{-1} \Phi_{n-1}^{-1} \left(A_{n-1}^{-1} \Phi_{n-2}^{-1} \left(\cdots A_3^{-1} \Phi_2^{-1} \left(A_2^{-1} \Phi_1^{-1} (A_1^{-1} b) \right) \cdots \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Матрицы A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в (23) – неособенные.

Пример. Рассмотрим решение кусочно-линейных алгебраических систем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{ij}(X_j) = b_i, \quad (25)$$

где $\varphi_{ij}(X_j)$ – такие монотонные кусочно-линейные функции, что $\varphi_{ij}(0) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$. Особенность системы состоит в том, что операторы φ_{ij} для различных уравнений не совпадают. Это обстоятельство не позволяет пользоваться векторно-матричной записью кусочно-линейных алгебраических систем. Процедура решения уравнений усложняется, поскольку применение «аналога» процедуры исключения Гаусса в общем случае ограничено.

Пример. В ряде случаев решение систем кусочно-линейных алгебраических систем представляется конечными формулами, иллюстрируемыми на примере системы КЛУ третьего порядка.

Пусть система данного типа имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
a_{11} \varphi_{11}(X_1) + a_{12} \varphi_{12}(X_2) + a_{13} \varphi_{13}(X_3) &= b_1, \\
a_{22} \varphi_{22}(X_2) + a_{23} \varphi_{23}(X_3) &= b_2, \\
a_{33} \varphi_{33}(X_3) &= b_3,
\end{aligned} \quad (26)$$

где коэффициенты $a_{ij} > 0$, а величины b_i – известны.

Для решения можно применить «аналог обратного хода» метода исключения Гаусса. Это возможно, поскольку для монотонных КЛФ φ_{ij} существуют обратные функции. Пусть для

определенности КЛФ φ_{ij} системы (26) являются строго возрастающими.

Тогда в соответствии со свойствами КЛФ существуют обратные функции, которые также являются строго возрастающими функциями. Применяв «аналог обратного хода» метода Гаусса, можно получить решения в виде следующей совокупности кусочно-линейных функций

$$\begin{aligned} X_3 &= \varphi_{33}^{-1}(b_3/a_{33}), \\ X_2 &= \varphi_{22}^{-1}\left((b_2 - a_{23}\varphi_{23}(X_3))/a_{22}\right), \\ X_1 &= \varphi_{11}^{-1}\left((b_1 - a_{12}\varphi_{12}(X_2) - a_{13}\varphi_{13}(X_3))/a_{11}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Обратные КЛФ вычисляются на основе леммы об обращении.

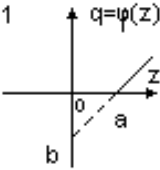
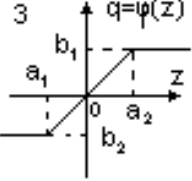
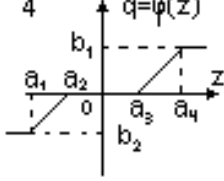
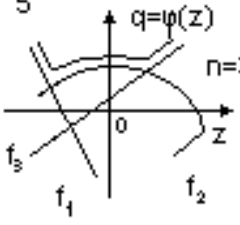
Таким образом, сформулированы определения и свойства кусочно-линейных операторов и элементы кусочно-линейной алгебры, которые используются для анализа режимов ЭЭО на основе кусочно-линейных моделей, а также при формировании различных схем для кусочно-линейных дифференциальных уравнений ЭЭО.

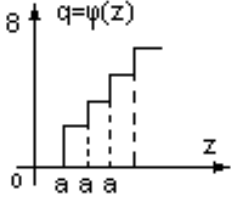
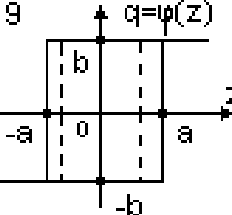
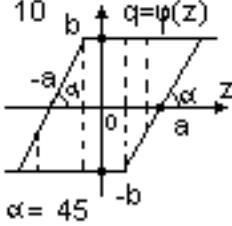
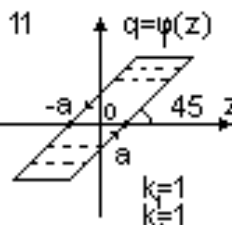
5. Кусочно-линейные дифференциальные и разностные уравнения и операторы ЭЭО с непрерывной правой частью. Важные следствия и обобщения (1), (2.а) и (2.б), данные в табл. 2.4, определяют статические и динамические нелинейные элементы, включающие «элементы с памятью», к которым относятся элементы типа «гистерезис», «люфт», описываемые кусочно-линейными интегро-алгебраическими или эквивалентными дифференциально-алгебраическими операторами (операторы 11, 12, табл. 2.4) [85].

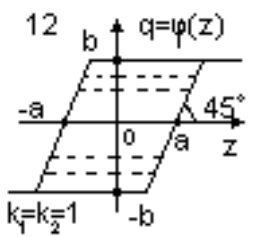
Первая каноническая форма кусочно-линейных дифференциальных уравнений, учитывающая типовые нелинейные

Таблица 2.4

Операторы типовых нелинейностей

Характеристики нелинейных элементов	Предикатные описания нелинейных элементов	Описания элементов нелинейными операторами
1 	$\varphi = \begin{cases} 0, z < a \\ k(z - a), z > a \end{cases}$ $k = -b/a, a > 0, b < 0$	$q = \varphi(z) = k(z - a + z - a)/2$
3 	$\varphi = \begin{cases} b_2, z < a_1 \\ kz, a_1 \leq z \leq a_2 \\ b_1, z > a_2 \end{cases}$ $k = (b_1 - b_2)/(a_2 - a_1)$	$q = \varphi(z) = b_2 + k(z - a_1 - z - a_2 - a_1 + a_2)/2$
4 	$\varphi = \begin{cases} b_2, z < a_1 \\ k(z - a_2), a_1 \leq z \leq a_2 \\ 0, a_2 < z < a_3 \\ k(z - a_3), a_3 \leq z \leq a_4 \\ b_1, z > a_4 \end{cases}$ $k = b_2/(a_2 - a_1) = b_1/(a_4 - a_3)$	$q = \varphi(z) = b_2 + k(z - a_1 - z - a_2 + z - a_3 - z - a_4 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4)/2$
5 	$\varphi = \max_i(f_i(z)), i = 1, 2, \dots, n$	$q = \varphi(z) = (f_1(z) + m + f_1(z) - m)/2$ $m = \max_i(f_i(z)), i = 2, \dots, n$

Характеристики нелинейных элементов	Предикатные описания нелинейных элементов	Описания элементов нелинейными операторами
	$\varphi = b_0 + \sum_P h_P,$ $a_{P-1} < z < a_P$	$q = \varphi(z) = b_0 + \sum_{P=1}^r h_P \frac{ z - a_P }{z - a_P},$ $a_l > a_s, l > s$
	Сложное описание	$q = \varphi(z) = \frac{b}{2} \frac{ z - a }{z - a} \left(\frac{ z' }{z'} + 1 \right) +$ $+ \frac{b}{2} \frac{ z + a }{z + a} \left(\frac{- z' }{z'} + 1 \right)$
	Сложное описание	$q = \varphi(z) = \frac{1}{2} (u + b - u - b) s^+ +$ $+ \frac{1}{2} (\omega + b - \omega - b) s^-,$ $u = z - a, \omega = z + a,$ $s^\pm = \left(\pm \frac{ z' }{z'} + 1 \right) / 2$
	Сложное описание	$q(t) = q(0) + \int_0^t M \varphi^1 [k_1 z(\tau) -$ $- k_2 q(\tau)] d\tau, \quad \varphi^1(\hat{z}) =$ $= \hat{z} + (\hat{z} - a - \hat{z} + a) / 2,$ $M \gg 1$

Характеристики нелинейных элементов	Предикатные описания нелинейных элементов	Описания элементов нелинейными операторами
	Сложное описание	$q(t) = \varphi^2(p(t)), p(t) = p(0) +$ $+ \int_0^t M \varphi^1[k_1 p(\tau) - k_2 z(\tau)] d\tau,$ $\varphi^1(q) =$ $= q + (q - a - q + a)/2,$ $\varphi^2(p) =$ $= (p + b - p - b)/2,$ $M \gg 1$

элементы в уравнениях ЭЭО, имеет вид

$$x' = A\Phi(x) + B_U\Phi(u) + B_M\mu, \quad s = Cx, \quad x(0) = x_0, \quad (28.a)$$

где $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^v$ – векторы состояний, управлений и перетоков; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_U \in \mathbb{R}^{n \times m}, B_M \in \mathbb{R}^{n \times v}, C \in \mathbb{R}^{v \times n}$ – матрицы;

Операторы $\Phi(x), \Phi(u)$ действуют из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$ с координатными функциями из табл. 2.4.

Вторая каноническая форма кусочно-линейных дифференциальных уравнений ЭЭО представляется уравнениями

$$x' = \Phi(Ax) + \Phi(B_U u) + B_M \mu, \quad s = Cx, \quad x(0) = x_0, \quad (28.б)$$

где переменные, матрицы и КЛЮ определены в (28.a).

Алгебраические операторы $\Phi(Ax)$ и $\Phi(B_u u)$ в уравнениях (28), действующие из пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, определяются следующими равенствами:

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x^1), \dots, \varphi_i(x^i), \dots, \varphi_n(x^n))^T, \quad \Phi(u) = (\varphi_1(u^1), \dots, \varphi_j(u^j), \dots, \varphi_m(u^m))^T$$

и КЛФ (1), (2.а) или (2.б), а также функциями и операторами табл. 2.4, определяющими интегральные операторы, имеющие эквивалентную дифференциальную форму.

Кусочно-линейные разностные уравнения и операторы ЭЭО со стационарной правой частью формулируются в виде:

$$x_{t+1} = A\Phi(x_t) + B\Phi(u_t), \quad x_0 = x^0, \quad y_t = C\Psi(x_t) + D\Psi(u_t). \quad (29)$$

Уравнения (28) включают уравнения в форме А.И. Лурье (когда операторы в системе (28) – тождественные), которые можно использовать при решении задач абсолютной устойчивости систем управления ЭЭО:

$$x' = Ax + B\zeta, \quad \zeta = \varphi(\sigma), \quad \sigma = (c^T x), \quad x(0) = x_0. \quad (30)$$

Уравнениям (29) соответствуют кусочно-линейные разностные уравнения для дискретных систем управления ЭЭО:

$$x_{t+1} = Ax_t + B\xi_t, \quad \xi_t = \varphi(\sigma_t), \quad \sigma_t = c^T x_t, \quad (31)$$

где нелинейные функции $\varphi(\sigma)$ удовлетворяют «секторным условиям»: $0 \leq \sigma \varphi(\sigma) \leq k \sigma^2$. Эти условия характеризуют широкие классы нелинейностей – элементы, описываемые операторами типовых нелинейностей, разрывные и гладкие статические характеристики нелинейности, принадлежащие «сектору $(0, k)$ ».

Методика формирования кусочно-линейных дифференциальных и разностных уравнения иллюстрируют общие свойства, позволяющие конкретизировать модели, адекватные ЭС, ЭЭО, Единой ЕЭС России или их отдельным агрегатам.

Общая форма негладких дифференциальных операторов ЭЭО. Нелинейные уравнения ЭС или ОЭС могут быть описаны на основе обобщения нелинейных дифференциальных уравнений следующим образом. Пусть без учета типовых нелинейных элементов уравнения объекта имеют следующий вид

$$x' = F(t, x, u), \quad s = \Psi(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad s \in \mathbb{R}^v, \quad (32)$$

где $F(t, x, u): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\Psi(x, u): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^v$ – непрерывные вектор-функции с аргументами, соответствующими координатам состояния, управлениям или выходным координатам. Тогда обобщенные уравнения ЭЭО определяются следующим образом.

Определение. Обобщенные непрерывные кусочно-линейные уравнения (операторы), использующие модели кусочно-линейных элементов (табл. 2.3, элементы 1-5) имеют вид:

$$x' = F(\Phi(x), \Phi(u)), \quad y = \Psi(\Phi(x), \Phi(u)), \quad (33)$$

в которых правая часть определена суперпозицией координат и операторов типовых нелинейностей, данных в табл. 2.4.

Из теории дифференциальных уравнений (теорема Пеано) известно, что решение системы (32) существует и единственно, если правые части уравнений удовлетворяют условиям непрерывности и Липшица по соответствующим координатам.

Определение. Условием Липшица функций правой части $F(z)$ дифференциальной системы (33) относительно z в области D называется условие

$$\|F(z_1) - F(z_2)\| \leq L_F \|z_1 - z_2\|$$

где L_F – константы Липшица для функции F относительно $z \in \mathbb{R}^n$. Норма в определении постоянной Липшица задана равенством следующего вида:

$$\|F(z)\| = \max_{i=1,\dots,n} |F_i(z)|,$$

если $F_i(z) \in C(D)$, $i = 1, \dots, n$, т. е. F_i — непрерывные функции относительно z . Если система уравнений (33) определяет систему дифференциальных уравнений, т. е. если $F(z): K^n \times C(D) \rightarrow \mathbb{R}^n$, то норма вектор функции правой части системы определится соответствующими равенствами в зависимости от типа пространства, в котором рассматриваются процессы. Эти нормы вектор-функций векторных аргументов, вычисляются по правилам вычисления оценок для норм операторов конечномерных пространств, координатные функции которых являются функциями заданного класса. В ряде случаев нормы или их оценки вводятся последовательно, а *нормирование можно рассматривать как процесс последовательной «скаляризации» свойств векторов или функций*, а также их суперпозиций. Процесс осуществляется последовательно в соответствующих алгебраических структурах.

При этом классами функций могут быть непрерывные или непрерывно s раз дифференцируемые функции $f(x)$ класса $C^s[a, b]$, а также функции, интегрируемые с p -й степенью так, что выполнено условие: $\left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < +\infty$. Другими словами, для норм должны выполняться аксиомы нормы [82].

Теорема Пеано существования и единственности решений уравнений с кусочно-линейной правой частью [150]. Если операторы и правые части дифференциальной системы (33) непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица, т. е. $F(z) \in (C, Lip)$, то решение системы существует и единственно.

Процедуры решения уравнений следуют из доказательства теоремы Пикара-Линделефа [150], а также ее обобщений. Непрерывность функции правой части дифференциального уравнения

гарантирует принадлежность решения к классу непрерывно-дифференцируемых функций [150].

Аналогично формируется пара общих форм негладких уравнений для дискретных объектов или систем управления. При этом уравнения без учета операторов типовых нелинейностей записывают в виде

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad y_t = \Psi(x_t, u_t), \quad (34)$$

а аналоги непрерывных уравнений (33) представляются в форме

$$x_{t+1} = f(\Phi(x_t), \Phi(u_t)), \quad y_t = \Psi(\Phi(x_t), \Phi(u_t)). \quad (35)$$

Введенные модели позволяют существенно расширить возможности конструктивного описания нелинейных ЭС, ЭЭО и систем управления ими. Однако при этом весьма актуальной является классическая задача об аппроксимации одних уравнений другими, решений которой в контексте рассматриваемой проблемы доставляет *обобщенная теорема сравнений* [82]. Эта теорема дает ответ на ряд вопросов оценки нормы отклонений решений, возникающих при описании ЭЭО и систем управления на основе методов функционального анализа.

6. Негладкие дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [150]. Как показано в п. 1, ряд математических моделей элементов систем управления представляется дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью в случае разрывных характеристик ряда элементов, данных в табл. 2.4. В этом случае ряд математических моделей исполнительных элементов ЭС или ЭЭО представляется дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью, что требует специального исследования. Теория уравнений с «разрывной по *независимому аргументу* правой частью» изучались Э. А. Коддингтоном, Н. Левинсоном и другими авторами.

Существенный вклад в развитие теории систем данного класса внесен в 30-х годах 20 века греческим математиком Каратеодори. Он сформулировал условия существования и единственности решений сведением задачи Коши для систем с разрывными правыми частями к решению интегрального уравнения или дифференциальных включений.

Теорема Каратеодори определяет условия существования и единственности решений дифференциальных систем с разрывной правой частью. Для систем с разрывной правой частью классическое понятие решения дифференциального уравнения (как функций, обращающих в тождество всюду на области определения уравнение) требует введения обобщенного решения, обеспечивающего адекватность процессов, описываемых такими решениями. **Обобщенное решение** – это решение, которое в точках непрерывности правой части удовлетворяет уравнению в классическом смысле.

Формулировка точных условий существования и единственности разрывных систем дифференциальных уравнений основана на понятиях меры А. Лебега, измеримой функции и интеграла Лебега. На первом этапе можно рассмотреть частный случай задачи. Пусть рассматривается задача Коши для случая, когда правая часть дифференциального уравнения [82,150]

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (36)$$

непрерывно зависит от функции $x(t)$, и может иметь разрывы только по аргументу t . В случае непрерывности функции $F(x)$ задача Коши (36) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds. \quad (37)$$

Определение. Решением задачи Коши для дифференциального уравнения (36) называется решение интегрального уравнения (37), где $F(t, x)$ – разрывная функция. Подынтегральная функция в (37) будет «менее непрерывной», и интеграл в уравнении (37) понимается как интеграл Лебега. Поэтому далее интеграл и суммируемость понимаются как интеграл Лебега и суммируемость по Лебегу [82, 178].

Обобщение понятия решения уравнения (36) является содержательным и адекватным для приложений при выполнении условий непрерывности $F(t, x)$ почти при всех t и ее измеримости при каждом x , а также при существовании локально суммируемой функции $m(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ такой, что при каждом фиксированном $x(t)$ почти при всех t выполняется неравенство

$$\|F(t, x)\| \leq m(t). \quad (38)$$

Эти условия называются *условиями Каратеодори*, которые гарантируют, что в случае измеримости функция $x(t)$, функция $F[t, x(t)]$ является измеримой и локально суммируемой.

Определение. *Решением Каратеодори* задачи (36)-(37) на промежутке $[t_0 - T, t_0 + T]$ называют абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую условию (38) и обращающую почти всюду на $[t_0 - T, t_0 + T]$ уравнение (36) в тождество.

Можно показать, что если $F(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то функция $x(t)$ является *решением Каратеодори* задачи (36)-(37) в том и только том случае, если $x(t)$ является непрерывным решением интегрального уравнения (37).

В частности, можно показать, что функция $x(t) = x_0 + |t|$ – *решение Каратеодори* уравнения (36). Аналогом *теоремы Пеано* для рассматриваемого случая является следующая теорема [150].

Теорема Каратеодори. Пусть функция $F(t, x): \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условиям Каратеодори*:

- 1). Функция $F(t, x)$ непрерывна почти при всех t .
- 2). Функция $F(t, x)$ измерима при каждом x .
- 3). Существует локально суммируемая функция $m(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что при каждом фиксированном x почти при всех t выполняется неравенство

$$\|F(t, x)\| \leq m(t). \quad (39)$$

Тогда задача (36)-(37) на любом промежутке $[t_0 - T, t_0 + T]$ имеет, по крайней мере, одно решение Каратеодори.

Доказательства этой теоремы и теоремы Пеано – аналогичны. Пояснить доказательство можно с помощью приближения Тонелли. Для произвольного натурального числа k на $[t_0 - T, t_0 + T]$ функция x_k определяется равенством $x_k(t) = x_0$ при $t \in [t_0 - T, t_0]$ и рекуррентным по k соотношением

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[s, x_k(s/k)] ds, \quad (40)$$

где $i = 1, \dots, [T/k] + 1$, причем $[a]$ – целая часть числа a . В силу выполнения *условий Каратеодори* подынтегральная функция в (40) измерима и суммируема, следовательно, интеграл в правой части соотношения (45) имеет смысл. Далее, если положить

$$M(t) = \int_{t_0}^t m(s) ds,$$

то, во-первых:

$$\|x_k(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f[s, x_k(s/k)]\| ds, \quad (41)$$

а во-вторых:

$$\|x_k(t)\| \leq \|x_0\| + M(t_0 + NT), \quad M = \max_k \|f(t_k, x(t_k + T))\|. \quad (42)$$

Условие (42) означает, что семейство функций $\{x_k\}$ *равномерно ограничено*. Из оценки (42) следует, что поскольку функция M как интеграл от суммируемой функции непрерывна, и, следовательно, *равномерно непрерывна*, что семейство $\{x_k\}$ *равностепенно непрерывно*. Поэтому по *теореме Арцела-Асколи* существует *равномерно сходящаяся* подпоследовательность x_{k_m} к некоторой непрерывной на $[t_0 - T, t_0 + T]$ функции φ . Остается заменить в (41) k на k_m и перейти при каждом $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ в получившемся равенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$.

Тогда функция φ будет являться решением уравнения (45), а вместе с этим и решением Каратеодори задачи (36)-(37) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$. На промежутке $[t_0 - T, t_0]$ решение формируется аналогично. Доказано, что *условия Каратеодори* обеспечивают возможность описанного предельного перехода. Для дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям Каратеодори, справедлив ряд результатов качественной теории.

7. Разрывные дифференциальные системы и дифференциальные «включения» [150]. Можно сформулировать условия существования и единственности решений *для уравнений с «разрывной по координате x правой частью»*. Идеи будут иллюстрироваться на классе *скалярных уравнений*: будет предполагаться, что в уравнении (36) функция $f(t, x): \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ непрерывна всюду, за исключением, быть может, множества S , являющегося непрерывной кривой без самопересечений. На этом множестве функция $f(t, x)$ может иметь разрыв только первого рода: $f(t, x)$ при стремлении пары (t, x) к $(t_0, x_0) \in S$ «с одной стороны

кривой S » имеет конечный предел. Три основные ситуации даны на рис. 2.5. Неадекватную, но наглядную картину решения дает образ тяжелого шарика, катящегося по поверхности с изломами (рис. 2.5).

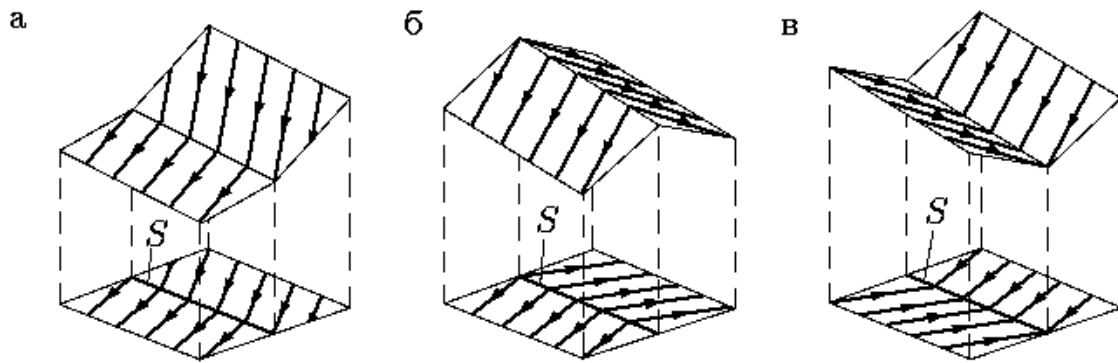


Рис. 2.5. К решению негладких уравнений с разрывной правой частью

В случае а) интегральные кривые «прошивают» кривую S за «нулевое время». Поэтому в этом случае можно использовать *решения Каратеодори*. Такое решение не будет дифференцируемым только в изолированных точках, а именно, в момент, когда $(t, x(t)) \in S$.

В случае б): если поле направлений на траектории S устроено таким образом, что фазовая точка может двигаться по кривой S , это движение не устойчиво в том смысле, что сколь угодно малые возмущения уведут точку из окрестности этой кривой.

Наконец, **в случае в):** траектории, начинающиеся в окрестности кривой S , всегда стремятся к траектории S . В дальнейшем, фазовая точка, очевидно, может двигаться только по кривой S . Поэтому поле направлений на кривой разрыва должно быть **неопределено или доопределено**, чтобы движение вдоль этой кривой, называемое **скользящим режимом**, было возможным.

Большинство известных *способов переопределения* поля направлений на кривой разрыва укладываются в следующую схему.

Для каждой точки (t, x) определяется некоторое множество $F(t, x)$ вещественных чисел. В результате получится многозначное отображение.

Определение. *Многозначными отображениями* называются отображения из $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ в множество $2^{\mathbb{R}}$ всех подмножеств вещественной оси. Вместе с уравнением (42) можно рассмотреть соотношение, называемое **дифференциальным включением**

$$x' \in F(t, x). \quad (43)$$

Определение. Решением дифференциального включения (43) на отрезке $[a, b]$ называют абсолютно непрерывную функцию $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$, для которой почти всюду на интервале $[a, b]$ производная φ' принадлежит множеству $F(t, \varphi(t))$. В такой ситуации имеет место следующее определение [20, 150].

Определение. Решением дифференциального уравнения (36) с *разрывной правой частью* называется **решение дифференциального включения** (43).

В этом случае не требуется, чтобы решение было дифференцируемым в каждой точке области определения и удовлетворяющим в каждой точке **включению** (43). Практика подтверждает целесообразность этого ослабления понятия решения.

Построение многозначного отображения. Одна из процедур построения многозначного отображения F состоит в следующем. Пусть при условии: $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ множество предельных значений $F_1(t, x)$ функции F в точке (t, x) :

$$F_1(t, x) = \left\{ \alpha : t_k \rightarrow t, x_k(t) \rightarrow x(t) \text{ при } k \rightarrow \infty \left[\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k, x_k) \right] \right\}.$$

Определение. *Многозначное отображение* $F(t, x)$ вида:

$F(t, x) = \text{co } F_1(t, x)$, где $\text{co } F_1(t, x)$ определяет **выпуклую замкнутую оболочку множества** $F_1(t, x)$, т. е. минимальное выпуклое замкнутое множество, содержащее $F_1(t, x)$ - в этом случае вещественнозначную функцию $F(t, x)$.

Таким образом, **многозначное отображение** $\text{co } F_1(t, x)$ **представляет собой отрезок**. Очевидно также, что $F_1(t, x)$ состоит из одной точки $F(t, x)$, если функция F в точке (t, x) непрерывна.

Свойства дифференциальных включений. Введенное **многозначное отображение** в большинстве практических случаев обладает двумя свойствами, гарантирующими разрешимость задачи Коши для дифференциального включения (43) и разрешимость в описанном выше смысле задачи Коши для дифференциального уравнения (36) с разрывной правой частью. Эти два свойства формулируются следующим образом [150]:

1. Множество $F(t, x)$ при каждом t и $x(t)$ выпукло, замкнуто и ограничено.

2. Отображение $F(t, x)$ непрерывно в некотором специальном смысле, а именно, в каждой точке (t_0, x_0) множество $F(t, x)$ содержится в сколь угодно малой окрестности множества $F(t_0, x_0)$, если точка (t, x) достаточно «близкая» к точке (t_0, x_0) . Это свойство многозначного отображения $F(t, x)$ называется **полунепрерывностью сверху**.

Дополнительные свойства многозначных отображений формулируются следующим образом:

1. **Однозначное отображение** $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, рассматриваемое как **многозначное отображение**, **полунепрерывно сверху** в том и только том случае, когда φ — непрерывное отображение.

2. Многозначное отображение $\Phi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ с замкнутыми образами (т. е. $\Phi(x)$ замкнуто при любом $x \in \mathbb{R}^n$) полунепрерывно сверху, если и только если график $\Gamma = \Gamma = \{(x, y) \in \varphi \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid y \in \Phi(x)\}$ – замкнут в $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

3. Если функция $f: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет описанным условиям, т. е. непрерывна всюду, за исключением, может быть, кривой S , на которой f может иметь разрыв первого рода, то определенное выше многозначное отображение F полунепрерывно сверху.

Основу теории дифференциальных включений составляет следующая теорема о разрешимости задачи Коши:

Теорема Зарембы [150]. Пусть многозначное отображение $F(t, x): \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ с выпуклыми замкнутыми образами полунепрерывно сверху и ограничено, т. е. существует M такое, что

$$|y| \leq M \quad \forall y \in F(t, x) \text{ и } t, x \in \mathbb{R}^1. \quad (44)$$

Тогда задача Коши для дифференциального включения (43) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, имеет, по крайней мере, одно решение на любом промежутке вида $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Идея доказательства. Эта теорема доказывается различными способами, один из которых использует аналог ломаных Эйлера. Тогда для любого натурального k можно:

1. Ввести обозначения: $h_k = T / k$, $t_k^i = t_0 + ih_k$, $i = 0, \dots, k$.

2. Определить ломаную Эйлера x_k для дифференциального включения (43) как кусочно-линейную функцию на $[t_0, t_0 + T]$ с точками излома t_k^i , $i = 0, \dots, k$, у которой тангенс угла наклона i -го звена для $i = 1, \dots, k$, равен какому-либо числу из множества $F[t_k^{i-1}, x_k(t_k^{i-1})]$.

3. В результате справедливо равенство

$$x'_k(t) = F\left[t_k^i, x_k(t_k^i)\right], \quad t \in (t_k^i, t_k^{i+1}).$$

(45) 4. Из ограниченности отображения F , очевидно, в точках излома справедлива оценка: $|x'_k(t)| \leq M$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, где функции $x'_k(t)$ определяют правые и левые производные. Из этой оценки и полученного выше условия следуют неравенства

$$|x_k(t)| \leq |x_0 + MT|, \quad |x_k(t) - x_k(\tau)| \leq M|t - \tau|, \quad (t, \tau \in [t_0, t_0 + T]).$$

Равенства определяют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность семейства функций $\{x_k\}$. Поэтому в силу *теоремы Арцела-Асколи* (не ограничивая общности) можно считать, что последовательность $\{x_k\}$ *равномерно сходится* к некоторой непрерывной функции φ на промежутке $[t_0, t_0 + T]$. Можно доказать, что в уравнении (45) возможно перейти к пределу при условии $k \rightarrow \infty$, и в результате имеет место соотношение

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) \quad \text{почти всюду на } [t_0, t_0 + T]. \quad (46)$$

План доказательства теоремы определяют четыре этапа:

1). Доказательство того, что функция φ удовлетворяет условию Липшица с константой M и, следовательно, почти всюду дифференцируема.

2). Доказательство того, что из абсолютной непрерывности функции: $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$, справедливо следующее условие $[\psi(t + \tau) - \psi(t)] / \tau \in co D$, где D – множество значений производных функции ψ во всех точках отрезка $[t, t + \tau] \in [a, b]$, в которых она существует.

3). Доказательство условия:

$$\frac{1}{\tau} [x_k(t + \tau) - x_k(t)] \in F(s, x_k(s)), \quad s \in [t - h_k, t + \tau + h_k],$$

при всех достаточно больших k .

4). Доказательство соотношения (46).

Таким образом, в представленном анализе дифференциальных уравнений с разрывной «по координате x » правой частью имеют место аналоги многих утверждений теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Из этих результатов следует ряд свойств разрывных систем.

1. Функция $f(x) = A(t)x(t) + b(t)$, в которой $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}$ – $(m \times m)$ -матрица-функция, а $b(t)$ – m -мерная вектор-функция, удовлетворяет условиям Каратеодори в том и только том случае, если все компоненты матрицы $A(t)$ и вектор-функции $b(t)$ – локально суммируемы.

2. Утверждения п. 1 переносятся на линейные системы с локально суммируемыми коэффициентами.

3. Если функция f удовлетворяет условиям Каратеодори и обобщенному условию Липшица с локально суммируемой функцией M , то можно доказать, что задача (35)-(37) имеет на любом отрезке, содержащем точку t_0 , в точности одно решение.

4. В условиях теоремы Каратеодори множество решений задачи (36)-(37) компактно в пространстве $C[t_0, t_0 + T]$.

5. В условиях теоремы Каратеодори каждое решение задачи (36)-(37) продолжимо до максимального определенного решения на всей оси.

6. Справедлива теорема о нестрогих дифференциальных неравенствах с произвольными числами в случае, когда функция f удовлетворяет условиям Каратеодори.

7. Имеет место содержательное утверждение о непрерывной зависимости решений Каратеодори от параметра.

8. Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функция, имеющая в точке $x^* \in \mathbb{R}$ разрыв первого рода и удовлетворяющая условию Липшица на каждом из множеств $(-\infty, x^*)$ и $(x^*, +\infty)$, а $\varphi: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ – решение задачи Коши

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (47)$$

в описанном выше смысле, то имеют место утверждения:

а). Решение задачи (47) единственно, если $f(x^* + 0) < 0$ или $f(x^* - 0) > 0$. Если $f(x^* + 0) > 0$ и $f(x^* - 0) < 0$, то решение может быть неединственным.

б). Если $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – последовательность удовлетворяющих условию Липшица функций таких, что при некотором значении M и всех $k \in N_+$ имеет место соотношение

$$|f_k(x) - f(x)| \leq 1/k \quad \text{при} \quad |x - x^*| \geq 1/k$$

и

$$|f_k(x)| \leq M \quad \text{при} \quad |x - x^*| \leq 1/k,$$

а последовательность $\varphi_k(t): [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ является последовательностью классических решений задачи Коши:

$$x' = f_k(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (48.a)$$

то имеет место соотношение

$$\sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (48.b)$$

Следствие. Для уравнения с разрывной в точке x^* правой частью формирование последовательности задач Коши (48.a),

удовлетворяющих приведенным выше условиям с учетом ограничений: $|f_k(x) - f(x)| \leq 1/k$ при условии $|x - x^*| \geq 1/k$ и $|f_k(x)| \leq M$, где $|x - x^*| \leq 1/k$, последовательность задач Коши (48.а) может быть представлена последовательностью уравнений: $x' = f_k(x)$, $x(t_0) = x_0$. Разрывная правая часть может быть представлена *допредельными функциями* (которые определены в табл. 2.4, поз. 3)

$$f_k(x) = f_1(f_{2k}(x)),$$

$$f_1(f_{2k}(x)) = (|f_{2k}(x) + M| - |f_{2k}(x) - M|) / 2, \quad f_{2k}(x) = kx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которые имеют **предельную функцию**:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_1(f_{2k}(x)) = \text{sign}(x^*), \quad x^* = 0.$$

в). Можно доказать, что в условиях теоремы Зарембы каждое решение задачи может быть продолжено до определенного на всей оси максимального решения.

9. Если $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная положительная функция, а $F: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, то множество траекторий (траекторий, а не интегральных кривых) включения $x' \in F(x)$ совпадает с множеством траекторий включения $x' \in g(x)F(x)$ и, наоборот. Символ $g(x)F(x)$ требуется понимать как множество следующего вида $\{y \in \mathbb{R}^n \mid y \in g(x)z, \quad z \in F(x)\}$.

10. Пусть $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми образами. Каждой функции $x \in C[t_0, t_0 + T]$ ставится в соответствие множество абсолютно непрерывных на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ функций $y(t)$ таких, что производная $y'(t)$ почти при всех значениях $t \in [t_0, t_0 + T]$ принадлежит множеству $F(t, x)$.

Таким образом, определен действующий из множества $C[t_0, t_0 + T]$ во множество $2^{C[t_0, t_0 + T]}$ многозначный оператор $\mathcal{F}$, называемый *многозначным интегральным оператором, порожденным функцией f* . Любая точка, лежащая в своем образе при отображении $\mathcal{F}$, т. е. такая, что $x = \mathcal{F}(x)$, называется **неподвижной точкой многозначного отображения $\mathcal{F}$** . Можно доказать, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче о неподвижных точках отображения $\mathcal{F}$.

11. В условиях п. 10 оператор $\mathcal{F}$ полунепрерывен сверху, его образы выпуклы и замкнуты и он **вполне непрерывен** в следующем смысле: для любого ограниченного множества $\Omega \in C[t_0, t_0 + T]$ множество $\mathcal{F}(\Omega)$ относительно компактно в $C[t_0, t_0 + T]$.

Если воспользоваться **теоремой Гликсберга**: любое полунепрерывное сверху вполне непрерывное многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми образами, переводящее выпуклое замкнутое ограниченное подмножество банахова пространства в себя, имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку, то можно доказать теорему Зарембы.

2.5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ, КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ И СТРУКТУРНО-ИНВАРИАНТНЫЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Анализ и синтез управлений в предаварийных режимах основан на адекватных математических моделях, позволяющих выполнить синтез с учетом точечных, интервальных или идентифицируемых оценок параметров уравнений ЭЭО. При этом вопрос о классах моделей ЭЭО может формулироваться различным образом. В теории и практике анализа и управления ЭЭО имеется

большое количество моделей. Высокий порядок уравнений приводит к необходимости формировать приближенные модели, которые формируются *методами эквивалентирования* [37,203].

Методы эквивалентирования можно рассматривать как *аппроксимационные методы* формирования уравнений объектов, имеющих более низкий порядок производных по сравнению с исходными уравнениями, поскольку определяют модели ЭЭО на основе замены исходных уравнений другими моделями, близкими в некотором смысле.

Первая группа методов аппроксимации приводит к уравнениям с исходным или более низким размером вектора состояний объекта. При сохранении размерности вектора состояний для оценки отклонений решений используются *теоремы сравнения решений* по нормам функциональных пространств, а при уменьшении – методы оценки погрешности в пространстве Ганкеля.

Вторая группа методов аппроксимации позволяет повысить точность аппроксимирующих моделей применения аппроксимационных методов к обобщенным дифференциальным уравнениям динамики ЭМП при учете нелинейностей статических характеристик нелинейных элементов дифференциальных уравнений ЭА. Ниже рассматриваются асимптотические нелинейные модели динамики ЭЭС, учитывающие динамику с учетом нелинейности «зоны нечувствительности» первичных регуляторов и «насыщения» эквивалентных агрегатов ЭС, что повышает адекватность динамических и квазистационарных моделей ЭЭО.

1. Кусочно-линейные уравнения динамики ЭЭО [78,82,85,88]. Методика формирования обобщенных моделей ЭМП использует учет нелинейностей типа «насыщение» и «зона нечувствительности» систем регулирования агрегатов изложена в [50,51,52,62,65]. Кусочно-линейные функции (п. 2.2) имеют вид:

$$y = \varphi(z) = b_0 + \alpha_0 z + \sum_{i=1}^p \alpha_i |z - z_i|, \quad (1)$$

где функции z и y – координаты входов и выходов дополнены параметрами, причем операторы «зоны нечувствительности» и «насыщения» даны в табл. 2.3. Далее уравнения электромеханических процессов преобразуются суперпозицией операторов НЭ и координат модели ЭС. При этом в уравнениях ЭЭО могут учитываться ограничения на мощности турбин – p_i , перемещений сервомоторов – q_i и перемещений вторичных регуляторов скоростей – σ_i . Каждое уравнения определяет класс квазистационарности. Суперпозиция координат и операторов (1) определяет кусочно-линейные уравнения динамики в физических координатах

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{ai}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{ai}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{ai}^2} p_i - \frac{1}{T_{ai}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{1}{T_{Pi}} \Phi_p(p_i) + \frac{1}{T_{Pi}} \Phi_q(q_i), \\ q'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \Phi_{\omega}(\omega_i) - \frac{1}{T_{ci}} \Phi_q(q_i) + \frac{1}{T_{ci}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i), \\ \sigma'_i &= -\frac{1}{T_{Pi}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i) + \frac{1}{T_{Pi}} u_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы типа «зона нечувствительности» и «насыщение» в системе (2) эквивалентных агрегатов ЭС определены в табл. 2.4 и соответствуют НЭ генерирующих и исполнительных частей ЭА:

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(\omega_i) &= \omega_i - (|\omega_i + \omega_i^0| - |\omega_i - \omega_i^0|) / 2, \\ \Phi_p(p_i) &= (|p_i + p_i^0| - |p_i - p_i^0|) / 2, \\ \Phi_q(q_i) &= (|q_i + q_i^0| - |q_i - q_i^0|) / 2, \\ \Phi_{\sigma}(\sigma_i) &= \sigma_i^0 - (|\sigma_i + \sigma_i^0| - |\sigma_i - \sigma_i^0|) / 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) являются исходными для формулировки квазистационарных дифференциальных уравнений различных классов, включая квазистационарные алгебраические кусочно-линейные для расчета потокораспределения в сетях ЭЭО. Системы асимптотических кусочно-линейных дифференциальных уравнений «входы-состояния-выходы» представляются в различных канонических формах в зависимости от структуры ЭА.

Первая каноническая форма уравнений ЭЭО имеет вид

$$x'_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Phi_{ij}(x_j) + \sum_{j=1}^N B_{ij} \Phi_{ij}(u_j) + \sum_{k=1}^n W_{ik} M_k, \quad s_j = \rho_{ig} \phi_{ig}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где векторы $X = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $U = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $S = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_v)^T \in \mathbb{R}^v$, $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояний, управлений, перетоков и внешних воздействий в виде внеплановых нагрузок; $N = 5n$ или $N = 4n$ – размер общего вектора состояния ЭЭО, A_{ij}, B_{ij}, G_{ij} – элементы матриц A, B, G , а $y = \Phi(z)$ – операторы ЭА типа (1).

Вторая каноническая форма кусочно-линейных уравнений ЭЭО формулируется в следующем виде

$$x'_i = \Phi_{ii} \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) + \Phi_{ii} \left(\sum_{j=1}^n B_{ij} u_j \right) + \sum_{j=1}^N W_{ij} \mu_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Третья каноническая форма кусочно-линейных уравнений ЭЭО представляются в форме

$$x'_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Phi_{ij}(x_j) + \sum_{j=1}^N B_{ij} \Phi_{ij}(u_j) + \sum_{j=1}^N W_{ij} \mu_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где $z = f(q_i)$ – кусочно-линейные операторы типа (1).

Таким образом, обобщенные кусочно-линейные уравнения ЭМП (4)-(6) для физических координат ЭС являются исходными

для формулировки асимптотических моделей различного класса квазистационарности для предаварийных режимов ЭЭО.

Определение. Обобщенные нелинейные уравнения, учитывающие нелинейности типа (4), (5) и (6) на основе КЛФ (1) удовлетворяют условиям существования и единственности. Правые части непрерывные и удовлетворяют условию Липшица

$$\|f(\Phi(x'), \cdot) - f(\Phi(x''), \cdot)\| \leq L_f L_\Phi \|x' - x''\|,$$

где L_f и L_Φ – **константы Липшица** для функций $f(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$. Условие Липшица, введенное в п. 2.3, представляет собой условие типа непрерывности, и позволяет оценить норму разности образов с помощью нормы разности прообразов. При этом «**постоянная Липшица**» – параметр этой широко используемой оценки.

2. Линейные асимптотические модели различных классов квазистационарности. В линейных и нелинейных моделях вектор состояния системы в зависимости от учитываемых нелинейных элементов агрегатов содержит $5n$ или $4n$ координат, где n – число ЭА. Поэтому анализ динамики управления в предаварийных состояниях многоагрегатных ЭЭО может быть затруднен. «Динамическое эквивалентирование» линейных или нелинейных уравнений предполагает «редукцию» как понижение порядка уравнений динамических моделей.

Современные подходы к построению асимптотических моделей. Редукция уравнений динамики ЭЭО может быть проведена на основе уравнений асимптотического движения, т. е. уравнений, описывающих, в частности, усредненные составляющие движения. Эта задача может быть решена в п. 2.1 на основе **разделения движений** и формулировки уравнений «быстрых» и «медленных» (усредненных) составляющих движения.

Как отмечено выше, существуют современные методы решения этих задач, включающие *метод малого параметра, метод аппроксимации в пространстве Ганкеля, метод жордановых форм*, применяемые ко всем или к отдельным группам линейных или нелинейных уравнений состояния.

Таким образом, возникает необходимость редукции уравнений движения с применением альтернативных способов. Один из возможных вариантов решения данной задачи заключается в понижении порядка уравнений состояния ЭЭО, записанных в базисе из физических координат объекта. Применяя метод квазистационарности процессов в отдельных элементах структуры эквивалентных агрегатов ЭС, можно получить соответствующие модели. Это означает пренебрежение динамикой отдельных элементов и *формирование асимптотических уравнений* переходом к уравнениям *различных классов квазистационарности*.

Определение. Классом квазистационарности $K_s = \{x_{1s}, \dots, x_{qs}\}$ дифференциальных уравнений ЭЭО называются дифференциально-алгебраические уравнения, полученные *алгебраизацией части дифференциальных уравнений* системы относительно координат $\{x_{1s}, \dots, x_{qs}\}$ в силу условий квазистационарности, имеющих следующий вид: $\{x'_{1s} = 0, \dots, x'_{qs} = 0\}$.

Класс стационарности определяют координаты агрегатов ЭС, для которых дифференциальные уравнения одной из форм (4)-(6) преобразованы в алгебраические уравнения. К ним относятся уравнения с нелинейными элементами, описывающими «паровые объемы», «усилители первичных регуляторов скоростей турбин», «усилители вторичных регуляторов», а также другие элементы в случае сложной структуры модели ЭС. Поэтому появляется возможность «динамического эквивалентирования» с учетом интегральных свойств процессов, в частности, требований

к *устойчивости* и *статической определенности* аппроксимирующих уравнений пониженного порядка.

Приближенная модель может быть построена в виде асимптоты в узком смысле, т. е. как усредненная составляющая движения с учетом характерных свойств переходных процессов ЭЭО. Как показано в п. 2.1, для процессов, описываемых линейными уравнениями, имеют место два типа движения. Основные (медленные) составляющие отклонений координат (частоты, перетоков и др.) можно рассматривать как асимптотические составляющие, а относительные (быстрые) движения соответствуют взаимным «качаниям» роторов эквивалентных агрегатов ЭС. Для достижения указанного свойства асимптотических моделей должны выполняться *интервальные ограничения* на параметры моделей: $T_i^- \leq T_i \leq T_i^+$.

Асимптотические линейные уравнения в физических координатах. Линейные асимптотические уравнения в физических координатах ЭЭО формируются на основе методики редукции. Пусть заданы линейные уравнения состояния ЭЭО. Вектор состояния из физических координат содержит следующие компоненты – отклонения углов роторов эквивалентных агрегатов φ_i , частоты вращений роторов ω_i , мощностей агрегатов p_i , координаты исполнительных элементов q_i и σ_i .

В силу предлагаемой методики сокращение размера вектора физических координат состояния x возможно исключением из уравнений динамики некоторых уравнений с *аппроксимацией переходных режимов квазистационарными режимами* на основе различных классов квазистационарности. Это возможно для медленных изменений существенных координат по сравнению с компонентами, значения которых существенны для синтеза системы управления, включая отклонения частот и углов роторов

эквивалентных агрегатов. При выполнении этого условия появляется возможность исключить ряд координат из уравнений путем приравнивания к нулю их производных по времени. В качестве исключаемых групп компонент могут быть рассмотрены мощности узлов p_i , а также координаты регуляторов q_i и σ_i . Модели, в которых координаты $\omega'_i = 0$ или $\phi'_i = 0$, что соответствуют квазистационарным режимам по производной частоты или углов, требуют особого рассмотрения.

Модели, отмеченные выше, можно отнести к классу **квази-консервативных моделей** как аналогов **консервативных моделей** – частных случаев «**позиционных**» моделей [63]. Последние модели формируются на основе упрощающих предположений о моделях нагрузок, синхронных машин, постоянстве моментов первичных двигателей (турбин), а также при неучете демпфирования электромеханических колебаний агрегатов. В этих условиях уравнения позиционных моделей описывают динамику движения роторов и относительных положений роторов агрегатов энергообъединения, а консервативные модели учитывают (кроме этого) чисто реактивные электрические связи синхронных машин.

Таким образом, далее будут предложены варианты редукции вектора состояния системы и уравнений ЭЭО, соответствующие моделям с «классами квазистационарности», формируемые на основе условий: $p'_i = 0$, $q'_i = 0$ или $\sigma'_i = 0$, а также их комбинаций, которые соответствуют различным квазиустановившимся режимам различного класса.

1). Модель режима, квазистационарного по генерируемой мощности ($p'_i = 0$). Этой ситуации соответствует режим, для которого мощность эквивалентных агрегатов описывается алгебраическими уравнениями при условии: $p'_i = 0$.

В случае «квазистационарности» объекта по генерируемой мощности уравнения принимают следующий вид

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ 0 &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} p_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} q_i, \\ q'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \sigma_i, \quad \sigma'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \sigma_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.\end{aligned}\tag{7}$$

Из третьего уравнения (7) вычисляется p , а подстановки p во второе уравнение при условии $p = q$ определяет асимптотические кусочно-линейные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} q_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ q'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \sigma_i, \quad \sigma'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \sigma_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.\end{aligned}\tag{8}$$

Далее необходимо ввести: сокращенный вектор состояний ЭЭО, управлений, нагрузок и перетоков

$$x_1 = [\varphi, \omega, q, \sigma]^T \in \mathbb{R}^{N-n}, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \mu \in \mathbb{R}^n, \quad S = [s_1, s_2, \dots, s_v] \in \mathbb{R}^v, \tag{9.a}$$

В результате уравнения «вход-состояния-выход» для вектора x_1 запишутся в следующей форме

$$x'_1 = A_1 x_1 + B_1 u + W_1 \mu, \quad s = C_1 x_1, \quad x_1(0) = x_1^0. \tag{9.б}$$

Матрицы уравнений ЭЭО в физических координатах (9.б) имеют блочную структуру, которая определяет матрицы исходных уравнений электромеханических процессов

$$A^1 = (A_{lm}^1), \quad B^1 = (B_{rv}^1), \quad W = (W_{rv}), \quad C^1 = (C_{1p}^1). \tag{10}$$

Матрицы A , B , W , C в (9) вычисляются на основе (8), а точная структура матриц дана при анализе статической определимости.

2). Модель процессов, квазистационарных по координате q ($q'_i = 0$). При условии $q'_i = 0$ уравнения ЭЭО (7) примут вид

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} p_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} q_i, \quad 0 = -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \sigma_i, \\ \sigma'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \sigma_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.\end{aligned}\tag{11}$$

Вычисление из четвертого уравнения q_i и подставка их в третье уравнение исключает эти координаты и приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{\Pi i}} \omega_i - \frac{1}{T_{\Pi i}} p_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} \sigma_i, \quad \sigma'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \sigma_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.\end{aligned}\tag{12}$$

Аналогично варианту, приведенному выше, вводится вектор $x_2 = [\varphi, \omega, p, \sigma]^T \in \mathbb{R}^{N-n}$, и на основе (11)-(12) формируются уравнения для этих координат

$$x'_2 = A_2 x_2 + B_2 u + W_2 \mu, \quad s = C_2 x_2, \quad x_2(0) = x_2^0.\tag{13}$$

Векторы и матрицы уравнений (13) определяются из (12).

3). Модель режима, квазистационарного по координатам σ_i ($\sigma'_i = 0$). В этом случае из четвертого и пятого уравнений системы (7) производная переменной σ приравнивается нулю, и преобразуются уравнения ЭА, а асимптотические уравнения ЭЭО примут вид:

$$\varphi'_i = \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{ai}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{ai}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{ai}^2} p_i - \frac{1}{T_{ai}^2} \mu_i, \quad (14)$$

$$p'_i = -\frac{1}{T_{Pi}} p_i + \frac{1}{T_{Pi}} q_i, \quad q'_i = -\frac{k_{oi}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} u_i.$$

Далее, как и для вариантов 1) и 2), формируются вектор состояния $x_3 = [\omega, \varphi, p, q] \in \mathbb{R}^{N-n}$, а другие векторы совпадают с векторами в (9.а), а уравнения преобразуются к форме

$$x'_3 = A_3 x_3 + B_3 u + W_3 \mu, \quad sY = C_3 x_3, \quad x_3(0) = x_3^0. \quad (15)$$

Матрицы уравнений (15) определяются из (14).

Таким образом, предложена методика формирования и установлена структура линеаризованных асимптотических уравнений ЭМП, которые являются исходными для анализа *статической определенности* линейных квазистационарных дифференциальных уравнений ЭЭО и формирования *характеристик влияния объекта* в стационарных режимах, необходимых для СОП и САУ ЧМ.

3. Кусочно-линейные асимптотические дифференциальные уравнения в физических координатах ЭЭО. На основе моделей, рассмотренных в п. 2.1, может быть разработан класс асимптотических кусочно-линейных моделей. Далее будут рассмотрены варианты моделей, установившихся по отдельным компонентам вектора физических переменных ЭЭО [79,101].

1). Кусочно-линейные модели для режимов, квазистационарных по мощности ($p'_i = 0$). Для построения данной модели предполагается, что компоненты вектора состояния, соответствующие мощностям агрегатов ЭС, характеризуются слабыми колебательными составляющими. В них преобладают медленные составляющие относительно других координат, поэтому можно положить $p'_i = 0$. Тогда третье уравнение системы (2) примет вид:

$$0 = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_p(p_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_q(q_i) \cdot \frac{1}{2} \quad (16)$$

Из уравнений (16) координата p_i определяется кусочно-линейными функциями:

$$p_i = \Phi_p^{-1}(\Phi_q(q_i)). \quad (17)$$

Обратные КЛФ $z = \Phi_p^{-1}(y)$ существуют в случае, если исходные функции – строго монотонные. Операторы типа «насыщение» и «зона нечувствительности» описываются неубывающими КЛФ, однако не являются строгой монотонными. Поэтому для преобразований (17) необходима их аппроксимация. Если $y = \Phi(z)$ – неубывающие, то им соответствуют строго возрастающие функции

$$y \triangleq \Psi(z) = \Phi(z) + \varepsilon z, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (18)$$

В соотношении (18) величина ε выбирается достаточно малой для уменьшения погрешности аппроксимации. Другие методы аппроксимации возможны на основе гладких нелинейных функций, например, функциями «арктангенса» [85]. Поскольку аппроксимированная КЛФ $y = \Psi(z)$ является строго возрастающей, то обратная КЛФ $z = \Psi^{-1}(y)$ – также строго возрастающая функция. Кусочно-линейные уравнения (18) примут вид

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \Phi_p^{-1}(\Phi_q(q_i)) - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ q'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \Phi_p(\omega_i) - \frac{1}{T_{ci}} \Phi_q(q_i) + \frac{1}{T_{ci}} \Phi_\sigma(\sigma_i), \quad \sigma'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_\sigma(\sigma_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Второе уравнение системы (19) можно переписать в виде:

$$\omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \tilde{\Phi}(q_i) - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \quad (20)$$

где $\tilde{\Phi}(q_i)$ определяются суперпозициями кусочно-линейных функций, заданных в форме (1), и, следовательно, также представляют кусочно-линейные функции.

Таким образом, систему уравнений асимптотических процессов можно представить в канонической форме (19), (20), где размер вектора состояния уменьшится на величину n . Обратные алгебраические операторы и суперпозиции кусочно-линейных операторов вычисляются на основе данных ранее утверждений.

Можно рассмотреть другие асимптотические модели ЭЭО.

2). Кусочно-линейные асимптотические модели для режимов, квазистационарных по координатам q_i ($q'_i = 0$). В соответствии с четвертым уравнением (2) при условии $q'_i = 0$ можно получить уравнения

$$0 = -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \Phi_{\omega}(\omega_i) - \frac{1}{T_{ci}} \Phi_q(q_i) + \frac{1}{T_{ci}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i). \quad (21)$$

Подстановка (21) в третье уравнение (2) приводит к системе квазистационарных кусочно-линейных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_p(p_i) - \frac{k_{\omega i}}{T_{\Pi i}} \Phi_{\omega}(\omega_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i), \\ \sigma'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i. \end{aligned} \quad (22)$$

Система записывается в канонической форме, где размер вектора состояния уменьшается на n . Аналог (22), где отсутствуют нелинейности третьего уравнения, представляется системой

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} p_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} q_i, \quad q'_i = -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \Phi_{\omega}(\omega_i) - \frac{1}{T_{ci}} \Phi_q(q_i) + \frac{1}{T_{ci}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i), \\ \sigma'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.\end{aligned}\quad (23)$$

После подстановки условий $q'_i = 0$ в третье уравнение системы (23) и представления координат q_i равенствами

$$q_i = \Phi_q^{-1}(-k_{\omega i} \Phi_{\omega}(\omega_i) + \Phi_{\sigma}(\sigma_i)), \quad (24)$$

система принимает форму

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} p_i + \frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_q^{-1}(-k_{\omega i} \Phi_{\omega}(\omega_i) + \Phi_{\sigma}(\sigma_i)), \\ \sigma'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i.\end{aligned}\quad (25)$$

Для обращения КЛФ в (24) используется описанная методика аппроксимации. Система (25) имеет формы (4), (5) или (6) как система кусочно-линейных асимптотических уравнений ЭЭО.

3). Кусочно-линейные модели режимов, установившихся по координатам σ_i ($\sigma'_i = 0$). Данные режимы рассматриваются аналогично п. 1) и 2). При условиях $\sigma'_i = 0$ кусочно-линейная дифференциальная система (2) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \Phi(p_i) - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\
p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi(p_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi(q_i), \quad q'_i = -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \Phi(\omega_i) - \frac{1}{T_{ci}} \Phi(q_i) + \frac{1}{T_{ci}} u_i.
\end{aligned} \tag{26}$$

Для системы кусочно-линейных дифференциальных уравнений ЭМП в ЭЭО, заданных в форме

$$\begin{aligned}
\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\
p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_p(p_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_q(q_i), \\
q'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \sigma_i, \quad \sigma'_i = -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_\sigma(\sigma_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i,
\end{aligned} \tag{27}$$

после задания условий квазистационарности типа $\sigma'_i = 0$, асимптотические кусочно-линейные уравнения ЭЭО имеют вид

$$\begin{aligned}
\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} p_i - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\
p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_p(p_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_q(q_i), \\
q'_i &= -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \Phi_\sigma^{-1}(u_i).
\end{aligned} \tag{28}$$

Данная система может быть записана в первой канонической форме, где размерность вектора состояния меньше размерности вектора состояния исходной системы на величину n .

Вычислительный эксперимент. Исследование линейных и кусочно-линейных асимптотических моделей ЭЭО необходимо для анализа качественных свойств разработанных моделей. В

эксперименте исследовались математические модели ЭЭО систем конечной и бесконечно большой мощности. Динамика описывалась линейными и кусочно-линейными дифференциальными уравнениями ЭМП.

Цели исследования состояли в анализе процессов, исследовании влияния динамики отдельных звеньев эквивалентных агрегатов на особенности электромеханических процессов. Линеаризованные уравнения ЭЭО соответствовали системе

$$\varphi_i' = \omega_i, \quad T_a^2 \omega_i' = -T_y \omega_i - \rho \varphi_i + p_i - \mu_i, \quad T_{\Pi} p_i' = -p_i - k_{\omega} \omega_i + u_i,$$

где $i = 1, 2, 3$. Данная модель описывает ЭТА, и позволяет исследовать влияние динамики парового объема эквивалентных агрегатов на характер переходных процессов ЭЭО. Вектор состояния ЭЭО представлен в виде: $x = [\varphi_i, \omega_i, p_i]^T$, внешние воздействия – внеплановые нагрузки и управления заданы векторами u , $\mu \in \mathbb{R}^1$. Уравнения системы в форме Коши определяются равенствами

$$x' = Ax + Bu + W\mu, \quad s = Cx, \quad x(0) = x_0.$$

Параметры исследуемой системы являются типовыми:

$$T_a^2 = 0.04, T_y = 0.005, T_{\Pi} = 1, k_{\omega} = 0.03, \rho = 0.05.$$

Матрицы исходной линейной системы имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1.25 & -0.125 & 25 \\ 0 & -0.03 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0.05 \quad 0 \quad 0].$$

Кусочно-линейные уравнения ЭЭО определяются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_i' &= \omega_i, \quad T_a^2 \omega_i' = -T_y \omega_i - \rho \varphi_i + p_i - \mu_i, \\ T_{\Pi} p_i' &= -\Phi(p_i) - k_{\omega} \omega_i + u_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{29}$$

где $y = \Phi(p)$ – нелинейный оператор типа «насыщения».

Для обращения оператора применялась аппроксимация: $y = \Psi(p) = \Phi(p) + \varepsilon p$, причем в эксперименте использовалось значение $\varepsilon = 0.01$. Асимптотическая модель получена при условии: $p' = 0$. Из вектора состояния модели исключена координата p , а асимптотические кусочно-линейные уравнения имеют вид:

$$\varphi' = \omega, \quad T_a^2 \omega' = -T_y \omega - \rho \varphi + \Psi^{-1}(-k\omega + u) - \mu.$$

Графики регуляризованных прямой (а) и обратной (б) кусочно-линейных функций динамической системы приведены на рис. 2.6 (при ограничении на генерируемую мощность $p^0 = 0.02$).

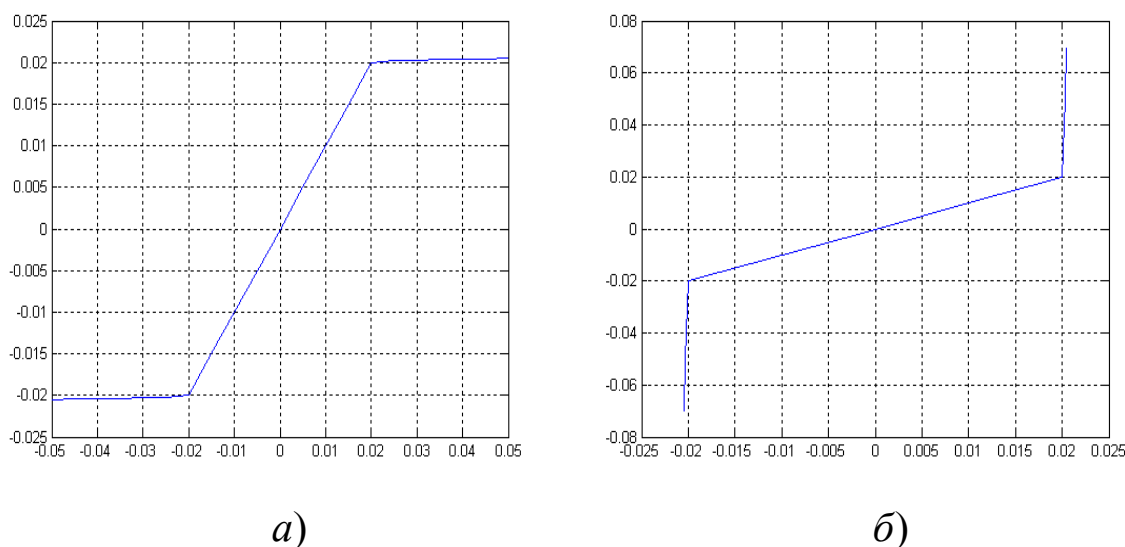


Рис. 2.6. Графики прямой (а) и обратной (б) кусочно-линейных функций асимптотической модели ЭЭО

Эксперимент 1. Исследовались переходные процессы, описываемые линейными, кусочно-линейными и асимптотическими кусочно-линейными системами при различных ограничениях, воздействиях и начальных условиях. Зависимости перетоков и компонент вектора состояния для линеаризованных и кусочно-линейных дифференциальных уравнений приведены на рис. 2.7.

Эксперимент выполнен при нулевых начальных условиях по состоянию x_0 , управления и возмущения в виде внеплановой

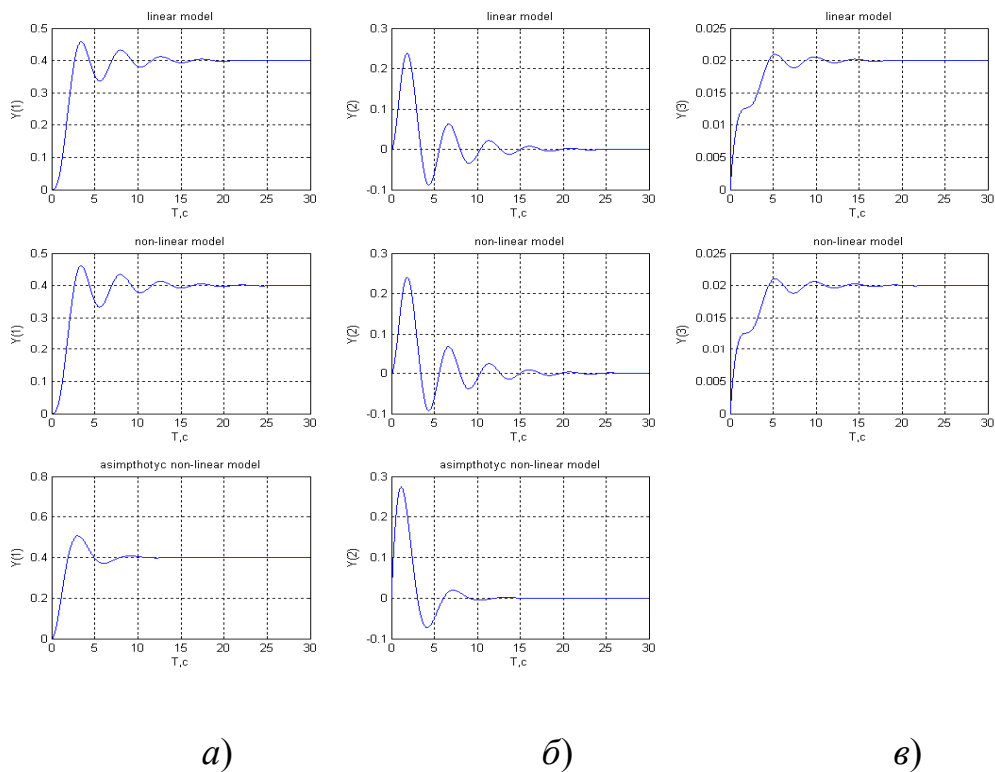


Рис. 2.7. Переходные процессы по отклонениям угла (а), частоты (б) и мощности (в) агрегатов, соответствующие линейным моделям (верхний ряд), кусочно-линейным моделям (средний ряд) и асимптотическим кусочно-линейным моделям (нижний ряд)

нагрузки определены следующим значениями: $u = 0.02$; $\mu = 0$, а ограничения для кусочно-линейного оператора $p^0 = 0.03$.

Переходные процессы для компонент вектора состояния для линейных, кусочно-линейных и асимптотических дифференциальных уравнений для ЭЭО (конечной и бесконечной мощности), представленные на рис. 2.7, отражают характер изменения процессов для различных моделей. При этом первая вертикальная группа процессов соответствует изменению углов ЭС, вторая вертикальная группа – частот, а третья – мощностей. Анализ подтвердил удовлетворительное описание асимптотическими линейными и кусочно-линейными моделями асимптотических компонент вектора ЭМП для координат ЭЭО. Имеет место совпадение

стационарных значений координат для трех моделей, а процессы для кусочно-линейных асимптотических моделей пониженного порядка имеется уменьшение амплитуды колебаний.

Эксперимент 2. Цель эксперимента – анализ моделей и свойств переходных процессов по перетокам активной мощности. На рис. 2.8 представлены процессы изменения перетоков по ЛЭП, полученные на основе описания ЭМП с применением линейных, кусочно-линейных и асимптотических математических моделей.

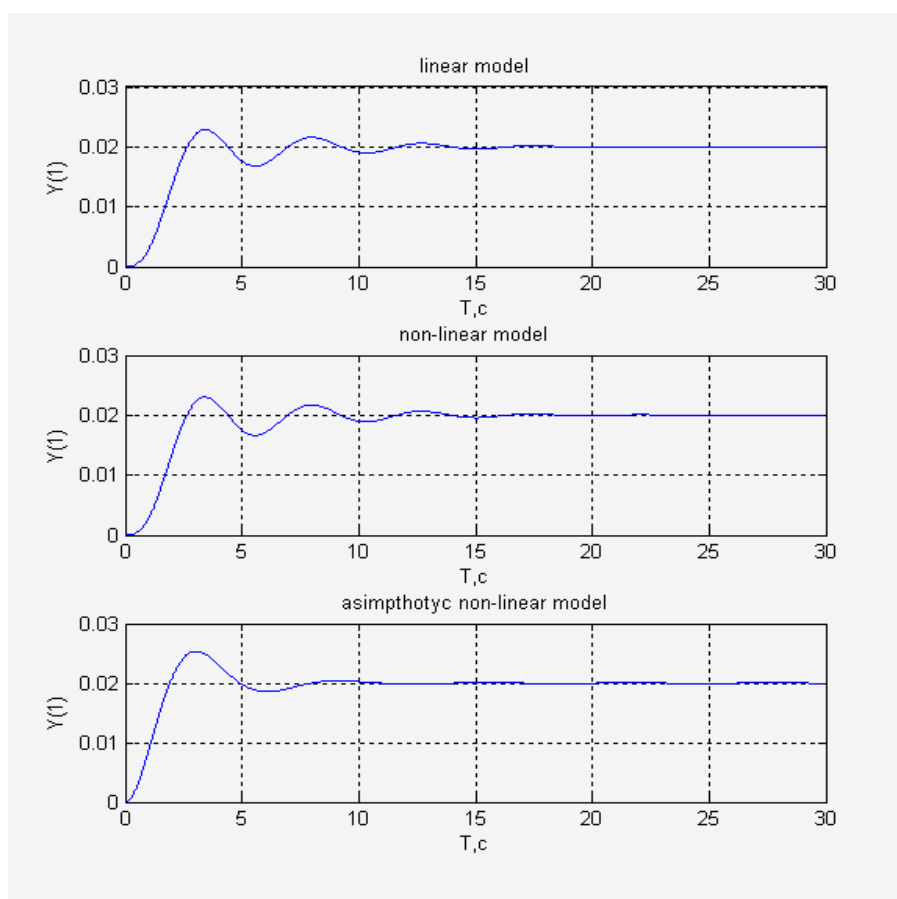


Рис. 2.8. Процессы отклонений перетоков для линейных (вверху), кусочно-линейных (в середине) и асимптотических (внизу) моделей

Таким образом, исходные и асимптотические кусочно-линейные дифференциальные уравнения ЭМП описывают переходные процессы в ЭЭО с учетом существенных нелинейностей. Эти модели могут использоваться для исследования качества и

устойчивости электромеханических процессов, синтеза управлений АРЧМ и расчета квазистационарного потокораспределения в электрических сетях ЭЭО с учетом ненулевых отклонений частоты.

4. Структурно-инвариантные кусочно-линейные уравнения ЭЭО. В разделе 2.3 сформулированы линейные структурно-инвариантные уравнения ЭМП, позволявшие выполнить качественный анализ свойств однозначной разрешимости стационарных этих уравнений. Кроме того, сформулированы условия статической определимости стационарных уравнений, что обеспечивается введением САУ частотой с интегральной составляющей по отклонению частоты. В данном разделе будут сформулированы структурно-инвариантные кусочно-линейные дифференциальные уравнения ЭМП, которые позволяют исследовать качественные свойства, необходимые для синтеза корректных моделей ЭЭО.

Исходные корректные (статически определимые) линейные дифференциальные уравнения ЭМП с учетом САУ частотой, полученные в п. 2.3, имеют вид

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ P' \\ \Sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -\bar{T}_a R_\rho & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0 \\ 0 & \bar{T}_\Pi K_\omega & -\bar{T}_\Pi & \bar{T}_\Pi K_\Pi \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{T}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M,$$

которые представляются в векторно-матричной форме

$$x' = A_1 x + B_U u + B_M M, \quad A_1 \triangleq A + B_U K, \quad (30)$$

где $\bar{T}_C K_C K_i \triangleq \tilde{K}_i$, $i = 1, 2$, $\tilde{K}_1 = \text{diag}(\tilde{K}_{1i})_{i=1}^n$, $\tilde{K}_2 = \text{diag}(\tilde{K}_{2i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональные матрицы параметров обратной связи по отклонению частоты и ее интегралу; $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ - матрица обратной связи по вектору $x \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Для определения кусочно-линейных уравнений можно воспользоваться уравнениями ЭЭО типа (26)

$$\begin{aligned}\varphi'_i &= \omega_i, \quad \omega'_i = -\frac{1}{T_{\alpha i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{\alpha i}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \varphi(p_i) - \frac{1}{T_{\alpha i}^2} \mu_i, \\ p'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \varphi(p_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} [-k_{\omega i} \Phi_{\omega}(\omega_i) + \Phi_{\sigma}(\sigma_i)], \\ \sigma'_i &= -\frac{1}{T_{\Pi i}} \Phi_{\sigma}(\sigma_i) + \frac{1}{T_{\Pi i}} u_i, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (31)$$

Уравнения (31) определяют кусочно-линейную систему с координатами состояния, соответствующими координатам состояния уравнений (30). Формирование кусочно-линейных дифференциальных уравнений сводится к формулировке векторных обобщений для системы (31), которые имеют вид:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Omega' \\ P' \\ \Sigma' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -\bar{T}_a R_{\rho} & -\bar{T}_a T_y & \bar{T}_a & 0 \\ 0 & \bar{T}_{\Pi} K_{\omega} & -\bar{T}_{\Pi} & \bar{T}_{\Pi} K_{\Pi} \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 & 0 & -\bar{T}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Omega \\ P \\ \Sigma \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{T}_a \Phi(P) \\ \bar{T}_{\Pi} [-\Phi(P) - K_{\omega} \Phi(\Omega) + \Phi(\Sigma)] \\ -\bar{T}_C \Phi(\Sigma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T}_C K_C \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{T}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M,\end{aligned}\quad (32)$$

Тогда аналогом линейных уравнений (30) является обобщающие уравнения (31) кусочно-линейные дифференциальные уравнения

$$x' = A_1 x + \Phi(x) + B_U u + B_M M, \quad A_1 \triangleq A + B_U K, \quad s = Cx. \quad (33)$$

В уравнениях (32) и (33) кусочно-линейные операторы введены

так, что оператор $\Phi(x)$ соответствует второму слагаемому правой части системы (32), а остальные операторы равны

$$\Phi(P) = \Phi_0(P) - P, \quad \Phi(\Sigma) = \Phi_0(\Sigma) - \Sigma. \quad (34)$$

Эти операторы определяются координатными функциями:

$$\Phi(P) = \{\varphi_{0i}(p_i) - p_i\}_{i=1}^n, \quad \Phi(\Sigma) = \{\varphi_{0i}(\sigma_i) - \sigma_i\}_{i=1}^n,$$

где $\varphi_{0i}(p_i)$, $\varphi_{0i}(\sigma_i)$ – операторы типа «насыщения» данные в табл. 2.4, учитывают ограничения на мощности и на перемещения сервомоторов вторичных регуляторов ЭТА. Представление операторов в форме (34) сохраняет статическую определенность линейной части кусочно-линейной дифференциальной системы уравнений (33), откуда следуют квазистационарные уравнения

$$0 = A_1 x + \Phi(x) + B_U u + B_M M, \quad A_1 \triangleq A + B_U K, \quad s = Cx, \quad (35)$$

Для определения моделей влияния из (35) необходимо решить кусочно-линейную систему (35). Некоторые методы решения этой задачи приведены в п. 2.6.

Таким образом, разработанный комплекс линейных, кусочно-линейных дифференциальных уравнения, включая структурно-инвариантные модели ЭЭО, необходимые для синтеза систем управления частотой и активной мощностью энергетических объединений.

2.6. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При оперативных оценочных расчетах потокораспределения активной мощности в сетях ЭЭО применяются линейные модели ЭМП, определяющие связи между изменениями мощностей регулирующих станций и перетоков активной мощности по линиям. При этом обычно не учитываются нелинейности статических

характеристик элементов системы регулирования ЭА. Такое упрощение оправдано, так как позволяет конструктивно оценить последствия решений, принимаемых при управлении. Однако в ряде случаев использования линейных моделей приводит к неадекватным решениям. Адекватность моделей ЭЭО можно повысить при учете нелинейностей системы регулирования типа «насыщение» и «зона нечувствительности» ЭА. Методика основана на алгебраическом описании нелинейных элементов с помощью алгебраических операторов, которые строятся при использовании кусочно-линейных базисных функций. Негладкий характер сформулированных уравнений определяется использованием при построении нелинейных операторов функций модуля.

В основу описания ЭМП положено уравнение динамики ЭЭО в координатах «частота-мощности», обобщенное за счет учета в рамках предлагаемой методики нелинейностей системы

$$T_a^2 \Omega' + T_y \Omega + s_o = -\Psi_{\Omega}(\Omega) + \Psi_U(U) - M, \quad (1)$$

где $T_a^2 = \text{diag}\{T_{ai}\}$, $T_y = \text{diag}\{T_{yi}\}$ – диагональные матрицы постоянных времени механической инерции роторов эквивалентных агрегатов и постоянных времени успокоения; $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ – вектор отклонения частот вращения энергоагрегатов; $s_o = (s_{o1}, \dots, s_{on})^T$ – вектор отклонения обменных мощностей; $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ – вектор внеплановых нагрузок; n – количество агрегатов ЭЭО.

Вектор $\Psi_U(U) = (\psi_U(U_1), \dots, \psi_U(U_n))^T$ учитывает в (1) ограничения на величины управляющих воздействий, компоненты которого определяются операторами типа «насыщения»:

$$\psi_U(U_i) = (|U_i + a_i| - |U_i - a_i|) / 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

где a_i и $-|a_i|$ – максимальные и минимальные допустимые значения управляющих воздействий вторичного регулирования i -го агрегата. Вектор-функция

$$\Psi_{\omega}(\Omega) = (\psi_{\omega}(\omega_1), \dots, \psi_{\omega}(\omega_n))^T$$

определяет изменения мощностей ЭТА под действием первичных регуляторов скоростей турбин, а компоненты $\psi_{\omega}(\omega_i)$ характеризуют «зоны нечувствительности» первичных регуляторов

$$\psi_{\omega}(\omega_i) = k_{\omega i} [\omega_i - (|\omega_i + b_i| - |\omega_i - b_i|) / 2], \quad i = 1, \dots, n,$$

где b_i – ширина симметричной относительно нуля «зоны нечувствительности»; $k_{\omega i}$ – коэффициенты усиления первичных регуляторов скоростей эквивалентных агрегатов на интервале линейности.

Описание установившихся состояний ЭЭО уравнением (1), где выполнено условие $\Omega' = 0_n$, что приводит к условиям: $\omega = \omega_1 = \omega_2, \dots, \omega_n$ [13]. В результате из (1) следует уравнение

$$T_y \Omega + s_o = -\Psi_{\omega}(\Omega) + \Psi_U(U) - M. \quad (2)$$

Отклонения обменных мощностей определяются равенствами

$$s_o = As, \quad (3)$$

где A – матрица инцидентий узлов и ветвей сети размера $(n \times m)$; $s = (s_1, \dots, s_m)^T$ – вектор отклонения перетоков активной мощности; m – количество линий в сети ЭЭО. С учетом постоянства напряжения сети ($V = \text{const}$) отклонения перетоков равны

$$s_j = \rho_{ig} (\varphi_i - \varphi_g) = \rho_j \varphi_{ig}, \quad i = 1, \dots, m; \quad g = 1, \dots, n,$$

где $\rho_j = V^2 y_j$ – удельная синхронизирующая мощность;

y_j – проводимость j -й линии; φ_{ig} – приведенный к «валу» ЭА относительный угол.

Если угол первого ЭА является базисным, то имеет место равенство $\varphi_{ig} = \varphi_{1g} - \varphi_{1i}$, где φ_{1g} и φ_{1i} – линейно независимые углы. Тогда в матричной форме последнее уравнение примет вид

$$s = PA^T \varphi, \quad (4)$$

где $P = \text{diag}\{\rho_j\}$ – диагональная матрица синхронизирующих мощностей ЛЭП; $\varphi = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n})^T$ – вектор относительных углов эквивалентных агрегатов. С учетом (3) можно получить

$$s = As = APA^T \varphi = R\varphi, \quad R = APA^T.$$

В результате уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$GZ + \Psi_\omega(\omega) = \Psi_U(U) - M, \quad (5)$$

где $G = [T_y | R']$ – числовая матрица размера $(n \times n)$;

$Z \triangleq (\omega, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \dots, \varphi_{1n})^T$ – вектор состояния; R' – матрица размера $[n \times (n-1)]$, представляющая собой матрицу R , в которой исключен столбец, соответствующий базисному (первому) агрегату, так как относительный угол $\varphi_{11} = 0$. Для дальнейшего анализа модели можно выполнить преобразование с помощью матрицы E_{11} такое, что

$$GE_{11} = [T_y | 0_{n \times (n-1)}],$$

где E_{11} – матрица с одним ненулевым элементом, расположенным на пересечении первого столбца и первой строки; $0_{n \times (n-1)}$ – нулевая матрица размера $[n \times (n-1)]$. Используя введенное преобразование, уравнение (5) можно записать следующим образом:

$$(G + E_{\Psi} G E_{11}) Z = \Psi_U(U) - M,$$

где $E_{\Psi} = \text{diag} \{ \psi_{\omega}(\omega_i) \}$ – диагональная матрица с элементами, определяемыми равенствами:

$$\psi_i(\omega) = \psi_{\omega}(\omega) / T_{yi} \omega, \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее матрицу $[G + E_{\Psi} G E_{11}]$ можно представить в виде

$$G + E_{\Psi} G E_{11} = G + G G^{-1} E_{\Psi} G E_{11} = G(E_{n \times n} + G^{-1} E_{\Psi} E_{11}) = G(E_{n \times n} + Y E_{11}),$$

где $E_{n \times n}$ – единичная матрица размера $(n \times n)$; $Y = G^{-1} E_{\Psi} G$ – матрица размера $(n \times n)$ с элементами, зависящими от отклонений частоты в установившемся режиме – ω .

Уравнения (4) и (5) образуют алгебраическую систему

$$G(E_n + Y E_{11}) Z = \Psi_u(u) - M, \quad s = C Z, \quad (6)$$

где $C = [0_n | P A^T]$ – матрица связи между вектором состояния Z и вектором отклонения перетоков активной мощности – s ; 0_n – нулевой вектор размера $(n \times 1)$.

Уравнения (6) представляют собой нелинейные в силу негладкости функций $\psi_{\omega}(\omega)$ и $\psi_u(u)$ уравнений установившегося режима ЭЭО. Из (6) следует что

$$s = \beta(\omega) [\Psi_u(u) - M], \quad \beta(\omega) = C [G(E + Y E_{11})]^{-1}, \quad (7)$$

где $\beta(\omega)$ – однопараметрическая матрица размера $(n \times n)$.

Коэффициенты влияния определяются соотношением

$$\beta^*(\omega) = \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{W=const} = \beta(\omega) Q, \quad (8)$$

где $Q = \text{diag} \{ [\text{sign}(U_i + a_i) - \text{sign}(U_i - a_i)] / 2 \}$. Из равенства (8) следует, что при наличии регулировочного диапазона, т. е. при условиях: $-a_i \leq u_i \leq a_i$, коэффициенты влияния имеют вид:

$$\beta^*(\omega) = C[G(E + YE_{11})]^{-1}.$$

При отсутствии регулировочного диапазона одной из станций соответствующий элемент диагональной матрицы Q равен нулю.

Для определения $\beta^*(\omega)$ с целью сокращения вычислений на каждом шаге оперативного расчета можно представить матрицу $[E + YE_{11}]^{-1}$ в виде $[E - FYE_{11}]$, где F – неизвестная матрица. Тогда справедливо равенство, следующее из определения обратной матрицы, представленного следующим равенством

$$[E + YE_{11}]^{-1} [E - FYE_{11}] = E.$$

Выполнив необходимые преобразования, из последнего равенства можно получить следующее соотношение для матрицы

$$F = E - YE_{11} / (y_{11+1}), \quad (9)$$

где y_{11} – первый элемент матрицы Y .

Тогда матрица коэффициентов влияния примет вид

$$\beta^*(\omega) = C[E - FYE_{11}]G^{-1}. \quad (10)$$

Если не учитывать нелинейность регулятора скорости типа «зоны нечувствительности», то выражение для коэффициентов влияния следует из соотношения (8) при выполнении условия: $k_{\omega}(\omega_i) = k_{\omega i} \omega_i$, $\psi_i(\omega) = k_{\omega i} / T_{yi}$. Тогда коэффициенты влияния определяются равенством:

$$\beta = C(G + K)^{-1}, \quad (11)$$

где K – матрица с ненулевым первым столбцом и элементами: $k_{11} = k_{\omega 1}, \dots, k_{n1} = k_{\omega n}$. Следует отметить, что элементы матрицы α не зависят от текущего режима.

Пример. На рис. 2.9 изображена структурная схема исследуемого энергетического объединения, для которого на рис. 2.10 приведены значения коэффициентов влияния с учетом (а) и без учета (б) нелинейностей регуляторов.

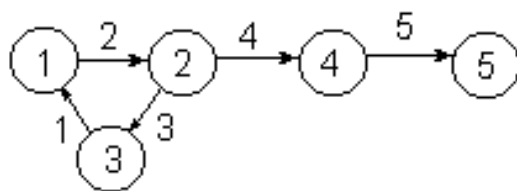


Рис. 2.9. Схема исследуемого энергетического объединения

Параметры нелинейностей $\psi_i(\omega)$ предполагались равными для всех агрегатов. В табл. 2.5 приведены результаты вычислений коэффициентов влияния для первой линии S_1 (рис. 2.9) при использовании коэффициентов типа β и $\beta^*(\omega)$, а также оценки погрешностей, возникающих при отсутствии учета нечувствительности первичных регуляторов ($b_i = 1,5 \text{ c}^{-1}$).

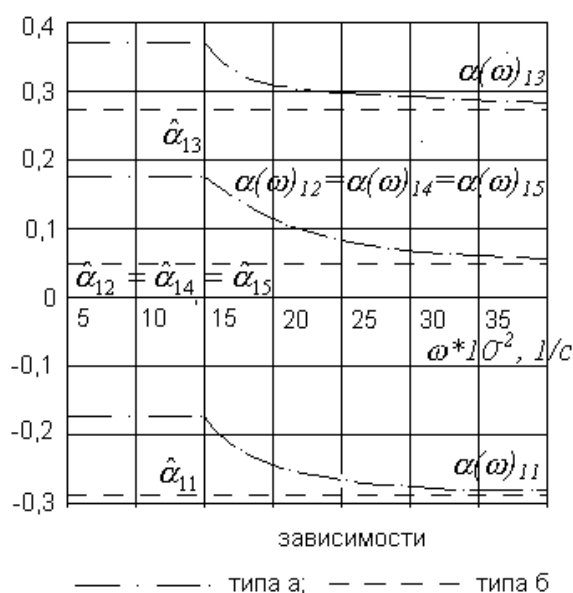


Рис. 2.10. Зависимости коэффициентов влияния от параметров нелинейностей объединения

Таблица 2.5

Результаты исследования моделей влияния

ω_i	$S_1^* = \beta_{11}^* \psi_U(U)$	$S_1 = \beta_{11} \psi_U(U)$	$\delta = \frac{S_1^* - S_1}{S} \cdot 100 \%$
c^{-1}			%
0,1	0,18	0,29	-38
0,15	0,18	0,29	-38
0,20	0,24	0,29	-17
0,25	0,27	0,29	-6,9

Погрешности вычисления потокораспределения в сети ЭЭО имеют место только в режимах при малых отклонениях частоты (в задаче – менее $0,3 \text{ c}^{-1}$). Повысить точность вычислений потокораспределения можно на основе коэффициентов влияния в форме $\beta^*(\omega)$, т. е. учитывающих нелинейности уравнений по частоте. Относительное усложнение расчетов, связанное с вычислением матрицы $\beta^*(\omega)$ по сравнению с матрицей α является несущественным. Можно показать, что объем вычислительной работы для $n = 20$ возрастает не более чем на 10 %. Применение для управления ЭЭО коэффициентов влияния в форме $\beta^*(\omega)$ требует использования дополнительной информации – точного текущего значения ω . Современные цифровые датчики частоты обеспечивают необходимую информацию.

Таким образом, расчет и прогнозирование потокораспределения с помощью кусочно-линейных моделей влияния ЭЭО в режиме малых отклонений частоты обеспечивает уточнение расчета потокораспределения для задач ограничения перетоков потоками активной мощности по ЛЭП.

2.7. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Для синтеза систем управления ЭМП с учетом дискретизации процессов по времени используются уравнения ЭЭО в дискретном времени, сформулированными разностными методами. Модели в дискретном времени, представленные разностными схемами на основе линейных дифференциальных уравнений.

Для линейных уравнений ЭМП энергосистем разностные схемы формулируются на основе аппроксимаций интегралов в интегральных уравнениях, эквивалентных задаче Коши, а также непосредственно на основе формулы Коши.

1. Линейные уравнения ЭЭО в форме «вход-состояния-выход» и явные разностные схемы. Формулировка разностных схем выполняется в следующей постановке.

Постановка задачи. Пусть уравнения ЭМП ЭЭО имеют вид

$$x' = Ax + B_U U + B_M M, \quad S = Cx, \quad (1.a)$$

где матричные параметры определены уравнениями (11.a) – (11.в) в п. 3.3. Базовая структура модели ЭЭО дана в табл. 2.6.

Требуется сформулировать разностные схемы для исследования процессов ограничения перетоков и расчета стационарного потокораспределения в дискретном времени, имеющие вид:

$$x_{k+1} = Hx_k + F_U U_k + F_M M_k, \quad S_k = Cx_k, \quad x_0 = x^0, \quad (1.б)$$

где $k \in \mathbb{N}$ – дискретное время; H , F_U и F_M – матрицы разностных схем; $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор координат состояния; $U_k \in \mathbb{R}^n$, $M_k \in \mathbb{R}^n$ – векторы входных воздействий: управлений или

Таблица 2.6

	Математические модели электромеханических процессов электроэнергетических объединений
Линейные уравнения ЭЭО	$T_{\alpha i}^2 D^2 \varphi^i + T_{y i} D \varphi^i + \sum_{g \in L_i} \rho_{ig} (\varphi^i - \varphi^g) = p^i - \mu^i,$ $(T_{ni} D + 1) p^i = q^i,$ $(T_{ci} D + 1) q^i = -k_{\omega i} D \varphi^i + \sigma_i,$ $(T_{mi} D + 1) \sigma^i = u^i, \quad D \varphi^i = \omega^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$

внеплановых возмущений; $s_k \in R^s$ – вектор выходных координат ЭЭО, включающий отклонение частоты и перетоков от исходных значений. При формулировке разностных схем в правой части (1) будет учитываться только вектор управлений, так как для вектора возмущений разностные схемы формируются аналогично.

Решение задачи. Разностные схемы для линейных моделей (1.а) и (1.б) определяется на основе формулы Коши

$$x(t) = e^{At} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B_U U(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Пусть входные воздействия $U(t)$ являются кусочно-постоянными функциями времени на интервалах $t \in [kh, (k+1)h]$. Тогда из (2) при условии $t_0 = kh$, $t = k(h+1) = t_0 + h$ следует соотношение вида:

$$x[(k+1)h] = e^{Ah} x[kh] + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A(kh+h-\tau)} B_U U[kh] d\tau, \quad (3)$$

Определив сеточные функции равенством $x_k = x(kh)$, можно получить разностную схему, которая с учетом (1) примет вид:

$$x_{k+1} = Hx_k + F_U U_k, S_k = Cx_k, x_0 = x^0, \quad (4)$$

где матрицы определяются равномерно сходящимися рядами

$$H = e^{Ah}, \quad F_U \triangleq \int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} A_Z^k B_U h^{k+1} / (k+1)! .$$

Вычисление интеграла от матричной экспоненты, выполненного на основе равномерно сходящегося ряда, не вносит особенностей в вычисления, связанные с особенностью матрицы A в (2). Вычислительные эксперименты по исследованию разностных схем (4) для модели (1) проводились для ЭЭО типа Единой энергосистемы России, схема которого приведена на рис. 2.1. Матрицы в уравнениях (4), описывающих динамику энергообъединения даны в табл. 2.7.

Структура электроэнергетического объединения учитывает крупные ОЭС – Северо-Запада - «1», Юга – «2», Центра – «4», Урала – «5», Сибири – «6» и Дальнего Востока – «7». В схеме ЭЭО имеется шесть регулирующих станций и пять транзитных ЛЭП. Объект управления описывается уравнениями (1), а матрицы математической модели определяются приведенными выше уравнениями. Модели ЭЭО в различных системах координат определяют линейные разностные уравнения, описывающие динамику в дискретном времени для исследования ограничения потоков активной мощности по линиям электропередач исследуемого ЭЭО.

Таким образом, разработанные линейные разностные схемы для уравнений ЭМП позволяют исследовать динамику потоко-распределения по линиям в замкнутых системах ограничения перетоков активной мощности по ЛЭП и САУ частоты и активной мощности.

Таблица 2.7

	Матрицы линейных уравнений ЭМП Единой энергосистемы России											
Н	0.9900	0.0268	0.0143	0.0176	-0.0404	-0.1136	0.8825	0.0226	0.0084	0.0195	-0.0846	-0.2420
	0.0000	0.9188	0.0001	0.0002	-0.0002	-0.0003	-0.0002	0.6352	0.0002	0.0004	-0.0004	-0.0005
	0.0000	0.0008	0.9189	0.0004	-0.0004	-0.0013	-0.0028	0.0017	0.6350	0.0011	-0.0009	-0.0027
	-0.0005	0.0002	0.0001	0.9179	0.0003	0.0003	-0.0019	0.0008	0.0005	0.6300	0.0006	0.0009
	-0.0001	-0.0244	-0.0150	-0.0158	0.9917	-0.0042	-0.0038	-0.0462	-0.0288	-0.0302	0.7753	-0.0074
	-0.0001	-0.0239	-0.0143	-0.0148	-0.0023	0.0871	-0.0054	-0.0459	-0.0276	-0.0288	-0.0044	0.7700
	0.0019	0.0560	0.0308	0.0367	-0.0766	-0.2150	0.7760	0.0580	0.0259	0.0455	-0.1600	-0.4580
	0.0000	-0.1390	0.0002	0.0003	-0.0003	-0.0004	-0.0003	0.3450	0.0004	0.0006	-0.0007	-0.0008
	-0.0002	0.0012	-0.1390	0.0007	-0.0006	-0.0019	-0.0046	0.0027	0.3450	0.0018	-0.0013	-0.0041
	-0.0009	0.0001	0.0001	-0.1400	0.0005	0.0008	-0.0032	0.0010	0.0007	0.3390	0.0011	0.0019
	-0.0001	-0.0413	-0.0255	-0.0267	-0.0150	0.0073	-0.0066	-0.0787	-0.0487	-0.0513	0.5847	-0.0128
	-0.0001	-0.0405	-0.0242	-0.0249	-0.0039	-0.0232	-0.0094	-0.0779	-0.0469	-0.0488	-0.0077	0.5756
Ф	0.1757	0.1065	0.1069	0.1075	0.0267	0.0182	0.0697	-0.0367	-0.0001	-0.0004	0.0001	0.0000
	0.0690	-0.0006	-0.0545	-0.0009	0.0003	0.0002	0.0684	-0.0016	-0.0015	-0.0583	-0.0002	-0.0001
	0.0598	-0.0093	-0.0080	-0.0094	-0.0454	-0.0013	0.0620	-0.0073	-0.0057	-0.0068	-0.0015	-0.0112
	0.3231	0.2058	0.2065	0.2073	0.0547	0.0373	0.1191	-0.0627	-0.0001	-0.0007	0.0002	0.0001
	0.1175	-0.0014	-0.0932	-0.0019	0.0005	0.0004	0.1165	-0.0029	-0.0028	-0.0995	-0.0004	-0.0001
	0.1023	-0.0158	-0.0136	-0.0158	-0.0839	-0.0024	0.1062	-0.0122	-0.0095	-0.0013	-0.0027	-0.0207
С	0.000	-0.031	-0.022	-0.020	-0.007	-0.020	-0.020	-0.031	-0.022	-0.020	-0.007	-0.020;
	0.000	0.162	-0.042	-0.040	-0.013	-0.037	-0.037	0.162	-0.042	-0.040	-0.013	-0.037;
	0.000	-0.042	0.122	-0.028	-0.008	-0.022	-0.042	-0.042	0.122	-0.028	-0.008	-0.022;
	0.000	0.092	-0.092	0.058	-0.028	-0.079	-0.002	0.092	-0.092	0.058	-0.028	-0.079;
	0.000	-0.079	0.100	-0.051	-0.015	0.086	-0.001	-0.079	0.100	-0.051	-0.015	0.086

Можно получить необходимые или достаточные оценки первого приближения для исследования асимптотической устойчивости в различных режимах работы линий и станций электроэнергетических объединений.

2.8. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Анализ и синтез систем автоматического управления ЭЭО (САУ ЭЭО) с типовыми нелинейными элементами требуют адаптации частично-неявных методов численного интегрирования кусочно-линейных дифференциальных уравнений к моделям энергообъединений. В настоящее время известны методы сопряжения (припасовывания) решений, обобщенных функций, подбора корней получили дальнейшее развитие.

Используются неявные методы для семейства линейных (в пределах каждой области) уравнений требуют дополнительных вычислительных затрат при переходе с участка на участок статической характеристики нелинейностей.

1. Кусочно-линейные уравнения и разностные схемы для анализа ЭЭО. В табл. 2.8 даны кусочно-линейные дифференциальные уравнения ЭЭО общего вида, используемые при управлении частотой и активной мощностью. Для уравнений данного типа необходимо создание адекватных разностных схем для анализа переходных процессов и моделирования динамики замкнутых систем АРЧМ. Методика разработки различных классов разностных схем приведена ниже.

Частично-неявные разностные для анализа ЭЭО. Подход к анализу кусочно-линейных уравнений общего вида базируется на методике исследования систем с сепарабельной правой частью. Разностные схемы учитывают начальные условия, класс уравнений и допускают модификации для уменьшения погрешностей решения. Кусочно-линейные уравнения имеют вид

$$x' = A\Phi(x) + B\Phi(u), \quad x(0) = x^0, \quad y = C\Psi(x) + D\Psi(u), \quad (1)$$

Таблица 2.8

	Кусочно-линейные дифференциальные уравнения электромеханических процессов электроэнергетических объединений
Кусочно- линейные уравнения ЭЭО	$\dot{\varphi}^i = \omega^i,$ $\dot{\omega}^i = \left[-\sum_{g \in L_i} \rho_{ig} (\varphi^i - \varphi^g) + \varphi(p^i) - \mu^i \right] / T_{\alpha i}^2,$ $\dot{\rho}^i = \left[-\varphi(\rho^i) + \varphi(q^i) \right] / T_{ni},$ $\dot{q}^i = \left[-\varphi(q^i) - k_{\omega i} \varphi(\omega^i) + \varphi(\sigma^i) \right] / T_{ci},$ $\dot{\sigma}^i = \left[-\varphi(\sigma^i) + u^i \right] / T_{ni},$ $\varphi(\omega^i) = \omega^i (\omega^i + z_i - \omega^i - z_i) / 2,$ $\varphi(p^i) = p_-^i + (p^i - p_-^i - p^i - p_+^i) / 2,$ $\varphi(q^i) = q_-^i + (q^i - q_-^i - q^i - q_+^i) / 2,$ $\varphi(\sigma^i) = \sigma_-^i + (\sigma^i - \sigma_-^i - \sigma^i - \sigma_+^i) / 2.$

где $x = (x^1, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$, $U = (u^1, \dots, u^n)^T \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояний и управлений; A, B – размеров. В системе (1) операторы $\Phi(x) = (\varphi(x^1), \dots, \varphi(x^n))^T \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(U) = (\varphi(u^1), \dots, \varphi(u^n))^T \in \mathbb{R}^m$ – операторы с кусочно-линейными функциями (табл. 2.4):

$$\varphi(z) = a_0 + \alpha_0 z + \sum_{l=1}^S \alpha_l (z + a_l + |z + a_l|) / 2, \quad (2)$$

определяющими уравнения ЭЭО, данные в табл. 2.8. Переменная z в (2) равна x^j или u^j , а остальные величины – параметры.

2. Методика формулировки разностных схем. Системе (1) соответствует система скалярных дифференциальных уравнений

$$x'^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi(x^j) + \sum_{j=1}^m b_{ij} \varphi(u^j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Определение. Система типа (3) называется *системой общего вида*, если в i -м уравнении оператор $\varphi(x^i)$ определяется равенством (2), в котором не все $\alpha_l = 0$, $l = 1, \dots, s$.

Метод неявного типа формируется на основе системы интегральных уравнений, эквивалентных задаче Коши (1)

$$x^i(t) = x^i(0) + \int_0^t a_{ii} \varphi(x^i(\tau)) d\tau + \int_0^t \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \varphi(x^j(\tau)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} \varphi(u^j(\tau)) \right] d\tau. \quad (4)$$

Следуя процедуре формирования *частично неявных методов* и учитывая специфику уравнения (3), целесообразно в i -м уравнении (4) вычислить интегралы, зависящие от x^j по методу правых прямоугольников, а интегралы, зависящие от x^j , $j \neq i$ – по методу левых прямоугольников. Интегралы, зависящие от формируемых ЭВМ кусочно-постоянных управлений – u^j , также необходимо вычислить по методу левых прямоугольников. Тогда при условии $t = h$, где h – шаг интегрирования (4), можно получить следующие равенства:

$$x^i(h) = x^i(0) + h a_{ii} \varphi(x^i(h)) + h \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \left(\varphi(x^j(0)) \right) + h \sum_{j=1}^m b_{ij} \varphi(u^j(0)). \quad (5)$$

Значение сеточной функции $x^i(h)$ вычисляется из (5) введением нелинейного оператора типа (2):

$$\psi_i(x^i(h)) = x^i(h) + ha_{ii}\varphi_i(x^i(h)),$$

который *монотонно-возрастающий оператор*, если $\varphi_i(x^i(h))$ – монотонно-возрастающий, и кроме этого $a_{ii} < 0$. Тогда, записав уравнения (5) в виде

$$\psi_i(x^i(h)) = x^i(0) + h \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(\varphi(x^j(0))) + h \sum_{j=1}^m b_{ij}\varphi(u^j(0)), \quad (6)$$

и применив к обеим частям уравнения (6) левый обратный оператор ψ_i^{-1} для оператора ψ_i , можно получить разностную схему частично-неявного типа

$$\bar{x}_{k+1}^i = \psi_i^{-1} \left[x_k^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n H_{ij}\varphi(x_k^j) + \sum_{j=1}^m F_{ij}\varphi(u_k^j) \right], \quad (7)$$

где $\bar{x}_{k+1}^i = x^i(h)$, $x_k^j = x^j(0)$, $u_k^j = u^j(0)$, а параметры определяются следующими равенствами: $H_{ij} = ha_{ij}$, $F_{ij} = hb_{ij}$.

Значения $\bar{x}_{k+1}^i$ можно уточнить, если в i -м уравнении системы (5) для вычисления интегралов, зависящих от x^j , $i \neq j$, воспользоваться формулами типа трапеций, положив $x^i(h) = \bar{x}_{k+1}^i$. В результате можно получить разностные схемы

$$\bar{x}_{k+1}^i = \psi_i^{-1} \left[x_k^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n H_{ij} \left(\varphi(x_k^j) + \varphi(x_{k+1}^j) \right) / 2 + \sum_{j=1}^m F_{ij}\varphi(u_k^j) \right], \quad (8)$$

где x_{k+1}^i вычисляются с помощью (7). Соотношения (7) и (8) определяют аналогом частично-неявного метода второго порядка. Точность анализа процессов можно повысить, если вычислить интегралы (4) зависящие от координат x^i , по методу трапеций.

В результате можно определить сеточные функции разностной схемы следующим соотношением

$$x^i(h) = x^i(0) + ha_{ii} \left[\varphi(x^i(0)) + \varphi(x^i(h)) \right] / 2 + \\ + h \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n a_{ij} \varphi(0) + \sum_{j=1}^m b_{ij} \varphi(u^j(0)), \quad (9)$$

введя $\tilde{\psi}_j^{-1}(z)$ и используя обозначения, принятые в (7). Оператор $\tilde{\psi}_j^{-1}(z)$ вычисляется аналогично оператору $\psi_j^{-1}(z)$, если заменить h на $h/2$. Для уточнения значений $\bar{x}_{k+1}^i$ можно воспользоваться формулами для разностной схемы

$$x_{k+1}^i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \left(\varphi(x_k^j) + \varphi(\bar{x}_{k+1}^j) \right) / 2 + \sum_{j=1}^m F_{ij} \varphi(u_k^j), \quad (10)$$

где координата $\bar{x}_{k+1}^i$ вычисляются на основе равенства (9).

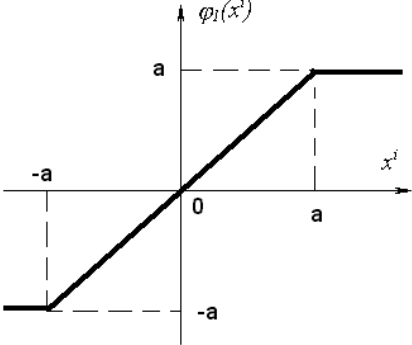
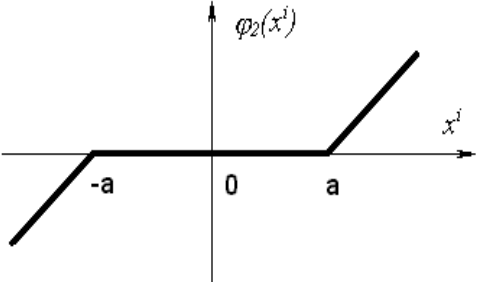
Соотношения (9) и (10) определяют **частично-явный метод типа трапеций**. Используемые в (7), (8) и (9), (10) обратные операторы можно вычислить аналитически, основываясь на следующем утверждении. Для оператора $\psi(z)$ вида (2), построенного по системе узлов $\{a_l\}_{l=1}^s$, обратный оператор $\psi^{-1}(z) = z(\psi)$ можно также представить в (2) по множеству узлов $\{\psi(a_l)\}_{l=1}^s$. Параметры $\psi^{-1}(z)$ определяется системой $(s+2)$ равенств

$$\psi^{-1}[\psi(a_l)] = a_l, \quad l = 1, 2, \dots, s;$$

$$\psi^{-1}(\bar{c}) = \max_l a_l + \delta, \quad \psi^{-1}(\underline{c}) = \min_l a_l - \delta, \quad 0 < \delta < \infty,$$

где $\bar{c} = \psi\left(\max_l a_l + \delta\right)$, $\underline{c} = \psi\left(\min_l a_l - \delta\right)$ для монотонно-возрастающего оператора $\psi(z)$, а если $\psi(z)$ — монотонно-убывающий оператор, то $\bar{c} = \psi\left(\min_l a_l - \delta\right)$, $\underline{c} = \psi\left(\max_l a_l + \delta\right)$.

Таблица 2.9

Операторы звеньев	Обратные операторы $\psi_i^{-1}(x^i)$ частично-явных разностных схем
 $\phi_1(x^i) = (x^i + a - x^i - a) / 2$ $\psi_i(x^i) = x^i - ha_{ii}\phi_1(x^i)$	$\psi_i^{-1}(x^i) = x^i(\psi) =$ $= \psi_i + H_i(\psi_i - a(1 + H_i) - \psi_i + a(1 + H_i)) / (2(1 + H_i)),$ $H_i = -ha_{ii}, \quad a_{ii} < 0$
 $\phi_2(x^i) = x^i - (x^i + a - x^i - a) / 2$ $\psi_i(x^i) = x^i - ha_{ii}\phi_2(x^i)$	$\psi_i^{-1}(x^i) = x^i(\psi) =$ $= \psi_i / (1 + H_i) + H_i(\psi_i + a - \psi_i - a) / (2(1 + H_i)),$ $H_i = -ha_{ii}, \quad a_{ii} < 0$

Операторы ψ^{-1} для двух операторов $\phi(x)$ даны в табл. 2.9, из анализа которых следует, существование ψ^{-1} для неубывающих $\phi(x)$. Кусочно-постоянные управления в (7), (8) и (9), (10) могут

учитывать особенности широкого класса объектов, управляемых ЭВМ. Для систем оптимальной нелинейной стабилизации вектор $U_k = KX_k$, причем матрица K определяется из необходимых условий, а для систем локальной оптимизации U_k пропорционален проекции градиента функционала, определяемой проекторами с координатными функциями вида (2), зависящими от типов допустимых областей. Вычислительный опыт показывает, что для устойчивых систем (1) выбор шага из условия:

$$h \leq \left(10 \max_i \left| a_{ii} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(x^i + \delta)}{\delta} \right| \right)^{-1}$$

обеспечивает устойчивость разностных схем.

Пример. Оценки погрешности и методика формирования разностных схем рассматриваются на примере решения задачи Коши для уравнения с оператором «насыщение» (табл. 2.9):

$$x'^1 = -2x^2, \quad x'^2 = x^1 - 3\varphi(x^2), \quad \varphi(x^2) = (|x^2 + 1| - |x^2 - 1|) / 2,$$

Соотношения (7), (8) при $h = 0,25$ записываются в форме:

$$\bar{x}_{k+1}^1 = x_k^1 - x_k^2, \quad \bar{z} = x_k^1 / 4, \quad \bar{x}_{k+1}^2 = \psi^{-1}_2(\bar{z}), \quad x_{k+1}^1 = x_k^1 - (x_k^2 + x_{k+1}^2) / 4, \\ z = (x_k^1 + x_{k+1}^1) / 8 + x_k^2, \quad x_{k+1}^2 = \psi^{-1}_2(z),$$

где функция $z = \psi_2^{-1}(q) = q + 0,214(|q - 1,75| - |q + 1,75|)$.

Частично-неявная разностная схема типа (9), (10) имеет вид:

$$\bar{x}_{k+1}^1 = x_k^1 - x_k^2 / 2, \quad \bar{z} = x_k^2 - x_k^1 / 4 - 0,375\varphi(x_k^2), \quad \bar{x}_{k+1}^2 = \tilde{\psi}_2^{-1}(\bar{z}); \\ x_{k+1}^1 = x_k^1 - (x_k^2 + \bar{x}_{k+1}^2) / 4, \quad x_{k+1}^2 = x_k^2 (x_k^1 + x_{k+1}^1) + 0,375[\varphi(x_k^2) + \varphi(\bar{x}_{k+1}^2)],$$

где функция $\tilde{\psi}_2^{-1}(\bar{z}) = \bar{z} + 0,136(|\bar{z} - 1,375| - |\bar{z} + 1,375|)$. При выборе шага с учетом приведенного выше условия имеет место

устойчивость разностной схемы для рассматриваемой системы. Изменения относительной погрешности для (7), (8) и (9), (10) (соответственно зависимости 1 и 2 на рис. 2.11) показывает, что применение (9), (10) позволяет уменьшить погрешность до 1 % без уменьшения шага. На рис. 2.11 использованы обозначения: величина относительной погрешности решений

$$\delta x^i = \left(\left| x_k^i - x_a^i(t) \right| / \max_{t \in [0,3]} \left| x_a^i(t) \right| \right) \cdot 100\%, \quad i = 1, 2,$$

для схем типа (7), (8) и (9), (10); функции $x_a^i(t)$, $i = 1, 2$ соответствуют аналитическим решениям задачи Коши для следующих начальных условий $x^1(0) = 1,0$; $x^2(0) = -1,0$.

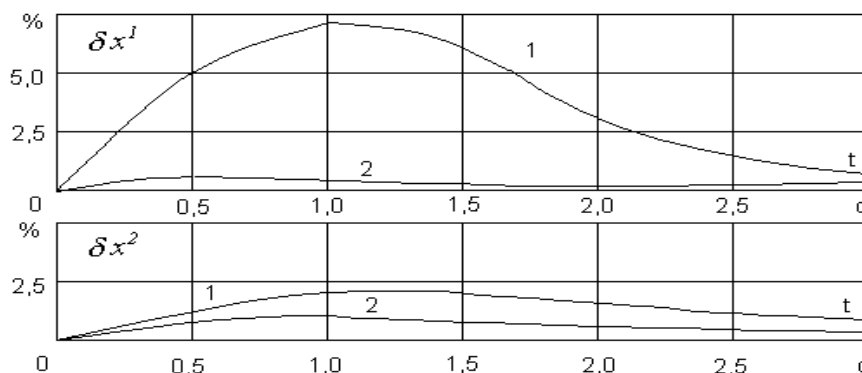


Рис. 2.11. Переходные процессы в кусочно-линейной системе

При выполнении условий $\varphi(q) = q$ в уравнениях ЭЭО (нижняя часть табл. 2.8) разностные схемы для решения задачи Коши приведены в табл. 2.10.

Экспериментальные исследования разностных схем подтвердили их работоспособность для энергообъединений, состоящих из 20-25 эквивалентных агрегатов (порядок уравнений равен 100 и более).

Разностные схемы для анализа электромеханических процессов на основе кусочно-линейных уравнений ЭЭО

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}^i &= \varphi_k^i + h\omega_k^i, \\ \omega_{k+1}^i &= \left(1 + hT_{yi} / T_{ai}^2\right)^{-1} \left(\omega_k^i + h \left(- \sum_{g \in L_i} \rho_{is} \left(\varphi_k^i - \varphi_k^g \right) + \varphi \left(p_k^i \right) - \mu_k^i \right) / T_{ai}^2 \right) \\ p_{k+1}^i &= z_k^i - h \left(|z_k^i + \ddot{p}_i (1 + h / T_{ni})| - |z_k^i - \ddot{p}_i (1 + h / T_{ni})| \right) / 2T_{ni} (1 + h / T_{ni}), \\ q_{k+1}^i &= \left(q_k^i + h \left(-k_{\omega i} \varphi \left(\omega_k^i \right) + \sigma_k^i \right) / T_{ci} \right) / (1 + h / T_{ci}), \\ \sigma_{k+1}^i &= \left(\sigma_k^i + hu_k^i \right) / (1 + h / T_{ni}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ z_k^i &= p_k^i + hq_k^i / T_{ni}, \quad \ddot{p}_i = p_+^i = -p_+^i\end{aligned}$$

Таким образом, математические модели и разностные схемы для уравнений энергосистем позволяют их использовать для развития методов анализа и синтеза систем управления частотой и активной мощностью.

2.9. УСТОЙЧИВОСТЬ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Разностные схемы для анализа переходных процессов в электроэнергетических системах формируются на основе аппроксимации решений эквивалентных интегральных уравнений для задач Коши и других подходах. Исследуется также устойчивость разностных схем.

1. Кусочно-линейные разностные схемы ЭМП ЭЭО. Разностные кусочно-линейные схемы будут формулироваться в следующей постановке.

Постановка задач. Пусть кусочно-линейные дифференциальные уравнения ЭМП представлены в канонических формах, сформулированных в [79]

$$x' = A\Phi(x) + B_U\Phi(U) + B_M\Phi(M), \quad S = Cx, \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где координаты и матричные параметры процессов в ЭЭО частично определены выше, а классы нелинейных элементов и их параметры задаются в канонической форме.

Требуется для системы кусочно-линейных дифференциальных уравнений ЭМП сформулировать разностные схемы

$$x_{k+1} = R\left[A, \Phi(x_k), B_U, \Phi(U_k), B_M, \Phi(M_k)\right], \quad S_k = Cx_k, \quad x_0 = x^0,$$

и исследовать условия асимптотической устойчивости в нормированном пространстве состояний с нормой элементов, определенных равенством

$$\|x\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Решение задачи. Методика формулировки разностных схем и анализ условий их устойчивости иллюстрируется далее.

Теорема 1 [79]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Задача Коши для кусочно-линейной системы имеет вид:

$$x'^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{ij}(x^j), \quad x^i(0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\varphi_{ii}(x^i) = x^i$, $|\varphi_{ij}(x^j)| \leq L_{ij}|x^j|$, $\varphi_{ij}(0) = 0$, причем исследуется устойчивость нулевого решения $x(t) = 0$

2. Разностная схема для анализа переходных процессов в кусочно-линейных дифференциальных системах представляется системой разностных уравнений (разностными схемами)

$$x_{k+1}^i = \left[x_k^i + h \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \varphi_{ij}(x_k^j) \right] (1 - h a_{ii})^{-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда нулевое решение $x_*^i = 0$ разностной схемы асимптотически устойчиво при выполнении условий

$$a_{ii} < 0, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| L_{ij}, \quad h > 0$$

Таким образом, при определенных ограничениях на параметры в виде условий «диагонального преобладания» разностная схема асимптотически устойчива для любого шага h . В некоторых исследованиях аналогичные условия называются условиями «сверхустойчивости». Имеются другие способы построения разностных схем, обладающих свойством условной устойчивости при любом шаге.

Ниже рассматриваются такие разностные схемы решения задачи Коши для кусочно-линейных уравнений ЭЭО и условия их устойчивости, которые используются для анализа процессов. Рассмотренные разностные схемы могут быть обобщены для анализа процессов при ненулевых входных воздействиях.

Теорема 2 [79]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Задача Коши для кусочно-линейной системы имеет вид

$$x'^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{ij}(x^j), \quad x^i(0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\varphi_{ii}(x^i) = x^i$, причем $\varphi_{ij}(0) = 0$, $|\varphi_{ij}(x^j)| \leq L_{ij} |x^j|$, где постоянные Липшица удовлетворяют условиям $L_{ij} \in R_+^1 = \{L \mid L > 0\}$.

Исследуется устойчивость решения $x(t) = 0$.

2. Разностная схема для исследуемой кусочно-линейной дифференциальной системы представлена уравнениями

$$x_{k+1}^i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \varphi_{ij}(x_k^j), \quad x_{k0}^j = x_0^j, \quad i = \overline{1, n},$$

где параметры разностной схемы определяются равенствами:
 $H_{ii} = e^{a_{ii}h}$, $H_{ij} = (H_{ii} - 1)a_{ij} / a_{ii}$.

Тогда условия асимптотической устойчивости разностной схемы для решения $x'^i = 0$ имеют вид:

$$a_{ii} < 0, \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_{ij}, \quad h > 0.$$

Условия асимптотической устойчивости для случая $L_{ij} = 1$ включают условия типа Адамара для матриц кусочно-линейной дифференциальной системы.

Рассмотрим устойчивость обобщенных разностных схем для анализа процессов в ЭЭО со специальными нелинейностями.

Теорема 3 [79]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Задача Коши для кусочно-линейных объектов представлена соотношениями для кусочно-линейных уравнений:

$$x' = A\Phi(x) + B\Phi(u), \quad x(0) = x_0,$$

2. Разностная схема для задачи Коши имеет вид:

$$x_{k+1} = \Psi[x_k, \Phi(x_k), \Phi(u_k), h],$$

где оператор разностной схемы определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \Psi\{z_k\} &= \bar{\Phi}^{-1} \left\{ \bar{A}^{-1} [x_k + hA_2\Phi(x_k) + hB\Phi(u_k)] \right\} = \\ &= \left[\bar{\varphi}_1^{-1}(z_k^1), \dots, \bar{\varphi}_i^{-1}(z_k^i), \dots, \bar{\varphi}_n^{-1}(z_k^n) \right], \quad \bar{A} = \text{diag}(a_{ii}). \end{aligned}$$

Тогда аргументы координатных функций обратного оператора определяются равенствами

$$z_k^i \triangleq \left\{ \bar{A}^{-1} [x_k + hA_2\Phi(x_k) + hB\Phi(u_k)] \right\}_k^i.$$

При этом $\Psi\{z_k\} = \bar{\Phi}^{-1}\{z_k\}$ – оператор, обратный для кусочно-линейного оператора $\bar{\Phi}(\cdot)$, имеющий монотонные координатные

функции, определенные, например, функциями вида:
 $\bar{\varphi}_i(x_k^i) \triangleq x_k^i + h\bar{a}_{ii}\varphi(x_k^i)$. Однако последнее условие не является обязательным, поэтому условия могут быть обобщены.

3. Пусть стационарная точка x_* разностной схемы единственна при условии: $u_k = u_* = const, k \in [0, \infty)$, определяется исследуемой разностной схемой и удовлетворяет системе кусочно-линейных алгебраических уравнений

$$x_* = \bar{\Phi}^{-1}[z_*] = \bar{\Phi}^{-1}\left\{\bar{A}^{-1}\left[x_* + hA_2\Phi(x_*) + hB\Phi(u_*)\right]\right\},$$

причем операторы системы и разностной схемы удовлетворяют условию Липшица:

$$\|\bar{\Phi}^{-1}[z'] - \bar{\Phi}^{-1}[z'']\| \leq L_1\|z' - z''\|, \quad \|\Phi_x[y'] - \Phi_x[y'']\| \leq L_2\|y' - y''\|.$$

Тогда стационарная точка схемы x_* устойчива, если:

$$0 < h < \left\{ \left[L_1(\|\bar{A}^{-1}\|) \right]^{-1} - 1 \right\} / \|A_2\| L_2, \quad L_1^{-1}(\|\bar{A}^{-1}\|)^{-1} > 1. \quad (2)$$

Доказательство. Для доказательства рассматриваются соотношения для норм элементов x конечномерного пространства. Тогда имеют место совокупность соотношений:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\| &= \|\Psi\{z_k\} - \Psi\{z_*\}\| \leq \\ &\leq \|\bar{\Phi}^{-1}\{\bar{A}^{-1}[x_k + hA_2\Phi(x_k) + hB\Phi(u_*)]\} - \\ &- \bar{\Phi}^{-1}\{\bar{A}^{-1}[x_* + hA_2\Phi(x_*) + hB\Phi(u_*)]\}\| = \\ &\leq \|\bar{\Phi}^{-1}\{z_k\} - \bar{\Phi}^{-1}\{z_*\}\| \leq L_1\|z_k - z_*\| \leq \\ &\leq L_1\|\bar{A}^{-1}[x_k + hA_2\Phi(x_k) + hB\Phi(u_*)] - \\ &- \bar{A}^{-1}[x_* + hA_2\Phi(x_*) + hB\Phi(u_*)]\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L_1 \| \bar{A}^{-1} \| \cdot [\| x_k - x_* \| + h \| A_2 \| L_2 \| x_k - x_* \|] \leq \\ &\leq L_1 \| \bar{A}^{-1} \| \cdot [1 + h \| A_2 \| L_2] \cdot \| x_k - x_* \| . \end{aligned}$$

Тогда из приведенной совокупности соотношений следует неравенство

$$\| x_{k+1} - x_* \| \leq L_1 \| \bar{A}^{-1} \| \cdot [1 + h \| A_2 \| L_2] \cdot \| x_k - x_* \| ,$$

из которого следует условие сжатия для оператора разностной схемы, которое принимает вид:

$$L_1 \| \bar{A}^{-1} \| \cdot [1 + h \| A_2 \| L_2] < 1 ,$$

определяющее утверждение теоремы.

Рассмотренные разностные схемы порождают соответствующие процедуры для линейных систем. Эти схемы могут использоваться при анализе и синтезе в качестве дискретных аналогов непрерывных линейных и кусочно-линейных дифференциальных систем, представляющих модели объектов.

Таким образом, рассмотренные разностные схемы и методика доказательства устойчивости кусочно-линейных разностных схем позволяет исследовать определенные классы разностных схем для кусочно-линейных дифференциальных уравнений.

2.10. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Математические модели электромеханических процессов позволяют разработать необходимый комплекс моделей для анализа переходных процессов ЭЭО, вычисления управлений и исследования замкнутых систем управления частотой и активной мощностью энергетических объединений. Анализ результатов по разработке и исследованию математических моделей электро-энергетических систем позволил установить необходимость

обобщения и разработки *нелинейных математических моделей в физических переменных* для учета типовых нелинейностей звеньев генерирующих узлов ЭЭО.

2. Линейные модели типа «вход-состояние-выход» с физическими координатами вектора состояния позволяют разработать комплекс обобщенных и асимптотических кусочно-линейных дифференциальных уравнений с учетом типовых нелинейностей звеньев генерирующих станций (узлов сети).

3. Разработанные методы уменьшения размера вектора состояния для асимптотических моделей на основе регулярных разложений и принципа «квазистационарности состояний» (по определенным группам компонент вектора состояния) позволяют сформулировать комплекс математических моделей для приближенного анализа переходных процессов на основе асимптотических моделей для линейных и кусочно-линейных уравнений состояния ЭЭО.

4. Разработанные обобщенные модели для вычисления квазистационарных характеристик позволяют формировать квазистатические характеристики асимптотически устойчивых подсистем ЭЭО на основе регулярных вычислительных процедур определения резольвенты линейных дифференциальных операторов.

5. Комплекс квазистационарных математических моделей ЭЭО на основе сингулярных дифференциальных уравнений ЭМП с учетом асимптотической устойчивости и устойчивости по Ляпунову, сформированный для расчета, прогнозирования и управления потокораспределением активной мощности по ЛЭП, включает квазистационарные асимптотически эквивалентные модели и предельно-корректные асимптотические модели объекта для синтеза управлений частотой и активной мощностью. Математическое моделирование ЭЭО как объекта управления и замкнутой

системы управления целесообразно на основе создания моделей в физических переменных, описываемых линейными или кусочно-линейными уравнениями в пространстве состояний. Различные требования к точности моделирования электромеханических процессов определяют целесообразность разработки комплекса *асимптотических моделей* объекта управления, позволяющих понизить порядок описывающих уравнений за счет пренебрежения динамикой процессов в отдельных звеньях генерирующих станций. Подобные классы моделей могут быть получены на основе развития методов «эквивалентирования».

6. Разработанные математические модели ЭМП ЭЭО для дискретного времени в виде разностных схем (уравнений) для линейных и кусочно-линейных дифференциальных уравнений позволяют исследовать замкнутые системы управления с учетом специфики цифрового управления частотой и активной мощностью ЭЭО.

Таким образом, анализ ЭЭО как объекта управления и рассмотрение подходов к синтезу систем управления частотой и активной мощностью позволяет сделать вывод о необходимости разработки *обобщенных математических моделей* для синтеза в классе локально-оптимальных систем. При этом задача определения оптимального управления должна быть решена с применением *операторов конечномерной оптимизации*, что обеспечит разработку моделей замкнутой системы управления в аналитической форме для исследования качественных свойств. В связи с нелинейностью уравнений ЭЭО и законов управления замкнутая система управления описывается нелинейными уравнениями с операторами оптимизации, что приводит к необходимости применения методов функционального анализа и теории устойчивости для анализа и синтеза.

3. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ И УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ ЭНЕРГОСИСТЕМ И ОБЪЕДИНЕНИЙ

3.1. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Развитие систем управления частотой и активной мощностью энергообъединений происходит в связи с ростом уровня требований к технологическим режимам управления электромеханическими процессами. Это обстоятельство требует развития методов и алгоритмов классических систем АРЧМ.

1. Методы ограничения перетоков и управления частотой активной мощностью. Управление строится на основе *«принципа разделения плановых и внеплановых активных нагрузок энергосистем»*, что характерно для большинства объединений ЕЭС СССР и России, кроме особенностей энергосистемы Украины. К настоящему времени утверждена Концепция регулирования частоты и перетоков в ЭЭО стран Балтии и СНГ [117] требования к качеству первичного и вторичного регулирования частоты [160].

Цифровая система оперативного управления Единой энергосистемой СССР по частоте и активной мощности создавалась с помощью управляющих вычислительных машин. Регулирование частоты осуществлялось выделенными генерирующими мощностями. Кроме этого, частота и обменная мощность ОЭС могут регулироваться по *методу Гранера и Даррье* [205,206] (Германия, 1934 г.). Ограничение перетоков активной мощности реализовано на основе *«метода коэффициентов распределения»*

[53,54,132,141], разработанного ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект» (г. Москва) и ЛПИ им. М.И. Калинина [53,54,77-79,83] в 1973-1975 гг. Для управления перетоками предложен **«метод коэффициентов влияния»**, разработанный в 1975 г. в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина [79,24-27,30] (1975 г.). Метод обобщен в последующие годы за счет учета отклонений частоты в ряде исследований [64,93-99,106-112,115,116]. Метод дополняет и развивает комплекс исследований, описанных в работах [1,10,14,19,38,45,69,166,172].

Классические системы управления частотой и активной мощностью ЭЭО используют типовые законы управления, дополненные алгоритмическими требованиями для ведения режимов при изменяющихся условиях. К ним относятся изменения структур генерирующих мощностей, электрической сети, состояния телемеханики и вычислительных средств. Автоматическое регулирование частоты и активной мощности должно обеспечивать: *поддержание частоты с отклонениями не более 0,1 Гц и подавление 70 % амплитуды колебаний перетока мощности с периодом не более 2 минут* [159,160]. Система должна обеспечить:

- **ограничение перетоков** активной мощности по ЛЭП;
- **регулирование частоты и обменной мощности** ОЭС;
- реализацию функций **предаварийного управления** частотой и активной мощностью.

Классическое ограничение перетоков активной мощности по ЛЭП реализовано в форме пропорционально-интегрального закона регулирования с учетом алгоритмических особенностей, определяемых режимами ОЭС. На первых этапах исследования (1971-1975 гг.) использовались методы математического моделирования электромеханических процессов на цифро-аналоговых комплексах (ЦАК). Исследование алгоритмов управления,

статике и динамике замкнутой системы на ЦАК выполнено методами математического моделирования. Применение ЦАК для математического моделирования при разработке и исследовании сложных многосвязных систем с цифровыми управляющими машинами позволило эффективно решать вопросы анализа и синтеза автоматических систем, аналитическое исследование которых невозможно без упрощений, которые доставляют существенные отклонения между модельными и реальными результатами.

Электроэнергетические объединения как объекты управления с классическими алгоритмами управляющего устройства анализировались методами классической теории управления. Применение математического моделирования позволило получить первые результаты исследования алгоритмов, статике и динамике системы в целом на примере конкретных энергетических объединений. В работе исследуются энергетические объединения, состоящие из шести энергосистем (ЭС), соединенных между собой пятью ЛЭП в соответствии со схемой, данной на рис. 3.1.

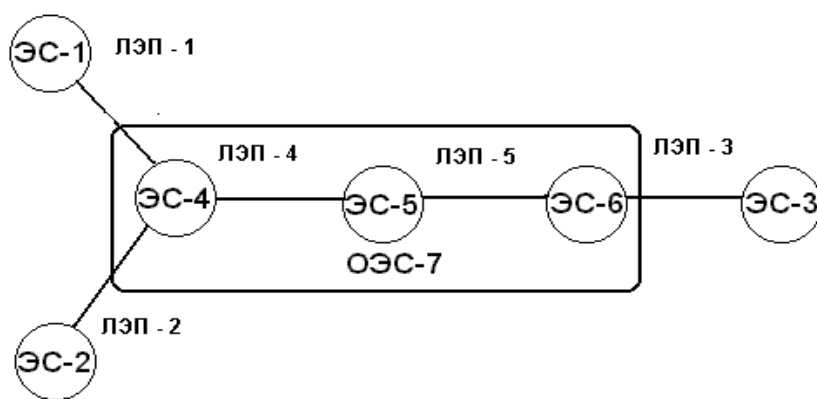


Рис. 3.1. Обобщенная схема структуры ЕЭС России для анализа классических методов и алгоритмов СОП по ЛЭП и САУ частоты и мощности

Регулирование частоты и обменной мощности реализовано в ОЭС-1, ОЭС-2, ОЭС-3, состоящей из ЭС-1, ЭС-2, ЭС-3, соответственно, а также в ОЭС-7, состоящей из ЭС-4, ЭС-5, ЭС-6. Все энергетические системы (за исключением ЭС-5 и ЭС-6) замещены ЭТА, а в ЭС-5 и ЭС-6 выделены регулирующие ЭГА.

Исходные для анализа и синтеза классические линеаризованные дифференциальные уравнения движения роторов эквивалентных агрегатов приведены в операторно-матричном виде:

$$W(p)\Phi(p) = V(p)U(p) - N(p)M(p), \quad k, l = 1, 2, \dots, 6. \quad (1)$$

В уравнениях (1) векторы $\Phi(p)$, $U(p)$, $M(p)$ – изображения по Лапласу отклонений углов роторов эквивалентных агрегатов, управляющих воздействий и внеплановых возмущений по нагрузке от их исходных значений; $W(p)$, $V(p)$, $N(p)$ – соответственно операторные матрицы объекта, управлений и возмущений

Элементы матриц в уравнениях (1) определяются типовыми математическими моделями ЭА энергосистем, описываемых дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных или их изображениями по Лапласу, определяющими специфику стационарной автоматики ЭА и определяются соотношениями:

$$W_{kl} = \begin{cases} T_{al}^2 p^2 + T_{yl} p + \frac{\alpha_{Tl} K_{\omega l} p}{(T_{\omega l} p + 1)} + \frac{\alpha_{Gl} K_{\omega l} p (1 - T_{Gl} p)}{(1 + T'_{Gl} p)(T_{Cl} p + 1)} + \\ + \rho_{l1} + \rho_{l2} + \dots + \rho_{l,l-1} + \rho_{l,l+1} + \dots + \rho_{l6}, & l = k, \\ -\rho_{lk}, & l \neq k, \end{cases}$$

$$V_{kl} = \begin{cases} \frac{\alpha'_{Tl} e^{-pT_{tl}}}{(T_{\omega l} p + 1)(T_{nl} p + 1)} + \frac{\alpha'_{Gl} (1 - T_{Gl} p) e^{-pT_{tl}}}{(1 + T'_{Gl} p)(T_{cl} p + 1)(T_{ml} p + 1)}, & k = l, \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$N_{kl} = \begin{cases} N_{kl}(p), & \text{при } k = l, \\ 0, & \text{при } k \neq l, \end{cases}$$

где p – комплексный параметр интегрального преобразования Лапласа; $T_{al}^2, T_{yl}, T_{\varepsilon l}, T_{Il}, T_{cl}, T_{Gl}, T_{\omega l}$ – параметры эквивалентного агрегата в l -й ЭС; α_{Tl}, α_{Gl} – доли нерегулирующих ЭТА и ЭГА в l -й ЭС, $\alpha_{Tl} + \alpha_{Gl} = 1$; $\alpha'_{Tl}, \alpha'_{Gl}$ – доли регулируемых ЭТА и ЭГА в l -й ЭС, причем: $\alpha'_{Tl} + \alpha'_{Gl} \leq 1$; T_{ω} – период квантования координат по времени; ρ_{kl} – удельный синхронизирующий момент между k -й и l ЭС, причем $\rho_{kl} = \rho_{lk}$.

Изображения мгновенных отклонений частоты в ЭС от исходного значения характеризуется изображением по Лапласу вектора отклонений частоты в узлах сети

$$\omega_l = p\varphi_l, \quad (2)$$

а изображения отклонений перетоков активной мощностью от исходных значений является функциями отклонений углов всех эквивалентных агрегатов:

$$S_j = \sum_{k,l \in N_j} \rho_{kl} (\varphi_k - \varphi_l), \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad (3)$$

где N_j – множество пар индексов k -й и l -й энергосистем, расположенных по различные стороны относительно j -й ЛЭП на структурной схеме, представленной на рис. 3.1.

Анализ уравнений (1) позволяет рассматривать ОЭС как многомерный объект с «антисимметричными» отрицательными обратными связями по углу ротора каждой ЭС, в котором регулируемые координаты определяются отклонениями углов в соответствии с равенствами (2) и (3) [79]. Характерной особенностью

данного объекта является (как правило) невозможность определения матрицы возмущений – *внеплановых нагрузок* ЭС, а поэтому управление системой может быть реализовано по принципу отклонения регулируемых координат от заданных значений в соответствии с алгоритмами, приводимыми далее.

2. Структурная теорема Р. Калмана, критерии управляемости, наблюдаемости и оценивание состояний. Основу составляют методы распределения корней характеристического уравнения замкнутой линейной системы [106]. Решение задачи основано на полной управляемости объекта управления, сформулированной в теореме Р. Калмана [154].

Теорема (структурная теорема Калмана). Существует такая неособая замена координат $x = S\xi$ такая, что система

$$x' = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0, \quad y = Cx$$

эквивалентно преобразуется к виду:

$$D\xi_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4 + \rho_1 u,$$

$$D\xi_2 = a_{22}\xi_2 + a_{24}\xi_4 + \rho_2 u,$$

$$D\xi_3 = a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4,$$

$$D\xi_4 = a_{44}\xi_4,$$

$$y = \sigma_2 \xi_2 + \sigma_4 \xi_4,$$

причем $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ - подвекторы ξ такие, что

$$\dim(\xi_1, \xi_2) = \nu_1, \quad \dim(\xi_2, \xi_4) = \nu_2,$$

$$\nu_1 = \text{rank}(A_u), \quad \nu_2 = \text{rank}(A_y),$$

$$A_u \triangleq [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B], \quad A_y \triangleq [C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T].$$

Пары матриц a_{22}, ρ_2 и a_{22}^T, σ_2^T являются невырожденными, и

$$H_{uy}(p) \triangleq C(pI_n - A)^{-1} B = \sigma_2(pI_{n_2} - a_{22})^{-1} \rho_2.$$

Следствие из структурной теоремы Калмана:

1. Нарушение условий полноты входа или выхода приводит к появлению *«висячих» частей системы*, наличие которых не оказывает влияния на свойства преобразования «вход-выход».

2. Изменение переменных ξ_3 и ξ_4 (или любых фазовых переменных, являющихся их линейными комбинациями) определяется только начальными условиями и не зависит от входных воздействий, инвариантно по отношению к ним.

3. Изменение переменных ξ_1 , ξ_3 не может быть обнаружено по наблюдениям выхода.

4. Невырожденная часть системы при условии: $\nu_1 < n$ ($\nu_2 < n$) имеет порядок n_2 , ниже порядка системы в целом и свойство передаточной функции

$$H_{uy}(p) \triangleq C(pI_n - A)^{-1} B = \sigma_2(pI_{n_2} - a_{22})^{-1} \rho_2$$

может иметь место только при сокращении числителя и знаменателя передаточной функции $H_{uy}(p)$.

Определение. Вход u называется «полным», если

$$\det A_u \triangleq \det \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \neq 0.$$

Выход y называется «полным», если

$$\det \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \neq 0.$$

Определение. Пара матриц A и B линейного объекта управления называется *невыврожденной парой*, если выполнено условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

Теорема (о системе для асимптотической оценки состояний по измерениям выходных координат) [103,154]. Пусть вектор состояний $x(t)$ объекта управления определяется решением задачи Коши

$$x' = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x^0.$$

Тогда может быть построено устройство, называемое системой асимптотической оценки, использующее в качестве входных воздействий измеряемый выход объекта

$$y = Cx(t)$$

и его вход $u(t)$ и формирующее оценку $\hat{x}(t)$ как решение уравнения

$$\hat{x}' = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0.$$

При невырожденности пары A^T, C^T матрица L может быть выбрана так, чтобы ошибка оценивания

$$\hat{\varepsilon}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

стремится к нулю при условии $t \rightarrow \infty$ при любой ограниченной начальной ошибке $\hat{\varepsilon}(0)$.

С использованием системы асимптотической оценки можно полностью решить задачу построения строго реализуемой стабилизирующей обратной связи по наблюдениям выходных координат объекта управления.

Теорема. Пусть объект, описываемый линейными уравнениями состояния:

$$x' = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x(0) = x^0,$$

замкнут обратной связью вида

$$u = -K\hat{x},$$

где $\hat{x}$ вычисляется с помощью системы асимптотической оценки

$$\hat{x}' = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0$$

по измерениям выхода y .

Тогда при невырожденности пар матриц A, B и A^T, C^T , возможен выбор коэффициентов усиления K и L таких, что замкнутая система является устойчивой.

Таким образом, теоремы Р. Калмана позволяют исследовать важные структурные свойства объектов управления, определить условия управляемости и наблюдаемости объектов и синтезировать наблюдатели для оценки координат состояния объекта, в частности, для координат состояния энергообъединений различного уровня.

3. Синтез модальных регуляторов линейными непрерывными и дискретными объектами. Пусть уравнения ЭЭО заданы уравнениями состояния для *непрерывного времени*

$$x' = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad y = Cx, \quad (4)$$

или для дискретного времени

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad x_{t_0} = x_0, \quad y_t = Cx_t. \quad (5)$$

Предполагается, что объекты вполне управляемы по Р. Калману и управления – скалярные функции.

Требуется синтезировать линейные модальные регуляторы, обеспечивающие заданные корни характеристических полиномов

замкнутых САУ. Синтез *модальных регуляторов* осуществляется в два этапа, которые рассматриваются далее. *Первый этап* заключается в приведении пары матриц A и B к канонической форме. Задача *второго этапа* – вычисление параметров синтезированного линейного регулятора.

1). Первый этап синтеза: приведение уравнений состояния к канонической форме Фробениуса. Математические модели объектов управления типа (4) и (5) называются моделями в канонической форме Фробениуса, если матрица $A = A_f$ – фробениусова и вектор $b = b_f$ имеют следующий вид:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a_i – коэффициенты совпадающих характеристических полиномов матриц A и A_f таких, что $\chi_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$. Следует отметить, что **фробениусова матрица** A_f имеет форму

$$A_f = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-1} & E_{n-1} \\ \hline & -a^T \end{array} \right) = I_n^{(1)} - e_n \cdot a^T,$$

$a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)^T$, $I_n^{(p)}$ – p -й единичный «косой ряд» размера « n » для $p=1$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$ – единичный вектор-столбец.

Для преобразования матрицы уравнений состояния ЭЭО к канонической фробениусовой форме можно использовать верхнюю треугольную относительно второй диагонали матрицу $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, образованную из коэффициентов характеристического полинома матрицы объекта управления A . Тогда матрица равна:

$$T = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для выполнения преобразования подобия далее используется матрица $Q = S_y T$, представленная в блочном виде

$$S_y = (B \mid AB \mid A^2 B \mid \dots \mid A^{n-1} B).$$

Эта матрица называется **матрицей управляемости** системы. Тогда столбцы $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ определены равенствами

$$q_1 = A^{n-1}b + a_1 A^{n-2}b + \dots + a_{n-1}b = (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-2}A + a_{n-1}E)b,$$

$$q_2 = A^{n-2}b + a_1 A^{n-3}b + \dots + a_{n-2}b = (A^{n-2} + a_1 A^{n-3} + \dots + a_{n-3}A + a_{n-2}E)b,$$

.....

$$q_{n-1} = Ab + a_1 b = (A + a_1 E)b, \quad q_n = b.$$

Замена переменных $x = Qz$ в (4) и (5) приводит к равенствам

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ, \quad \tilde{b} = Q^{-1}b.$$

Столбцы произведения $AQ = (Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n)$ имеют вид

$$Aq_1 = (A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n E - a_n E)b = -a_n b = -a_n q_n;$$

$$Aq_2 = (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1}E - a_{n-1}E)b = q_1 - a_{n-1}q_n;$$

.....

$$Aq_{n-1} = (A^2 + a_1 A + a_2 E - a_2 E)b = q_{n-2} - a_2 q_n;$$

$$Aq_n = (A + a_1 E - a_1 E)b = q_{n-1} - a_1 q_n.$$

Приведенные выше соотношения получены с помощью теоремы Кэли-Гамильтона, утверждающей, что каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению: $\chi_n(A) = 0$. Полученные соотношения представляются разностью матриц

$$AQ = (0, q_1, q_2, \dots, q_{n-2}, q_{n-1}) - (a_n q_n, a_{n-1} q_n, \dots, a_1 q_n).$$

В результате преобразования подобия каноническая форма матриц объекта управления определится следующей совокупностью равенств

$$A = Q^{-1}AQ = Q^{-1}(0, q_1, \dots, q_{n-1}) - Q^{-1}(a_n q_n, a_{n-1} q_n, \dots, a_1 q_n) = I_n^{(1)} - e_n a^T,$$

$$\tilde{b} = Q^{-1}b = Q^{-1}q_n = e_n.$$

Для вычисления вектора коэффициентов характеристического уравнения матрицы управляемой системы (см. выше) можно использовать равенство

$$a = -S_y^{-1} A^n b. \quad (6)$$

Это равенство получается подстановкой матрицы A в характеристическое уравнение и умножением результата на матрицу b :

$$\chi_n(A)b = A^n b + a_1 A^{n-1} b + \dots + a_{n-1} A b + a_n b = 0.$$

Последнее равенство можно преобразовать к следующему равенству:

$$A^n b = -(a_1 A^{n-1} b + a_2 A^{n-2} b + \dots + a_n b) = -S_y a$$

и получить для управляемой системы (6).

Для модели объекта управления, определяемой соответственно параметрами (A, b) и $(\tilde{A}, \tilde{b})$, можно определить матрицу

линейного преобразования Q , если объект вполне управляемый, причем $Q = S_y \tilde{S}_y^{-1}$, где матрицы определяются следующими равенствами:

$$S_y = (b | Ab | \dots | A^{n-1}b), \quad \tilde{S}_y = (\tilde{b} | \tilde{A}\tilde{b} | \dots | \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}).$$

Математическая модель объекта управления

$$x' = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad y = Cx,$$

при определенных условиях преобразуется к линейному дифференциальному уравнению n -го порядка

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t),$$

где элементы матрицы определяются равенством:

$$A = I_n^{(1)} - e_n a^T, \quad b = e_n.$$

Замечание. Можно сделать замечания по результатам:

1. Приведение математической модели объекта управления к канонической форме Фробениуса можно также выполнить другим способом, основанным на двойной замене базиса

$$z = H_1 x \text{ и } \tilde{x} = H_2 z$$

где H_1 – второй вариант матрицы управляемости по Р. Калману

$$H_1 = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \dots, B]$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2). Второй этап синтеза: вычисление параметров модальных регуляторов. Пусть уравнения ЭЭО или его подсистем в непрерывном или дискретном времени являются вполне управляемыми (выполнен ранговый критерий Р. Калмана) и описываются моделями «вход-состояние-выход»:

для непрерывного времени

$$x' = Ax + Bu,$$

$$x(0) = x_0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1,$$

для дискретного времени

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t,$$

$$x_{t_0} = x_0,$$

$$x_t \in \mathbb{R}^n, \quad u_t \in \mathbb{R}^1, \quad (7)$$

Определить параметры

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T$$

линейных законов управления с обратной связью в функции координат состояния, которые имеют место для непрерывных и дискретных систем управления

$$u(t) = k^T x(t),$$

$$u_t = k^T x_t, \quad (8)$$

обеспечивающие заданные значения корней характеристического уравнения замкнутых систем автоматического управления.

Решения дифференциальных и разностных уравнений систем управления определяются собственными числами матриц, начальными условиями и внешними воздействиями. Если два последних фактора являются внешними и независимыми от системы управления, то собственные значения математической модели замкнутой системы зависят от выбора управления и определяют характер поведения системы.

Желаемый характер переходных процессов определяется значениями корней характеристического уравнения замкнутой системы

$$\lambda_1^{уст}, \lambda_2^{уст}, \dots, \lambda_n^{уст}$$

(собственные числа матрицы замкнутой системы).

Теорема. Если пара (A, b) системы вполне управляема, тогда всегда можно синтезировать управления (8), обеспечивающие для матрицы уравнений замкнутой системы автоматического управления

$$x' = (Ax + bk^T)x \quad \Bigg| \quad x_{t+1} = (A + bk^T) \cdot x_t$$

заданные собственные значения.

Доказательство. Пусть требуемые собственные значения матрицы замкнутой системы определяются значениями: $\lambda_1^{уст}, \lambda_2^{уст}, \dots, \lambda_n^{уст}$. Тогда можно вычислить коэффициенты характеристического уравнения, имеющего заданные корни:

$$\chi_n^{уст}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^{уст}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n.$$

По формулам Виетта и заданным значениям корней вычисляются коэффициенты характеристического уравнения:

$$a_1 = -\sum_{i=1}^n \lambda_i^{уст}; \quad a_2 = \sum_{i>j}^n \lambda_i^{уст} \lambda_j^{уст};$$

$$a_3 = -\sum_{i>j>l}^n \lambda_i^{уст} \lambda_j^{уст} \lambda_l^{уст}, \dots, \quad a_n = (-1)^n \lambda_1^{уст} \lambda_2^{уст} \dots \lambda_n^{уст}.$$

Из вычисленных коэффициентов образуется вектор $a_{уст} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)^T$. С помощью преобразования

$$x = Q \tilde{x} \tag{9}$$

матрицы модели объекта управления (7) приводятся к канонической форме Фробениуса:

$$\tilde{A} = I_n^{(1)} - e_n p^T, \quad \tilde{b} = e_n,$$

где $p = (p_n, p_{n-1}, \dots, p_1)^T$ – вектор, составленный из коэффициентов характеристического уравнения матрицы объекта. Управляющие воздействия (8) в новом базисе (9)

$$u = \tilde{k}^T \tilde{x},$$

где $\tilde{k} = Q^T k$. Подставив управления u и u_k в уравнения объекта, приведенные к канонической форме, можно получить уравнения замкнутых систем для непрерывного и дискретного времени

$$\tilde{x}' = (\tilde{A} + \tilde{b} \tilde{k}^T) \tilde{x} \quad \Bigg| \quad \tilde{x}_{t+1} = (\tilde{A} + \tilde{b} \tilde{k}^T) \tilde{x}_{t+1}.$$

Матрицы замкнутых непрерывных и дискретных систем управления ЭЭО с учетом $\tilde{A}$ принимает вид:

$$\tilde{A}_z = I_n^{(1)} - e_n (p - \tilde{k})^T.$$

Для обеспечения заданных собственных значений матриц необходимо, чтобы коэффициенты ее характеристического уравнения соответствовали вектору a_{ycm} :

$$a_{ycm} = p - \tilde{k}.$$

Эта задача решается при выборе параметров регулятора на основе равенства

$$k = (Q^T)^{-1} (p - a_{ycm}). \quad (10)$$

Таким образом, синтезированные параметры пропорциональной обратной связи определяют обратные связи в исходном базисе для модели ЭЭО, заданной линейными уравнениями, пропорциональный закон управления в контуре управления частотой и активной мощностью является линейной функцией координат.

4. Классические алгоритмы АРЧМ. Методика синтеза замкнутых систем модального управления является основой синтеза классических систем управления и регуляторов основного

контура (РОК) адаптивных систем. Классический алгоритм управления частотой и активной мощностью синтезируемый на основе модального управления основан на теоретических положениях, изложенных выше. При практической реализации системы необходимо дополнение классических модальных регуляторов логическими переменными, которые рассматриваются далее.

С учетом структуры управляющих воздействий на регулирующие станции (для которых $\alpha'_T \neq 0$) в виде суммы воздействий **для регулирования частоты и обменной мощности** $u_{рег,l}$ ОЭС и **для ограничения перетоков** активной мощности по линиям $u_{рег,l}$ [53,54,77] результирующие управляющие воздействия на станции будут иметь вид

$$u_l = u_{рег,l} + u_{лп,l}, \quad l = 1, 2, \dots, 6. \quad (11)$$

Составляющая $u_{рег,l}$ равна

$$u_{рег,l} = \left\{ K_{ч,i} \lambda_i [nT_{ц}] + \frac{1}{T_{ч,i}} \sum_{n=0}^q \lambda_i [nT_{ц}] \cdot T_{ц} \right\} \gamma_{il}, \quad (12)$$

где $\lambda_i = p\varphi_i + K_{с,i} \Delta S_{о,i}$, $i = 1, 2, 3, 6$. Отклонения обменных мощностей с учетом вводимых «зон нечувствительности» определяются равенствами

$$\Delta S_{о,i} = \alpha_i \left\{ \sum_{j \in S_i} S_{внеш,j} - S_{оз,i} - S_{нч,i} \cdot \text{sign} \left(\sum_{j \in S_i} S_{внеш,j} - S_{оз,i} \right) \right\}.$$

Логические переменные α_i определяют работу системы регулирования с учетом значений этих логических переменных, определяемых предикатными соотношениями:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{при } \left| \sum_{j \in S_i} S_{\text{внеш},j} - S_{\text{оз},i} \right| \leq S_{\text{нч},i}, \quad j \in S_i, \\ 1, & \text{при } \left| \sum_{j \in S_i} S_{\text{внеш},j} - S_{\text{оз},i} \right| > S_{\text{нч},i}, \quad j \in S_i, \end{cases}$$

где $S_{\text{внеш},j} = S_{\text{исх},j} + \Delta S_j$, $j = 1, 2, \dots, 5$. В уравнениях использованы обозначения: $S_j, S_{\text{исх},j}$ – текущее и исходное значение перетоков активной мощности по j -й ЛЭП; $S_{\text{оз},i}, S_{\text{нч},i}$ – заданное значение обменной мощности и величина зоны нечувствительности по отклонению обменной мощности для i -й ОЭС; $S_{\text{внеш},j}$ – величина перетока по j -й внешней ЛЭП для i -й ОЭС; $k_2 = K_{\text{ч},i}$, $k_1 = 1 / T_{\text{ч},i}$ – коэффициенты воздействий по пропорциональной и интегральной составляющим управления; γ_{il} – коэффициенты долевого участия l -й ЭС в регулировании частоты и обменной мощности i -й ОЭС; K_c – коэффициент «статизма» как приращение частоты на единицу приращения отклонения обменной мощности; N_i – множество внешних линий для i -й ОЭС. Составляющая $u_{\text{нр},l}$ равна сумме воздействий для ограничения перетоков активной мощности по пяти линиям:

$$u_{\text{нр},l} = \sum_{j=1}^5 b_j \left\{ K_{\Pi,j} \Delta S_j [nT_{\Pi}] + \frac{1}{T_{\Pi,j}} \sum_{n=0}^q \Delta S_j [nT_{\Pi}] T_{\Pi} \right\} \gamma_{il}, \quad l = 1, \dots, 6, \quad (13)$$

где введены блокировки, учитывающие логические переменные:

$$b_j = \begin{cases} 0, & \text{при } |S_j| < |S_{\text{нр},j}| \text{ и } \sum_n \Delta S_j [nT_{\Pi}] T_{\Pi} = 0, \\ 1, & \text{при } |S_j| \geq |S_{\text{нр},j}| \text{ или } \sum_n \Delta S_j [nT_{\Pi}] T_{\Pi} \neq 0, \end{cases}$$

причем b_j – логический признак включения ограничения перетока активной мощности по j -й ЛЭП; $\Delta S_j = S_{np,j} - S_j$; $S_{np,j}$ – предельное значение перетока по j -й ЛЭП; γ_{jl} – коэффициент долевого участия по l -й ЭС в ограничении перетока по j -й ЛЭП; $K_{П,j}$, $1/T_{П,j}$ – коэффициенты воздействий по пропорциональной и интегральной составляющим при управлении перетоком по j -й линии энергосистемы

$$K_{Пj} = \begin{cases} K_{oj}, & \text{при } |S_j| > |S_{npj}|, \\ K_{Bj}, & \text{при } |S_j| < |S_{npj}|, \end{cases} \quad \frac{1}{T_{Пj}} = \begin{cases} \frac{1}{T_{oj}}, & \text{при } |S_j| > |S_{npj}|, \\ 1/T_{Bj}, & \text{при } |S_j| < |S_{npj}|. \end{cases}$$

Для ослабления «встречного действия» СОП и САУ ЧМ (когда знаки приращений сигналов двух систем противоположные) с целью обеспечения приоритета для СОП производится коррекция управляющих воздействий путем коррекции приращений управлений для регулирования частоты

$$\Delta u_{рег,l} = \begin{cases} \Delta u_{рег,l}, & \text{при } \text{sign } \Delta u_{рег,l} = \text{sign } \Delta u_{упр,l}, \\ \Delta u_{рег,l} - K \Delta u_{рег,l}, & \text{при } \text{sign } \Delta u_{рег,l} = -\text{sign } \Delta u_{упр,l}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\Delta u_{рег,l}$, $\Delta u_{упр,l}$, K – приращения управлений САУ ЧМ и СОП по ЛЭП и степень компенсации «встречного действия».

5. Анализ входо-выходной устойчивости линейных систем ограничения перетоков и регулирования частоты и мощности. Рассмотрим устойчивость линейных СОП по ЛЭП или САПУ ЧМ, которые соответствуют целевым условиям типа равенств, что определяет системы стабилизации перетоков, отклонений частоты и обменной мощности на заданных значениях. В

этом случае указанные системы могут быть представлены как линейные многомерные инвариантные во времени динамические системы, описываемые с применением методов функционального анализа функциональными уравнениями [7,82,178,194]

$$y = Gu. \quad (15)$$

Пусть вектор управлений u принадлежит пространству $E = C^n$ – непрерывно дифференцируемых функций времени, а G – оператор системы, отображающий пространство E само в себя. Чтобы уравнение системы (15) корректно описывало динамическую систему, проявляющую устойчивость в своем поведении, следует пространство E и оператор G ограничить следующими условиями:

1. Элементы пространства E в каком-либо смысле должны быть ограничены, поскольку входной и выходной сигналы устойчивой динамической системы не могут быть неограниченными. Пространства L_p и X_p , а также их n -мерные обобщения, можно использовать в качестве пространства E . Оператор G поэтому должен быть ограниченным оператором в одном из этих пространств в классическом смысле [82,194,178].

2. Выходные функции устойчивой системы должны иметь определенный порог нечувствительности или определенную грубость относительно малых возмущений входной функции системы и в отношении малых изменений параметров системы. Это означает:

1). В пространстве E должен существовать способ, который позволяет определять степень близости между двумя различными элементами из пространства E , т. е. пространство E должно быть топологическим пространством или пространством со сходимостью по последовательностям [194].

2). Оператор G должен быть непрерывным или непрерывным по последовательностям оператором, что расширяет класс исследуемых систем [194]. Эти ограничения позволяют сформулировать следующее определение устойчивости:

Определение. Пусть E – одно из пространств L_p , L_p^n , X_p или X_p^n . Систему $y = Gu$ называют E -устойчивой, если G – непрерывный ограниченный оператор на пространстве E , отображающий E само в себя (когда $E = L_p$ или L_p^n), или если G – непрерывный по последовательностям и ограниченный по последовательностям оператор на E , отображающий E само в себя (когда $E = X_p$ или X_p^n) для $u \in E$.

Рассмотрим систему управления с обратной связью, представляемую функциональным уравнением:

$$y = G(u - y), \quad G \in M(E), \quad u \in E, \quad (16)$$

где u – произвольный элемент в пространстве E , а G – линейный, инвариантный во времени, ограниченный оператор, отображающий E само в себя.

Основная задача теории устойчивости заключается в выводе условий устойчивости системы с обратной связью (16), исходя из свойств отображения G системы в разомкнутом состоянии. Для решения этой задачи требуется доказать основную лемму.

Лемма 1 [194]. Система с обратной связью, заданная уравнением динамики $y = G(u - y)$, $G \in M(E)$, $u \in E$, является E -устойчивой тогда и только тогда, когда оператор $(I + G)$ является обратимым в алгебре $M(E)$ мультипликаторов для E , отображающих E само в себя.

Доказательство. Условие «тогда» в лемме очевидно. Чтобы доказать условие «только тогда», допустим, что система, описываемая уравнением (16), устойчива в смысле определения. Согласно этому определению, для любого $u \in E$ существует единственное решение $y \in E$ уравнения (16). Отображение $\hat{G}: E \rightarrow E$ поэтому имеет вполне определенный смысл, так как оно сопоставляет u с решением уравнения (16), т. е. $y = \hat{G}u$. Поскольку $Gu = (I + G)y$, то $\hat{G} \equiv (I + G)^{-1}G$. Таким образом, оператор $(I + G)$ обратим в алгебре $M(E)$, построенной из операторов, отображающих E само в себя. Кроме того, оператор $(I + G)^{-1}$ является, очевидно, линейным и инвариантным во времени. Используя теорему об ограниченности обратного оператора [82,178,194] и тот факт, что отображение $(I + G)^{-1}$ является отображением «на», получаем, что оператор $(I + G)^{-1}$ ограничен. Таким образом, оператор $(I + G)^{-1}$ является элементом алгебры $M(E)$. Лемма доказана.

Лемма 1 равносильна определению устойчивости и относится к динамической системе с обратной связью, описываемой уравнением (16). Для пространства $E = L_2^n$ из этой леммы и вспомогательной теоремы непосредственно следует теорема.

Теорема (L_2^n -устойчивость) [194]. Система с обратной связью, описываемая функциональным уравнением

$$y = G(u - y), \quad G \in M(L_2^n), \quad u \in L_2^n,$$

будет L_2^n -устойчивой тогда и только тогда, когда:

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) > 0} \left| \det(I + \hat{G}(s)) \right| > 0,$$

где $\hat{G} \in K(0)^{n \times n}$ – матричная передаточная функция оператора G .

Аналогичный результат имеет место для X_2 – устойчивости.

Теорема 2 (X_2^n -устойчивость) [194]. Система с обратной связью, описываемая функциональным уравнением

$$y = G(u - y), \quad G \in M(X_2^n), \quad u \in X_2^n,$$

будет X_2^n -устойчивой тогда и только тогда, когда существует некоторое число $\gamma > 0$, такое, что

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) > -\gamma} \left| \det(I + \hat{G}(s)) \right| > 0,$$

где $\hat{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матричная передаточная функция оператора G .

Таким образом, приведенные результаты позволяют исследовать входо-выходную устойчивость СОП и САУ ЧМ на основе моделей, разработанных в п. 2. Эти модели определяют матричные передаточные функции ЭЭО по **входам** – внеплановые нагрузки и **выходам** – отклонения частоты, перетоков по ЛЭП и обменные мощности. Эти методы позволяют получить результаты для анализа режимов ЭЭО.

6. Исследование динамики системы АРЧМ. Система управления анализировалась для типовых параметров данного класса систем. Результаты исследования позволили сделать вывод о структурной устойчивости системы при регулировании в соответствии с алгоритмом (12) в ОЭС сложной структуры. Кроме этого, были исследованы показатели качества переходных процессов, которые позволили получить оценки параметров

замкнутой системы регулирования частоты и обменной мощности. Полученные переходные процессы $p\varphi_i$, ΔP_j при действии внепланового возмущения в ЭС-4, равного 0,05 от базисной мощности могут удовлетворять требуемым характеристикам при выборе параметров системы K_{ci} , $1/T_{ci}$ внутри области устойчивости. Исследование динамики системы ограничения перетоков также подтвердило структурную устойчивость системы при ограничении перетоков в соответствии с алгоритмом (13). Процессы изменения отклонений перетоков ΔP_j по ЛЭП после воздействия на ЭС-4 ступенчатого возмущения, равного 0,05 базисной мощности и приводящего перегрузке ЛЭП по всем ЛЭП, экспериментально подтвердили возможность достижения качественных свойств замкнутой системы.

Исследование показало необходимость корректировки алгоритма (13) в части определения режима работы ограничителя в случае сильно колебательного характера процесса изменения отклонения перетока при ограничении. В этом случае для правильной работы ограничителя необходимо выполнение условия:

$$J_o > J_B, \quad (17)$$

где

$$J_o = \sum_n \Delta S_j [nT_{ц}] T_{ц}, \quad \text{при } |S_j| > |S_{npj}|,$$

$$J_B = \sum_n \Delta S_j [nT_{ц}] T_{ц}, \quad \text{при } |S_j| < |S_{npj}|.$$

При нарушении условия (17) не обеспечивается «возврат» мощностей станций к исходным значениям мощностей регулирующих станций при исчезновении внепланового возмущения.

Совместное управление – регулирование «частоты-обменной мощности» и «ограничение перетоков», реализованное

системой управления, позволили исследовать предложенный алгоритм коррекции при «встречном действии» систем. Такая коррекция сокращает длительность переходных процессов по перетокам при сильном «встречном действии».

Проведенное на ЦАК исследование динамики позволило доказать работоспособность первого поколения алгоритмов управления сложным энергетическим объединением типа ЕЭС СССР в замкнутом состоянии с математической моделью объекта, когда модель реализуется на аналоговой вычислительной машине, а управляющее устройство – с помощью ЭВМ. Исследование позволило накопить опыт работы системы до внедрения ее элементов в эксплуатацию, в частности, в ОДУ Северо-Запада (1972-1975 гг.) и ОДУ Средней Волги (1985 г.).

Исследование вариантов системы. Описанный выше вариант системы управления допускает различные формы реализации. Ниже рассматривается один из вариантов реализации. Исследуемая САУ крупными объединенными энергосистемами по частоте, активной мощности и перетокам предназначена для регулирования многими станциями частоты и отклонения суммарной обменной мощности ОЭС от заданных значений, а также для ограничения перетоков активной мощности по выделенным линиям электропередач.

Для обеспечения работоспособности системы при изменении структуры энергетического объединения и неисправностях телеканалов и оперативности воздействия диспетчерского персонала ОДУ на различные виды управления. Для этого алгоритм САУ по частоте, активной мощности и перетокам дополнен логическими переменными и защитными блокировками, обеспечивающими работоспособность в условиях изменения режимов.

Управляющее воздействие на l -ю регулируемую станцию

формировалось в соответствии с приведенным законом управления интегрального типа

$$u_l(kT_u) = \sum_{g=0}^k \Delta u_l(gT_u), \quad (18)$$

где kT_u – дискретное время.

Приращение управляющего воздействия на регулирующие ЭС за один временной интервал дискретного управления определялось равенством

$$\Delta u_l(gT_u) = a_1 \left[c_{рег,i} \Delta u_{рег,i}(gT_u) + \sum c_{унр,j} b_j \Delta u_{унр,j}(gT_u) \right], \quad (19)$$

где $\Delta u_{рег,i}(gT_u)$, $\Delta u_{унр,j}(gT_u)$ – приращения управлений для частоты обменной мощности i -й ОЭС и ограничения перетоков; $a_1, b_j, c_{рег,i}, c_{унр,j}$ – логические переменные для ограничения перетоков и управления частотой и активной мощностью:

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } l\text{-я регулирующая станция включена и участвует в} \\ & \text{управлении,} \\ 0, & \text{если станция выключена или не участвует в управлении;} \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я линия включена и канал телеизмерения перетока по} \\ & \text{ней исправен,} \\ 0, & \text{если эта линия отключена или не исправен канал;} \end{cases}$$

$$c_{рег,i} = \begin{cases} 1, & \text{если регулирование частоты и обменной мощности } i\text{-й ОЭС} \\ & \text{включено,} \\ 0, & \text{если этот вид управления выключен;} \end{cases}$$

$$c_{унр,j} = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение перетока по } j\text{-й линии предусмотрено,} \\ 0, & \text{если ограничение перетока по этой линии отсутствует.} \end{cases}$$

Это позволяет включать или выключать виды управления, вводить или выводить станции из режимов управления. При участии станции в **ограничении перетоков** и **регулировании частоты и обменной мощности** и «встречном действии» закон имеет вид:

$$\Delta u_{рег.i,l}(gT_u) = \begin{cases} \Delta u_{огр,j} + \Delta u_{рег,i}, & \text{если знаки приращений управлений} \\ & \text{ограничения и регулирования совпадают,} \\ \Delta u_{огр,j} - \Delta u_{рег,i}, & \text{когда приращения управляющих} \\ & \text{воздействий для ограничения перетоков по ЛЭП и ре-} \\ & \text{гулирования частоты и обменной мощности ОЭС} \\ & \text{имеют различные знаки.} \end{cases}$$

В системе предусмотрена возможность ручной и автоматической коррекции долевого участия электростанций, привлекаемых к управлению. Коррекция долевого участия осуществляется диспетчером с пульта системы без прерывания процесса управления или автоматически. Автоматическое изменение параметров системы предусмотрено в двух видах. *В первом случае* при изменении одного или нескольких **«коэффициентов долевого участия»** (КДУ) диспетчером или автоматически в режиме отключения станции от параллельной работы, долевое участие остальных станций корректируется пропорционально последним значениям КДУ так, чтобы в сумме коэффициенты составляли единицу. *Во втором случае* долевое участие станций в любом из видов регулирования корректируется периодически, через заданные диспетчером промежутки времени. Во время очередной коррекции КДУ станций вычисляются пропорционально их регулировочным диапазонам так, чтобы сумма коэффициентов равнялась единице.

В системе управляющие воздействия на регулирующие станции ограничивается по величине, что связано с ограничением

на диапазоны. Каналы формирования управляющих воздействий, кроме каналов регулирования частоты, позволяют вводить регулируемую зону нечувствительности по входному сигналу системы. Коэффициенты передачи управляющих воздействий, уставки, величины «зон нечувствительности» и другая числовая информация, с которой оперирует САУ, устанавливаются и корректируются по заданию диспетчера без прерывания управления.

Цифровой характер формирования сигналов управления, введение блокировок и ограничений, а также учет «встречного действия» контуров ограничения и регулирования приводят к тому, что рассматриваемая система управления является нелинейной. Аналитическое исследование систем подобного типа возможно только при значительных упрощениях, что не всегда допустимо, поскольку результаты исследования могут быть не адекватными анализируемым проблемам и задачам.

При исследовании таких систем можно использовать математическое моделирование на цифро-аналоговом комплексе (ЦАК). Для исследования алгоритмов и замкнутых СОП и САУ ЧМ был разработан ЦАК, включающий цифровую управляющую ЭВМ «Днепр-1» и аналоговые вычислители ЭМУ-10 и МН-7.

Исследование на ЦАК было проведено в замкнутом состоянии с математической моделью объекта, структурная схема которого приведена на рис. 3.1. В качестве математической модели ЭМП ЭЭО как объекта управления типа (1) использовалась типовая модель для исследования СОП и САУ ЧМ. При моделировании САУ ОЭС по частоте, активной мощности и перетокам были решены следующие задачи:

- 1). Комплексный анализ работоспособности системы при регулировании частоты, обменной мощности ОЭС и ограничения перетоков активной мощности по ЛЭП.

2). Определение статических и динамических характеристик системы в основных режимах с учетом существенных нелинейностей ЭЭО объекта управления и синтезированных нелинейных законов управления.

3). Анализ корректности действия защитных блокировок для исключения неправильного действия системы при изменении структуры сети и неисправности каналов телеизмерения координат системы.

При анализе на ЦАК регулирование частоты и обменной мощности также предусматривалось в объединенных энергосистемах, состоящих из ЭС-1, ЭС-2 и ЭС-3, а также ОЭС-7, состоящей из ЭС-4, ЭС-5 и ЭС-6. Ограничение перетоков активной мощности реализовано по всем ЛЭП. Энергосистемы, за исключением ОЭС-7, представлены эквивалентными турбоагрегатами, а в ЭС-5 и ЭС-6 выделены регулирующие гидростанции, представленные эквивалентными гидроагрегатами. Электрические соединения между ЭС моделировались как ЛЭП, по которым передаются перетоки активной мощности.

Исходные значения и направления перетоков по ЛЭП при исследовании алгоритмов выбраны с учетом возможности проверки системы в основных режимах ее работы. Система ограничения перетоков исследовалась при увеличении нагрузки в ЭС-4. При выбранном исходном режиме появляющийся дефицит мощности в этом узле создает перегрузку всех ЛЭП.

Анализ процессов ограничения перетоков по ЛЭП при последовательном включении ограничителей перетоков по различным линиям в заданные моменты времени, позволили сделать следующие выводы:

1). Перетоки во времени соответствовали предельным значениям, удовлетворяя интервальным целевым условиям для

СОП. Ограничение перетока по одной ЛЭП вызывает изменение в статике перетоков по другим, в частности, увеличение или уменьшение перетоков по другим ЛЭП в силу связности ЭЭО, и при кратковременной перегрузке ранее неперегруженных ЛЭП восстанавливаются их нормальные стационарные режимы.

2). Ограничиваемые перетоки по ЛЭП отклоняются от предельных значений в динамическом режиме, что возникает при изменении внеплановой нагрузки, включением ограничения перетоков по другим ЛЭП и др.

3). Перетоки ограничиваются перераспределением внеплановых мощностей регулируемыми ЭС, которое удовлетворяет заданному долевному участию. Распределение внеплановых мощностей ЭС соответствует заданным значениям при ограничении перетока по ЛЭП, что соответствовало выполнению целевых условий типа равенств. При увеличении нагрузки в узлах сети ЭЭО и перегрузке ЛЭП система формировала корректные управления для изменения мощностей ЭС. Происходило корректное действие первичного регулирования частоты. По окончании ограничения перетока стационарное распределение внеплановых мощностей соответствовало заданному долевному участию.

Исследование корректности работы классической системы САУ ЧМ при выделении какой-либо ЭС из управления проводилось при регулировании «частоты и обменной мощности» ОЭС-7. В исходном состоянии все логические переменные, входящие в (2), были заданы равными единице. Увеличение внеплановой нагрузки корректно перераспределялось между управляющими ЭС под действием управляющих воздействий. После отработки возмущений в заданный момент времени соответствующей логической переменной задавалось значение, равное нулю, т. е. ЭС выводилась из регулирования. Увеличенное в ЭС внеплановое

возмущение нагрузки после этого покрывалось другими ЭС. Процессы изменения управляющих воздействий на станции ОЭС-7 и мощности одной из ее ЭС иллюстрировали корректность действия системы при выведении станции из управления. Мощности ЭС после заданного момента времени изменялась в переходном режиме только за счет первичного регулирования частоты. Исследование других блокировок, введенных выше логическими переменными, показало правильность их функционирования в различных режимах работы системы. Применение алгоритма САУ ЧМ при встречном действии системы регулирования «частоты и обменной мощности» и системы ограничения перетоков позволяет уменьшить длительность переходных процессов ограничения перетоков при «встречном действии».

Результаты исследования свидетельствуют о том, что разработанный классический вариант САУ ОЭС по частоте, обменной мощности и перетокам является работоспособным. Дополнение классических пропорционально-интегральных законов управления логическими переменными предоставляет диспетчеру широкие возможности управления режимами линий и станций с возможностью контроля состояния каналов телемеханики. Представленный вариант системы был рекомендован для использования в АСДУ ЕЭС СССР и Российской Федерации при управлении внеплановыми нагрузками на первом этапе внедрения системы автоматического регулирования частоты, обменной мощности и ограничения перетоков активной мощности. В 1972 г. была проведена экспертиза классического алгоритма ВГПИ и НИИ «Энергостройпроект» и ЛПИ им. М.И. Калинина комиссией Объединенного диспетчерского управления Северо-Запада (главный диспетчер М. Я. Вонсович, г. Рига), входившего в состав

ЕЭС СССР, в результате которой алгоритм получил положительную оценку и был рекомендован для внедрения и развития.

Таким образом, положенный в основу алгоритма *управления ОЭС по частоте и обменной мощности* способ регулирования частоты со статизмом по обменной мощности (метод Гранера-Даррье) и *способы управления перетоками* подтвердили работоспособность системы совместного ограничения перетоков по ЛЭП и регулирования частоты и обменной мощности.

Развитие методов и алгоритмов для сложных структур ЭЭО в связи с необходимостью синтезировать принцип формирования управлений ЭС для сложных сетей. Такое развитие было выполнено на основе применения методов математического программирования с использованием квазистационарных моделей влияния ЭЭО, составляющих основу метода синтеза СОП по ЛЭП и САУ ЧМ с учетом отклонений частоты.

3.2. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ И УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

В условиях энергообъединений использование адаптации позволяет учесть непрерывные изменения состава оборудования, участвующего в работе, случайное изменение вида, величины и места приложения возмущений. Такая *«детерминированная адаптивность»* повышает эффективность использование классических систем автоматического управления энергообъединениями с детерминированной настройкой параметров и жесткой структурой. С другой стороны *класс адаптации* определяется применением математической модели в виде *«квазистационарных моделей влияния ЭЭО»* для синтеза управлений (см. п. 2), которые могут быть определены экспериментально или аналитически на основе исходных уравнений моделей ЭМП. Синтез

управлений предполагает применение методов математического программирования и анализ устойчивости замкнутой системы управления с квазистационарными моделями, что будет выполнено в последующих разделах книги.

Как следует из вышеизложенного, на первых этапах совершенствования систем применение адаптации происходило в рамках эвристических алгоритмов, которые далеки от классических работ по теории адаптивных систем – методом рекуррентных целевых неравенств, стохастической аппроксимации, скоростного градиента, робастного управления и других.

1. Управление частотой, активной мощностью и перетоками. Это управление должно учитывать существенные отличия оптимальной работы энергетических объединений в нормальном и возмущенном режимах. В нормальном режиме для обеспечения статической взаимопомощи систем необходимо, по возможности, минимизировать вмешательство устройств управления в работу системы. В возмущенном режиме необходима быстрая реакция системы управления для предотвращения значительного отклонения частоты, являющейся одним из показателей качества энергии, а также отключения межсистемных ЛЭП, а, следовательно, «развала» объединения. В соответствии со спецификацией управления ЭЭО по частоте и активной мощности выбирается следующий закон регулирования на основе метода Гранера-Даррье

$$u(t) = k_1 \int_0^t \lambda(\tau) d\tau + k_2 \lambda(t),$$

где системный параметр $\lambda(t) = (f(t) - f_{зад}) + k \sum_{j=1}^m [S_j(t) - S_{jзад}]$ является регулируемой координатой; k – коэффициент пропорциональности, определяемый «статизмом» ЭЭО; k_1, k_2 – коэффициенты усиления по интегральной и пропорциональной

составляющим управления САУ ЧМ; f_c , S_j – соответственно, отклонение частоты энергетического объединения и перетока активной мощности по j -ой внешней ЛЭП; $f_{зад}$, $S_{зад}$ – заданные значения частоты и обменной мощности объединения.

Для реализации задач управления простейшая адаптивная система формирует управляющее воздействие для регулирующих станций по закону:

$$u(t) = \begin{cases} k_2 \lambda + k_1 \int_T^t \lambda dt, & \text{если } \lambda < \lambda_B \text{ и } \lambda_{cp} > \lambda_H; \\ k_2 \lambda + k_1 \int_0^t \lambda dt, & \text{если } \lambda \geq \lambda_B; \\ 0, & \text{если } \lambda_{cp} \leq \lambda_H. \end{cases}$$

Здесь λ_B – значение регулируемой координаты, соответствующей «большому» возмущению; λ_H – значение регулируемой координаты, на которое не должна реагировать система управления; λ_{cp} – усредненное значение регулируемой координаты, соответствующее гармоническим или случайным колебаниям с периодом $T \geq 30 \text{ с}$.

Коэффициенты k_1 и k_2 выбираются по критерию минимума среднеквадратичной ошибки при отработке скачкообразного возмущения, т. е. путем минимизации интегрального функционала качества управления ЭЭО

$$F(T) = \int_0^T \lambda^2(\tau) d\tau, \quad T < +\infty.$$

Наличие ступенчатых возмущений большей амплитуды

определяется проверкой выполнения условия $\lambda \geq \lambda_B$. Если условие выполнено, то без запаздывания включается канал управления. Наличие случайных и детерминированных медленно меняющихся возмущений определяется вычислением усредненного значения регулируемого параметра $\lambda_{cp}(t) = \frac{1}{T} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$, которое сравнивается с величиной зоны нечувствительности для проверки условия: $\lambda_{cp} \geq \lambda_H$. Величины T и λ_H выбираются из условий фильтрации колебаний определенной амплитуды и частоты. В момент выполнения последнего условия включается канал управления. Этот момент времени в законе управления обозначен переменной интегрирования – T . Выключение управления производится при условии $\lambda_{cp} \leq \lambda_H$ путем установки нулевых значений параметров k_{II} и k_{II} .

Управляющие воздействие для регулирования частоты и обменной мощности объединенных энергосистем вычисляются в соответствии с пропорционально-суммарным законом цифрового управления

$$\Delta u_i = k_{II} \lambda_i + k_{II} (\lambda_i - \lambda_{i-1}), \quad u_i = u_{i-1} + \Delta u_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Распределение нагрузки между регулирующими станциями задается коэффициентами долевого участия γ_{ij} , которые могут устанавливаться пропорционально регулировочным диапазонам станций или на основе экономических характеристик станций.

Качество адаптивной и классической (с пропорционально-интегральным законом регулирования, п. 3.1) систем управления по частоте и активной мощности сравнивалось по показателям

$$\eta_a = 1 - \lambda_{ca} / \lambda_p \quad \text{и} \quad \eta = 1 - \lambda_p / \lambda_{up},$$

где λ_{pa} и λ_p – амплитуды координат адаптивной и неадаптивной систем управления; λ_{np} – амплитуда колебаний в нерегулируемой системе. Показатель эффективности η является показателем качества при гармоническом возмущении в системе. Значение $\eta_{\text{так}} = 1$ соответствует ликвидации ошибки при гармонических колебаниях, что обеспечивает технологические требования.

2. Метод исследования входо-выходной устойчивости классических нелинейных СОП и САУ ЧМ. Для анализа устойчивости данного класса будут использованы *круговые критерии* для нелинейных многомерных систем, использующие понятия функционального анализа [82,178,194] .

Рассматривается конечный промежуток $I \subset R = (0, \infty)$ и нормированное пространство V с нормой $\|\cdot\|$. Пусть Z – линейное пространство функций, отображающих I в V , т. е. $Z : I \rightarrow V$. Для любого $T \in I$ пусть P_T – обрезающий (или проекционный) оператор, определенный соотношением

$$f_T(t) = (P_T f)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

причем $T > 0$ и $f \in Z$.

Введя норму $\|\cdot\|$ в пространстве Z , можно рассмотреть нормированное линейное подпространство E линейного пространства Z , определенное следующим образом:

Определение 1. Пусть E – пространство всех функций $f \in Z$, которые удовлетворяют условиям: 1). $\|f\| < \infty$. 2). $P_T f \in E$ при всех $T \in I$. 3). Отображение $T \rightarrow \|P_T f\|$ для

любой функции $f \in E$ такая возрастающая ограниченная функция T , для которой $\|f\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \|P_T f\|$.

Примером пространства, удовлетворяющего условиям 1-3 определения 1, служит пространство, составленное из всех измеримых функций $g(t): I \rightarrow R$, для которых имеет место условие $\int_0^T |g(t)|^p dt < \infty, \quad \forall T \in I, p \in [1, \infty)$.

Определение 2. Расширенное пространство для нормированного линейного пространства E – это пространство E_e , которое образовано всеми функциями $f \in Z$, такими, что: 1). $P_T f \in E_e$ при всех $T > 0$. 2). Если предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \|P_T f\|$ для функции $f \in E_e$ существует, то он совпадает с нормой $\|f\|$.

Математическую модель входной-выходной динамической системы можно задать соотношением G , определенным на E_e , т. е. множеством пар (u, y) элементов из E_e . Здесь $u \in E_e$ обозначает **входную функцию (управление) системы** и $y \in E_e$ – **выходную функцию системы**, т. е. $G: u \rightarrow y$. Определение 2 допускает многозначные соотношения, объединяющие входы (выходы) с несколькими выходами (входами).

Если ограничиться рассмотрением однозначных соотношений G с областью определения $(G) = E_e$, то G будет оператором, отображающим E_e само в себя.

Рассмотрим входной-выходной оператор G динамической системы с входным сигналом $u(t)$ и выходным сигналом $y(t)$ (могут принадлежать к различным пространствам).

Оператор G устанавливает входо-выходные связи

$$y = G(u), \quad (1)$$

Предполагаем, что рассматриваемые функции имеют нормы; функции, отличающиеся на множестве меры нуль, будем считать эквивалентными. Рассмотрим только каузальные входо-выходные операторы системы, описывающие системы с предсказуемым поведением, для которых

$$y_T = (G(u_T))_T, \quad \forall T \in I. \quad (2)$$

Определение 3. Оператор $G: E_e \rightarrow E_e$ называется *устойчивым входо-выходным оператором*, если можно указать такие неотрицательные вещественные числа δ, γ , что выполняется неравенство

$$\|(G(u_T))_T\| \leq \gamma \|u_T\| + \delta, \quad T \in I, \quad (3)$$

при всех $u_T \in E$.

Ниже изучаются входные-выходные отображения на L_p^n -пространствах, задающие динамические системы с m входами и n выходами, т. е. исследуются операторы $G: L_{pe}^m \rightarrow L_{pe}^n$. Тогда определение 3 заменяется следующим определением.

Определение 4. *Отображение* G называется *L_p -устойчивым*, если выполняются следующие условия:
1). $G(u) \in L_p^n$ при $u \in L_p^m$. 2). Можно указать такие неотрицательные вещественные числа γ и δ , что выполнено неравенство

$$\|G(u)\|_p \leq \gamma \|u\|_p + \delta, \quad u \in L_p^m. \quad (4)$$

Определение входной-выходной устойчивости системы

формулируется следующим образом: система L_p - устойчива при условии, если вход u принадлежит к нерасширенному пространству L_p^m , а получаемый выход $y = G(u)$ принадлежит к нерасширенному пространству L_p^n , причем норма выхода меньше суммы нормы входа, умноженной на γ , и смещена на δ . **Инкремент оператора** G при условии того, что оператор не смещен ($G(0) = 0$), определяется равенством:

$$\gamma(G) = \inf_{\gamma} \left[\gamma \in R_+ : \|G(u_T)\|_p \leq \gamma \|u_T\|_p + \delta, \forall u \in L_{pe}^m, \forall T \right]. \quad (5)$$

Условие 2 в определении 4 можно записать в виде: $\gamma(G) < \infty$. Часто у оператора G физической системы смещение δ оказывается равным нулю.

Тогда **инкремент** такого оператора G определяется следующим равенством

$$\gamma(G) = \sup_{\substack{u \in L_{pe}^n, \\ T \in I}} \frac{\|(G(u))_T\|_p}{\|u_T\|_p}, \quad (6)$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем возможным входным и выходным парам и по всем обрезающим параметрам T . Инкремент в данном случае не отличается от обычной функциональной нормы; обрезанные функции используются в определении потому, что мы не требуем *априори*, чтобы исходные функции были конечными. При $p = \infty$ можно определить понятие L_∞ -устойчивости, называемой **ограниченной входной-выходной устойчивостью** в том смысле, что для системы, обладающей ограниченной входной-выходной устойчивостью, всегда

ограниченный вход приводит к ограниченному выходу. Приведенное определение L_p -устойчивости ослаблялось, в частности, Валенкой и Хэррисом [194] на основе условия 2 в определении 4.

Наша основная цель – исследовать устойчивость динамической системы с обратной связью с m входами и n выходами, описываемой динамическим уравнением

$$y = G(u, y), \quad u \in L_{pe}^m, \quad (7)$$

Если соотношение $G(u, y): L_{pe}^m \times L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^n$ при условии $G(0) = 0$ – сильно каузальное с элементом запаздывания $\delta > 0$, то можно доказать, что существует неподвижная точка $y \in L_{pe}^n$ для $G(u, y)$. Поскольку $y = 0$ – единственная неподвижная точка для операторов $P_T G$ в $L_p^n[0, T]$ при условии $T < \delta$, то из доказанных в [194] положений, следует, что для каждого $u \in L_p^m$ существует единственное решение $y \in L_{pe}^n$ уравнения (7).

Соотношение $G(u, y)$ является общим и не позволяет проводить исследований и выводить какие-либо практически интересные критерии устойчивости. Более удобную для изучения и более нужную для приложений математическую модель системы с обратной связью можно получить, конкретизируя соотношение $G(u, y)$ следующим образом:

$$y = F(u - G(y)), \quad u \in L_{pe}^m. \quad (8)$$

Если F – линейный оператор, то (8) при условии, что существует обратный оператор $(I + FG)^{-1}$, имеет решение:

$$y = (I + FG)^{-1} Fu. \quad (9)$$

Система с обратной связью (8) считается физически определенной, или, другими словами, является разумным приближением для физической системы, если для нее решение $y, e = u - Gu$ существует, единственно и непрерывно по Липшицу. Такой будет система (8) (см. п. 5.4, 194), если: 1). Оператор прямой связи $F: L_{pe}^m \rightarrow L_{pe}^n$ — каузальный несмещенный и непрерывный по Липшицу на L_{pe}^m ; 2). Оператор обратной связи $G: L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$ **каузальный и локально непрерывный по Липшицу на L_{pe}^n** ; 3). Один из операторов F или G — сильно каузальный оператор; 4) оператор $I + GF$ обратим на множестве $L_{pe}^m \times L_{pe}^n$ и обратный для него оператор каузальный и непрерывный по Липшицу на $L_{pe}^m \times L_{pe}^n$.

Последнее довольно существенное ограничение на вид операторов F и G можно не вводить, если изучать только вопрос об устойчивости рассматриваемой системы с обратной связью. Однако существование, единственность и непрерывность решения нельзя установить, если не налагать указанного ограничения на операторы F и G .

Систему с обратной связью (8) можно еще больше конкретизировать, если предположить, что вся нелинейность в системе представляется лишенным памяти оператором N , а память системы описывается линейным, инвариантным во времени оператором H так, что

$$y = F(u - HN(y)), \quad (10)$$

где $N: L_2^n \rightarrow L_2^n$ — непрерывное по Липшицу отображение, для которого $N(0) = 0$. Предполагается, что вся нелинейность

содержится в цепи обратной связи, к виду (10) можно привести уравнения систем более общего вида. Например, пусть

$$y = N(F(u - Hy)), \quad (11)$$

при этом нелинейностью обладает цепь прямой связи. Полагая $x = F(u - Hy)$ и $y = N(x)$, можно получить

$$x = F(u - HN(x)), \quad (12)$$

т. е. уравнение, идентичное по виду с (10); следовательно, если $x \in L_p^n, y = N(x) \in L_p^n$, то система с обратной связью (6.11) будет L_p^n -устойчивой тогда и только тогда, когда система (12) будет L_p^n -устойчива.

Уравнение (10) системы с обратной связью можно рассматривать как условие существования неподвижной точки в пространстве L_p^n , для оператора $G(u, y)$. Теорема о сжимающем отображении формулирует достаточные условия существования такой единственной точки. Если $G(\cdot)$ — **сжимающее отображение**, то выполнено условие

$$\|G\| = \sup_{x \neq y} \frac{\|Gx - Gy\|}{\|x - y\|} < 1. \quad (13)$$

Поэтому отображение имеет единственную неподвижную точку в L_p^n . Липшицеву норму оператора $G(\cdot)$ можно ограничить следующим условием

$$\|G\| \leq \sup_{x \neq y} \frac{\|FHN(x) - FHN(y)\|}{\|x - y\|}, \quad (14)$$

поэтому условие, налагаемое на сжимающее отображение, принимает вид:

$$\|G\| \leq \|FN\| \cdot \|N\| < 1. \quad (15)$$

Поэтому система с обратной связью (10) будет L_p^n -устойчивой, если F – отображение вида $F: L_p^n \rightarrow L_p^n$, которое удовлетворяет неравенству $\|FH\| \cdot \|N\| < 1$. В этом случае инкремент оператора системы с обратной связью $y = Su$ ограничен условием

$$\|S\| \leq \frac{\|F\|}{1 - \|FH\| \cdot \|N\|}. \quad (16)$$

В частном случае $p = 2$ можно дать частотную графическую интерпретацию инкрементного условия (15), поскольку если оператор FH – устойчивый линейный инвариантный во времени, отображающий L_2^n само в себя, то его можно представить матричной передаточной функцией $\hat{FH}(S) \in K(0)^{n \times n}$ (см. п. 3.2, 194 и, в частности, теорему о L_2 -представлении из п. 3.2), где $K(0)^{n \times n}$ – пространство всех ограниченных голоморфных матричных комплексных функций с областью определения $\{s: \operatorname{Re}(s) > 0\}$. Согласно теореме Парсеваля, для $u \in L_2^n$ и матрицы $\hat{FH}(S) \in K(0)^{n \times n}$ имеем следующее равенство

$$\|FH u\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(j\omega) \hat{FH}^*(j\omega) \hat{FH}(j\omega) u(j\omega) d\omega.$$

При каждом $\omega \in R$ матрица $\hat{FH}^*(j\omega) \hat{FH}(j\omega)$ – положительно

определенная, и поэтому, если $\Lambda \left[\hat{FH}(j\omega) \right]$ – максимальное собственное значение этой матрицы, то

$$\|FH\|_2 = \sup_{\omega \in R} \Lambda^{1/2} \left[\hat{FH}(j\omega) \right] \quad (17)$$

Таким образом, система с обратной связью (10) будет L_2^n -устойчивой, если отображение $F: L_2^m \rightarrow L_2^n$ удовлетворяет следующему условию

$$\sup_{\omega \in R} \Lambda^{1/2} \left[\hat{FH}(j\omega) \right], \quad \|N\| < 1. \quad (18)$$

Полученный критерий устойчивости динамической системы имеет ограничения на применение, так как: 1). Критерий требует, чтобы система в разомкнутом состоянии была устойчивой. 2). Критерий не обладает простой графической формулировкой (за исключением случая, когда $\hat{FH}(j\omega)$ – нормальная матрица). 3). Критерий требует, чтобы инкремент системы был малым при всех частотах, что не совместимо с динамическим поведением большинства систем, устойчивых в замкнутом состоянии.

Можно сформулировать обобщенный критерий L_2 -устойчивости, имеющий простую графическую формулировку и применимый также к системам, не устойчивым в разомкнутом состоянии.

В заключение сформулируем теорему о преобразовании уравнения системы, которая позволит существенно ослабить требование (15) о малости инкремента. Рассмотрим общую систему с обратной связью

$$y = F(u - HN(y)),$$

где F, H – *линейные операторы*, которые отображают E_e^n само в себя, и $N: E_e^n \rightarrow E_e^n$ – *нелинейное отображение без памяти*. Пусть $u \in E_e^n$. Возьмем произвольный оператор $N_0: E_e^n \rightarrow E_e^n$. Тогда уравнение рассматриваемой системы с обратной связью можно преобразовать следующим образом:

$$(I + FHN_0)y = Fu - FH(N - N_0)(y)$$

или

$$y = (I + FHN_0)^{-1} Fu - (I + FHN_0)^{-1} FH(N - N_0)(y) \quad (19)$$

при условии, что существует обратный оператор следующего вида $(I + FHN_0)^{-1}: E_e^n \rightarrow E_e^n$.

Теорема 1 о преобразовании уравнения системы. Пусть линейные операторы $F, H, N_0, (I + FHN_0)^{-1}$ отображают E_e^n в E_e^n . Тогда функция $y = E_e^n$ является решением уравнения $y = F(u - HN(y))$ в том и только в том случае, когда она – решение уравнения (19) для $u \in E_e^n$.

Инкрементное условие (15) для преобразованной системы принимает вид

$$\|(I + FHN_0)^{-1} FH\| \cdot \|N - N_0\| < 1. \quad (20)$$

Очевидно, с помощью достаточно хорошей аппроксимации оператора N линейным инвариантным по времени матричным оператором $N_0 \in R^{n \times n}$ можно существенно ослабить сильное инкрементное условие (15). Отметим, что если рассмотреть оператор $G = (I + FHN_0)^{-1} FH$, то для него справедливо соотношение

$$G^{-1} = (FH)^{-1} + N_0^{-1}, \quad (21)$$

которое используется при получении графических критериев устойчивости в случае, когда $E_e^n = L_{2e}^n$ и когда оператор FH можно представить матричной передаточной функцией. Теорема о преобразовании уравнения системы справедлива, когда оператор N нелинейный и когда вместо расширенного пространства E_e^n рассматривается нерасширенное пространство E^n .

3. Теоремы о малом инкременте. Фактически имеется три самостоятельных теоремы о малом инкременте, позволяющие устанавливать устойчивость нелинейной системы с обратной связью. Самая ограничительная из них предполагает, что оператор нелинейности непрерывен по Липшицу; в этой теореме делаются сильные высказывания об устойчивости системы и о существовании и единственности решения ее уравнения. Вторая теорема о малом инкременте предполагает только *равномерную непрерывность* [84] оператора нелинейности и ограниченность его инкремента и делает важное утверждение об устойчивости и существовании решения уравнения системы, не определяет единственность и непрерывность решений. Третья теорема о малом инкременте (как самая общая) не использует условие равномерной непрерывности оператора нелинейности. Теорема определяет условия ограниченности решения, если *априори* известно, что оно существует.

Эта теорема предсказывает ограниченность решения в общем виде. Она формулирует *достаточные условия ограниченной входо-выходной устойчивости системы*. Важный вопрос о существовании, единственности и непрерывности решения уравнения системы отделяется в этой теореме от вопроса об устойчивости; считается, что ответ на первый вопрос известен *априори*. Рассмотрим систему с обратной связью

$$y = F(u - N(y)), \quad u \in E_e. \quad (22)$$

Пусть операторы $F, N: E_e \rightarrow E_e$ переводят пространство E_e само в себя, и предположим, что рассогласование $e = u - N(y) \in E_e$. Тогда из (22) следует

$$u = e + Ny, \quad y = Fe. \quad (23)$$

Пусть операторы F и N такие, что выполнены условия F и N

$$\|(Fe)_T\| \leq \gamma_F \|e_T\| + \beta_F, \quad (24)$$

$$\|(N_y)_T\| \leq \gamma_N \|y_T\| + \beta_N \quad (25)$$

при всех $T \in I, e \in E_e, y \in E_e$, причем $\gamma_F, \gamma_N \geq 0$, β_F, β_N - некоторые вещественные числа. Отметим, что здесь *априори* предполагается, что $e \in E_e$ и u такое, какое получается из уравнения (23). Вводимое обращение обычного рассмотрения сигналов у системы с обратной связью сделано для того, чтобы снять вопрос о существовании и единственности решения уравнения (22). Константы β_i и инкременты γ_i обеспечивают достижение точных нижних граней

$$\inf_{\gamma_i, \beta_i} \{ \gamma_i \|e\| + \beta_i \}$$

при каждом i . Константы β_i здесь вводятся для того, чтобы нижеформулируемая теорема о малом инкременте была применима к системам с разрывными и гистерезисными нелинейностями. Теперь можно утверждать, что

$$y = Fe \Rightarrow \|y_T\| = \|(Fe)_T\| \leq \gamma_F \|e_T\| + \beta_F \quad (26)$$

и имеет место соотношение:

$$e = u - Ny \Rightarrow \|e_T\| \leq \|u_T\| + \|(Ny)_T\| \leq \|u_T\| + \gamma_N \|y_T\| + \beta_N, \quad (27)$$

Комбинируя (26) и (27), получаем

$$\|e_T\| \leq (1 - \gamma_F \gamma_N)^{-1} (\|u_T\| + \gamma_N \beta_F + \beta_N) \quad (28)$$

и

$$\|y_T\| \leq \gamma_F (1 - \gamma_F \gamma_N)^{-1} (\|u_T\| + \gamma_N \beta_F + \beta_N) + \beta_F \quad (29)$$

при условии, что $\gamma_F \gamma_N < 1$ при всех $T \in I$.

Произведение инкрементов $\gamma_F \gamma_N$ и слагаемое $\gamma_N \beta_F + \beta_N$ можно заменить в неравенствах (28) и (29) на γ_{FN} и β_{FN} соответственно, если вместо (24), (25) использовать условие

$$\|(FN)_T\| \leq \gamma_{FN} \|e_T\| + \beta_{FN}, \quad \forall T \in I.$$

Такая возможность замены инкрементов индивидуальных операторов на инкремент γ_{FN} произведения операторов следует из приведенного ниже неравенства

$$\gamma_{FN} \leq \gamma_F \gamma_N. \quad (30)$$

Теорема 2 об ограниченной входо-выходной устойчивости. Если для системы с обратной связью $y = F(u - N(y))$ операторы системы удовлетворяют неравенствам (24) и (25) при всех $T \in I$ и если $\|u\| < \infty$, то система в замкнутом состоянии устойчива, если произведение инкрементов $\gamma_F \gamma_N$ меньше единицы и если нормы рассогласования и входного сигнала удовлетворяют неравенствам

$$\|e\| \leq (1 - \gamma_F \gamma_N)^{-1} (\|u\| + \gamma_N \beta_F + \beta_N), \quad \|y\| \leq \gamma_F \|e\| + \beta_F.$$

Теорема справедлива как для систем с непрерывным, так и для систем с дискретным временем, а также для многомерных и бесконечномерных динамических систем; она остается справедливой и в том случае, когда вместо операторов F, N рассматривается общее многозначное соотношение, которое позволяет исследовать системы с гистерезисом и эффектами насыщения.

Более полезные результаты в отношении ограниченной входо-выходной устойчивости системы можно получить, используя теорему 1 о преобразовании уравнения системы. Согласно этой теореме, уравнение (22) для системы с обратной связью можно преобразовать к виду

$$y = (I + FN_0)^{-1} Fu - (I + FN_0)^{-1} F(N - N_0)(y) \quad (31)$$

при условии, что в E_e существует обратный оператор $(I + FN_0)^{-1}$ для рассматриваемого некоторого произвольно взятого оператора $N_0 : E_e \rightarrow E_e$. Вводя обозначение

$$G = (I + FN_0)^{-1} F \quad (32)$$

для передаточной функции системы в замкнутом состоянии, в которой оператор N заменен оператором N_0 , (31) запишем в форме

$$y = Gu - G(N - N_0)(y).$$

Пусть для произвольного оператора N_0 удовлетворяется неравенство

$$\|(N - N_0)y_T\| \leq \gamma_{N'} \|y_T\| + \beta_{N'} \quad (33)$$

при всех $T \in I$, $y \in E_e$ и вещественных числах $\gamma_{N'}, \beta_{N'}$, и тогда можно получить следующую оценку сверху $\|y\|$:

$$\|y\| \leq (\|G\| \cdot \|u\| + \beta_{N'}) (1 - \|G\| \cdot \gamma_{N'})^{-1}. \quad (34)$$

Отсюда очевидно, что инкрементное условие

$$\gamma_{N'} \|G\| = \gamma_{N'} \left\| (I + FN_0)^{-1} F \right\| < 1 \quad (35)$$

достаточно для ограниченной входо-выходной устойчивости системы, при условии, что существует оператор $(I + FN_0)^{-1} \in E$.

Пример 1. Рассмотрим пространство $E = L_p^n, p \in [1, \infty)$ для системы с обратной связью (22), причем пусть $u \in L_p^n$ и F – линейный инвариантный во времени оператор, представляемый сверткой

$$(Fe)(t) = F \otimes e = \int_0^t F(t - \tau) e(\tau) d\tau. \quad (36)$$

Заметим, что норма оператора свертки ограничена следующей оценкой сверху

$$\|F \otimes e\|_p \leq \|F\|_1 \cdot \|e\|_p. \quad (37)$$

В важном частном случае $p = 2$ имеем

$$\|F \otimes e\|_2 \leq \sup_{\omega \in R} |\hat{F}(j\omega)| \cdot \|e\|_2, \quad (38)$$

где $\hat{F}(s)$ – матрица лапласовой трансформанты для оператора F , которая предполагается, для простоты, аналитичной при условии $\text{Re}(s) \geq 0$.

Пусть оператор нелинейности N не имеет памяти, но не обязательно инвариантный во времени. Пусть оператор N переводит пространство $\mathbb{R}^{n \times n}$ само в себя и пусть справедлива

оценка сверху (33). При указанных условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Система с обратной связью $y = F(u - N(y))$ является L_p^n -устойчивой (т. е. $u \in L_p^n \Rightarrow e, y \in L_p^n$), если $\gamma_{N'} \left\| (I + FN_0)^{-1} F \right\|_p < 1$ при условии $N_0 \in R^{n \times n}$ и если $\inf_{\operatorname{Re}(s) > 0} \left| \det(I + \hat{F}(s) N_0) \right| > 0$.

Последнее условие следует из критерия Найквиста (см. п. 3.2, 4.2, 194) и обеспечивает устойчивость входного-выходного оператора $(I + FN_0)^{-1} F$ системы, получаемой из исходной системы заменой оператора N оператором N_0 .

Результаты по устойчивости нелинейных многомерных систем оказываются практически малоинтересными, если их не удастся сформулировать графически подобно критерию устойчивости Найквиста в случае линейных многомерных систем. Достоинство используемого здесь подхода проявляется, однако, в том, что получаемые с его помощью результаты легко можно комбинировать с большим числом практически полезных методов, используемых при работе с ЭВМ при проектировании нелинейных многомерных систем.

Для графической частотной интерпретации теоремы 3 рассмотрим важный частный случай $p = 2$ и предположим, что оператор $F : L_{2e}^n \rightarrow L_{2e}^n$ линеен, инвариантен во времени и характеризуется такой матричной передаточной функцией $\hat{F}(s)$, каждый элемент которой $\hat{f}_{ij}(s)$ — мероморфная функция при условии $\operatorname{Re}(s) > 0$, которая удовлетворяет условию $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}_{ij}(s) = 0$.

Тогда теорема 3 утверждает, что если $u \in L_2^n$, то $e, y \in L_2^n$, если только

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) > 0} \left| \det \left(I + \hat{F}(s) N_0 \right) \right| > 0 \quad \text{для} \quad N_0 \in R^{n \times n}$$

и

$$\gamma_{N'} \left\| \left(I + F N_0 \right)^{-1} F \right\|_2 = \gamma_{N'} \sup_{\omega \in R} \Lambda^{\frac{1}{2}} \left[\left(I + \hat{F}(j\omega) N_0 \right)^{-1} \hat{F}(j\omega) \right] < 1 \quad (39)$$

при всех $\gamma_{N'} \in \mathbb{R}$, где $\Lambda[Z]$ обозначает наибольшее собственное значение матрицы $Z^* Z$.

Как следует из результатов исследования характеристик, адаптивное управление данного класса (которое относится к классу нелинейной коррекции) позволяет существенно снизить энергию регулирования при значениях частот ω , где ее влияние не может улучшить качество регулирования частоты и перетоков.

Таким образом, в данной системе реализуется управление частотой и обменной мощностью энергетического объединения с адаптацией по входному сигналу, минимизирующему энергию регулирования за счет изменения структуры и параметров регулятора.

3.3. КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ ПЕРЕТОКОВ ПО ЛИНИЯМ

Расширение спектра задач СОП по ЛЭП и САУ ЧМ потребовало совершенствования алгоритмов автоматизированного диспетчерского управления. С помощью модернизированных автоматизированных систем управления появилась возможность решать вопросы оптимального ведения экономичного режима ЭЭО, противоаварийного управления, регулирования мощности, напряжения и частоты на основе развития теории управления. Этот подход основан на идеях квазистатической оптимизации.

Одним из направлений развития и совершенствования систем управления рассматриваемого класса является переход к управлению на основе принципов оптимизации и адаптации с учетом специфики и высокой размерности уравнений объекта. Это требует исследовать ЭЭО как крупномасштабные системы.

1. Анализ систем и методов оптимального управления ЭЭО. Адаптивные системы управления энергетическими объединениями требуют системной классификации адаптивных управляющих структур, которые могут быть принципиально использованы для синтеза управлений нормальными и предаварийными режимами энергетическими объединениями при решении задач СОП и САУ ЧМ. Анализ условий устойчивости (сходимости) алгоритмов адаптации является основой для применения.

Высокий уровень технических и требований к экономичности при управлении режимами ЭЭО требует применения современных методов исследования при разработке алгоритмов адаптивного диспетчерского управления. К настоящему времени разработан ряд методов для синтеза адаптивных регуляторов. Существующие методы синтеза адаптивных регуляторов можно разделить на отдельные группы.

Классические адаптивные системы регулятор основного контур и регулятор контура адаптации, причем контур адаптации служит, как правило, для подстройки параметров. Этот класс регуляторов синтезируется методом рекуррентных целевых неравенств, методом стохастической аппроксимации, методом скоростного градиента [106,154].

Грубые регуляторы, синтезируемые на основе требований робастной устойчивости или робастной оптимальности, могут разрабатываться на основе критериев интервальной устойчивости

характеристических полиномов (метод В. Л. Харитонова) для линейных непрерывных или дискретных систем управления [191].

Адаптивные регуляторы, разработанные на основе классических и специальных методов функционального анализа, в частности, методы синтеза в функциональных пространствах, формулируемые в пространстве комплекснозначных функций, соответствующих частотным характеристикам систем управления как однопараметрическому семейству векторных комплекснозначных функций [82,194].

Развитие и применение теории адаптивного управления для энергообъединений происходит эволюционным путем. Это означает совершенствования существующих систем управления нормальными или аварийными режимами, которые образуют основной контур управления.

В связи с этим адаптивное управление строится на основе регуляторов основного контура и контура адаптации. В этом смысле для ЭЭО характерно применение для развития методов первой группы.

В настоящее время существует достаточно широкий арсенал методов синтеза основного контура управления. Для систем управления энергообъединениями, реализованных на различных уровнях иерархии системы диспетчерского управления ЭЭО, можно использовать широко известные методы модального управления, локально-оптимального управления и оптимального управления с интегральными (суммарными) функционалами качества, которые являются преимущественно линейными.

Для управления крупными объединениями на верхних уровнях иерархии для обеспечения режимных требований необходимы нелинейные локально-оптимальные регуляторы. Эти регуляторы синтезируются на основе методов математического

программирования, в частности, линейного или квадратичного программирования.

Задачей контура адаптации является идентификация параметров объекта управления в реальном времени. Для подстройки параметров используются методы рекуррентных целевых неравенств (РЦН), стохастической аппроксимации (МСА), скоростного градиента (МСГ) и др.

На основе приведенной информации можно дать системную характеристику возможных типов адаптивных систем управления. В табл. 3.1 анализируются возможные варианты построения регуляторов основного контура (РОК) и регуляторов контура адаптации (РКА).

Таблица 3.1

Классы регуляторов основного контура и контура адаптации

<i>Регуляторы основного контура</i>				Регуляторы на основе методов математиче- ского програм- мирования
<i>Регуля- торы контура адаптации</i>	Модальные регуляторы	Локально- оптимальные регуляторы	Оптимальные регуляторы	
<i>Метод рекуррентных целевых неравенств (РЦН)</i>	*	Реализован в методе РЦН	*	*
<i>Метод стохастиче- ской аппрокси- мации (МСА)</i>	Реализован в МСА	*	*	*
<i>Метод скоростного градиента (МСГ)</i>	*	Реализован в МСГ	*	*

В табл. 3.1 отмечены типы адаптивных систем, которые к настоящему времени разработаны на достаточно фундаментальной основе, получены условия *«функциональной или параметрической идентифицируемости»* объектов. Для методов синтеза адаптивных регуляторов других типов, не отмеченных в табл. 3.1 символом «*», исследованы основные свойства замкнутых адаптивных систем. Для других типов систем адаптивного управления с РОК и РКА необходимы исследования в части анализа устойчивости замкнутых систем адаптивного управления, включая анализ возникновения хаотических режимов.

2. Системная технология доказательства сходимости итерационных процессов адаптации. Системность подхода к доказательствам сходимости рассматривается в следующей постановке. Пусть имеются итерационные процессы, соответствующие различным процедурам адаптации:

1. Процедурам численного решения детерминированных разностных уравнений в дискретном времени.

2. Детерминированным процедурам оптимизации, устойчивость которых доказывается методами функционального анализа.

3. Процедурам метода стохастической аппроксимации.

Требуется разработать технологию доказательства сходимости процессов адаптации, учитывающую технологические особенности процессов в сложных ЭЭО с учетом особенностей оптимизационных алгоритмов, которые были сформулированы.

Рассматривается алгоритмический аспект доказательства сходимости. Поскольку требуется сформулировать системную технологию доказательства сходимости перечисленных выше итерационных процессов, то можно выделить общие характерные черты, позволяющие расширить классы подходов к анализу сходимости. Другими словами, необходимо осуществить системный

синтез подходов к анализу сходимости, дополняющих известные процедуры.

Для решения задачи можно построить системную матрицу (табл. 3.2) возможных вариантов исследования сходимости в пространстве «задачи – методы анализа сходимости», которая имеет соответствующий вид, где указан характер результата. В этой таблице приведены возможные варианты синтеза САУ с основным контуром управления и контуром адаптации с различными целевыми условиями.

Таблица 3.2

Системная характеристика методов доказательства сходимости

Методы	<i>Метод функций Ляпунова</i>	<i>Метод стационарности производной</i>	<i>Метод рядов</i>	<i>Метод рекуррентных целевых неравенств</i>
Задачи				
Устойчивость разностных схем и эволюционных уравнений	достаточные условия	*	*	*
Устойчивость детерминированных процедур оптимизации	достаточные условия	ограничения на параметры	*	*
Устойчивость стохастических процедур оптимизации	*	*	ограничения на параметры	*
Устойчивость стохастических процедур адаптации	*	*	*	ограничения на параметры

Варианты синтеза, которые обоснованы математически, отмечены символом «*», а другие могут быть использованы при управлении, однако их корректное применение требует проведения необходимых доказательств.

Для задачи 1 формулируются этапы определения уравнений стационарных состояний, вычисления первой разности квадратичной функции Ляпунова на траекториях системы и формирования результата.

Задача 2, разрешаемая на основе «квазистационарности первой разности», требует вычисления первой разности, ее преобразования путем представления оценки первой разности, применения условия Липшица, приводящего к доказательству существования минимизирующей последовательности функционалов.

Задача 3 состоит в формулировке условий сходимости случайных величин в среднеквадратичном смысле и по вероятности.

Решение включает следующие этапы доказательства: формирование уравнения отклонений текущей переменной от истинного значения, вычисление второго момента, суммирование семейства разностей последующих и предыдущих значений случайных вспомогательных величин, применение условий сходимости полученного ряда, из которых следуют ограничения на параметры рекуррентной процедуры уточнения оценок.

Задача 4 – синтез алгоритмов оценки параметров адаптивной системы методом стохастической аппроксимации разрешается определением моделей отклонений параметров от истинных значений, формированием стохастической функции Ляпунова в виде нормы некоторого пространства и исследованием устойчивости процедур оценивания. Эта функция имеет смысл второго центрального момента параметров. Далее функция Ляпунова преобразуется «в силу» уравнений подстройки параметров и динамики уравнений объекта, формулировкой рекуррентных

неравенств относительно стохастической функции Ляпунова. Для анализа сходимости обычно формулируются специальные условия – условия Чжуна, Буркхольдера, Дермана, Сакса и др.

Перечисленные методы составляют основу системной технологии доказательства сходимости итерационных процессов. Это позволяет получать новые результаты в области теории сходимости на основе применения не использованных подходов, которые определены системной матрицей.

Таким образом, на основе рассмотренного набора вариантов построения адаптивных систем можно синтезировать широкий класс адаптивных регуляторов для достижения целей адаптации.

3. Методы и алгоритмы квазистатической оптимизации системы ограничения перетоков. Адаптивное управление перетоками позволяет выполнить синтез систем при полном или частичном отсутствии информации о параметрах объекта. Для ЭЭО в ряде случаев отсутствует информация о динамических характеристиках объекта, однако известны квазистатические характеристики объекта – *коэффициенты распределения или влияния* [79,83-85,93,221,223].

Постановка задачи. Пусть имеется ЭЭО из « n » узлов и « m » ЛЭП. Потребление и генерация энергии осуществляется в узлах сети ЭЭО. В нормальном режиме перетоки мощности по j -й ЛЭП и управления на станции Δp_i связаны с управляющими воздействиями на ЭС (станции) матрицами коэффициентов распределения $(\alpha_{ji})_{j=1}^m,_{i=1}^n$ (при условии баланса) или коэффициентов влияния $(\beta_{ji})_{j=1}^m,_{i=1}^n$ (при отсутствии баланса):

$$S_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \Delta p_i \text{ или } S_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \Delta p_i, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

или интервальным ограничениям на перетоки по ЛЭП:

$$\underline{S}_j \leq S_j \leq \overline{S}_j, \quad (2)$$

где $\underline{S}_j$ и $\overline{S}_j$ – нижние и верхние допустимые значения перетоков. В результате отклонения реального режима от прогнозируемых значений некоторые из линий могут перегружаться, что приводит к нарушению условий (2). Необходимо вычислить такие управления, чтобы изменением генерируемой мощности в узлах сети ликвидировать перегрузку, т. е. обеспечить выполнение этих условий для всех ЛЭП без изменения баланса мощности в ЭС.

При этом должны учитываться следующие ограничения:

- мощности, генерируемые узлами, допускается изменять в пределах: $P_{i,\min} \leq P_i \leq P_{i,\max}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- в результате действия системы ограничения не должны перегружаться другие ЛЭП сети;
- система управления должна обеспечивать ликвидацию перегрузки ЛЭП с минимальным изменением режима сети.

Тогда задача вычисления статически оптимальных управлений для ограничения перетоков активной мощности по ЛЭП энергетических объединений формулируется следующим образом: найти переменные: $\Delta P_i = P_i - P_{i0}$ – изменения активной мощности узлов, которые удовлетворяют ограничениям в виде линейных алгебраических равенств и неравенств, учитывающих ограничения на перетоки и регулировочные диапазоны энергосистем (станций).

Ограничения формулируются на основе коэффициентов распределения или коэффициентов влияния для энергетических объединений, определяющих изменения активных мощностей по ЛЭП при изменении активных мощностей регулирующих ЭС энергообъединений.

Приведенные технологические требования к режимам ЭЭО и коэффициенты влияния (распределения) позволяют сформулировать для вычисления управлений на ЭС систему ограничений задачи математического программирования (МП):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \Delta P_i &= \bar{S}_j^{np} - S_{j0}, \quad S_{j0} > 0, \quad j \in N_n; \\
\sum_{i=1}^n \alpha_{li} \Delta P_i &= \hat{S}_l^{np} - S_{l0}, \quad S_{l0} < 0, \quad l \in N_n; \\
\hat{S}_k^{np} - S_{k0} &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} \Delta P_i \leq \bar{S}_k^{np} - S_{k0}, \quad S_{k0} > 0, \quad k \notin N_n; \\
-S_{p0} + \hat{S}_p^{np} &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} \Delta P_i \leq \bar{S}_p^{np} - S_{p0}, \quad S_{p0} < 0, \quad p \notin N_n; \\
P_{i, \text{мин}} - P_{i0} &\leq \Delta P_i \leq P_{i, \text{макс}} - P_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
\sum_{i=1}^n \Delta P_i &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

При этом должен обеспечиваться минимум целевой функции

$$F_1 = \sum_{i=1}^n |\Delta P_i|. \tag{4}$$

В соотношениях (3) и (4) приняты обозначения: $\alpha_{ij} = \partial S_j / \partial P_i$ – коэффициенты распределения, определяющие изменения перетоков мощностей ЛЭП при изменении мощностей станций; $\bar{S}^{np}$, $\underline{S}^{np}$ – верхний и нижний пределы пропускной способности ЛЭП; P_{i0} , P_i – начальные и искомые мощности станций; N_n – номера перегруженных ЛЭП; величины $S_{j0}, S_{l0}, S_{k0}, S_{p0}$ – исходные значения перетоков по перегруженным (номера j_0, l_0) и неперегруженным (номера k_0, p_0) ЛЭП.

Первые два уравнения (3) определяют требования к мощностям узлов для ликвидации перегрузки перегруженных ЛЭП. Третье и четвертое неравенства – требования ликвидации перегрузки ЛЭП без возникновения перегрузок других ЛЭП. Пятое неравенство определяет мощности в пределах диапазонов регулирования. Шестое уравнение обеспечивает баланс мощностей ЭЭО, а (4) минимизирует изменения мощностей ЭС.

4. Вычисление квазистатических оптимальных управлений. Минимизация суммы модулей соответствует нелинейной задаче. Для решения задачи можно использовать методы линеаризации. Линеаризовать задачу можно *методом разности переменных* без увеличения числа строк матрицы ограничений [79], а также *методом ограничивающих переменных* [67] заменой модулей в целевой функции новыми переменными: $y_i \geq |\Delta P_i|$, которые определяют ограничения [67]:

$$\begin{aligned} y_i + \Delta P_i &\geq 0, \\ y_i - \Delta P_i &\geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда задача МП сводится к минимизации функционала

$$F_2 = \sum_{i=1}^n y_i \quad (6.a)$$

при ограничениях в виде систем линейных неравенств.

Преобразование потоков по перегруженным ЛЭП к значениям S_j^{np} эквивалентен передаче максимальной мощности по перегруженным ЛЭП. В результате минимизируется функционал:

$$F_2 = \sum_{i=1}^n y_i + M \left(\sum_{j,l \in N_n} x_{1(j,l)} + \sum_{i=1}^n x_{7i} + \sum_{i=1}^n x_{9i} + x \right) \quad (6.б)$$

при ограничениях в виде линейных равенств и неравенств:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \Delta P_i^* + x_{1j} = -\bar{S}_j^{np} + S_{j0}, \quad S_{j0} > 0, \quad j \in N_n; \\
& \sum_{i=1}^n \alpha_{li} \Delta P_i^* + x_{1l} = \widehat{\bar{S}}_l^{np} - S_{l0}, \quad S_{l0} < 0, \quad j \in N_n; \\
& \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta P_i^* + \bar{S}_k^{np} - S_{k0}; \\
& -\sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \Delta P_i^* + x_{3k} = S_{k0} - \widehat{\bar{S}}_k^{np}, \quad S_{k0} > 0, \quad k \in N_n; \\
& \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} \Delta P_i^* + x_{4p} = \bar{S}_p^{np} - S_{p0}; \\
& -\sum_{i=1}^n \alpha_{pi} \Delta P_i^* + x_{5p} = S_{p0} - \widehat{\bar{S}}_p^{np}, \quad S_{p0} < 0, \quad p \notin N_n; \\
& \sum_{i=1}^n \Delta P_i^* + x = 0; \\
& y_i + \Delta P_i^* - x_{6i} + x_{7i} = 0; \\
& y_i + \Delta P_i^* - x_{8i} + x_{9i} = 0; \\
& \Delta P_i^* + x_{10i} = P_{\max,i} - P_{0i}; \\
& -\Delta P_i^* + x_{11i} = P_{0i} - P_{\max,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи (6), (7) симплекс-методом позволяет вычислить квазистатические оптимальные воздействия на станции. В ограничениях (7) использованы обозначения: отклонения мощностей регулирующих станций определяются следующими равенствами: $\Delta P_i^* = \Delta P_i' - \Delta P_i''$; $\Delta P_i' > 0$, $\Delta P_i'' > 0$; «большой» параметр $M \gg 1$; x_{ij} , x_{11} , x_{7i} , x_{9i} , x – введенные искусственные переменные; x_{2k} , x_{3k} , x_{4p} , x_{5p} , x_{6i} , x_{8i} , x_{10i} , x_{11i} – свободные переменные задачи линеаризованной задачи управления.

Не останавливаясь на алгоритмических особенностях формирования управляющих воздействий, следует отметить, что в

разработанной статически оптимальной автоматической системе ограничения перетоков при изменении режима работы ЛЭП в направлении возврата к исходному состоянию перетока предусматривается также возврат мощностей генерирующих станций к исходным или близким к исходным значениям. Другими словами в системе реализован ряд алгоритмических особенностей, введенных в алгоритм системы ограничения перетоков первого поколения. Реализация системы требует применения вычислительных средств, мощность которой зависит от количества оптимизируемых параметров и допустимого периода квантования по времени.

Таким образом, квастатические оптимальные СОП по ЛЭП – один из вариантов синтеза адаптивных систем управления энергообъединениями, который может распространяться на задачи регулирования частоты и обменной мощности.

3.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ

Оптимизация многомерных систем ограничения перетоков активной мощности в динамических режимах может быть выполнена на основе динамических моделей объекта. При этом задача оптимизации может формулироваться как задача многошаговой оптимизации на конечном интервале времени. Рассмотрим адаптивную динамическую оптимизацию системы автоматического ограничения перетоков мощности по ЛЭП в ЭЭО.

1. Постановка задачи динамической оптимизации. Пусть имеется ЭЭО, состоящее из «m» энергосистем (ЭС) и «n» ЛЭП, описываемое в отклонениях от исходного режима с помощью разностных уравнений «вход-состояния-выход»

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, \quad \tilde{s}_k = Cx_k, \quad (1)$$

где x_k – вектор координат состояния ЭЭО, компонентами которого являются совокупность $(m-1)$ взаимных узлов и их производных, отсчитываемых от базисного угла и его производных; $\tilde{s}_k = (\tilde{s}_k^1, \dots, \tilde{s}_k^g)^T$ – вектор отклонений перетоков по ЛЭП от исходных значений S_0 ; u_k – вектор управлений, компоненты которого линейно связаны с изменениями активных мощностей ЭС в статических режимах: $p_i = k_i u^i$; H, F, c – матрицы объекта, соответствующие уравнениям состояния, полученным в результате сокращения размерности вектора состояния и перехода к разностным уравнениям; k – дискретное время. Тогда вектор текущих значений перетоков определяется равенством

$$S_k = S_0 + \tilde{s}_k. \quad (2)$$

В нормальном режиме перетоки по ЛЭП находятся внутри допустимой области D , определяемой линейными неравенствами

$$\underline{S}^g \leq S^g \leq \bar{S}^g, \quad g = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $\underline{S}^g$ и $\bar{S}^g$ – нижнее и верхнее допустимые значения перетока по g -й ЛЭП. Под действием внеплановых изменений нагрузки ЭС отдельные ЛЭП могут перегружаться, что нарушает технологические условия функционирования ЭЭО, заданные в (3).

Требуется вычислить оптимальные управления в виде приращений активных мощностей регулирующих станций, переводящие компоненты вектора S_k , для которых не выполняется (3) в момент времени $k = 0$, внутрь или на границу области D оптимальным образом в смысле минимума целевой функции.

2. Вычисление оптимальных программных управлений.

Задача вычисления управлений может быть сведена к задаче математического программирования: вычислить управления, доставляющие минимум функционалу:

$$\begin{aligned}
J = & G \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{j,l \in M} \lambda_{j,l} \left| \tilde{S}_k^{j,l} - \tilde{S}_N^{j,l} \right| T + \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{i=0}^m \left| u_k^i \right| T + \\
& + \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{i=0}^m \left| u_k^i - u_{k-1}^i \right| T + \sum_{i=1}^m \left| u_{N-1}^i \right|,
\end{aligned} \tag{4}$$

где M – множество номеров перегруженных ЛЭП; T – период квантования по времени; G и $\lambda_{j,l}$ – коэффициенты.

Первое слагаемое в функционале (4) учитывает качество процессов приближения компонент $\tilde{S}^j$ и $\tilde{S}^l$ к ближайшим границам допустимой области для режимов системы – D .

Второе и четвертые слагаемые оценивают величины затрат управления в динамических и статических режимах, а третье – интенсивность изменения управления при ограничениях. В этом случае задача ограничения формулируется как задача определения управлений, минимизирующих функционал (4) и удовлетворяющих системе линейных ограничений. Ограничения задачи формулируются с использованием динамических математических моделей ЭЭО в форме разностных уравнений состояния.

Ограничения задачи динамической оптимизации системы автоматического ограничения перетоков активной мощности формируются на основе моделей влияния, разработанных в п. 2. Эти модели определяют изменения перетоков активной мощности под действием управлений на регулирующие станции с учетом прогнозирования состояний на заданное количество шагов в дискретном времени. В результате можно сформулировать соответствующие задачи математического программирования.

Ограничения задачи для оптимизации СОП в переходных режимах могут быть представлены в виде системы линейных алгебраических уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned}
E\tilde{S}_k^j - E\tilde{S}_N^j - \sum_{h=0}^{k-1} c_j H^{k-h-1} Fu_h + \sum_{h=0}^{N-1} c_j H^{N-h-1} Fu_h &= c_j (H^k - H^N) x_0; \\
E\tilde{S}_k^l - E\tilde{S}_N^l - \sum_{h=0}^{k-1} c_j H^{k-h-2} Fu_h + \sum_{h=0}^{N-1} c_j H^{N-h-1} Fu_h &= c_l (H^k - H^N) x_0; \\
\sum_{h=0}^{N-2} c_j H^{N-h-2} Fu_h = \bar{S}^j - S_0^j - c_j H^{N-1} x_0; \\
\sum_{h=0}^{N-1} c_j H^{N-h-1} Fu_h = \bar{S}^j - S_0^j - c_j H^N x_0, \quad S_0^j > 0; \\
\sum_{h=0}^{N-2} c_l H^{N-h-2} Fu_h = \widehat{S}^l - S_0^l - c_l H^{N-1} x_0; \\
\sum_{h=0}^{N-1} c_l H^{N-h-1} Fu_h = \widehat{S}^l - S_0^l - c_l H^N x_0, \quad S_0^l < 0; \\
-\sum_{h=0}^{k-1} c_p H^{k-h-1} Fu_h \leq -\widehat{S}^p + S_0^p + c_p H^k x_0, \quad k=1,2,\dots,N; \\
\beta^j u_{N-1} = \bar{S}^j - S_0^j; \quad \beta^l u_{N-1} = \widehat{S}^l - S_0^l; \quad Eu_h \leq \bar{u}; \quad -Eu_h \leq \widehat{u}; \\
Eu_h - Eu_{h-1} \leq \Delta; \quad -Eu_h + Eu_{h-1} \leq \Delta, \quad h=1,2,\dots,N.
\end{aligned} \tag{5}$$

В ограничениях (5) использованы обозначения: c_1, c_j, c_p – подматрицы матрицы C ; x_0 – вектор состояния ЭЭО в момент начала работы ограничителя, который связан с исходным режимом ЛЭП, имеющим отличные от нуля все компоненты кроме взаимных углов; $\underline{u}, \bar{u}$ – векторы нижний и верхних значений регулировочных диапазонов ЭС; Δ – вектор предельных скоростей изменения управления, ограниченных в связи с ограниченными скоростями изменения скоростей ЭС, E – единичная матрица; β^j, β^l – подматрицы матрицы β , являющейся матрицей квазистатических

характеристик ЭЭО как объекта, определяемых равномерно сходящимся рядом [79]:

$$\beta = \sum_{h=1}^{N^*} cH^{k-h-1}F, \quad k = N^* + 1, \quad (6)$$

где N^* – время, превышающее максимальную длительность переходных процессов в объекте.

В системе ограничений задачи оптимизации (5) первые два уравнения описывают процессы изменения отклонения перетоков относительно границ допустимой области D . Третье – шестое уравнения задают условия для окончания переходного процесса ограничения в момент N^* и обеспечения заданного отклонения перетока в статике относительно исходного значения. Седьмое и восьмое неравенства введены для обеспечения неперегрузки неперегруженных ЛЭП; девятое и десятое – для статической оптимизации. Остальные неравенства учитывают изменение в заданных интервалах управлений и их скоростей.

Таким образом, задачи динамической оптимизации (как и квазистатической оптимизации, п. 3.2) систем ограничения перетоков по ЛЭП при АРЧМ сводятся к задачам МП, которые решаются методами линейного или нелинейного программирования, в частности, методами проекции градиента [79,86].

3.5. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Регулирование частоты и активной мощности является одной из основных задач оперативно-диспетчерского управления ЭЭО. В большинстве крупных энергообъединений эта задача решается при раздельном регулировании плановых и внеплановых активных нагрузок. Плановые нагрузки распределяются автоматически в системе группового регулирования активной мощности

или дежурным персоналом средствами дистанционного управления в соответствии с расчетными графиками изменения мощности станций.

Предлагаемые критерии управления внеплановой активной нагрузкой для централизованных, децентрализованных или иерархических СОП и САУ ЧМ разработаны в совместных работах ОДУ Средней Волги и ЛПИ им. М. И. Калинина. В работах принял участие главный диспетчер ОДУ В. И. Бердникова (1983 г.). Поскольку функции современных САУ ЧМ объединений расширяются за счет решения также задач автоматического ограничения перетоков активной мощности по межсистемным или внутрисистемным ЛЭП, то рассматривается совместный синтез управлений двух систем. Согласование работы таких ограничителей локальных перетоков и системы регулирования частоты и активной мощности выполняется с использованием различного рода неформальных процедур и блокировок. Раздельное решение задач регулирования и ограничения снижает эффективность системы АРЧМ ЭЭО, что устраняется при *совместном управлении* ЭЭО по частоте, активной мощности и ограничению перетоков.

1. Основные задачи управления режимами. Метод формулирует раздельные задачи вычисления управлений для САУ ЧМ и ограничения перетоков по ЛЭП как задачи квазистатического оптимального управления с ограничениями, определяемыми следующими условиями:

а). *Регулирования частоты и обменной мощности*, когда сумма внеплановой мощности агрегатов ЭЭО пропорциональна отклонению системного параметра так, что

$$\sum_{i=1}^n \Delta u_i = -\lambda = -(\gamma \Delta f + \Delta S^\circ);$$

б). **Ограничения перетоков активной мощности** по контролируемому ЛЭП, которое требует введения технологических ограничений

$$S_j - S_j \leq \Delta S_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \Delta u_i \leq \overline{S_j} - S_j, \quad i = \overline{1, m};$$

в). **Ограничения на величину изменения мощности** регулирующих станций (узлов)

$$\underline{P_i} - P_i \leq \Delta P_i = \Delta u_i - k_{wi} \Delta f \leq \overline{P_i} - P_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где Δu_i – управление на i -ю регулируемую станцию, обеспечивающее решение задачи АРЧМ и ограничения перетоков по контролируемому ЛЭП; λ – системная ошибка $\Delta S^\circ = S_3^\circ - S^\circ$ – отклонение текущего значения обменной мощности $S^\circ = \sum_{i=1}^{m_c} S_j$, от заданного значения S_3^0 ; Δf – отклонение частоты от заданного значения; γ – коэффициент пропорциональности; $\overline{S_j}$, $\underline{S_j}$, S_j – соответственно верхнее и нижнее предельные и текущее значения перетоков активной мощности по j -й линии; ΔS_j – изменение перетока по j -й линии под действием управлений; α_{ji} – коэффициенты влияния i -й станции (узла) на переток по j -й линии; m , n – соответственно число регулирующих станций и контролируемых линий в ЭЭО; m_0 – число внешних межсистемных линий, связывающих данное ЭЭО с другими; k_{wi} – коэффициент усиления первичного регулятора i -й станции (узла); $\overline{P_i}$, $\underline{P_i}$, P_i – соответственно верхние, нижние и текущие значения мощностей i -й станции (узла). Ограничения а) и в) являются

основными, но не единственно возможными. Они могут быть расширены или модифицированы в случае необходимости учета условий эксплуатации, структуры или специальных режимов конкретных ЭЭО.

Важным вопросом при решении оптимизационных задач САУ ЧМ является определение и формализация целей управления. Как известно, задание целевой функции должно быть основано на априорных сведениях о характере и особенностях решаемых задач. Ниже рассматриваются различные способы формализации задач управления внеплановыми изменениями нагрузки ЭЭО. При этом оптимальные управления определяются в классе решения задач нелинейного программирования, сводящихся к задачам линейного программирования. Целесообразность линеаризации обусловлена конечной сходимостью методов линейного программирования, что весьма существенно для управления в реальном времени, а также тем, что вследствие выпуклости кривых, отображающих ограничения, и линейности целевой функции экстремум – единственный.

В зависимости от целей формулируемые задачи управления внеплановыми нагрузками разделяются на группы, в которых синтез управления выполняется по группам критериев: критерию минимума отклонений перетоков по ЛЭП от исходных значений, критерию минимума отклонений управлений ЭС от заданных соотношений и комбинированных критериев распределения внеплановой нагрузки ЭЭО [24-27,79,84].

2. Управление по критерию минимума отклонений управлений ЭС от исходных значений. Формализации задачи требует минимизация функционала. Задача управления внеплановыми нагрузками формулируется следующим образом: вычислить управления Δu_i , минимизирующие функционал:

$$J = \sum_{i=1}^n c_i |\Delta u_i|, \quad (1)$$

где c_i – весовые коэффициенты при ограничениях $a) – в)$.

Используя **метод разности переменных** [79], сущность которого состоит в замене переменных, увеличению количества переменных, которые не могут одновременно быть включенными в базис, задачу с функционалом (1) и ограничениями $a) – b)$ можно свести к задаче линейного программирования

$$J = \sum_{i=1}^n c_i (u'_i + u''_i) \rightarrow \min \quad (2)$$

при линейных алгебраических ограничениях:

$$\Delta u_i = \sum_{i=1}^n (u'_i - u''_i) = -(\gamma \Delta f + \Delta S^\circ) = -\lambda_i; \quad (3)$$

$$\underline{S}_j - S_j \leq \Delta S_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} (u'_i - u''_i) \leq \overline{S}_j - S_j, \quad j = \overline{1, m}; \quad (4)$$

$$\underline{P}_i - P_i \leq \Delta P_i = u'_i - u''_i - k_{\omega i} \Delta f \leq \overline{P}_i - P_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$u' \geq 0_i, \quad u''_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Эта задача, сведенная к задаче линейного программирования методом разности переменных, позволяет вычислить управления на регулирующие ЭС (станции), представленные равенствами

$$\Delta u_i = u'_i - u''_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Вычисленные управления обеспечивают в статике регулирование частоты и обменной мощности (условие (3)), ограничение

перетоков по перегруженным линиям и отсутствие перегрузки в результате действия управлений для ранее неперегруженных линий (условие (4)), учет текущего значения регулировочных диапазонов станций (условие (5)). При этом согласно критерию (1), управление внеплановыми нагрузками будет выполняться при минимальных изменениях управляющих воздействий. Очевидно, что применение критерия (1) обеспечивает также и минимальное изменение суммарного регулировочного диапазона ЭЭО.

3. Минимизация отклонений перетоков активной мощности линий от исходных значений. Пусть заданы по каждой из контролируемых линий исходные значения перетока активной мощности S_{ij} . Требуется вычислить управления Δu_j , минимизирующие кусочно-линейный функционал

$$J = \sum_{j=1}^m c_j \left| S_j - S_{uj} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \Delta u_i \right| = \sum_{j=1}^m c_j \left| \Delta S_{uj} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \Delta u_i \right| \quad (7)$$

при ограничениях типа равенств и неравенств, заданных технологическими условиями а) и в) по ведению режима управления энергосистемами.

В критерии (7) коэффициенты c_j учитывают относительные отклонения перетоков по линиям, что позволяет формировать управления в функции относительных отклонений перетоков по линиям с различными абсолютными значениями пропускных способностей. Как и в (1), коэффициенты c_j обеспечивают «взвешивание» слагаемых целевой функции. Переход к задаче

линейного программирования выполняется методом ограничивающих неравенств. Далее будет использоваться следующее ограничивающее неравенство:

$$\left| \Delta S_{uj} - \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \Delta u_i \right| \leq y_i.$$

Тогда задачу (7) с ограничениями а) и в) можно сформулировать следующим образом: вычислить управления Δu_i , минимизирующие целевую функцию

$$J = \sum_{j=1}^m c_j y_j \quad (8)$$

при ограничениях а) и в) и дополнительных ограничениях

$$-y_j \leq S_{uj} - \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \Delta u_i \leq y_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Минимизация критерия (7) позволяет при ликвидации возмущений сохранять максимальные запасы пропускных способностей линий. В случае транзита активной мощности это свойство может иметь определяющее значение. Кроме того, применение данного критерия позволяет локализовать место возмущения в ЭЭО за счет минимизации обмена возмущенного узла с соседними узлами электрической сети ЭЭО.

Широкий класс задач связан с управлением по критериям минимума отклонений переменных от заданных соотношений. Эти задачи реализуются в ряде вариантов, рассматриваемых далее.

4. Минимизация отклонений распределения внеплановых нагрузок узлов от заданных соотношений. Пусть по условиям режима работы ЭЭО желаемое распределение внеплановой нагрузки между регулирующими станциями задано в виде совокупности соотношений:

$$\Delta P_{10} = \beta_1 \Delta P, \Delta P_{20} = \beta_2 \Delta P, \dots, \Delta P_{n0} = \beta_n \Delta P. \quad (10)$$

При этом $\Delta P = \sum_{i=1}^n \Delta P_{i0}$ и, следовательно,

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 1. \quad (11)$$

Так как $\Delta P = -\lambda$, то соотношения (10) можно переписать в виде

$$\Delta P_{10} = -\beta_1 \lambda; \Delta P_{20} = -\beta_2 \lambda; \quad \Delta P_{n0} = -\beta_n \lambda,$$

где $\lambda = (\gamma \Delta f + \Delta S^o)$ – системная ошибка, в функции которой осуществляется управление.

Вследствие ограничений а)–б) желаемые соотношения распределения нагрузки на станции (10) могут не выполняться. В этом случае управления Δu_i отличаются от заданного на величину x_i , то

$$\Delta u_i = -(\Delta P_{10} + x_i). \quad (12)$$

Можно заметить, что в этом случае

$$\sum_{i=1}^n \Delta u_i = -\left(\sum_{i=1}^n \Delta P_{10} + \sum_{i=1}^n x_i \right) = -\left(\lambda \sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n x_i \right) = -\lambda.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, то имеет место следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0. \quad (13)$$

С учетом (11) и (12) задачу синтеза управлений Δu_i , минимизирующих отклонения распределения внеплановой нагрузки от

заданных соотношений (10), можно записать следующим образом: вычислить управления, минимизирующие целевую функцию

$$J = \sum_{i=1}^n c_i |x_i| \quad (14)$$

при ограничениях, учитывающих закон управления по частоте и обменной мощности при учете требований перегрузки перегруженных ЛЭП:

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}_j - S_j \leq \Delta S_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} (-\beta_i \lambda + x_i) \leq \overline{S}_j - S_j, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 0; \\ \underline{P} - P_j \leq \Delta P_i = -(\beta_i \lambda + x_i) - k_{\omega i} \Delta f \leq \overline{P}_i - P_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Метод разности переменных, определяет задачу линейного программирования: вычислить x'_i, x''_i , минимизирующие линейный функционал

$$J = \sum_{i=1}^n c_i (x'_i + x''_i) \quad (16)$$

при ограничениях, учитывающих требования для различных режимов управления.

Ограничения задачи, формализующие требования сохранения нормальных режимов по ЛЭП энергетических объединений с учетом САУ частоты и обменной мощности ОЭС, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}_j - S_j \leq \Delta S_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} (-\beta_i \lambda - (x'_i - x''_i)) \leq \overline{S}_j - S_j, \\ j = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^n (x'_i - x''_i) = 0; \\ \underline{P}_i - P_i \leq \Delta P_i = -\beta_i \lambda + (x'_i - x''_i) - k_{\omega i} \Delta f \leq \overline{P}_i - P_i, \\ i = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Применение критерия (14) целесообразно при распределении внеплановой нагрузки между регулирующими станциями электроэнергетических объединений в определенных соотношениях, устанавливаемых предварительно на основе имеющегося состава оборудования, структуры сети, технологических режимов работы ЭЭО и других условий.

5. Минимизация отклонений распределений внеплановых нагрузок от экономически оптимальных значений. Пусть условие экономически оптимального распределения внеплановой нагрузки системы управления частотой и активной мощностью без учета потерь в сетях задается в следующем виде

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = b_0 = b, \quad (18)$$

где b_1, b_0 – коэффициенты, определяющие относительные приросты расхода соответственно по отдельным узлам и всему ЭЭО. Так как технологические ограничения а) – в) могут «искажать» это условие, то целесообразно синтезировать управления, минимизирующие отклонения от экономически оптимальных соотношений для распределения нагрузки.

Если ввести обозначения:

$$\beta_i^{\vartheta} = \Delta P_i^{\vartheta} / \Delta P = \Delta P_i^{\vartheta} / \lambda ,$$

где ΔP_i^{ϑ} – экономически оптимальные мощности i -го узла, соответствующее условию (18), и предварительно определить β_i^{ϑ} , то управления $\Delta u_i = -(\Delta P_i^{\vartheta} + x_i)$, обеспечивающие наименьшие отклонения мощностей от экономически оптимальных, вычисляются минимизацией (14) при ограничениях (15). Параметры β_i заменены на параметры β_i^{ϑ} .

6. Минимизация по условиям согласованного участия в управлении регулирующих станций каскада ГЭС. Пусть, как и в задаче (14), (15), заданы соотношения распределения нагрузки между ГЭС каскада β_i , заданные по условиям водного режима. Пусть можно пренебречь запаздыванием, вносимым конечной скоростью распространения водного потока.

При ограничениях а) – в) управления на ТЭС и ГЭС, не работающих в каскаде, должны обеспечивать выполнение этих ограничений и заданных соотношений между изменениями активной мощностей каскадных ГЭС.

Как и в (14), (15), управления формируются в виде: $\Delta u_i = -\beta_i \lambda + x_i$. Для остальных регулирующих станций ЭЭО минимизируется кусочно-линейный функционал качества

$$J = \sum_{i=1}^t c_i |x_i|, \quad t < n, \quad (19)$$

при ограничениях, учитывающих технологические ограничения на режимы управления энергетических объединений, которые представляются в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}
\underline{S}_j - S_j &\leq \Delta S_j = \sum_{i=1}^t \alpha_{ji}(-\beta_i \lambda + x_i) + \sum_{i=t+1}^n \alpha_{ji}(-\beta_i \lambda) \leq \\
&\leq \overline{S}_j - S_j, \quad j = \overline{1, m}; \\
\sum_{i=1}^t x_i &= 0; \\
\underline{P}_i - P_i &\leq \Delta P_i = u_i - k_{\omega i} \Delta f = -\beta_i \lambda + x_i - k_{\omega i} \Delta f \leq \\
&\leq \overline{P}_i - P_i, \quad i = \overline{1, t}; \\
\underline{P}_i - P_i &\leq \Delta P_i = -\beta_i \lambda - k_{\omega i} \Delta f \leq \overline{P}_i - P_i, \quad i = \overline{t+1, n}.
\end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Управления, определяемые решениями задачи (19)-(20), применяются в случаях, когда регулирующие станции каскада ГЭС по условиям водного режима могут участвовать в регулировании внеплановых нагрузок совместно и в заданных рациональных соотношениях.

7. Минимизация отклонений от распределения нагрузки, пропорциональная регулировочным диапазонам станций.

Пусть $\Delta P_i^+ = \overline{P}_i - P_i$ и $\Delta P_i^- = P_i - \underline{P}_i$ – регулировочные диапазоны i -й станции соответственно в сторону увеличения и

уменьшения мощности. Величины $\sum_{i=1}^n \Delta P_i^+$ и $\sum_{i=1}^n \Delta P_i^-$ определяют

суммарные регулировочные диапазоны ЭЭО соответственно в сторону увеличения и уменьшения мощности. Можно ввести коэффициенты пропорциональности β_i^+ и β_i^- , характеризующие

относительные запасы регулировочного диапазона i -го узла при увеличении или уменьшении мощности

$$\beta_i^+ = \Delta P_i^+ / \sum_{i=1}^n \Delta P_i^+, \quad \beta_i^- = \Delta P_i^- / \sum_{i=1}^n \Delta P_i^-, \quad (21)$$

причем

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^+ = 1; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i^- = 1.$$

Изменение нагрузки на величину $\Delta P = \lambda$ будет распределяться между регулируемыми станциями следующим образом:

$$\Delta P_{i0}^+ = \beta_i^+ \Delta P^+ = \beta_i^+ \lambda^+, \quad \Delta P_{i0}^- = \beta_i^- \Delta P^- = \beta_i^- \lambda^-.$$

Знаки «+» или «-» для отклонений мощностей ΔP и λ означают увеличение или уменьшение нагрузки. В условиях, определяющих ограничения а) – б), заданное распределение может нарушаться. Поэтому реальные управления, как и в задаче математического программирования (14)–(15), будут в общем случае отличаться от желаемых управлений (пропорциональных регулировочным диапазонам) на величины x_i , т. е. на величины, определяемые равенствами

$$\Delta u_i^+ = -(\Delta P_{i0}^+ + x_i), \quad \Delta u_i^- = -(\Delta P_{i0}^- + x_i).$$

Задача минимизации отклонений от желаемого распределения внеплановых мощностей ЭС (станций) в этом случае может быть сформулирована на основе математического программирования. Тогда необходимо вычислить оптимальные управления, обеспечивающие минимум целевой функции вида (14) при ограничениях, учитывающих необходимые технологические требования для рассматриваемого режима управления

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}_j - S_j \leq \Delta S_j = \sum_{i=1}^n \left(-\beta_i^{+(-)} \lambda - x_i \right) \alpha_{ji} \leq \overline{S}_j - S_j, \\ j = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 0; \\ \underline{P}_i - P_i \leq \Delta P_i = -x_i - \beta_i^{+(-)} \lambda^{+(-)} - k_{\omega i} \Delta f \leq \\ \leq \overline{P}_i - P_i, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Применение критерия качества (14) следует рекомендовать для ЭЭО, в которых при распределении внеплановой нагрузки желательно сохранять относительные регулировочные диапазоны для всех регулирующих станций.

Таким образом, универсальность ограничений задач математического программирования позволяет рассмотреть другие необходимые формулировки задач квазистатического оптимального управления внеплановыми нагрузками ЭЭО. В частности, возможно использование комбинаций критериев оптимальности (группа комбинированных критериев). Выбор критерия и системы ограничений, определяется конкретными технологическими условиями работы ЭЭО и может изменяться диспетчером или автоматически в зависимости от текущего режима работы ЭЭО и особенностей его структуры.

3.6. СИНТЕЗ ЗАМКНУТЫХ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И МОЩНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Проблемы синтеза систем САУ ЧМ энергообъединениями весьма разнообразны. Такое разнообразие определено технологическими режимами систем управления частотой и активной мощностью ЭЭО. Функциональная сложность задач управления имеет место для других задач, в частности, связанных с управлением

реактивной мощностью энергосистем. Решения задач АРЧМ с учетом технологических режимов с использованием методов математического программирования (МП) иллюстрирует эту универсальность.

1. Анализ методов оптимизации ЭЭО по частоте и активной мощности. Классические методы решения задач применяются для управления внутри отдельных ЭЭО. Глобальные задачи управления взаимодействия ЭЭО как частей сверхмощных энергетических объединений типа Единой энергосистемы России, реализуемые на основе принципов декомпозиции и координации, которые требуют специального рассмотрения.

Как следует из сказанного выше, методы синтеза классических систем управления ЭЭО могут быть основаны на решении задачи модального управления (распределения полюсов, см. п. 3.1). Принцип максимума Л. С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана [106] и другие вариационные методы могут использоваться ограниченно при синтезе оптимальных систем. Это связано с проблемами конструктивного учета технологических режимов ЭЭО в необходимых условиях оптимальности. Эти трудности носят аналитический и вычислительный характер при учете ограничений на координаты, управления и скорости их изменения (п. 3.4).

Решение аналитических и вычислительных проблем возможно методами МП, обладающих универсальными вычислительными возможностями. В данном разделе на основе МП рассматривается синтез *локально-оптимальных систем* управления ЭЭО. Методы синтеза локальных стабилизирующих управлений обеспечивают достижение технологических целей при формировании ограничений и целевых условий, учет которых не предусматривается классическими методами оптимального

управления. Применение классических методов приводит к существенному усложнению процедур вычисления необходимых управлений, варианты которых рассмотрены в предыдущих разделах (п. 3.2-3.4).

Таким образом, синтез управлений ЭЭО будет основан на методах МП, эффективное применение которых в полной мере требует разработки адекватных аналитических математических моделей вычислительных алгоритмов для проведения качественного исследования замкнутых систем управления АРЧМ.

2. Постановка задачи синтеза локально-оптимальных систем АРЧМ с математически программируемой обратной связью. Методы *синтеза стабилизирующих управлений ЭЭО* включают решение следующих задач:

1). Разработка методов вычисления локально оптимальных, интервально-оптимальных или экстремальных управлений, при которых координаты ЭЭО (частота, мощности) удовлетворяют ***точечным, интервальным или экстремальным целевым условиям***, когда обратные связи формируют программно-замкнутые управления [85, 81,88,103,107,221].

2). Создание математических моделей замкнутых систем на основе операторов МП (ОМП), аналитически характеризующих предельные точки итеративных алгоритмов МП.

3). Исследование условий асимптотической устойчивости замкнутых систем АРЧМ с обратной связью на основе ОМП.

На первом этапе решения задачи необходимо ввести ряд необходимых определений.

Определение. Пусть для каждого момента времени $k \leq N$ выполнены условия:

1. Для управляемых объектов, описываемых уравнениями

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k),$$

формируется *программно-замкнутое управление*, минимизирующее локальный функционал, заданный на временном интервале

$$J(x_{k+1}^{k+p}, u_k^{k+p-1}),$$

2. Траекториям динамической системы соответствуют оптимальные на конечном интервале дискретного времени $[k, k+p]$ такие счетные *последовательности состояний*

$$\{x^*\}_{k+1}^{k+p} = (x_{k+1}^*, \dots, x_{k+i}^*, \dots, x_{k+p}^*), \quad k \in N,$$

и *последовательности управлений*

$$\{u^*\}_k^{k+p-1} \triangleq (u_k^*, \dots, u_{k+i-1}^*, \dots, u_{k+p-1}^*), \quad k \in N,$$

что пара векторов состояний и управлений

$$\begin{aligned} & \left[\{x^*\}_{k+1}^{k+p}, \{u^*\}_k^{k+p-1} \right] = \\ & = \arg \min \left\langle J \left[\{x\}_{k+1}^{k+p}, \{u\}_k^{k+p-1} \right] \mid \{x\}_k^{k+p} \in D_x, \{u\}_k^{k+p-1} \in D_u \right\rangle, \end{aligned}$$

где D_x и D_u – целевые множества, зависящие от вектора состояний x_k и управлений u_k . Структуры множеств определяются комплексом задач управления для момента времени $k \in N$, данными в п. 3.2 – 3.4. Тогда система управления, замкнутая на каждом шаге управлением

$$\{u^*\}_k^{k+p} = \Phi_k \left[\{x^*\}_k^{k+p}, \{u^*\}_{k-1}^{k+p-1} \right],$$

называется *локально-оптимальной системой (ЛОС)*.

Смысл локальной оптимальности состоит в следующем. Локально-оптимальные системы синтезируются программированием (прогнозированием) на основе методов МП состояний и

управлений на заданный временной интервал и формированием управлений на объект в функции прогнозируемых управлений

$$u_k^{*k+p},$$

соответствующих текущим измерениям координат x_k .

Определение. *Вектор прогнозируемых управлений* – «сужение» программно-синтезированной *последовательности*

$$u_k^{*k+p-1} \rightarrow u_k^{*k+1}$$

на конечном интервале $[k, k+p]$ *на момент времени* « k », гарантирующей существование натурального $p < \infty$, ($p < N$ - горизонт планирования) такого, что для всех $k < [k, k+p]$ выполняются целевые условия, заданные для координат состояния или выхода, реализующие технологические требования к режимам САУ ЧМ ЭЭО.

Важной частью синтеза является прогнозирование состояний ЭЭО на основе технологических задач, сформулированных в пп. 3.2-3.4, которые определяют *прогнозируемые целевые множества*. Целевые множества D_x и D_u в задачах оптимизации используются многофункционально. В частности, с помощью целевых множеств можно задать модели объектов, учитывающие нелинейности ЭЭО по управлению или по состоянию. Необходимо также учесть нелинейности, описывающие алгоритмы управления с учетом ограничений на координаты состояния (выхода) объектов. Последнее связано с требованиями поддержания потоков, частоты и обменной мощности в допустимой области (интервальные ограничения), а также и ограниченностью ресурсов управления, связанных с ограничениями на регулировочные диапазоны станций. Целевые множества используются для задания прогнозируемых технологических требований к координатам объекта и учета ограничений на управления.

Таким образом, основные типы ограничений прикладных задач управления частотой и активной мощностью ЭЭО, приведенные в пп. 3.1-3.4, позволяют сформировать прогнозируемые целевые множества в процессе управления.

3. Синтез локально-оптимальных дискретных систем управления частотой и активной мощностью. Применение ЭВМ для автоматического управления ЭЭО расширяет класс алгоритмов, которые можно использовать в реальном времени. Последнее обстоятельство требует развития методов математического моделирования систем, управляемых с помощью МП. Ниже рассматриваются модели систем управления ЭЭО с управлениями формируемыми операторами математического программирования (ОМП), имеющих сложную вычислительную схему.

Конструктивные математические модели *систем с алгоритмической обратной связью* на основе методов МП представляют законы управления в *операторной форме*, что позволяет использовать классические подходы к исследованию устойчивости систем. В настоящее время процедуры МП, как правило, характеризуются алгоритмической формой задания решений, соответствующей алгоритму оптимизации.

Определение. Пусть описание предельных точек алгоритмов задается алгебраическими операторами, определяющими аналитические решения задач МП. Тогда уравнения замкнутых систем определяют системы с математически программируемой обратной связью или *системы с операторами МП*.

Эти системы могут представляться в пространстве состояний динамических систем и определять достаточные условия асимптотической устойчивости на основе функций А. М. Ляпунова или входу-выходной устойчивости. При этом

точечно-целевые, интервально-целевые и экстремально-целевые системы АРЧМ синтезируются на основе прогнозирования и целевых условий для состояний или выходов. При этом должна иметь место асимптотическая устойчивость в целом или в некоторой области притяжения.

Важная задача управления связана с прогнозированием состояний или выходов объекта управления на один или несколько шагов, что позволяют компенсировать временное запаздывание в дискретных системах, и повысить точность стабилизации, несмотря на локальный характер функционала оценки качества процессов.

Теория управления развивается на основе расширения типов фундаментов для решения проблем управления, включая современную алгебру, геометрию и функциональный анализ. Ниже развивается подход, использующий негладкие и кусочно-линейные операторы» для математического моделирования объектов и **«операторы математического программирования»** (ОМП) как конструктивные алгебро-операторные модели управления с обратной связью по состояниям или выходам, принадлежащим конечномерным пространствам [85,86,88,92,103]. Это позволяет исследовать системы управления на основе моделей, расширяющих классы целевых условий и технологических требований. При этом **программно-замкнутые управления** синтезируются на основе комплексных целевых условий и прогнозирования динамических или квазистационарных состояний объектов с необходимыми **«горизонтами планирования»**, позволяющими приблизить качество локально-оптимальных систем (ЛОС) к качеству систем с интегральными (суммарными) функционалами.

В связи с проблемами синтеза данного класса систем на основе классических необходимых условий типа

Якоби-Гамильтона-Беллмана в данной работе рассматривается вариант синтеза ЛОС. При этом дискретные ЛОС с точечными (типа равенств), интервальными (типа двусторонних неравенств) или экстремальными целевыми условиями синтезируются на основе прогнозирования состояний объектов на заданные *«временные горизонты»* [103].

Системы управления с обобщенными целевыми условиями синтезируются методами МП, которые *«в силу универсальности»* реализуют комплексные целевые условия для широкого класса технологических задач [106-113]. В рассматриваемой постановке управления с обратной связью вычисляются как решения счетного числа задач МП, представляющих операторы обратной связи в виде ОМП, задающих предельные оптимальные решения проекционных методов МП. Исследованы условия асимптотической устойчивости, когда динамические модели – известны, а координаты состояния – измеряемы.

4. Постановка задач управления. Пусть ЭЭО как дискретные объекты описываются одним из представленных линейных, кусочно-линейных или нелинейных разностных уравнений:

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, y_k = Cx_k, x_{k0} = x_0, \quad (1.a)$$

$$x_{k+1} = H\Phi_x(x_k) + F\Phi_u(u_k), y_k = Cx_k, x_{k0} = x_0, \quad (1.б)$$

$$x_{k+1} = H(x_k) + F(x_k)u_k, y_k = Cx_k, x_{k0} = x_0, \quad (1.в)$$

где первое уравнение – линейное, второе – кусочно-линейное [86], а третье – нелинейное уравнение с гладкой правой частью. Пусть управления формируются статическими регуляторами

$$u_k = \Gamma u_k^*(x_k), \quad \Gamma \in R^{m \times m}, \quad (2)$$

где векторы состояний x_k (или выходов y_k) описывают эволюцию системы в дискретном времени, а u_k и $u_k^*(x_k)$ – векторы

результатирующих и прогнозируемых управлений, причем вектор прогнозируемых управлений вычисляется на основе решения задач МП на каждом шаге управления.

Требуется:

1. Сформулировать математические модели замкнутых систем управления, включающие уравнения объектов.

2. Определить ОМП, которые точно или приближенно задают обратные связи дискретных систем, формируемые решениями счетного числа задач МП.

3. Разработать условия асимптотической устойчивости замкнутых систем управления с обратной связью в виде линейных или нелинейных ОМП.

5. Уравнения замкнутых локально-оптимальных систем. Формирование математических моделей объектов управления, используемых при вычислении управлений ЛОС, является основой для формулировки задач МП. Можно показать, что модель объекта для вычисления управлений методами представлена линейными разностными уравнениями

$$x_{k+1} = H_M x_k + F_M u_k, \quad y_k = C_M x_k, \quad (3)$$

адекватными моделям (1) в окрестности стационарных состояний. При этом матрицы в (3) согласованы с уравнениями объекта так, что для (1.а) $H_M = H$, $F_M = F$, $C_M = C$, для (1.б) модели равны матрицам Якоби, вычисленным в окрестности стационарной точки (x^*, u^*) , где правая часть предполагается дифференцируемой:

$$H_M = H \Phi'_x(x^*), \quad F_M = F'_u(u^*), \quad C_M = C.$$

Для (1.в) данные матрицы также равны матрицам Якоби: $H_M = \left[H(x^*) \right]'_x$, $F_M = F'_u(u^*)$, $C_M = C$.

Таким образом, используемые модели объектов определяют

счетное семейство задач математического программирования с линейными ограничениями.

Операторы для задач МП с линейными ограничениями. Модели объекта (3), используемые для вычисления управлений методами МП, имеют *эквивалентное представление* в виде *линейного многообразия* пространства координат z_k и определяют в ограничениях задач МП линейное многообразие:

$$D_z^0 = \left\{ z_k = (y_{k+1}, u_k)^T \mid Az_k = [E \mid -C_{\mathcal{M}} F_{\mathcal{M}}] z_k = cH_{\mathcal{M}} x_k \triangleq b \right\}. \quad (4)$$

Линейное многообразие (4) является основой линейных задач МП, иллюстрирующих принципиальную структуру линейных ОМП, задающих конструктивно обратную связь на основе проекционных аналитических или вычислительных алгоритмов МП. Тогда прогнозируемые управления $u_k^*(x_k)$ являются решениями счетного числа задач МП, разрешаемых на каждом шаге управления. Это счетное семейство задач математического программирования имеет вид: вычислить вектор управлений

$$D_z^0 = \left\{ z_k = (y_{k+1}, u_k)^T \mid Az_k = [E \mid -C_{\mathcal{M}} F_{\mathcal{M}}] z_k = cH_{\mathcal{M}} x_k \triangleq b \right\}, \quad (5)$$

где $J_1 = C^T z_k$ или $J_2 = y_{k+1}^T Q y_{k+1} + u_k^T R u_k$ – локальные линейный и квадратичный функционалы, учитывающие качество управления на основе одношагового «горизонта планирования состояний». Применение «многошагового горизонта прогнозирования состояний (выходов)» также конструктивно определяет структуру обратной связи за счет «сужения» последовательности прогнозируемых управлений $\{u_i^*\}_{i=k}^{i=k+p}$ и соответствующих состояний для интервала $[k, k+p]$ на момент времени $i = k$, соответствующий текущему состоянию. В результате «сужения» из последовательности управлений $\{u_i^*\}_{i=k}^{i=k+p}$ выделяется управление u_k^* , которое используется в законе управления (2).

Таким образом, сформулированные линейные ОМП порождают линейные замкнутые ЛОС, устойчивость которых можно исследовать методами линейной алгебры.

Нелинейные операторы МП. В равенствах (5) включения $z_k \in D_z$ обладают свойством универсальности ограничений задач МП. Включениями можно задать модели объекта (4), конструировать ограничения для реализации точечных (типа равенств) и интервальных (типа двухсторонних неравенств) целевых условий для координат состояний (выходов) и управлений. Множества D_z могут учитывать ограничения на координаты и управления. Матрица T выделяет вектор u_k из вектора z_k , а Q и R – диагональные и положительно определенные матрицы.

Используемые далее допустимые множества, задающие модели объектов и ограничения задач математического программирования, приведены в табл. 3.3. Модели объектов, целевые условия и ограничения позволяют определить ОМП для минимизации функционалов J_1 или J_2 в (5) на одном из множеств: $D = D^0 \cap D^l, l = 1, 2$.

Функционал J не удовлетворяет условию равного возрастания из точки безусловного минимума, то для применения аналитических методов требуется «симметризация». Матрицы $Q = \text{diag} Q_j > 0, j = \overline{1, r}, R = \text{diag} R_i > 0, i = \overline{1, m}$, поэтому для «симметризации» квадратичных функционалов можно ввести новые переменные:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{k+1} \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Таблица 3.3

Операторы проецирования, используемые в операторах МП

Типовые множества $D^l \in R^n$ евклидова пространства	Операторы проецирования на множества
Линейное подпространство: $\tilde{D}^0 = \{z \mid \tilde{A}z = 0, \tilde{A} \in R^{q \times n}, q \leq n\}$	$\tilde{P}^0(z^0) = [E - \tilde{A}^T (\tilde{A} \tilde{A}^T)^{-1} \tilde{A}] z^0$
Линейное многообразие: $D^0 = \{z \mid \tilde{A}z = b, \tilde{A} \in R^{q \times n}, q \leq n\}$	$P^1(z^0) = \tilde{P}^0(z^0) + \tilde{A}^T (\tilde{A} \tilde{A}^T)^{-1} b$
Параллелепипед: $D^1 = \{z \mid z^- \leq z \leq z^+, z^- < z^+\}$	$P^1(z^0) = \left[\left z^0 - z^- \right - \left z^0 - z^+ \right + \right. \\ \left. + z^- + z^+ \right] / 2$
Шар: $D^2 = \{z \mid \ z - a\ ^2 \leq r^2\}$	$P^2(z^0) = P^1(z^0),$ $z^- = \min(z^1, z^2),$ $z^+ = \max(z^1, z^2),$ $z^{1,2} = z^0 + 2\alpha_{1,2}(z - a),$ $\alpha_{1,2} = (-\gamma \pm r\sqrt{\gamma}) / (2\gamma), \quad \gamma = \ z - a\ ^2.$

Квадратные корни матриц Q и R в (6) – диагональные матрицы с элементами $Q_j^{1/2}$ и $R_i^{1/2}$. Задача МП (5) формулируется следующим образом: вычислить пару:

$$z_k^{*l} = (y_{k+1}^*, u_k^*)^T = \arg \min \left\{ J = \|y_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2 \mid z_k \in D_z \right\}, \quad (7)$$

где допустимое множество D_z^0 , определяемое соотношениями

$$D_z = \{\tilde{z}_k = (\tilde{y}_{k+1}, \tilde{u}_k)^T \mid \tilde{z}_k \in D_z^0 \cap D_z^1, D_z^0 \stackrel{\Delta}{=} [\tilde{z}_k \mid \tilde{A}\tilde{z}_k = (E_{n \times n} \mid -F)\tilde{z}_k = \tilde{b}_k,$$

$$A \in R^{n \times (n+m)}, \text{rang}(\tilde{A}) = m, \tilde{b}_k \stackrel{\Delta}{=} \tilde{H}x_k, F \stackrel{\Delta}{=} Q^{1/2}CF_M(R^{1/2})^{-1}, \tilde{H} \stackrel{\Delta}{=} Q^{1/2}H_M],$$

$$D_z^1 = [\tilde{z}_k | z^- \leq \tilde{z}_k \leq z^+] \neq \emptyset, D_z^0 \cap D_z^1 \neq \emptyset \in R^{n+m},$$

включает линейное многообразие D_z^0 , задающее одношаговые модели для ЛОС (или многошаговые модели процессов [1,5]), причем вектор $b_k = \tilde{H}x_k$ определяет обратную связь с помощью оператора проецирования, что задает специальную модель вычислительного процесса решения задачи операторами МП. Множество D_z^1 определяет параллелепипед (5) данными, приведенными в табл. 3.3.

Варианты аналитических решений некоторых нелинейных задач типа (7) получены в [85,86,89], где сформулированы операторы МП и операторы решения неравенств (ОРН), которые в аналитической форме задают предельные решения итерационных алгоритмов проекционного типа. Обобщенные типы ОМП приводятся ниже.

Лемма 1 о минимизации линейных функционалов на компактных множествах [86]. Пусть рассматривается задача минимизации: вычислить вектор, доставляющий *приближенный условный минимум* линейному функционалу:

$$Z_* = \arg \min \{J_1 = C^T Z | Z \in D_z^0 \cap D_z^1 \neq \emptyset\} \approx$$

$$\approx \tilde{Z}_* = \arg \min \{J = C_0^T z | A_0 Z = b_0, A_0 \in R^{m \times n}, \text{rang} A_0 = m,$$

$$(Z - d)^T Q(Z - d) \leq r^2, \text{rang} Q = n\},$$

причем приближенное решение, определяющее ОМП, вычисляется на пересечении линейного многообразия и эллипсоида евклидова пространства. Эллипсоид аппроксимирует параллелепипед D_z^1 так, что центр эллипсоида — $d = (z^+ + z^-)/2$, а его полуоси равны $Q_i = [(z^+ - z^-)/2]^{1/2}$.

Тогда оператор МП принимает вид [3]:

$$\begin{aligned} X^*(\lambda) &= P^0 c - \tilde{P}^0 c (1 - 1/2\lambda), \\ P^0 c &= \tilde{P}^0 c + P^A b, P^A b = A^T (AA^T)^{-1} b, \end{aligned} \quad (8.a)$$

где множитель Лагранжа λ – это одно из решений квадратного уравнения, соответствующего минимуму линейного функционала

$$\alpha\lambda^2 - \beta = 0, \quad \alpha = 4b^T (AA^T)^{-1} b + 4r^2 > 0, \quad \beta = c^T \tilde{P}^0 c > 0. \quad (8.б)$$

определяющего два значения λ^- и λ^+ , одно из которых соответствует максимуму, а другое – минимуму линейного функционала, причем: $\lambda^\mp = \mp(\beta/\alpha)^{1/2}$. Тогда решение в пространстве векторов Z представляется равенством

$$Z^* = Q^{-1/2} X^* + d. \quad (8.в)$$

Идея доказательства. Эллипсоид аппроксимирует параллелепипед ограничений, причем замена переменных:

$$\begin{aligned} Z &= Q^{-1/2} X + d, \quad X = Q^{1/2} (Z - d), \quad (Z - d)^T Q (Z - d) = \\ &= (Q^{-1/2} X)^T Q (Q^{-1/2} X) = X^T X \leq r^2 \end{aligned}$$

преобразует ограничения и задачу МП к виду: вычислить вектор

$$\begin{aligned} X_* &= \arg \min \{ \tilde{J}_1 = C_0^T Q^{-1/2} X + C_0^T d \mid AZ = A_0 (Q^{-1/2} X + d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_0 Q^{-1/2} X = b_0 - A_0 d \}. \end{aligned}$$

В пространстве новых переменных ограничения задачи принимают вид:

$$\left\{ AX = b, A = A_0 Q^{-1/2}, b = b_0 - A_0 d, \text{rang } A = m, X^T X \leq r^2 \right\} \in R_x^n,$$

а преобразованная задача сводится к вычислению минимума функционала $J = c^T X + f$ при нелинейных ограничениях:

$AX = b$, $X^T X \leq r^2$. Для данной задачи формируется функция Лагранжа и необходимые условия определяют минимизирующие и максимизирующие элементы. Интервальное решение определяется значениями: $-\lambda$ и $+\lambda$, соответствующим аналитическим решениям, доставляемым *оператором решения системы равенств и неравенств* [85].

Лемма 2 о минимизации квадратичных функционалов на компактных множествах [86]. Пусть выполнены условия:

1. Задача МП имеет вид: вычислить вектор на пересечении линейного многообразия и параллелепипеда, аппроксимированного эллипсоидом

$$X^* = \arg \min \left\{ J = (X - c)^T (X - c) \mid Ax = b, x^T Qx \leq r^2 \right\}.$$

Тогда в зависимости от принадлежности точки минимума функционала границе или внутренней части допустимого множества оптимальное решение определяется предикатным соотношением вида

$$X^* = X^*(\lambda) = \begin{cases} X^* = [P^0(C) + \lambda P^A b] / (1 + \lambda^2), & \text{если } X^* \notin \text{int } D; \\ X^{0*} = P^0(C), & \text{если } X^{0*} \in \text{int } D, \end{cases} \quad (9)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^1$ – решения квадратного уравнения:

$$\alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b, \\ \alpha_2 = -2b^T (AA^T)^{-1} b, \quad \alpha_3 = r^2 - C^T \tilde{P}^0 C - b^T (AA^T)^{-1} b.$$

Символом $\text{int } D$ обозначена внутренность множества D как множество точек открытого множества, полученного из D исключением граничных точек. Из пары решений квадратного уравнения выбирается значение, соответствующее минимуму функционала. Значение λ может также определяться на основе дифференциальных условий теоремы Куна-Таккера [3].

Следствие к лемме 2 (достаточный критерий совместности ограничений задач МП) [86]. Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Тогда критерий совместности ограничений задач МП – это условие существования вещественных решений квадратного алгебраического уравнения

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0,$$

где параметры неравенства определены в леммах 1 и 2.

Приведенные результаты позволяют представить линейные и нелинейные ОМП в табл. 3.4.

Критерий управляемости систем с ограниченными ресурсами на основе (9) сформулирован в [103]. Вектор результирующих управлений имеет вид

$$u_k = \Gamma u_k^* = \Gamma T z_k^*, \quad z_k^* = \Phi(H_M x_k), \quad (10)$$

Соотношения (10) представляют оператор обратной связи ЛОС как **оператор математического программирования**, специальные случаи которого рассмотрены [85,86,103], а обобщенные варианты приведены в табл. 3.4. Параметры ОМП типа (10) определены в табл. 2 с учетом равенств

$$\tilde{T} = \frac{T}{\sqrt{R}}, \quad T = (O_{m \times n}, E_m), \quad \tilde{A} = (E | -\tilde{F}_M), \quad \tilde{b} = \tilde{H}_M x_k.$$

В последних равенствах вектор $z_k^0 = 0$ и представляет собой точку безусловного минимума функционала. Приближенные (аппроксимирующие) решения задачи получены на основе аппроксимации D^1 эллипсоидом, параметры которого выбраны так, что $D^1 \supset D^2$ и эллипсоид имел максимальную меру (леммы 1 и 2).

Таким образом, уравнения объектов управления типа (1.а) – (1.в) и операторы МП, задающие обратные связи, описывают

Таблица 3.4

**Линейные и нелинейные операторы математического
программирования и обратной связи СОП и САУ ЧМ**

№	Задачи обратной связи для СОП и САУ ЧМ как задачи математического программирования	Операторы: 1. Математического программирования 2. Обратной связи
1	Задача 1: ВЫЧИСЛИТЬ $Z_* = \arg \min \{J_1 = C^T Z \mid Z \in D_Z^0 \cap D_Z^1 \neq \emptyset\} \approx$ $\approx \tilde{Z}_* = \arg \min \{J = C_0^T z \mid A_0 Z = b_0, A_0 \in R^{m \times n}, (Z - d)^T Q(Z - d) \leq r^2\}$	1). Оператор МП: $X_*(\lambda) = P^0 c - \tilde{P}^0 c(1 - 1/2\lambda),$ $P^0 c = \tilde{P}^0 c + P^A b, \quad (8.a)$ $P^A b = A^T (AA^T)^{-1} b,$ $\alpha \lambda^2 - \beta = 0,$ $\alpha = 4b^T (AA^T)^{-1} b + 4r^2 > 0, \quad (8.б)$ $\beta = c^T \tilde{P}^0 c > 0.$ $Z_* = Q^{-1/2} X^* + d. \quad (8.в)$ 2). Оператор обратной связи: $u_k = \gamma u_k^*(x_k) = \gamma \Phi(Hx_k)$
2	Задача 2: ВЫЧИСЛИТЬ $X^* = \arg \min \{J = (X - c)^T (X - c) \mid Ax = b, x^T Qx \leq r^2\}.$	1). Оператор МП: $X_*(\lambda) = \begin{cases} [P^0(C) + \lambda P^A b] / (1 + \lambda^2), \\ \text{если } X_*^0 = P^0(C) \notin \text{int } D; \\ P^0(C), \text{ если } X_*^0 = P^0(C) \in \text{int } D, \end{cases} \quad (9)$ 2). Оператор обратной связи $u_k = \gamma u_k^*(x_k) = \gamma \Phi(Hx_k)$

широкий класс замкнутых локально оптимальных систем с комплексными целевыми условиями и позволяют сформулировать достаточные условия асимптотической устойчивости, рассматриваемые в приведенных далее результатах.

6. Анализ асимптотической устойчивости линейных локально-оптимальных систем. Методика анализа устойчивости рассматривается на примере линейного объекта в следующей постановке. Пусть модель замкнутой дискретной линейной ЛОС с ОМП типа «вход-состояние-выход» представлена уравнениями объекта (1.а)

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k; y_k = x_k.$$

Параметры модели – известны, что позволяет использовать для синтеза управлений на основе ОМП уравнений типа (1.а), где $H_M = H, F_M = F$. Функционал качества имеет вид: $J = \|x_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2$. Вектор результирующих управлений в силу линейности регулятора, выделенного из общего ОМП, имеет вид

$$u_k = \Gamma u_k^* = \Gamma TP^0(z_k^0), \quad T_{m \times (n+m)} = (0_{m \times n} \mid E_{m \times m}), \quad (11)$$

где $P^0(z_k^0) = \tilde{P}^0 z_k^0 + A^T (AA^T)^{-1} b$ – проектор на D_z^0 (см. табл. 3.3).

Требуется сформулировать условия асимптотической устойчивости в виде ограничений на матрицу Γ , на основе устойчивости характеристического полинома замкнутой ЛОС.

На первом этапе определяется структура матрицы

$$\Gamma = \gamma E, \quad \gamma \in R^1, \quad (12)$$

с совпадающими скалярными диагональными элементами. Тогда параметр γ – скалярный коэффициент усиления, гарантирующий асимптотическую устойчивость.

Лемма 3 (о проекторе на специальное линейное многообразие). Пусть специальное линейное многообразие имеет вид

$$D_z^0 = \left\{ z_k \mid Az_k = b_k, A_{n \times (n+m)} = [E_{n \times n} \mid -F_{n \times m}], b_k = Hx_k \right\}.$$

Тогда проекция z_k^* элемента z_k^0 на специальное линейное многообразие D_z^0 определится равенством:

$$z_k^* = P^0(z_k^0) = \begin{bmatrix} E_{n \times n} - \bar{F}_{n \times n} & -\bar{F}_{n \times n} F_{n \times m} \\ -F_{m \times n}^T \bar{F}_{n \times n} & E_{m \times m} - F_{m \times n}^T \bar{F}_{n \times n} F_{n \times m} \end{bmatrix} z_k^0 + \\ + \begin{bmatrix} \bar{F}_{n \times n} \\ -F_{m \times n}^T \bar{F}_{n \times n} \end{bmatrix} Hx_k, \quad (13)$$

$$\bar{F}_{n \times n} = \tilde{F}_{n \times n}^{-1}, \quad \tilde{F}_{n \times n} = E_{n \times n} + F_{n \times m} F_{m \times n}^T.$$

На основании уравнений объекта, результатов п. 1 и с учетом того, что $z_k^0 = 0$, а уравнения линейной замкнутой ЛОС имеют вид:

$$x_{k+1} = Hx_k + \gamma F \Phi(Hx_k), \quad \Phi(Hx_k) = Tz_k = -TF^T(E_n + FF^T)^{-1} Hx_k.$$

В преобразованном виде можно получить следующее уравнение замкнутой системы

$$x_{k+1} = \bar{H}x_k, \quad x_{k0} = x_0, \quad (14)$$

где $\bar{H} = [E_n - \gamma FTF^T(E_n + FF^T)^{-1}]H$ – матрица замкнутой ЛОС. Для асимптотической устойчивости системы (14) необходимо и достаточно выполнение условий: $|\lambda_j(\bar{H}(\gamma))| < 1, \quad j = 1, \dots, n$, где $\lambda_j(\bar{H}(\gamma))$ – корни характеристического уравнения матрицы замкнутой ЛОС $\bar{\chi}(\lambda) = \det[\lambda E - \bar{H}(\gamma)] = 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1). ЛОС управления описывается уравнениями (14); 2). Пара матриц

(H, F) управляема (выполнен ранговый критерий Р. Калмана).

3). Управление – скалярное: $u_k = \mu_k^* \in R^1$. 4). Локальный функционал $J = \|x_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2$, а характеристический полином объекта имеет вид:

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda E - H) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n.$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой ЛОС (14) можно представить в форме

$$\bar{\chi}(\lambda) = \lambda^n + \rho(p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n) = 0. \quad (15)$$

где скалярный параметр замкнутой системы $\rho = 1 - \gamma/2$.

Доказательство. Пусть имеются уравнения управляемого объекта (1.а) и ОМП (14). Тогда существует неособенное преобразование координат, в которых фробениусова матрица H и матрица-столбец F имеют вид:

$$\bar{H} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n-1) \times 1} & E_{(n-1) \times (n-1)} \\ \hline -p_n & -p_{n-1} - \dots - p_1 \end{array} \right], \quad F = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Блоки для матрицы линейной замкнутой системы $\bar{H}$ имеют вид:

$$\tilde{F} = (E_{n \times n} - F_{n \times 1} F_{1 \times n}^T)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} \\ \hline 0_{1 \times (n-1)} & 0,5 \end{array} \right],$$

$$F F^T \tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} \\ \hline 0_{1 \times (n-1)} & 0,5 \end{array} \right],$$

Тогда матрица замкнутой линейной ЛОС с ОМП примет вид:

$$\bar{H} = \left[\begin{array}{c|c} 0_{(n-1) \times 1} & E_{(n-1) \times (n-1)} \\ \hline -\rho p_n & -\rho p_{n-1} - \dots - \rho p_1 \end{array} \right].$$

В результате характеристический полином матрицы $\bar{H}$, соответствующей замкнутой линейной локально-оптимальной системы $\bar{\chi}(\lambda) = \det[\lambda E - \bar{H}] = -\det[\bar{H} - \lambda E]$ имеет канонический вид, соответствующий форме Фробениуса:

$$\bar{\chi}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \\ -\rho p_n & -\rho p_{n-1} & -\rho p_{n-2} & \dots & -\rho p_3 & -\rho p_2 & -\rho p_1 - \lambda \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Определитель (15) вычисляется разложением (16) по элементам последней строки, по лемме Шура, коэффициенты характеристического полинома фробениусовой матрицы определяются ее нижней строкой, что доказывает теорему. Явный вид характеристического полинома упрощает процедуру исследования устойчивости и формулировки требований к параметру γ .

8. Условия устойчивости систем ограничения перетоков на основе динамических моделей ЭЭО. Асимптотическая устойчивость нелинейных ЛОС исследуется на основе принципа сжимающих отображений и метода функций Ляпунова. При формулировке условий устойчивости целесообразно полагается, что ОМП синтезируется из условия минимизации локального функционала при условии $Q = E, R = E$, на множествах определяемых точечными или интервальными целевыми условиями: $x_{k+1} \in D_x$, и ограничениями на управления $u_k \in D_u$. Пусть уравнения объекта

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, y_k = x_k, x_{k0} = x_0, \quad (17)$$

стабилизируется управлениями с использованием ОМП:

$$u_k = \gamma u_k^* = \gamma \Phi(Hx_k), \quad (18)$$

где ОМП определены в табл. 3.3 и 3.4 и леммами 1 и 2.

Требуется сформулировать ограничения на скалярный параметр γ регулятора (18), гарантирующие асимптотическую устойчивость стационарного состояния замкнутой системы управления (17), (18) в области фазового пространства, содержащей это стационарное состояние.

Решение задачи требуют рассмотрения процессов управления в нормированном пространстве состояний и изучения приращений функций Ляпунова. Наиболее простые условия устойчивости имеют место, если функция Ляпунова определена евклидовой нормой или квадратичной формой координат состояния. При этом используются условия, следующие из принципа сжимающих отображений, а также требования теорем Ляпунова.

Лемма 4 (о сжимающем отображении). Пусть в евклидовом пространстве состояний заданы уравнения системы

$$x_{k+1} = \Psi(x_k), \quad x_{k0} = x_0,$$

отображающие пространство $\mathbb{R}^n$ в себя. Тогда отображение $\Psi(x_k)$ является сжатием, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек x'_k, x''_k выполнено неравенство

$$\|\Psi(x'_k) - \Psi(x''_k)\| \leq \alpha \|x'_k - x''_k\|.$$

Отображение $\Psi(x_k)$ непрерывно в силу условий леммы 4, поэтому существует предельная точка отображения x^* такая, что $\Psi(x_k) \rightarrow \Psi(x^*)$, $k \rightarrow \infty$, где x^* — **неподвижная точка** $\Psi(x)$.

Уравнение замкнутой нелинейной системы с ОМП имеет вид:

$$x_{k+1} = Hx_k + \gamma F\Phi(Hx_k), \quad x_{k0} = x_0. \quad (19)$$

Анализ устойчивости требует определения стационарных точек, являющихся неподвижными точками отображения, задаваемого правой частью системы (19). Явное определение стационарных точек из (19) приводит к необходимости разрешения нелинейного алгебраического уравнения

$$x^* = Hx^* + \gamma F\Phi(Hx^*) \quad (20)$$

относительно стационарной точки x^* . Поэтому далее условия устойчивости формулируются при неявном методе задания стационарной точки, определяемой (20). Пусть функция Ляпунова задана евклидовой нормой

$$V_k = \|x^* - x_k^*\|^2 \quad (21)$$

и с помощью (21) формулируются ограничения на параметр γ .

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1). Последовательность состояний динамической системы задается линейными разностными уравнениями, где матрица H такая, что $\|H\| < 1$. 2). Множества $D^0 \cap D^1$ непустые для дискретного времени $\bar{k}$, т. е. выполнен достаточный критерий совместности ограничений для задач МП (следствие к леммам 1 и 2 для множества D^2 и для аппроксимации $D^2 \in D^1$). 3). Оператор управления удовлетворяет условию Липшица в области Ω по координатам x_k и x^* :

$$\|\Phi(x'_k) - \Phi(x^*)\| \leq L_\Phi \|x'_k - x^*\|, \quad x'_k, x^* \in \Omega$$

Тогда для устойчивости замкнутой системы (19), (20) в такой области Ω , что $x^*, x_k \in \Omega$, достаточно, чтобы

$$|\gamma| < (\|H\|^{-1} - 1) / L_\Phi \|F\|. \quad (22)$$

где нормы векторов и матриц согласованы, т. е. выполнено

соотношение: $\|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, причем евклидова норма $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, а подчиненная норма матрицы: $\|A\| = \sqrt{\Lambda}$, где Λ – максимальное собственное число $A^T A$.

Доказательство. Выполним вычитание из левой и правой частей уравнения (19) соответствующие части уравнения (20). Далее с учетом определения функции Ляпунова (21) можно перейти к норме.

Тогда в силу уравнений (19)-(21) можно определить совокупность соотношений для норм, полученных на основе связи между нормами образа, прообраза и нормы оператора замкнутой ЛОС. В результате можно получить:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \|x^* - x_{k+1}\|^2 = (x^* - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}) = \\ &= \|H(x^* - x_k) + \gamma F[\Phi(Hx^*) - \Phi(Hx_k)]\|^2. \end{aligned} \quad (23.a)$$

В силу неравенства треугольника $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ из соотношения (23.a) следует последовательность преобразований рассматриваемой функции Ляпунова, определяемые евклидовой нормой конечномерного пространства

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \|x^* - x_{k+1}\|^2 = \|H(x^* - x_k) + \gamma F[\Phi(Hx^*) - \Phi(Hx_k)]\|^2 \leq \\ &\leq [\|H\| \cdot \|x^* - x_k\| + |\gamma| \cdot \|F\| \cdot L_\Phi \|H\| \cdot \|x^* - x_k\|]^2 = \\ &= (\|H\| + |\gamma| \cdot \|F\| \cdot L_\Phi \|H\|)^2 \|x^* - x_k\|^2 = \alpha V_k. \end{aligned} \quad (23.б)$$

С учетом свойства нормы образа линейного оператора $y = Ax$ на элементе x : $\|y\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, условия Липшица для оператора управления, свойства субпроектора на выпуклое замкнутое множество: $\|\Phi(z') - \Phi(z'')\| \leq L_\Phi \|z' - z''\|$, и условия сжатия для оператора замкнутой системы следует неравенство:

$$\alpha = \|H\|(1 + |\gamma|L_\Phi\|F\|) < 1,$$

что позволяет записать неравенство (22). Постоянная Липшица ОМП равна единице для случая, когда оператор выполняет точное проецирование элемента на допустимое множество, а иначе – постоянная Липшица не равна единице.

Оценки параметра γ , полученные на основе принципа сжимающих отображений, носят достаточный характер. Уточненные оценки можно получить в случае общего вида квадратичной функции Ляпунова

$$V_k = (x^* - x_k)^T P (x^* - x_k), \quad (24)$$

где $P = P^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрицы, а x_k и x^* – текущие и стационарные значения векторов состояния, удовлетворяющие уравнениям (19) и (20) соответственно. Тогда теорема о достаточных условиях устойчивости нелинейных ЛОС, синтезируемых с применением *динамических моделей* ЭЭО имеет вид. В случае использования квазистационарных моделей ЭЭО (раздел 2) достаточные условия будут формулироваться как следствия из приведенной ниже теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для устойчивости замкнутой ЛОС с ОМП типа (19) достаточно, чтобы параметр γ удовлетворял соотношению

$$2\gamma\|F\|L_\Phi\|H\|\times\|P\| + \gamma^2\|F\|^2L_\Phi^2\|H\|^2\|P\| < -\lambda_{\max}(Q_2), \quad (25)$$

где $\lambda_{\max}(Q_2)$ – максимальное собственное число симметричной положительно-определенной матрицы; $\|A\|$ – норма матричного оператора евклидова конечномерного пространства.

Доказательство. Доказательство утверждения теоремы можно провести в два этапа. *На первом этапе* вычисляется

приращение функции Ляпунова (24), определенной на векторах разности текущих и стационарных значений векторов состояния с использованием уравнений (19) и (20):

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &\triangleq V_{k+1} - V_k \Big|_{(19),(20)} \\
&= \left[H(x_k - x^*) + \gamma F \left[\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*) \right] \right]^T P \times \\
&\quad \times [H(x_k - x^*) + \gamma F [\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*)] - \\
&\quad - (x_k - x^*)^T P (x_k - x^*) = (x_k - x^*)^T H^T P H (x_k - x^*) + \\
&\quad + 2\gamma \left[F [\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*)] \right]^T P [H(x_k - x^*)] + \\
&\quad + \gamma^2 \left[F [\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*)] \right]^T P \left[F [\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*)] \right] - \\
&\quad - (x_k - x^*)^T P (x_k - x^*) = - (x_k - x^*)^T [Q_1 + Q_2] (x_k - x^*),
\end{aligned}$$

где введено требование отрицательной определенности приращения функции Ляпунова с помощью двух квадратичных отрицательно-определенных форм с симметричными матрицами $Q_1 = Q_1^T > 0$, $Q_2 = Q_2^T > 0$.

На втором этапе выполнены дальнейшие преобразования приращения функции Ляпунова, выделение уравнения Ляпунова с матрицей $Q_1 = Q_1^T > 0$ и оценены скалярные произведения по неравенству Коши-Буняковского $|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Это приводит к представлению приращения функции Ляпунова в виде

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &\leq (x_k - x^*)^T [H^T P H - P - Q_1] (x_k - x^*) + \\
&\quad + 2\gamma \|F [\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*)]\| \cdot \|P\| \cdot \|H(x_k - x^*)\| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma^2 \|P\| \cdot \|F\| \left\| \Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*) \right\|^2 = \\
& = -\left(x_k - x^*\right)^T Q_2 \left(x_k - x^*\right).
\end{aligned}$$

Далее можно продолжить преобразования на основе оценок норм образов операторов и оценки с помощью условия Липшица для оценки нормы разности образов суперпозиции гладких и негладких операторов [112]

$$\|\Phi(Hx_k) - \Phi(Hx^*)\| \leq L_\Phi \|H(x_k - x^*)\| \leq L_\Phi \|H\| \cdot \|x_k - x^*\|,$$

где L_Φ – постоянная Липшица для ОМП. В результате после решения уравнения Ляпунова $H^T P H - P - Q_1 = 0_{n \times n}$, которое имеет положительно-определенное решение

$$P = P^T = \sum_{s=0}^{\infty} (H^T)^s Q_1 H^s > 0,$$

поскольку по условию H асимптотически устойчивая матрица, можно получить соотношения

$$\begin{aligned}
\Delta V_k & \leq 2\gamma \|F\| L_\Phi \|H\| \cdot \|P\| \cdot \|x_k - x^*\|^2 + \\
& + \gamma^2 \|F\|^2 L_\Phi^2 \|H\|^2 \cdot \|P\| \cdot \|x_k - x^*\|^2 = -\left(x_k - x^*\right)^T Q_2 \left(x_k - x^*\right).
\end{aligned}$$

Используя в соотношении оценку квадратичной формы:

$$\left(x_k - x^*\right)^T Q_2 \left(x_k - x^*\right) \leq \lambda_{\max}(Q_2) \|x_k - x^*\|^2,$$

где в правой части – максимальное собственное число матрицы Q_2 , можно получить алгебраическое неравенство

$$2\gamma \|F\| L_\Phi \|P\| \cdot \|H\| + \gamma^2 \|F\|^2 L_\Phi^2 \|P\| \cdot \|H\|^2 < -\lambda_{\max}(Q_2).$$

Квадратичное неравенство (25) ограничивает параметр $\gamma \in \mathbb{R}^1$ по условию асимптотической устойчивости, которое можно использовать для анализа динамики управления ЭЭО как

нелинейным объектом в малой окрестности стационарных точек, а также для оценки конечных областей притяжения.

9. Асимптотическая устойчивость систем ограничения с квазистационарными моделями ЭЭО. Полученные выше условия асимптотической устойчивости соответствуют задачам СОП при условии сформированности ограничений задач МП в соответствии с режимной ситуацией, имеющей место в момент перегрузки одной или нескольких линий. Эти режимы определяются соответствующей логикой формирования задач МП. Ниже рассматривается вариант исследования асимптотической устойчивости, когда используется функциональный подход к учету логики действия СОП по линиям. При этом интервальные целевые условия для линий учитываются введением операторов типа «зоны нечувствительности», определяющих логику включения СОП по линиям с учетом формирования управлений на ЭС в функции отклонений от предельно-допустимых значений перетоков.

Утверждение. Пусть задача синтеза управлений системы ограничения перетоков по ЛЭП, сформулированная на основе квазистационарных моделей ЭЭО (типа $s = \beta u$) имеет вид: вычислить вектор управлений $\tilde{u}_k^*$, минимизирующий функционал:

$$u_k^* = \arg \min \{ J = \sum_{i=1}^n c_i |\tilde{u}_{ki}| = c^T |\tilde{u}_k| \mid \beta u_k = \varphi(\tilde{s}_k, S^-, S^+, S^{nan}), \tilde{s}_k \in \mathbb{R}^{n_s}, \beta \in \mathbb{R}^{n_s \times n}, \varphi: \tilde{u} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \tilde{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \} \in \mathbb{R}^n. \quad (26)$$

Тогда для устойчивости замкнутой системы ограничения перетоков достаточно выполнение условия

$$|\gamma| < (1 - \|H\|) / \left[\|F\| \cdot \|\beta^T (\beta \beta^T)^{-1}\| L_\varphi \|C\| \right], \quad \|H\| < 1. \quad (27)$$

Доказательство. Ограничения последней задачи учитывают ограничения на перетоки на основе логики, принятой для

классических систем ограничения по ЛЭП. Сущность этой логики состоит в том, что система ограничения вступает в действие только тогда, когда текущее значение перетока по j -й линии S_{kj} , $j = 1, \dots, n$, равное сумме $S_{kj} = S_j^{план} + \tilde{s}_{kj}$ не удовлетворяет интервальному условию:

$$S_j^- \leq S_{kj} \triangleq S_j^{план} + \tilde{s}_{kj} \leq S_j^+,$$

где $\tilde{s}_{kj}$ – отклонение перетока по j -й линии, вызванное внеплановыми нагрузками, а S_j^- , S_j^+ – предельно-допустимые значения перетоков по линиям. Отклонение перетока по линии $\tilde{s}_{kj}$ описывается разностными или дифференциальными уравнениями динамики ЭЭО, рассмотренными в разделе 2. Для создания адекватной модели функционирования системы ограничения требуется синтезировать адекватную структуру отображения φ . При этом многомерная кусочно-линейная функция φ задается координатными функциями:

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n)^T.$$

Координатные функции отображения φ определяют отображение: $\Delta \tilde{s}_{kj} = \varphi_j \triangleq \varphi_j(\tilde{s}_{kj}, S_j^-, S_j^+, S_j^{план})$, образ которого является отклонением текущего значения перетока по j -й линии $[S_j^{план} + \tilde{s}_{kj}] \triangleq S_{kj}$ от верхней S_j^+ или нижней S_j^- границ допустимого множества $S_j^- \leq S_{kj} \leq S_j^+$. Тогда координатные функции отображения φ определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{s}_{kj} &= \varphi_j \triangleq \varphi_j[S_{kj}(\tilde{s}_{kj}), S_j^-, S_j^+] = \\ &= S_{kj} - S_j^- + (|S_{kj} - S_j^-| - |S_{kj} - S_j^+| - S_j^- + S_j^+) / 2. \end{aligned}$$

Координатные функции позволяют описать логику функционирования СОП, что позволяет использовать при исследовании асимптотической устойчивости классические методы. При этом модели влияния позволяет формировать управления в функции отклонений текущих значений перетоков от верхней или нижней границ допустимой области. Тогда задача задачи МП примет вид

$$u_k^* = \arg \min \{ J = \sum_{i=1}^n c_i |\tilde{u}_{ki}| = c^T |\tilde{u}_k| \mid \beta u_k = \varphi(\tilde{s}_k, S^-, S^+, S^{план}), \\ \tilde{u}^- \leq +\tilde{u}_k \leq \tilde{u}^+ \},$$

где учтены ограничения на управления. При отсутствии ограничений на управления решение задачи МП имеет вид:

$$u_{k+1}^* = \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \varphi(s_k) = \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \varphi(s_k).$$

Тогда уравнения замкнутой системы определяются с учетом уравнений ЭЭО и вектора управлений:

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, \quad \tilde{u}_k = \gamma \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \varphi(s_k). \quad (28)$$

Уравнения динамики и стационарных состояний замкнутой системы примут вид

$$x_{k+1} = Hx_k + F\gamma \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \varphi(s_k), \quad (29.a)$$

$$x_* = Hx_* + F\gamma \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \varphi(s_*). \quad (29.b)$$

Если функция Ляпунова задана нормой пространства, то

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\|_{(28)} &\leq \|H(x_k - x_*)\| + \left\| F\gamma \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} L_\varphi \right\| \|cx_k - cx_*\| \leq \\ &\leq \|H\| \cdot \|x_k - x_*\| + \|\gamma\| \cdot \|F\| \cdot \left\| \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \right\| L_\varphi \|c\| \cdot \|x_k - x_*\| = \\ &= \left(\|H\| + |\gamma| \cdot \|F\| \cdot \left\| \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \right\| \cdot L_\varphi \cdot \|c\| \right) \|x_k - x_*\|. \end{aligned}$$

Из последних соотношений на основе условия сжатия:

$$\|H\| + |\gamma| \cdot \|F\| \cdot \left\| \beta^T (\beta \beta^T)^{-1} \right\| \cdot L_\varphi \cdot \|c\| < 1. \quad (30)$$

следует результат.

Рассмотрим второй вариант задачи синтеза СОП на основе квазистационарных моделей ЭЭО. Решение задач МП, представленных в табл. 3.4, иллюстрируются на примере задачи для СОП, обобщающей результаты [10-13] для дискретного времени $k \in \mathbb{N}$. Пусть требуется вычислить: $\Delta p_i(k+1) = k_i u_{i,k}$ – отклонения мощностей ЭА, связанные с управлениями при режимных условиях: сохранения нормальных режимов линий (а, б) и учете ограничений на регулировочные диапазоны мощностей станций (в), имеющих вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \Delta p_i(k+1) &= \bar{S}_j - S_j(k), \quad j \in N_\Pi(k); \\ \text{б) } \underline{S}_q - S_q(k) &\leq \sum_{i=1}^n \beta_{qi} \Delta p_i(k+1) \leq \bar{S}_q - S_q(k), \quad q \notin N_\Pi(k) \\ \text{в) } \underline{p}_i - p_i(k) &\leq \Delta p_i(k+1) \leq \bar{p}_i - p_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (31)$$

При этом требуется минимизировать целевую функцию:

$$J = \sum_{i=1}^n |\Delta p_i(k+1)|^v = \sum_{i=1}^n |u_i|^v, \quad v = 1, 2. \quad (32)$$

В системе (31) введены обозначения: $N_\Pi(k)$ – множество перегруженных ЛЭП; β_{ji}, β_{qi} – элементы «матрицы влияния»; $\bar{S}$, $\underline{S}$ – векторы верхних и нижних пределов пропускных способностей ЛЭП; $p_i(k)$ – мощности станций (ЭС) в момент времени $k \in \mathbb{N}$; векторы $S_j(k), S_q(k)$ – перетоки по линиям в момент

времени $k \in \mathbb{N}$. Группа «а» равенств в (31) определяет требования к мощностям ЭА для ликвидации перегрузки ЛЭП. Группа условий типа «б» задает требования сохранения нормальных режимов неперегруженных ЛЭП, а группа «в» учитывает регулировочные диапазоны ЭА. Целевой функционал минимизирует сумму приращений мощностей ЭА в момент времени $(k+1)$.

Для исследования устойчивости требуется представить решения обобщенных задач типа (31) с помощью операторов математического программирования (ОМП), задающих приближенные аналитические решения задач. Пусть минимизируется обобщенный квадратичный функционал задачи 1.1.1 типа (13) (табл. 3) при условии $\nu = 2$. Тогда функционал и ограничения задачи МП примут вид

$$J = \sum_{j \in N_{II}} (S_{j,k+1} - \hat{S}_j)^2 \sum_{j \notin N_{II}} (S_{q,k+1} - \hat{S}_q)^2 + \sum_{i=1}^n u_{j,k}^2 = \|z_k\|^2,$$

$$z_k = (S_{j,k+1} \mid S_{q,k+1} \mid u_k)^T, \quad u_k = (u_{j,k})_{j=1}^n, \quad S_{k+1} = (S_{j,k+1})_{j=1}^n; \quad (33)$$

$$\hat{S}_{j,k} = (\bar{S}_j)_{j=1}^n, \quad S_{j,k} > \bar{S}_j; \quad \hat{S}_{j,k} = (\underline{S}_j)_{j=1}^n, \quad S_{j,k} < \underline{S}_j.$$

Ограничения, аналогичные (33), на перетоки имеют вид:
а) на вектор перетоков по перегруженным линиям:

$$S_{j,k+1} = S_{j,k} + \beta_j u_k, \quad j \in N_{II};$$

б) на вектор перетоков по неперегруженным линиям, $q \notin N_{II}$:

$$\underline{S}_q \leq S_{q,k+1} = S_{q,k} + \beta_q u_k \leq \bar{S}_q \Leftrightarrow \Delta \underline{S}_{q,k} \triangleq \underline{S}_q - S_{q,k} \leq \beta_q u_k \leq \bar{S}_q - S_{q,k} \triangleq \Delta \bar{S}_k;$$

в) на вектор управлений при условии $k_i = 1$:

$$\underline{u} \leq u_k \leq \bar{u}.$$

Для новых переменных функционал: $J = \|z_k\|^2 = (z_k, z_k)$, а ограничения имеют вид:

$$Mz_k = \begin{pmatrix} E_J & 0 & -\beta_J \\ 0 & E_Q & -\beta_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{J,k+1} \\ S_{Q,k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = s_k = Cx_k \triangleq b_k,$$

$$z_k \triangleq (S_{j,k+1} | S_{q,k+1} | u_k)^T, \quad \underline{z} \leq z_k \leq \bar{z},$$

Сформулированная задача состоит в минимизации функционала типа нормы на пересечении линейного многообразия и параллелепипеда, который аппроксимируется эллипсоидом, т. е. требуется вычислить

$$z_k^* = \arg \min \{J = (z_k - c)^T (z_k - c) | z_k \in D, \quad (34)$$

$$D = \{z_k | Mz_k = b_k, \quad z_k^T Q z_k \leq r^2\}.$$

Параметры эллипсоида, аппроксимирующего параллелепипед, однозначно связаны с интервальными ограничениями. Приближенные решения задач (34), представленные ОМП, имеют следующий вид:

$$z_k^* = z_k^*(\lambda) = \begin{cases} z_k^* = [P^0(c) + \lambda P^M b_k] / (1 + \lambda^2), & \text{если } z_k^{0*} \notin \text{int } D; \\ z_k^{0*} = P^0(c), & \text{если } z_k^{0*} \in \text{int } D, \end{cases} \quad (35)$$

где минимизирующее значение параметра $\lambda = \lambda_* \in \mathbb{R}^1$ — одно из решений квадратного уравнения: $\alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0$,

$$\alpha_1 = r^2 - b_k^T (MM^T)^{-1} b_k, \quad \alpha_2 = -2b_k^T (MM^T)^{-1} b_k,$$

$$\alpha_3 = r^2 - c^T \tilde{P}^0 c - b_k^T (MM^T)^{-1} b_k;$$

$$P^0(c) = \left[E - M (MM^T)^{-1} M \right] c + P^M b_k, \quad P^M = M^T (MM^T)^{-1}.$$

Символ « $\text{int } D$ » – это множество, полученное исключением граничных точек из D . Решения квадратного уравнения выбирается значение, соответствующее минимуму функционала. Значение λ можно определить из дифференциальных условий теоремы Куна-Таккера. Используются интервальные значения параметра $\alpha \in [\alpha_{k,\min}, \alpha_{k,\max}]$, что соответствует допустимости решения задачи (34) или его оценки сверху. Из условия вещественности корней квадратного уравнения следует достаточный критерий совместности ограничений задач МП типа (34):

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0,$$

где параметры неравенства определены выше. Содержательный смысл последнего условия состоит в возможности анализа условий существования требуемых генерирующих или передающих ресурсов ЭЭО или их прогнозирования. Вектор c в (34), (35) расширяет возможности применения ОМП для приближенных решений комплекса задач для СОП и САУ ЧМ (табл. 3.4).

Достаточные условия асимптотической устойчивости СОП по ЛЭП на основе корректных квазистационарных моделей ЭЭО исследуются методом функций Ляпунова в следующей постановке. Пусть уравнения ЭЭО в дискретном времени имеют вид

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, \quad s_k = Cx_k, \quad x_{k=0} = x^0. \quad (36)$$

Стабилизирующие управления формируются оператором

$$u_k = \gamma u_k^* = \gamma \Phi(Cx_k), \quad (37)$$

где $\Phi(Hx_k)$ оператор для задачи (34) типа (35).

Требуется сформулировать ограничения на параметр $\gamma \in \mathbb{R}^1$ вектора управлений (37) для СОП по ЛЭП, гарантирующие устойчивость стационарного состояния замкнутой системы (36), (37) в области, содержащей это стационарное состояние.

Рассматриваются процессы управления в нормированном пространстве состояний, и исследуется первая разность функций Ляпунова: $V_k = (x^* - x_k)^T P (x^* - x_k)$, где $P = P^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица. Векторы x_k и x^* – текущие и стационарные состояния, удовлетворяющие (36) и (37), причем стационарные состояний ЭЭО удовлетворяют уравнению: $x^* = Hx^* + F\gamma\Phi(Cx^*)$. Достаточные условия устойчивости локально-оптимальных СОП по ЛЭП даны ниже.

Утверждение. Пусть:

1). Уравнения динамики ЭЭО имеют вид (36), где $\|H\| < 1$, что имеет место при условии: $H = \exp A_1 h$, $F = \int_0^h \exp(A\tau) d\tau$ где h – период квантования по времени, а матрица A_1 – матрица корректной статически определимой САУ частотой, определенной в п. 2.3.

2). Множества $D^0 \subset D'$ – непустые для $k \in \mathbb{N}$, т. е. выполнен достаточный критерий совместности ограничений задач МП.

3). Оператор $\Phi(Cx_k)$, удовлетворяет условию Липшица в области Ω : $\|\Phi(Cx') - \Phi(Cx'')\| \leq L_\Phi \|C\| \cdot \|x' - x''\|$, $x', x'' \in \Omega$.

Тогда для асимптотической устойчивости замкнутой СОП с ОМП (35) достаточно, чтобы скалярный параметр γ удовлетворял соотношению

$$2\gamma \|F\| L_\Phi \|P\| \cdot \|H\| \cdot \|C\| + \gamma^2 \|F\|^2 L_\Phi^2 \|P\| \cdot \|C\|^2 \leq -\lambda_{\max}(Q_2), \quad (38)$$

где $\lambda_{\max}(Q_2)$ – максимальное собственное число симметричной положительно-определенной матрицы Q_2 ; $\|A\| = \max_{i=1,\dots,N} [\lambda_i(A^T A)]$ – норма матрицы евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Квадратичное неравенство (38) ограничивает параметр $\gamma \in \mathbb{R}^1$ по условию асимптотической устойчивости. Это условие можно использовать для анализа динамики управления нелинейных СОП и линейной САУ ЧМ (учтенной в модели соответствующей матрицей) в малой окрестности стационарных точек и для оценок областей притяжения стационарных состояний. При этом предполагается, что САУ частотой является асимптотически устойчивой, что обеспечивает выполнение условию $\|H\| < 1$, поскольку $H = \exp A_1 h$.

Доказательство утверждения проводится аналогично доказательству теоремы об асимптотической устойчивости СОП с динамической моделью ЭЭО.

Таким образом, системы управления частотой и активной мощностью должны синтезироваться на основе корректных «моделей влияния» энергетических объединений и качественного анализа моделей замкнутых систем управления. При этом методы независимого или совместного синтеза систем управления частотой, обменной мощностью и систем ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач должен учитывать варианты взаимодействия этих двух и других систем, что необходимо для достижения целей управления в предаварийных режимах и обеспечения энергетической безопасности ЭЭО средствами АСДУ.

4. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ МЕТОДАМИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

4.1. АНАЛИЗ ЗАДАЧ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ И УПРАВЛЕНИЙ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Проблема прогнозирования энергоресурсов связана с развитием систем управления ЭЭО различного уровня. Создание систем обеспечения необходимых энергоресурсов обладает определенной общностью [137-140,152,153,187,190]. Поэтому основные принципы синтеза систем управления энергоресурсами в данной работе будут адаптироваться к системам ограничения перетоков (СОП) по ЛЭП и системам автоматического управления частотой и активной мощностью (САУ ЧМ) ЭЭО.

Это обстоятельство не ограничивает общность предлагаемого ниже подхода к прогнозированию, поскольку позволяет разработать методики прогнозирования, использующие модели управления частотой и активной мощностью как иллюстративные модели, которые допускают обобщение на другие классы задач управления [83,114]. Необходимость обеспечения АСДУ ЭЭО подсистемой управления генерирующими ресурсами ЭС и передающими ресурсами ЛЭП связана с возросшими требованиями к качеству энергии и обеспечением надежности устойчивой параллельной работы энергосистем. Потребность определена повышением требований к ведению технологических режимов [114].

1. Проблема прогнозирования генерирующих и сетевых

ресурсов в условиях рынка энергии. Обеспечение безопасности развития энергетических объединений России требует разработки математических моделей и методов для *оперативного прогнозирования ресурсов и вычисления управлений* технологическими режимами линий электропередач *генерирующих их и сетевых компаний* ЕЭС России.

Научные исследования в области создания методов прогнозирования и управления крупными энергосистемами (ЭС) или электроэнергетическими объединениями (ЭЭО) отражают широкий круг проблем, связанных с устойчивостью и надежностью параллельной работы при обеспечении режимов управления по частоте и активной мощности.

Подобные проблемы возникают при прогнозировании развития других систем, обеспечивающих энергетическую безопасность России. Кроме этого, существуют проблемы оптимизации режимов и энергосбережения в энергосистемах на основе различных факторов.

Наиболее актуальным является определение направлений синтеза на основе *независимого или совместного прогнозирования ресурсов для систем ограничения перетоков и управления частотой и активной мощностью ОЭС*, учитывающие *экономические факторы*. При этом имеются экономически оптимальное распределение внеплановой нагрузки энергосистем. При решении этой задачи возникают проблемы в связи с отсутствием достаточной выборки для определения достоверных статистических (выборочных) характеристик прогнозов. При этом учитываются априорно известные факторы, которые позволяют определить необходимые коррекции по прогнозу. Вместе с тем, *формирование необходимых статистик* возможно с применением предлагаемых методов как

основ формирования отдельных **выборочных значений прогнозов и управлений**, что весьма важно в практике управления режимами по частоте и активной мощности.

В настоящее время актуальной является задача энергосбережения путем прогнозирования **ресурсов для ограничения перетоков** активной мощности по ЛЭП и **ресурсов САУ частотой и активной мощностью** объединений при сохранении устойчивости параллельной работы энергетических объектов. При этом существующие методы и алгоритмы управления частотой и активной мощностью предполагают наличие необходимых ресурсов управления.

Задачи прогнозирования ресурсов управления относятся к классу внутренних технических задач, для которых имеется ограниченная статистика как функция выборки. Это объясняется тем, что к прогнозируемым переменным можно отнести следующие переменные:

- энергетические ресурсы в виде регулировочных диапазонов станций, что соответствует **энергоресурсам первого типа**, которые могут составлять **ресурсы генерирующих компаний**. Актуальной задачей является прогнозирование минимального энергетического ресурса, необходимого для ограничения перетоков активной мощности, что тесно связано с проблемой энергосбережения. Формирование минимальных ресурсов позволяет уменьшить отклонения генерируемых активных мощностей станций и перетоков активных мощностей по линиям от экономически оптимальных, что также способствует энергосбережению;

- энергетические ресурсы, требующие минимизации, являются дополнительные возможности передач (трансформации) активной мощности по линиям электропередач,

что может быть выполнено **корректировками предельных значений перетоков** активных мощностей по линиям, что определяет **распределенный энергоресурс второго типа**, который может составлять **передающий (сетевой) энергосистем и ОЭС (компаний)**.

В данном разделе предложен ряд математических моделей методов и алгоритмов для определения необходимого ресурса активных мощностей регулирующих станций и дополнительных (допустимых по устойчивости) корректировок предельных значений перетоков по линиям электропередач. Эти корректировки должны быть допустимыми по устойчивости. Последние параметры необходимы для повышения устойчивости параллельной работы систем управления энергетическими объединениями при ограничении перетоков активной мощности и регулированию частоты, активной мощности.

Математической основой моделей и методов являются несобственные задачи математического программирования (МП), которые сформулированы на основе **двух основных управляющих принципов**:

- **«рациональность-допустимость»**;
- **«оптимальность-допустимость»**.

На основе этих принципов требуется сформулировать адекватные подходы к определению энергоресурсов для системы управления частотой и активной мощностью энергетических объединений в стационарных и переходных режимах. Решение задач определения необходимых **ресурсов** - регулировочных диапазонов регулирующих станций и пропускных способностей линий электропередач необходимо для обеспечения требуемых технологических режимов, устойчивости параллельной работы и надежности функционирования крупных ЭЭО в условиях рынка энергии.

В основу моделей и методов прогнозирования ресурсов и управления положена **комплексная модель**: «модели ЭО – методы синтеза рациональных или оптимизирующих управлений ЭО – методы определения ресурсов ЭО».

Данная модель реализуется последовательно, образуя единый комплекс методов моделирования установившихся и переходных режимов, методов синтеза и методов определения ресурсов на основе численных, аналитических и аналитико-численных алгоритмов оптимизации. Аналитические методы приближенной оптимизации позволяют получить качественные результаты по определению необходимых ресурсов.

2. Методы и алгоритмы прогнозирования ресурсов для управления ЭЭО. Развитие происходит эволюционным путем на основе совершенствования существующих систем управления нормальными и предаварийными режимами, которые образуют **основной контур управления**. В связи с этим адаптивное управление строится на основе дополнения основного контура **контуром адаптации**, на который возлагается **обеспечение необходимых ресурсов для управлений частотой и активной мощностью**. В этом смысле для объединений энергосистем наиболее характерно применение методов первой из перечисленных выше групп.

Основные типы адаптивных систем, которые к настоящему времени разработаны на достаточно фундаментальной основе, получены условия функциональной или параметрической «идентифицируемости» объектов управления. Для разработки методов синтеза адаптивных регуляторов других типов необходимо использование оригинальных подходов к решению проблемы синтеза, которые анализируются далее.

В настоящее время разработаны технологическо-алгоритмические доказательства сходимости с акцентом на системность подхода к построению доказательств на основе ряда постановок. Пусть имеется совокупность итерационных (рекуррентных) процессов, соответствующих различным классам вычислительных процедур:

1). Процедурам численного решения детерминированных разностных уравнений или эволюционных уравнений в дискретном времени.

2). Детерминированным процедурам оптимизации, аналитически аппроксимирующим решения комплекса задач математического программирования.

3). Стохастическим процедурам оптимизации, к которым относятся метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей и др.

4). Стохастическим процедурам систем адаптивного синтеза, включающих, в частности, метод стохастической аппроксимации.

Требуется сформулировать системную технологию доказательства сходимости перечисленных выше итерационных процессов, выделив общие характерные черты, позволяющие расширить классы подходов к анализу сходимости. Другими словами, необходимо осуществить синтез возможных подходов к исследованию сходимости, дополняющих известные процедуры.

Для решения задачи можно построить системную матрицу возможных вариантов исследования сходимости в пространстве «задачи – методы анализа сходимости». Можно указать тип устойчивости или характер результата, которые дают возможность применения существующих и новых методик для исследования свойств замкнутых алгоритмически управляемых систем ресурсного обеспечения.

Таким образом, совместное решение задач прогнозирования ресурсов, СОП по ЛЭП и САУ частотой и активной мощностью может обеспечить новые качества систем для сохранения устойчивой параллельной работы крупных энергетических систем и объединений за счет комплексного учета основных особенностей режимов для обеспечения энергетической безопасности.

4.2. ПРИНЦИПЫ И ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЕНЕРИРУЮЩИХ И СЕТЕВЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Синтез управлений на основе требований к передающим (сетевым) ресурсам возможен на основе двух подходов, отличающихся по формам целевых условий [83,114]:

- подход на основе **принципа «рациональность-допустимость»**, реализуемый на основе интервальных целевых условий (требований), задаваемых системой неравенств к сетевым режимам линий и генерирующих станций (рис. 4.1);

- подход на основе **принципа «оптимальность-допустимость»**, реализуемого в рамках оптимизационного подхода с формулировками оптимизационных целей и адекватных ограничений для определения необходимых генерируемых ресурсов станций и сетевых ресурсов при ограничении перетоков активной мощности по ЛЭП и управления частотой и активной мощностью (рис. 4.1).

Эти принципы определяют функционально-целевой характер прогнозирования ресурсов и управления частотой и активной мощностью. Для реализации управления необходима разработка структурных принципов, учитывающих реальное существование **федеральных генерирующих и сетевых компаний**.

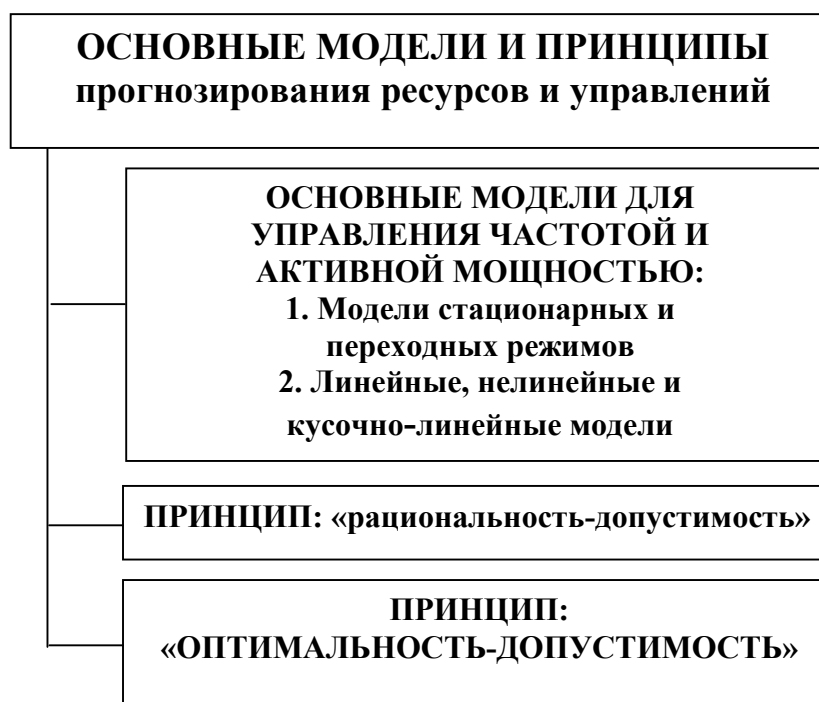


Рис. 4.1. Основные модели и принципы прогнозирования и управления частотой и активной мощностью генерирующих и сетевых компаний

1. Структурные принципы прогнозирования. При анализе проблемы прогнозирования энергоресурсов необходимо ранжирование для установления приоритетов по обеспечению необходимых генерирующих ресурсов (диапазонов) регулирующих ЭС (станций) и сетевых ресурсов для ограничения перетоков активной мощности по линиям, предполагающих формирование «уставок» по предельным значениям перетоков и регулированию частоты и обменной мощности.

Приоритеты формируются с учетом степени влияния изменений режимов в части сохранения устойчивости параллельной работы. В этом смысле приоритеты можно установить следующим образом:

1). Прогнозирование ресурсов генерирующих и сетевых компаний для ограничения внутрисистемных или межсистемных перетоков. Эта задача может быть решена

генерирующими и сетевыми компаниями путем **корректировки на основе прогнозов:**

– **необходимых пределов генерирующих мощностей станций**, определяемых верхними и нижними необходимыми пределами генерации мощностей станций (это ресурс первого типа – ресурс генерирующих компаний);

– **допустимых предельных режимов линий** путем вычисления верхних или нижних допустимых передаваемых перетоков (это ресурс второго типа – ресурс сетевых компаний).

2). Прогнозирование ресурсов генерирующих и сетевых компаний для регулирования частоты и обменной мощности по внешним линиям электропередач. Это возможно также путем **корректировки на основе прогнозирования:**

– **необходимых пределов генерирующих мощностей станций**, определяемых верхними и нижними необходимыми пределами генерации мощностей станций (это первый способ, определяющий ресурс первого типа – ресурс генерирующих компаний);

– **допустимых предельных режимов линий** путем вычисления верхних или нижних допустимых передаваемых перетоков (это второй способ, определяющий ресурс второго типа – ресурс сетевых компаний);

– **допустимых предельных режимов системы регулирования частоты и обменной мощности для объединенных систем**, что может осуществляться с учетом требуемого качества частоты (это ресурс третьего типа, который может быть реализован на уровне объединенных диспетчерских управлений).

Таким образом, в первом случае корректируются «уставки» на предельно-допустимые значения мощностей регулирующих станций с учетом обеспечения устойчивости параллельной

работы. Во втором способе корректируются на основе прогнозов предельно-допустимых мощностей, передаваемых по линиям. В третьем варианте корректируются на основе прогноза параметры системы регулирования частоты и обменной мощности.

2. Методы вычисления прогнозируемых ресурсов.

Особенность реализации способов состоит в том, что режимы линий и станций связаны *технологическими требованиями*, которые можно сформулировать с помощью описания режимов объекта на основе *целевых условий типа равенств или неравенств*, а также *классических условий экстремума функционалов*. Эти *целевые условия* реализуются с применением моделей стационарных состояний энергетических объединений в виде классических коэффициентов распределения или коэффициентов влияния.

При этом необходимо учитывать, что:

а). Ведение режима управления частотой и активной мощностью возможно на основе целевых интервальных или оптимизирующих требований к параметрам.

б). Необходимы «численные (или вычисляемые) критерии» совместности ограничений задач математического программирования или аналитические критерии совместности, вытекающие из аналитической аппроксимации допустимых областей, а также их обобщения. Это позволяет получить приближенные аналитические решения для предварительного требуемых прогнозов ресурсов управления частотой и активной мощностью. Эти области соответствуют условиям восстановления нормальных режимов работы энергетических объединений.

Важной частью этой задачи является формирование критериев управляемости систем управления частотой и

активной мощностью в условиях ограниченных ресурсов. Последняя задача требует обобщения классических *условий совместности алгебраических уравнений и неравенств*, задающих ограничения задач математического программирования. Для этого можно использовать существующие классические условия совместности - теорема Кронекера-Капелли, условия С.Н. Черникова и другие результаты, посвященные точным и аппроксимационным аналитическим решениям задач математического программирования. При этом возможны варианты построения решений на основе «внутренних» или «внешних» оценок множества решений, а также другие подходы, развиваемые в данной работе применительно к задачам управления электроэнергетическими объединениями.

Формулировка математических моделей для прогнозирования необходимых ресурсов и управлений для ограничения перетоков по линиям сетевых компаний будет осуществляться на основе моделей ЭЭО для стационарных, квазистационарных режимов или динамических моделей объекта управления.

Динамические модели прогнозирования ресурсов для ограничения перетоков по межсистемным линиям электропередач могут формироваться на основе общих принципов теории управления, что позволит формировать сигналы диспетчерскому персоналу сетевых компаний о возможных корректировках предельных значений межсистемных перетоков с учетом динамики режима.

Прогнозирование регулировочных диапазонов как ресурсных возможностей станций генерирующих компаний на основе обобщенных задач математического программирования,

которые могут быть отнесены к классу задач несобственного математического программирования, когда имеет место несовместность ограничений. Последнее связано с необходимой корректировкой параметров ограничений задач, позволяющих обеспечить необходимые энергетические ресурсы регулирующих станций, что является первым вариантом методов и алгоритмов обеспечения допустимости на основе корректировки регулировочных диапазонов – **«уставок по диапазонам генерирования мощностей станциями»**. Соответствующая информация должна быть передана на диспетчерские пункты энергетических объединений для принятия соответствующих управленческих решений по ведению режимов станций.

Прогнозы ресурсов по предельно-допустимым значениям перетоков активной мощностью (по допустимым приращениям предельных значений мощностей) могут корректироваться и определяться как специальные приращения относительно имеющихся регулировочных диапазонов. Это также является исходной информацией для диспетчерского персонала по принятию специальных решений.

Методы и алгоритмы с перечисленными свойствами содержат элементы адаптации к режимным ситуациям. Алгоритмы управления частотой, активной мощностью и ограничения перетоков с элементами адаптации, рациональности и оптимальности могут формулироваться в следующих условиях. Адаптивное управление позволяет выполнить синтез систем при полном или частично отсутствии информации о параметрах объекта. Применительно к объединениям энергосистем в большинстве случаев отсутствует информация о динамических характеристиках объекта и имеется возможность использовать статические (квазистатические) характеристики энергосистем как

объектов управления в виде коэффициентов распределения или коэффициентов влияния, исследованных в разделе 2.

На основе рассмотренных вариантов прогнозирования систем управления частотой и активной мощностью ЭЭО, исследуемых в данной работе, можно получить варианты системы, приведенные в табл. 4.1. В этой таблице рассматриваются методы для численного, численно-аналитического и аналитического решения задач математического программирования по определению энергоресурсов, которые позволяют определить потребности в энергоресурсах с учетом их **приоритетности корректировки регулировочных диапазонов** регулирующих станций; **корректировки предельных значений перетоков** активной мощности по линиям для систем ограничения перетоков по внутрисистемным или межсистемным линиям.

Численные методы для задач с модульными функционалами основаны на линеаризации, которая выполняется с помощью нескольких вариантов замены переменных. Замена переменных позволяет свести задачи к задачам линейного программирования [2,17,29]. Специфика этого направления связана с получением вариантных оценок потребностей в энергоресурсах как функциях режимов ЭЭО, включая режимы станций и линий.

Численно-аналитические методы могут применяться для задач прогноза энергоресурсов, сведенных к задачам квадратичного программирования по вычислению необходимых диапазонов регулирования станций или энергосистем или изменения «уставок» по перетокам при их ограничении. Предполагается, что решения задач с квадратичными функционалами вычисляются с помощью метода проекции градиента в конечномерных пространствах, в котором проекции

Таблица 4.1

**Варианты структур, задач и методов прогнозирования
ресурсов активной мощности ЭЭО**

Методы Задачи и структуры	Методы линеариза- ции для задач с модуль- ными функциона- лами	Численные методы для задач с квадратич- ными функциона- лами	Аналитичес- кие методы для аппрокси- мирующих задач с квадратич- ными функ- ционалами	Численно- аналитичес- кие методы для задач квадратич- ного программи- рования
Прогноз энергоресурсов в стационарных и переходных режимах для генерирующих и сетевых компаний (ОДУ): 1. Ограничения перетоков по линиям. 2. Регулирова- ния частоты и обменной мощности по линиям электропередач ОЭС 3. Совместного ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности	Сведение задачи прогноза энерго- ресурсов к задачам линейного программи- рования	Сведение задачи прогноза энерго- ресурсов к задачам квадратичног о программи- рования	Сведение задачи прогноза энерго- ресурсов к аппроксими- рующим аналитически разрешаемым задачам квадратич- ного программи- рования	Сведение задачи прогноза энерго- ресурсов к задачам квадратич- ного програм- мирования

на активные линейные многообразия вычисляются аналитически с помощью соответствующих проекторов. Численно-аналитические процедуры предполагается представить в виде, который позволяет получить качественные результаты при решении задач прогнозирования и управления.

Аналитические методы направлены на получение качественных результатов, имеющих приближенный характер. Качественные приближенные результаты формируются на основе аналитических решений задач математического программирования, аппроксимирующих задачи в рамках принципа «рациональность-допустимость» и «приближенную оптимальность-допустимость» для аппроксимирующих задач. Последний подход требует специальной формулировки необходимых условий оптимальности и аппроксимации задачи, позволяющей аналитически разрешить необходимые условия оптимальности в конечномерном пространстве.

Аналитические и численно-аналитические условия разрешимости задач математического программирования (совместности ограничений) позволяют получить качественные результаты для определения ресурсов и управлений.

Таким образом, сформулированные выше задачи прогнозирования энергоресурсов объединений энергосистем позволяют получить общую схему исследования режимов объекта управления в критических режимах дефицита ресурсов активной мощности. Основу формирования двух типов энергоресурсов составляют задачи МП. В качестве математических моделей объединений энергосистем как объектов управления могут использоваться модели установившихся и переходным режимов, которые можно сформулировать на основе классических моделей

электромеханических процессов и стационарных состояний, используемых для управления частотой и активной мощностью энергетических объединений.

Таким образом, задачи прогнозирования режимов систем управления частотой и активной мощностью определяются рядом требований:

- *принципами рациональности или оптимальности* в рамках учета необходимых технологических требований;

- *структурными принципами*, определяющими характер применения прогнозов – для корректировки диапазонов генерации *генерирующими компаниями*, для корректировки режимов линий *сетевыми компаниями*, а также корректировки на основе прогнозов параметров регулирования частоты и обменной мощностью, что может осуществляться на *уровне ОДУ ОЭС* или на других уровнях;

- классами используемых моделей для вычисления управления, которые можно ограничить *моделями стационарных режимов* типа коэффициентов влияния (распределения) или *моделями динамических режимов* типа уравнений «вход-выход» или «уравнений состояния».

Перечисленные факторы создают системное описание вариантов формирования методов и алгоритмов управления частотой и активной мощностью.

3. Выводы и рекомендации. 1. Обзор исследований по вопросам прогнозирования ресурсов для управления частотой и мощностью энергетических объединений иллюстрирует, что проблема энергосбережения и формирования ресурсов для рассматриваемого класса систем – систем ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач крупных энергетических объединений не получила соответствующего

решения в рамках предлагаемых постановок задач. Аналогичная ситуация имеет место также для задачи совместного определения ресурсов и вычисления допустимых или оптимальных ресурсов и управлений.

2. Постановка задач прогнозирования ресурсов для системы совместного формирования ресурсов и вычисления управлений может быть сформулирована в виде совокупности задач математического программирования на основе принципов «рациональность-допустимость» и «оптимальность-допустимость», каждый из которых предполагает формализацию целевых условий для рассматриваемого класса системы в соответствующем виде.

3. Задачи МП по прогнозированию ресурсов и управлений для СОП активной мощности могут быть решены численными, аналитическими или численно-аналитическими методами. При этом необходимо сохранять нормальные режимы не перегруженных линий и обеспечивать учет регулировочных диапазонов станций, а также возможно формулировки целевых требований для ограничения перетоков по внутрисистемным, межсистемным и транзитным линиям электропередач активной мощности.

Эти методы могут доставлять оценки прогнозируемых ресурсов для ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности энергетических объединений. Последнее можно достичь за счет коррекции регулировочных диапазонов станций или «уставок» по предельным значениям перетоков, заданий по обменным мощностям и корректировкам величин регулировочных диапазонов станций, выбираемых из условия сохранения статической устойчивости параллельной работы энергосистем.

4.3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕСУРСОВ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ

Рассматриваются математические формулировки задач вычисления управлений, согласованные с задачами прогнозирования регулировочных диапазонов станций и пропускных способностей линий с целью сохранения устойчивости параллельной работы ОЭС. Задачи сформулированы для СОП активной мощности по ЛЭП [83,114].

Математическая формулировка задачи прогнозирования использует постановку на основе принципа «рациональности-допустимости», причем рациональность позволяет учесть основные целевые условия типа неравенств (интервальными целевыми условиями), что соответствует сохранению основных характеристик режимов энергетических объединений. Допустимость понимается как возможность выполнения основных ограничений на режимы работы регулирующих станций и режимы линий электропередач по критерию совместности ограничений задач математического программирования.

1. Математическая формулировка задачи. Задача формулируется следующим образом. Пусть имеется электроэнергетическое объединение, состоящее из n узлов и m линий электропередач, по которым передаются потоки активной мощности.

Потребление и генерация энергии осуществляется в узлах, а передаваемые по линиям объединения перетоки активной мощности должны удовлетворять следующим технологическим условиям к ведению режимов линий и регулирующих станций объединений:

а). В нормальном режиме перетоки активной мощности по j -ой или l -ой линиям S_j или S_l удовлетворяют двухсторонним линейным неравенствам:

$$S_j^- \leq S_j \leq S_j^+ , \quad j \in P , \quad S_j^o > 0 , \quad (1)$$

$$S_l^- \leq S_l \leq S_l^+ , \quad j \in P , \quad S_l^o < 0 . \quad (2)$$

Эти условия можно рассматривать как целевые интервальные условия, характеризующие нормальные режимы работы линий, где P - множество перегруженных линий. В неравенствах (1), (2) использованы обозначения: S_j^- и S_j^+ – нижние и верхние допустимые значения перетоков активных мощностей по j -ой линии с положительными направлениями передачи энергии в исходных режимах для перегруженных линий. Аналогичные условия можно записать для перетоков с отрицательными направлениями передачи мощности по линии энергетических объединений.

При внеплановых нагрузках и отклонениях реального режима от планового режима некоторые ЛЭП могут перегружаться, что соответствует невыполнение условий (1) и (2). Необходимо организовать управление так, чтобы путем изменения генерируемой мощности в узлах сети ликвидировать перегрузку, т. е. обеспечить выполнение указанных условий для всех ветвей без изменения баланса мощности (или при отсутствии такого требования) в системе.

При этом должны учитываться следующие ограничения задач конечномерной оптимизации для вычисления управляющих воздействий:

б). Мощности станций P_i изменяются пределах:

$$P_i^- \leq P_i \leq P_i^+, \quad i \in U, \quad (3)$$

определяемых нижними P_i^- и верхними P_i^+ регулировочными диапазонами станций, где U – множество номеров регулирующих станций.

в). В результате действия системы ограничения перетоков не должны перегружаться другие линии неперегруженные в начальный момент ЛЭП ЭЭО, обозначенные номерами:

$$S_k^- \leq S_k \leq S_k^+, \quad k \notin P. \quad (4)$$

г). Система управления должна обеспечивать ликвидацию перегрузки линий с минимальным изменением заданных «уставок» по режимам работы регулирующих станций – ограничений по приращениям нижних δP_i^- и приращениям верхних δP_i^+ диапазонов станций, участвующих в ограничении перетоков активной мощности по линиям:

$$\delta P_i^- \leq \delta P_i \leq \delta P_i^+ \quad (5)$$

и корректировок «уставок» (значений, предписанных экономически оптимальными режимами ЭЭО) по предельным нижним δS_j^- и δS_l^- и предельным верхним δS_j^+ и δS_l^+ заданным значениям передаваемых линиями мощностей. При этом отдельно рассматриваются корректировки «уставок» для линий с положительными направлениями перетоков, обозначенных индексом « j » и отрицательными направлениями (индекс « l »), которые должны удовлетворять ограничениям в виде систем двухсторонних неравенств:

$$\Delta S_j^- \leq \delta S_j \leq \Delta S_j^+, \quad (6)$$

$$\Delta S_l^- \leq \delta S_l \leq \Delta S_l^+. \quad (7)$$

Интервальные ограничения на корректировку «уставок» заданы из условий сохранения устойчивости параллельной работы энергосистем. Эти параметры режимов определяются для линий электропередач на основе предварительных расчетов, в частности, с учетом не только моделей электромеханических, но и моделей электромагнитных процессов. Модели электромагнитных процессов не рассматриваются в данной работе, поскольку предполагается, что параметры электромагнитных процессов, определяющих устойчивость параллельной работы, определяются дополнительными расчетами на уровне объединений энергосистем.

Тогда задача ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач формулируется следующим образом: вычислить найти такие значения совокупности переменных

$$\delta P_i = P_i - P_i^0, \delta S_j, \delta S_l, \delta S_k \quad (8)$$

- приращений активной мощности регулирующих станций δP_i , изменений «уставок» по передаваемым мощностям линий в положительном - δS_j и отрицательном - δS_l направлениях, также «уставок» по неперегруженным δS_k , которые удовлетворяют системе линейных ограничений, приведенных выше.

Таким образом, для вычисления управлений и формулировки условий совместности ограничений как функций параметров режимов ЭЭО сформулированная задача МП учитывает указанные требования.

Совокупность корректируемых параметров системы ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач ЭЭО иллюстрируется на рис. 4.2. На основании

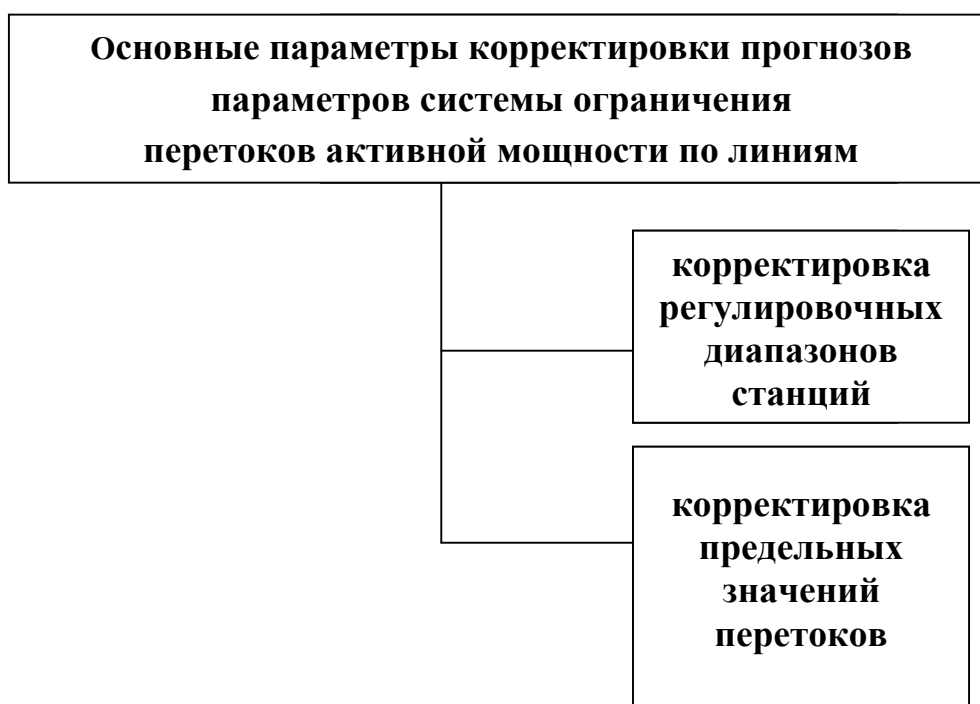


Рис. 4.2. Варианты прогнозируемых параметров систем ограничения перетоков активной мощности по линиям

приведенной математической формулировки задачи ограничений перетоков можно получить ограничения задачи математического программирования в виде системы линейных алгебраических равенств и алгебраических неравенств.

В ограничениях задачи можно использовать линейные математические модели установившихся режимов энергетических объединений в виде классических *коэффициентов распределения* [55].

Эти модели используются для расчета установившихся режимов ЭЭО, и представляют собой характеристики изменения перетоков активной мощности по линиям сети при изменении генерируемой активной мощности регулирующих станций:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \delta P_i = \Delta S_j ,$$

которые являются корректными при выполнении условия баланса активных мощностей. Условие баланса при этом должно быть

включено в ограничения задачи математического программирования по вычислению управлений и прогнозированию корректировок диапазонов станций и пропускных способностей линий. В общем случае в качестве характеристик влияния могут быть использованы **коэффициенты влияния**, которые характеризуют приращения мощностей по линиям или частоты сети при приращении генерируемых мощностей станций.

В общем случае в качестве характеристик влияния могут использоваться экспериментально определенные характеристики, полученные для определенного спектра частот, что позволяет говорить о **параметрических коэффициентах влияния**. Тогда можно сформулировать ограничения задачи:

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \delta P_i = S_j^+ - S_{j0} - \delta S_j^+, \quad S_{j0} > 0, \quad j \in N_n, \\
 2. \quad & 0 \leq \delta S_j^+ \leq \Delta S_j^+, \\
 3. \quad & \sum_{i=1}^n \alpha_{li} \delta P_i = S_l^- - S_{l0} - \delta S_l^-, \quad S_{l0} < 0, \quad l \in N_n, \\
 4. \quad & \Delta S_l^- \leq \delta S_l^- \leq 0, \\
 5. \quad & S_k^- + \delta S_k^- - S_{k0} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \Delta P_i \leq S_k^+ + \delta S_k^+ - S_{k0}, \quad S_{k0} > 0, \quad k \notin N, \\
 6. \quad & \Delta S_k^- \leq \delta S_k^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta S_k^+ \leq \Delta S_k^+, \\
 7. \quad & P_i^- + \delta P_i^- - P_{i0} \leq \Delta P_i \leq P_i^+ + \delta P_i^+ - P_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
 8. \quad & \Delta P_i^- \leq \delta P_i^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta P_i^+ \leq \Delta P_i^+, \\
 9. \quad & \sum_{i=1}^n \delta P_i = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В системе ограничений (9) приняты следующие обозначения: $\alpha_{ji} = \partial S_j / \partial P_i$ – коэффициенты распределения или влияния. Остальные параметры определяют верхние и нижние пределы пропускной способности линий; начальные и искомые значения мощностей регулирующих станций, N – номера перегруженных линий; S_{j0} , S_{l0} , S_{k0} – исходные значения перетоков активной мощности по перегруженным линиям с номерами j и l и не перегруженным линиям с номерами k .

Уравнение 1) системы (9) определяют требования изменения генерируемых мощностей узлов на величину, необходимую для ликвидации перегрузки линий с учетом возможной корректировки «уставок» по предельным значениям перетоков с положительными направлениями. Неравенство 2) в (9) характеризует возможности по корректировке «уставок» по перегруженным линиям с положительными направлениями перетоков. Уравнения 3) и неравенства 4) в системе ограничений отражают аналогичные требования ликвидации перегрузки линий с отрицательными исходными значениями перетоков и ограничения на значения «уставок».

Неравенство 5) в системе (9) задает требования ликвидации перегрузки линий без перегрузок неперегруженных в исходном состоянии линий. Неравенство 6) определяет возможные корректировки «уставок» по перетокам для неперегруженных линий. Неравенство 7) – условия генерируемых станциями мощностей в пределах регулировочных диапазонов, а неравенства 8) определяют условия на корректировку предельных (нижних и верхних) «уставок» по регулировочным диапазонам станций. Последнее уравнение 9) вводится в систему ограничений, чтобы обеспечить требования баланса мощностей в объединении. Целевые функции (11) характеризуют требования

минимального изменения мощностей генерирующих агрегатов в процессе ликвидации перегрузок линий электропередач по активной мощности.

Для обеспечения корректировок параметров энергетических режимов станций и линий введенные переменные, включенные в функционал с соответствующими весовыми коэффициентами, определяются в процессе решений задач модульного (кусочно-линейного) или квадратичного программирования.

При невыполнении условия баланса можно использовать коэффициенты влияния, также описывающие установившиеся режимы объединений соотношением (10) при отсутствии равенства 9) в системе ограничений (9). Кроме перечисленных моделей для описания установившихся режимов энергетических объединений можно использовать нелинейные модели кусочно-линейного типа, рассмотренные в п. 2.

Характеристики влияния используются при анализе и синтезе систем управления энергетическими объединениями при сохранении баланса изменения его мощностей. Кроме моделей типа (10) использование коэффициентов влияния, которые применяются в условиях ненулевого баланса активных мощностей энергетических объединений, позволяет расширить возможности управления режимами объекта. Во втором случае «балансовое» ограничение активных мощностей в системе (9) должно отсутствовать.

Применение кусочно-линейных моделей целесообразно при малых отклонениях от стационарных состояний при проявлении нелинейностей типа «зоны нечувствительности» первичных регуляторов скоростей агрегатов станций объединений. При решении задач вычисления требуемых управлений на основе принципа «рациональность-допустимость» необходимо

определить искомые переменные задачи, удовлетворяющие системе (9), что позволяет вычислить допустимые управления и прогнозы «уставок по диапазонам» и «уставок по перетокам».

В случае применения для вычисления прогнозов и управлений принципа «оптимальность-допустимость» необходимо вычислить решения системы (9), которые обеспечивают минимум одной из двух целевых функции, представленных с помощью модульных или квадратичных функций оценки отклонений следующими целевыми функциями (функционалами):

$$\begin{aligned}
 J_{\nu} = & \sum_{i=1}^n |\Delta P_i|^{\nu} + N_1 \sum_{i=1}^m |\delta P_i^{+}|^{\nu} + N_1 \sum_{i=1}^m |\delta P_i^{-}|^{\nu} + \\
 & + M_1 \sum_{j=1}^R |\delta S_j^{+}|^{\nu} + M_1 \sum_{j=1}^R |\delta S_j^{-}|^{\nu} + M_2 \sum_{l=1}^Q |\delta S_l^{+}|^{\nu} + M_2 \sum_{l=1}^Q |\delta S_l^{-}|^{\nu} + \\
 & + M_3 \sum_{k=1}^P |\delta S_k^{+}|^{\nu} + M_3 \sum_{k=1}^P |\delta S_k^{-}|^{\nu}, \quad \nu = 1, 2.
 \end{aligned} \quad (10)$$

2. Вычислительные аспекты. Применение модульных целевых функций ($\nu = 1$) или квадратичных функций ($\nu = 2$) определяет класс задач математического программирования. Первая целевая функция представляет собой сумму модулей отклонений комплекса регулируемых координат от заданных значений и соответствует задаче кусочно-линейного программирования. Второй функционал представляет собой сумму квадратов отклонений этих координат от заданных значений, в частности, от экономически оптимальных значений. В этом смысле введенные функционалы качественно совпадают, однако отличаются способом учета отклонений от исходных (экономически оптимальных) значений мощностей станций, что,

как отмечено выше, способствует решению задачи энергосбережения. Для решения задач могут применяться численные, аналитические или численно-аналитические методы.

Параметры (весовые коэффициенты) функционалов (10) выбираются из условий значимости отдельных составляющих. Выбор параметров функционала (10) позволяет регулировать содержание и приоритеты при синтезе системы определения ресурсов и управлений.

Такое разделение имеет определенный смысл, поскольку имеется возможность применения различных подходов к решению сформулированных задач. Как будет показано далее, в первом случае возможно сведение задачи к задаче линейного программирования. Во втором варианте (случай квадратичного функционала) необходимо применение численных, аппроксимационно-аналитических или аналитико-численных методов для решения задачи квадратичного программирования.

Таким образом, сформулирована задача совместного формирования необходимых энергоресурсов и управлений при ограничении перетоков активной мощности по ЛЭП ЭЭО в виде общей задачи математического программирования, разрешаемы численными методами или операторами оптимизации.

4.4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕСУРСОВ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ И РЕГУЛИРОВАНИЯ ЧАСТОТЫ И ОБМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Задачи математического программирования формулируются с учетом наличия двух подсистем: подсистемы ограничения перетоков активной мощности по линиям и подсистемы регулирования частоты и обменной мощности ОЭС (энергетических районов) [83,114].

1. Подсистема ограничения перетоков. Для подсистемы ограничения перетоков характерно, что в нормальном режиме перетоки активной мощности по j -ой линии S_j подчиняются условию, т. е. удовлетворяют двухсторонним линейным неравенствам:

$$S_j^- \leq S_j \leq S_j^+, \quad j \in P, \quad (1)$$

где P – множество перегруженных линий; S_j^- и S_j^+ – нижние и верхние допустимые значения перетоков активных мощностей по j -ой линии.

Как и в случае ограничения перетоков, необходимо вычислить управления для изменений генерируемой мощности в узлах сети, обеспечивающие ликвидации перегрузки. Обеспечение указанных условий должно выполняться для всех ветвей без изменения баланса мощности в системе (или при отсутствии такого требования) при учете следующих ограничений: мощности P_i , генерируемые узлами, должны изменяться в пределах:

$$P_i^- \leq P_i \leq P_i^+, \quad i \in U, \quad (2)$$

где P_i^- и P_i^+ – верхние и нижние регулировочные диапазоны станций; U – множество номеров станций, для которых регулируются диапазоны, т. е. генерирующие ресурсы.

В результате действия системы совместного ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности не должны перегружаться неперегруженные в начальный момент линии электропередач энергетического объединения. Для этих линий, обозначенных номерами $n \in N$, должны быть выполнены следующие технологические условия:

$$S_n^- \leq S_n \leq S_n^+ . \quad (3)$$

Характеристиками синтезируемых систем управления является наличие двух типов корректировок параметров, которые иллюстрируются на рис. 4.3.



Рис. 4.3. Варианты корректировок параметров систем совместного ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности

Система совместного ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности управления должна ликвидировать перегрузки линий с минимальным изменением заданных установок по режимам сети – ограничений

на приращения нижних δP_i^- и приращения верхних δP_i^+ регулировочных диапазонов станций:

$$\Delta P_i^- \leq \delta P_i^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta P_i^+ \leq \Delta P_i^+ \quad (4)$$

и корректировок по нижним δS_i^- и верхним δS_i^+ пропускным способностям линий, которые должны удовлетворять ограничениям в виде линейных интервальных неравенств, представляемых в виде:

$$S_j^- + \delta S_j^- \leq S_j \leq S_j^+ + \delta S_j^+, \quad S_n^- + \delta S_n^- \leq S_n \leq S_n^+ + \delta S_n^+. \quad (5)$$

При этом должны быть ограничены предельные значения корректируемых допустимых пределов заданий по передаваемым линиями мощностей в положительном направлении (обозначены индексом j):

$$\Delta S_j^- \leq \delta S_j^- \leq 0, \quad (6)$$

и допустимые корректировки предельных значений перетоков активной мощности в отрицательном направлении (обозначенные индексом l):

$$0 \leq \delta S_l^- \leq \Delta S_l^+. \quad (7)$$

Таким образом, задача совместного ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности формулируется следующим образом: найти допустимые или оптимальные значения совокупности следующих переменных

$$\delta P_i = P_i - P_{i0}, \quad \delta S_j^+, \quad \delta S_l^-, \quad \delta S_k^+, \quad \delta S_l^-. \quad (8)$$

Первая группа переменных в списке (8) определяет приращения активных мощностей регулирующих станций,

которые удовлетворяют системе линейных ограничений:
 $\delta P_i^- \leq \delta P_i \leq \delta P_i^+$, определяющих допустимые изменения
 регулировочных диапазонов. Вторая группа переменных
 определяет ограничения на корректируемые приращения
 предельных значений перетоков активных мощностей,
 передаваемых по линиям электропередач ЭЭО (приращения
 заданий по активным мощностям) в принятых положительном и
 отрицательном направлениях передачи мощностей:
 $\delta S_w^- \leq \delta S_w \leq \delta S_w^+$, где w равно j или k .

Для определения ресурсов и управлений необходимо
 сформулировать задачу вычисления допустимого решения задачи
 математического программирования, учитывающей совокупность
 требований. Эти подсистемы требуют формулировки двух
 подзадач.

**2. Подсистемы вычисления управлений и ресурсов для
 ограничения перетоков.** Вычисление управлений для
 ограничения перетоков по перегруженным ЛЭП требует
 выполнения системы линейных равенств и неравенств:

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad & \sum_{i=1}^S \alpha_{ij} \delta P_i = S_j^+ - S_{j0} + \delta S_j^+, \quad S_{j0} > 0, \quad j \in N, \\
 2. \quad & 0 \leq \delta S_j^+ \leq \Delta S_j^+, \\
 3. \quad & \sum_{i=1}^S \alpha_{li} \delta P_i = S_l^- - S_{l0} - \delta S_l^-, \quad S_{l0} < 0, \quad l \in N, \\
 4. \quad & \Delta S_l^- \leq \delta S_l^- \leq 0, \\
 5. \quad & S_n^- - \delta S_n^- - S_{n0} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} \delta P_i \leq S_n^+ + \delta S_n^+ - S_{n0}, \quad n \notin N, \\
 6. \quad & \Delta S_n^- \leq \delta S_n^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta S_n^+ \leq \Delta S_n^+.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3. Подсистемы регулирования частоты и активной мощности энергетических объединений по критерию Гранера-Даррье [114,205,206]. Эти подзадачи, формулируемые для каждого энергетического объединения, требуют расширения сформулированных выше подзадач соотношениями типа равенств:

$$\lambda_m = (f_m - f_{зад}) + k \left(\sum_{m=1}^b S_m - S_w^0 - \delta S_w^o \right). \quad (10)$$

где m – номера внешних линий для w -го энергетического объединения. Последнее условие позволяет определить системный параметр λ , который используется в классических системах управления с обратной связью частотой и активной мощностью объединенных энергосистем.

Для задач прогнозирования энергоресурсов необходимо использовать эквивалентный вид (10). Последнее равенство имеет эквивалентный вид, который позволяет свести «небалансы» активных мощностей в объединении к требованию на сумму мощностей, генерируемых в объединении, котором произошло внеплановое возмущение. Этот эквивалентный вид (10) представляется в следующей форме:

$$k^{-1} \lambda = k^{-1} (f_m - f_{зад}) + \left(\sum_{m=1}^b S_m - S_w^0 - \delta S_w^o \right) = \sum_{i=1}^{n_w} \delta P_i, \quad (11)$$

где в правой части представлена сумма приращений мощностей станций, участвующих в регулировании частоты и обменной мощности в w -м объединении. Параметр k^{-1} в (11) представляет собой величину обратную параметру k в (10).

Для учета ограничений по допустимой корректировке заданий по обменной мощности необходимо общую систему ограничений дополнить следующими неравенствами:

$$0 \leq \delta S_w^{o+} \leq \Delta S_w^{o+}, \quad \Delta S_w^{o-} \leq \delta S_w^{o-} \leq 0. \quad (12)$$

Последние ограничения учитывают возможность корректировки заданий по обменной мощности объединений. Величина системного параметра λ_m является регулируемой координатой для m -го объединения; k – коэффициент пропорциональности, определяемый «статизмом» энергетического объединения.

Критерий Гранера-Даррье позволяет компенсировать внеплановые возмущения ЭЭО изменением мощности станций данного объединения, т. е. в месте возникновения внепланового возмущения.

4. Задача совместного вычисления энергоресурсов и управлений для ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности. Совместное ограничение перетоков и регулирование частоты и обменной мощности может быть организовано различным способом. Способ организации, рассматриваемый в данной работе, основан на использовании критерия Гранера-Даррье. При этом совместность выполнения указанных функций управления строится на основе объединения двух подзадач управления.

Объединение этих подзадач позволяет сформулировать совместную задачу с учетом ограничений на технологические режимы, определяемые ограничениями на регулировочные диапазоны, предельно-допустимые значений мощностей линий и корректировки заданий по обменным мощностям энергетических объединений, реализующих управление по критерию Гранера-Даррье. Соответствующая система ограничений (13) и функционалы задач МП (14) следует из технологических требований к рассматриваемой системе управления ЭЭО [114]:

*Формирование управлений и прогнозов
заданий для ограничения перетоков:*

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sum_{i=1}^S \alpha_{ij} \delta P_i = S_j^+ - S_{j0} + \delta S_j^+, \quad S_{j0} > 0, \quad j \in N, \\
 2. \quad & 0 \leq \delta S_j^+ \leq \Delta S_j^+, \\
 3. \quad & \sum_{i=1}^S \alpha_{li} \delta P_i = S_l^- - S_{l0} + \delta S_l^-, \quad S_{l0} < 0, \quad l \in N, \\
 4. \quad & \Delta S_l^- \leq \delta S_l^- \leq 0, \\
 5. \quad & S_n^- - \delta S_n^- - S_{n0} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} \delta P_i \leq S_n^+ + \delta S_n^+ - S_{n0}, \quad n \notin N, \\
 6. \quad & \Delta S_n^- \leq \delta S_n^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta S_n^+ \leq \Delta S_n^+.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Формирование прогнозов по мощностям станций:

$$\begin{aligned}
 7. \quad & P_i^- + \delta P_i^- \leq \delta P_i \leq P_i^+ + \delta P_i^+, \\
 & \Delta P_i^- \leq \delta P_i^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta P_i^+ \leq \Delta P_i^+
 \end{aligned}$$

*Формирование управлений по частоте и обменной
мощности:*

$$8. \quad k^{-1} \lambda = \sum_{i=1}^{n_w} \delta P_i.$$

Формирование прогнозов заданий по обменной мощности:

$$\begin{aligned}
 9. \quad & S_w^- + \delta S_w^- \leq \delta S_w^0 \leq S_w^+ + \delta S_w^+, \\
 & \Delta S_w^- \leq \delta S_w^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta S_w^+ \leq \Delta S_w^+.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_\nu = & \sum_{i=1}^n |\Delta P_i|^\nu + N_1 \sum_{i=1}^m |\delta P_i^+|^\nu + N_1 \sum_{i=1}^m |\delta P_i^-|^\nu + \\
& + M_1 \sum_{j=1}^R |\delta S_j^+|^\nu + M_1 \sum_{j=1}^R |\delta S_j^-|^\nu + M_2 \sum_{l=1}^Q |\delta S_l^+|^\nu + M_2 \sum_{l=1}^Q |\delta S_l^-|^\nu + \\
& + M_3 \sum_{k=1}^P |\delta S_k^+|^\nu + M_3 \sum_{k=1}^P |\delta S_k^-|^\nu + M_4 \sum_{w=1}^{n_w} |\delta S_w^-|^\nu + \sum_{w=1}^{n_w} |\delta S_w^+|^\nu, \quad \nu = 1, 2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ограничения этой задачи имеют вид, обобщающий адекватные формулировки задач для оптимизации стационарных состояний (раздел 3). Сформулированные ограничения (12) задачи МП адекватны следующим совместным режимам управления:

- вычислению ресурсов для системы ограничения перетоков (соотношения типа 1 - 6);
- вычислению ресурсов регулирующих станций энергетических объединений (соотношения типа 7);
- вычислению ресурсов для регулирования частоты и обменной мощности энергетических объединений (соотношения типа 9).

Эти ограничения определяют совокупность требований к совместному прогнозированию ресурсов и управлений для рассматриваемого класса систем. Для выбора оптимального решения необходимо минимизировать на множестве, задаваемом ограничениями типа (13) соответствующий функционал качества.

Этот функционал по смыслу является обобщением по отношению к функционалу для формирования ресурсов и управлений при ограничении перетоков активной мощности по линиям электропередач и представляется равенством (14).

Функционал типа (14) содержит слагаемые, связанные с минимизацией отклонений мощностей регулирующих станций, минимизацией корректировок заданий по предельным значениям мощностей по линиям для системы ограничения перетоков. Кроме этого функционал содержит также дополнительные слагаемые для определения ресурсов при регулировании частоты и активной мощности в объединенных энергосистемах, причем эти ресурсы задаются корректировками заданий по обменной мощности, что соответствует дополнительному обмену активными мощностями между объединениями энергосистем.

Таким образом, для установившихся режимов системы ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач и регулирования частоты и обменной мощности сформулированы задачи математического программирования. Эти задачи позволяют определить потребности в энергоресурсах с учетом их приоритетности за счет корректировки регулировочных диапазонов регулирующих станций или предельных значений перетоков активной мощности по линиям для системы их ограничения и параметров режимов системы управления по частоте и обменной мощности крупных ЭЭО, в частности, корректировки заданий по обменной мощности.

5. Результаты и выводы. 1. Задачи вычисления энергоресурсов для ограничения перетоков активной мощности сведены к задачам математического программирования, позволяющим получить универсальные формулировки задач по определению энергоресурсов и управлений для ограничения перетоков активной мощности. Указанные задачи позволяют учесть комплекс технологических требований по ведению режима электроэнергетических объединений.

2. Задачи совместного определения ресурсов для системы

совместного ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач и регулирования частоты и обменной мощности энергетических объединений позволяют создать алгоритмическую основу для решения задач энергосбережения и вычисления управляющих воздействий на регулирующие станции за счет универсальности ограничений и функционалов задач математического программирования.

3. Использование модульных (кусочно-линейных) и квадратичных функционалов позволяет обеспечить разнообразие вычислительных методов решения задач математического программирования рассматриваемого класса, включая численные, аналитико-численные и аналитические процедуры конечномерной оптимизации, учитывающие структуру ограничений для задач прогнозирования и управления ЭЭО.

4.5. СОВМЕСТНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕСУРСОВ И УПРАВЛЕНИЙ ПЕРЕХОДНЫМИ РЕЖИМАМИ ЭНЕРГООБЪЕДИНЕНИЙ

Исследование математических моделей переходных режимов при прогнозировании ресурсов и управлении необходимо для решения задач математического программирования для вычисления управлений.

1. Модели переходных режимов энергетических объединений. В основу математического моделирования системы совместного ограничения перетоков активной мощности, а также регулирования частоты и обменной мощности положена математическая модель системы оперативного управления энергосистемами. Цифровая система оперативного управления энергосистемой по частоте и активной мощности создавалась помощью управляющих вычислительных машин. Эта система решает задачи регулирования частоты и обменной

мощности в ОЭС, а также ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач.

Как было отмечено в разделах 2 и 3, общепринятой схемой регулирования частоты и обменной мощности в ОЭС является регулирование частоты со статизмом по обменной мощности - метод Гранера-Даррье, основы которого сформулированы в трудах немецких специалистов. Управление перетоками активной мощности по линиям в классических системах управления частотой и активной мощностью с целью ограничения их величины реализуется в форме пропорционально-интегрального закона регулирования с учетом ряда алгоритмических особенностей, определяемых режимными требованиями, которые определяют включение системы ограничения перетоков в случае их отклонений от верхних и нижних предельно-допустимых значений.

Регулирование частоты и обменной мощности в объединенных энергосистемах реализуется на основе упомянутого выше критерия Гранера-Даррье. Возможны и другие варианты организации систем управления частотой и активной мощностью. При таком подходе варианты организации регулирования могут формироваться на основе локальных целевых условий, продиктованных целями локально-экономических интересов отдельных управляющих групп.

При этом формируемые методы и алгоритмы управления могут служить основой для организации управления по широкому спектру целей, которые могут быть основой для адекватной реализации различных целей управления. При создании рассматриваемого класса систем использовались методы математического моделирования на цифровых моделях.

Исследования алгоритмов управления, статики и динамики

системы проводилось в замкнутом состоянии с математической моделью объекта управления. Применение цифрового моделирования при разработке и исследования сложных многосвязных систем с цифровыми управляющими машинами, к которым относятся системы управления энергетическими объединениями, позволило эффективно решать вопросы анализа и синтеза систем, аналитическое исследование которых невозможно без существенных упрощений.

Математическое описание объекта управления и алгоритма управляющего устройства можно использовать в форме принятой для систем данного класса. Применение математического моделирования дает возможность получить первые результаты исследования алгоритмов, статики и динамики системы в целом на примере конкретных энергетических объединений.

В работе рассматриваются математические модели переходных режимов энергетических объединений, состоящих из ЭС, соединенных между собой пятью линия. Структурная схема исследуемого энергетического объединения с ограничителями перетоков и регуляторами частоты и обменной мощности, была приведена в первой и второй частях монографии.

Классические линеаризованные дифференциальные уравнения движения роторов агрегатов, данные в матричном виде, соответствуют уравнениям, рассмотренным в разделе 2. Основные исходные уравнения имеют вид:

$$W(D)\Phi(t) = M(D)U(t) - N(D)F(t),$$

где $\Phi(t)$, $U(t)$, $F(t)$ – соответственно, вектор-функции отклонений углов роторов агрегатов, управляющих воздействий и возмущений от исходных значений. Следуя единству и преемственности при проведении исследований в данной

монографии, матрицы параметров объекта $W(D), M(D), N(D)$ – также определены в разделе 2.

На основе моделей переходных режимов при прогнозировании и управлении ресурсами используются разработанные ранее системные модели влияния, варианты которых могут применяться при прогнозировании с помощью адекватных задач математического программирования.

2. Прогнозирование ресурсов и методы ограничений перетоков. Ресурсное обеспечение энергетических систем по частоте и активной мощности для установившихся режимов может быть распространено на переходные режимы системы ограничения перетоков активной мощности. Управление в переходных режимах можно синтезировать на основе оптимизации по принципу «допустимость-оптимальность». Оптимизация многомерных систем ограничения перетоков в динамических режимах может быть выполнена с применением моделей динамики объекта, рассмотренных в предыдущем подразделе.

Построение динамических моделей для определения ресурсов возможно на основе «входо-выходных моделей» или «моделей состояния» для систем управления частотой, активной мощностью и ограничения перетоков. При этом задача ресурсного обеспечения и оптимизации управления может формулироваться как задача многошаговой оптимизации на конечном интервале времени.

Рассмотрим задачу прогнозирования и динамической оптимизации системы управления энергоресурсами для случая автоматического ограничения перетоков мощности по линиям электроэнергетических объединений. Пусть имеется электроэнергетическое объединение, состоящее из « m » ЭС и « n »

линий электропередач, описываемое в дискретном времени в отклонениях от исходного режима станций и линий с помощью линеаризованных разностных уравнений состояния, которые формируются на основе классических уравнений «вход-состояния-выходы» энергетических объединений в переходных режимах

$$X_{k+1} = HX_k + F\delta P_k, \quad \tilde{S}_k = CX_k. \quad (1)$$

В системе (1) использованы следующие обозначения: X_k – вектор координат состояния энергетического объединения, компонентами которого являются совокупность $(m - 1)$ взаимных узлов и их производных, отсчитываемых от базисного угла и его производных; $\tilde{S}_k = (\tilde{S}_k^I, \dots, \tilde{S}_k^g)$ – вектор отклонения перетоков по линиям от исходных значений S_0 ; δP_k – вектор управлений на регулирующие станции энергетических объединений, компоненты которого линейно связаны с изменениями активных мощностей энергосистем в статических режимах: $p_i = k_i P_i$, где параметр k_i – коэффициент пропорциональности. В уравнениях (1) параметр k определяет дискретное время, в котором рассматриваются процессы изменения координат энергосистем и их объединений.

Матрицы объекта H , F и C в уравнениях (1) соответствуют уравнениям состояния, полученным в результате сокращения размерности вектора состояния по методике, описанной в разделе 2 при аппроксимации линейных дифференциальных уравнений объекта разностными уравнениями, причем k – относительное дискретное время. Уравнения состояния в дискретном времени можно получить на основе известных разностных схем или формуле Коши для решений линейной динамической системы.

Тогда вектор текущих значений перетоков определяется следующим равенством

$$S^g = S^{g0} + \tilde{s}, \quad (2)$$

где первый вектор в правой части равенства (2) измеряется непосредственно и определяет начальное значение перетоков, передаваемых по линиям, а второй определяется динамикой энергосистем или их объединений и описывается уравнениями типа (1). Поскольку в нормальном режиме перетоки активной мощности по линиям электропередач находятся внутри допустимой области D , определяемой неравенствами, то для них выполнены неравенства, определяющие многомерный параллелепипед в пространстве перетоков:

$$S^{g-} \leq S^g \leq S^{g+}, \quad g = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Вектор в неравенствах (3) имеет структуру, заданную равенством:

$$S^g = (S^j \mid S^l \mid S^n)^T, \quad (4)$$

причем первый вектор соответствует перегруженным линиям, перетоки по которым в момент перегрузки имеют положительные направления, второй вектор – имеет аналогичный смысл, однако в момент перегрузки перетоки имеют отрицательные значения. Третий вектор соответствует не перегруженным линиям, перетоки по которым в начальный момент находятся внутри допустимой области. В системе (3) введены обозначения: S^{g-} и S^{g+} – нижнее и верхнее значения перетоков по g -м линиям.

Под действием внеплановых изменений нагрузки энергосистем отдельные линии могут перегружаться, что приводит к нарушению условия (3). Требуется вычислить

управление, переводящие компоненты вектора S_k , для которых не выполняется условия типа (3) в момент времени $k = 0$, внутрь или на границу области D. При этой не перегруженные линии не должны перегружаться в процессе ограничения перетока по перегруженным линиям.

Для определения необходимых управлений требуется выполнения соответствующих целевых условий, которые сведены в табл. 4.2, где приведены характеристики энергосистем и энергетических объединений (динамические модели влияния), которые строятся на основе уравнений (1) и решения задачи Коши для разностных уравнений «вход-состояния-выход»

$$\tilde{s}_k = cH^k x_0 + \sum_{h=1}^{k-1} cH^{k-h+1} F \delta P_h . \quad (5)$$

В табл. 4.2 также введены переменные, которые определяют возможности численного, численно-аналитического и аналитического решений задач определения энергоресурсов в переходных режимах работы системы ограничения, которые позволяют определить потребности в энергоресурсах с учетом приоритетности их введения:

– корректировки регулировочных диапазонов для регулирующих станций;

– предельных значений перетоков активной мощности по линиям для систем их ограничения.

В табл. 4.2 использованы обозначения переменных, введенные в соотношениях (1)-(5), что позволяет описать динамику ЭЭО или ЭС в физических или абстрактных координатах системы. При этом в таблице сформулированы также требования, связанные с восстановлением нормальных режимов перегруженных линий, включая типовые технологические требования для ограничения перетоков.

**Ограничения задачи динамической оптимизации
ресурсов системы ограничения перетоков по ЛЭП**

1.	<i>Требование ограничения перетоков по j-ым перегруженным линиям и оценка отклонения перетоков от верхней границы:</i> $S^{j-} + \delta S^{j-} \leq S_k^j \stackrel{\Delta}{=} S^{j0} + c_j H^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} c_j H^{k-h+1} F \delta P_h \leq S^{j+} + \delta S^{j+}, \quad S^{j0} > 0,$
2.	<i>Требование ограничения перетоков по l-ым перегруженным и δS^{l-} - оценка отклонения перетока от нижней границы:</i> $S^{l-} + \delta S^{l-} \leq S_k^l \stackrel{\Delta}{=} S^{l0} + c_l H^k + \sum_{h=0}^{k-1} c_l H^{k-h+1} F \delta P_h - S^{l-} - \Delta S^{l-} \leq S^{l+} + \delta S^{l+}, \quad S^{l-} < 0,$
3.	<i>Требование неперегрузки линий неперегруженных при $k = 0$:</i> $S^{n-} + \delta S^{n-} \leq S_k^n \stackrel{\Delta}{=} S^{n0} + c_n H^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} c_n H^{k-h+1} F \delta P_h \leq S^{n+} + \delta S^{n+}.$

В табл. 4.2 использованы динамические модели энергетических объединений локального (типа (1)) и глобального описания (описания на временном интервале типа формулы Коши (5)) для отдельных энергосистем. Данные таблицы содержат в качестве параметра дискретное время (обозначено индексом k), поэтому необходимо при формулировке общей задачи рассматривать приведенные ограничения в пределах от 0 до N , где $[0, N]$ – временной интервал, на котором рассматривается процесс ограничения перетоков по линиям.

Введены также обозначения переменных, характеризующие изменения регулировочных диапазонов станций и корректировки предельных значений перетоков, которые введены с учетом знаков направлений исходных значений перетоков по линиям электропередач. Это совпадает с подходом для моделирования и оптимизации систем управления частотой и активной мощностью ЭЭО в установившихся режимах.

Основные ограничения задачи описывают динамику изменения перетоков по перегруженным линиям (переменные S_k^j и S_k^l , определенные в таблице), не перегруженным линиям (переменные S_k^n , определенные в таблице) и технологические требования к системе ограничения перетоков. В табл. 4.2 используется вектор δP_k , задающий управления регулирующих станций на перетоки по перегруженным и не перегруженным линиям, которые определены матрицами c_j, c_l, c_n , т. е. матрицами с соответствующими индексами. Эти матрицы составляют подматрицы матрицы в уравнениях ЭЭО (1) и (5).

Для введения ограничений на корректировки предельных значений перетоков по линиям необходимо дополнить ограничения табл. 4.2 системой неравенств, аналогичной для установившихся режимов, которая ограничивает максимальные возможные корректировки предельных значений перетоков. Эти ограничения на допустимые значения перетоков принимают вид

$$\begin{aligned} S_j^- + \delta S_j^- \leq S_k^j \leq S_j^+ + \delta S_j^+, \quad S_l^- + \delta S_l^- \leq S_k^l \leq S_l^+ + \delta S_l^+, \\ S_n^- + \delta S_n^- \leq S_k^n \leq S_n^+ + \delta S_n^+, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta S_j, \delta S_l, \delta S_n$ - переменные, определяющие корректировки предельных значений перетоков в положительном и отрицательном направлениях. Эти переменные должны удовлетворять ограничениям в установившихся режимах

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta S_j^+ \leq \Delta S_j^+, \quad -\Delta S_l^- \leq \delta S_l^- \leq 0, \\ \Delta S_n^- \leq \delta S_n^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta S_n^+ \leq \Delta S_n^+. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичные ограничения необходимо ввести на ресурсы станций, определяемые корректировками их диапазонов регулирования, которые должны удовлетворять неравенствам

$$\Delta P_i^- \leq \delta P_i^- \leq 0, \quad 0 \leq \delta P_i^- \leq \Delta P_i^+, \quad (8)$$

причем, как следует из (8), корректировки регулировочных диапазонов устанавливаются неизменными на интервале времени $[0, N]$, на котором осуществляется ограничение перетоков.

Данные ограничений 6) - 8) в соотношениях (13) (п. 4.4) определяют допустимые режимы для системы ограничения перетоков активной мощности в переходных режимах. Это позволяет на основе указанных ограничений формировать управления на основе принципа «рациональность-допустимость». Для реализации принципа «оптимальность-допустимость» в задачах синтеза прогнозов и управлений необходимо построить вычислительную процедуру, обеспечивающую выполнение ограничений типа 6) - 8) в соотношениях (13), п. 4.4 и минимизацию функционала:

$$\begin{aligned} J_\nu = & \sum_{j=1}^n T \sum_{k=1}^{N-2} \left| S_k^j - (S^{j+} - \delta S^{j+}) \right|^\nu + \sum_{l=1}^n T \sum_{k=1}^{N-2} \left| S_k^l - (S^{l-} - \delta S^{l-}) \right|^\nu + \\ & + \sum_{k=0}^{N-2} T \sum_{i=1}^m \left| \delta P_k^i - \delta P_{k-1}^i \right|^\nu + \sum_{i=1}^m \left| \delta P_N^i \right|^\nu + \sum_{k=0}^{N-1} T \sum_{i=1}^m \left| \delta P_k^i - \delta P_N^i \right|^\nu + \\ & + N_1 \sum_{i=1}^m \left| \delta P_i^+ \right|^\nu + N_1 \sum_{i=1}^m \left| \delta P_i^- \right|^\nu + \\ & + M_1 \sum_{j=1}^R \left| \delta S_j^+ \right|^\nu + M_1 \sum_{j=1}^R \left| \delta S_j^- \right|^\nu + M_2 \sum_{l=1}^Q \left| \delta S_l^+ \right|^\nu + M_2 \sum_{l=1}^Q \left| \delta S_l^- \right|^\nu + \quad (9) \\ & + M_3 \sum_{n=1}^P \left| \delta S_n^+ \right|^\nu + M_3 \sum_{n=1}^P \left| \delta S_n^- \right|^\nu, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned}$$

В функционал (9) имеются составляющие, учитывающие следующие факторы:

- качество переходных процессов ограничения перетоков по перегруженным линиям (первые два слагаемые), причем эти слагаемые функционалов учитывают качество процессов приближения компонент векторов перетоков к ближайшим границам допустимой области;

- составляющие, учитывающие ограниченность изменений управлений на регулирующие станции введением слагаемых, зависящих от приращений управлений (третье слагаемое);

- затраты на управление в установившемся состоянии (четвертое слагаемое);

- затраты энергии на управление с учетом динамики процессов изменений мощностей регулирующих станций (пятое слагаемое);

- величины корректировок регулировочных диапазонов станций (шестое и седьмое слагаемые), что составляет один из важных факторов обеспечения необходимого ресурса управления;

- величины корректировок предельных значений перетоков по линиям с учетом положительных и отрицательных значений корректировок (восьмое – тринадцатое слагаемые), которые определяют второй фактор обеспечения ресурсами и по смыслу совпадает с аналогичными слагаемыми для установившихся режимов ЭЭО.

Как следует из (9), в зависимости от параметра ν функционал является модульным или квадратичным, что определяет класс задач кусочно-линейного ($\nu = 1$) или квадратичного ($\nu = 2$) программирования. Решение этих задач осуществляется численными, аналитико-численными или

аппроксимирующими аналитическими методами, разработанными для определения ресурсов и управлений в установившихся режимах.

В ограничениях (7), (8) и функционале (9) использованы также обозначения: T – период квантования по времени; параметры N_1, M_1, M_2, M_3 учитывают значимость отдельных составляющих функционала, смысл которых определен выше; C_j, C_l, C_p – подматрицы матрицы выхода C , необходимые для выделения векторов перетоков по перегруженным линиям в положительном или отрицательном направлениях, а также векторов перетоков по не перегруженным линиям; x_0 – вектор состояния энергетического объединения в момент начала работы ограничителя, который связан с исходным режимом линий, имеющий отличные от нуля все компоненты кроме взаимных углов; $\Delta P^-, \Delta P^+$ – векторы нижних и верхних значений регулировочных диапазонов энергосистем.

В последних условиях использованы следующие модели динамических режимов энергосистем и их объединений, которые позволяют получить также характеристики установившихся режимов. Если ввести матрицы β^j, β^l – как подматрицы матрицы β , являющейся матрицей статических (квазистационарных) характеристик объекта, то матрица статических характеристик влияния может быть определена, в частности, сходящимся рядом:

$$\beta = \sum_{h=1}^{N^*} c H^{k-h+1} F, \quad k = N^* + 1, \quad (10)$$

где N – дискретное время, превышающее максимальную длительность переходных процессов в энергосистеме.

Существуют и другие способы построения характеристик квазистационарных состояний энергетических объединений в пространстве «приращения управлений на станции – приращения перетоков активных мощностей по ЛЭП.

Сформулированные задачи ориентированы на применение численных, численно-аналитических или аналитических методов конечномерной оптимизации. Вычисление необходимых ресурсов и управления частотой и активной мощностью можно выполнить для переходных режимов энергетических объединений.

3. Результаты и выводы. 1. Рассмотрены математические модели энергетических объединений в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений многоагрегатных систем, используемые для исследования систем управления частотой и активной мощностью.

2. Сформулированы задачи формирования ресурсов и управлений крупными энергетическими объединениями для управления в переходных режимах системы автоматического ограничения перетоков активной мощности на основе комплекса целевых условий. Даны математические постановки перечисленных выше задач и предложены методы решения сформулированных задач.

3. Разработанные модели и методы формирования ресурсов и управлений обобщают подходы, направленные на обеспечение в переходных режимах энергетическими ресурсами систем управления частотой и активной мощностью введением:

- корректировки регулировочных диапазонов регулирующих станций генерирующих компаний;
- корректировки предельно-допустимых передаваемых по линиям мощностей сетевых компаний.

Полученные результаты позволяет обеспечить первичные и вторичные возможности сохранения устойчивости параллельной работы объединенных энергосистем.

4. Предлагаемые методы позволяют дополнить существующее математическое обеспечение автоматизированного обеспечения диспетчерского управления объединенных диспетчерских управлений энергетических объединений как составная часть «советчиков диспетчеров».

4.6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ СОВМЕСТНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕСУРСОВ И УПРАВЛЕНИЙ

Существуют различные подходы к численному, аналитико-численному или аппроксимационно-аналитическому решениям задач математического программирования для прогнозирования ресурсов и вычисления управлений для СОП по ЛЭП и САУ частотой и обменной мощностью. Численные методы базируются на *методах «линеаризации»* функционалов. При этом можно использовать два варианта методов линеаризации задачи, которые обладают определенными особенностями.

1. Первый метод линеаризации. Сущность первого метода линеаризации состоит в следующем. Требования минимизации суммы модулей делает задачу математического программирования кусочно-линейной. Для сведения задачи к линейной можно воспользоваться известным приемом – заменой модулей целевой функции новыми переменными, на которые наложены следующие ограничения: $y_i \geq |\Delta P_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$, что равносильно выполнению требований следующего вида [14,17]:

$$y_i + \Delta P_i \geq 0, \quad y_i - \Delta P_i \geq 0. \quad (1)$$

Тогда задача минимизации модульных функционалов может быть сведена к задаче минимизации линейной целевой функции:

$$F = \sum_{i=1}^n y_i \quad (2)$$

при линейных ограничениях, т. е. сводится к задаче линейного программирования.

Для упрощения процедуры решения и получения ограничений типа неравенств, а также для «сведения» перетока по перегруженной линии к значению S_j^{np} , что эквивалентно максимальной передачи мощности по перегруженной линии, можно использовать метод штрафных функций. Тогда задача сводится к решению задачи – минимизации целевой функции

$$F_2 = \sum_{i=1}^n y_i + M \left(\sum_{j,l \in N_n} x_{1(j,l)} + \sum_{i=1}^n x_{7i} + \sum_{i=1}^n x_{9i} + x \right) \quad (3)$$

при ограничениях, соответствующих линеаризованным задачам оптимизации ресурсного обеспечения и управления.

2. Второй метод линеаризации. Задачи минимизации модульных функционалов при линейных ограничениях, сформулированные в п. 2.1 и 2.2, как задачи кусочно-линейного программирования, заключаются в минимизации модульного функционала. После линеаризации могут быть решены методами линейного программирования при использовании линеаризации или другими методами решения задач нелинейного программирования.

Сущность второго метода линеаризации заключается в замене переменных. Тогда кусочно-линейный функционал задачи преобразуется к виду:

$$F = \sum_{i=1}^n (v_i^1 + v_i^2), \quad (4)$$

где новые переменные являются неотрицательными, причем неотрицательность переменных учитывается в алгоритме симплекс-метода. Переменные в ограничениях задачи преобразуются в соответствии с равенствами

$$\Delta P_i = v_i^1 - v_i^2, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_i^2 \geq 0. \quad (5)$$

В результате данной замены переменных в функционале и ограничениях задача линейного программирования состоит в минимизации функционала типа (5) при соответствующих ограничениях. Для других переменных этих задач используется аналогичная замена переменных.

Задачи квадратичного программирования, сформулированные выше, можно решить численными методами, в частности, методами проецирования (проекции) градиента или методами штрафных функций.

Первым этапом вычисления оптимального решения является определение допустимого решения. Для этой цели могут быть использованы численные или численно-аналитические методы. Причем использование численных методов позволяет оценить множество необходимых энергоресурсов на основе вариантного вычислительного эксперимента.

Применение численно-аналитических методов в большей степени позволяет определить энергоресурсные характеристики энергетических объединений. Более предпочтительным является применение аппроксимационных-аналитических методов, применяемых для специальной формулировки канонических форм ограничений задач МП. Эти канонические формы являются инвариантными относительно минимизируемых функционалов. Критерии «непустоты» этих множеств, т. е. критерии «непустоты» пересечения линейных многообразий и

параллелепипедов, задающих ограничения, позволяют исследовать качественные свойства систем прогнозирования.

3. Численно-аналитические методы совместного прогнозирования ресурсов и операторы управления.

Численно-аналитические методы вычисления допустимых решений для задач вычисления ресурсов и управлений могут строиться методами внутренней аппроксимации допустимых множеств. Этот метод для сформулированных задач математического программирования позволяет вычислить решения на основе принципа «рациональность-допустимость». В соответствии с этим принципом формируется однопараметрическое семейство допустимых решений. Решение описанной задачи можно получить на основе следующей формулировки. Пусть выполнены следующие условия:

1. Множество D_z , определяемое следующим образом:

$$D_z^1 = \{ z \mid z^- \leq z \leq z^+ \} \quad (6)$$

компактное и непустое, а также непустым является пересечение линейного многообразия

$$D_z^0 = \{ z \mid Az = b \} \quad (7)$$

с эллипсоидом максимальной меры, вписанным в D_z^1 .

2. Матрица T и вектор $\bar{a}$, определенные параметрами множества $D_x^1(\cdot)$ такие, что

$$T = \text{diag } t_i^{-1}, t_i = \frac{x_i^+ - x_i^-}{2}, \bar{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_{r+n})^T, a_i = \frac{x_i^+ - x_i^-}{2}, \det T \neq 0.$$

3. Строки матрицы A – линейно независимые.

Тогда однопараметрическое семейство допустимых векторов $\bar{z}(\tau) \in D_z$ и $\bar{x}(\tau) \in D_x$ параметра $\tau \in [0, 1]$ определяется следующей совокупностью равенств, задающих оператор решения неравенств [80]:

$$\bar{z}(\tau) = S\bar{x}(\tau), \quad \bar{x}(\tau) = T^{-1}[\tau y_* + (1-\tau)y^*] + \bar{a}, \quad S = \frac{E_n}{0_{n \times r}},$$

$$y_* = \hat{y} + \alpha^- p, \quad y^* = \hat{y} + \alpha^+ p, \quad p = \tilde{P}^0[P^4(\hat{y}) - \hat{y}], \quad (8)$$

$$\hat{y} = P^0(y^0), \quad y^0 = T(x^0 - \bar{a}), \quad x^0 \in R^{r+n},$$

где $y_* = y(\alpha^-)$ и $y^* = y(\alpha^+)$ вычисляются на основе (5), когда параметр α соответственно равен α^- и α^+ , а $P^0(y^0)$ и $\tilde{P}^0$ – проекторы на линейное многообразие и подпространство, соответственно равны

$$D_y^0(A_1, b_1) \text{ и } D_y^0(A_1, 0); \quad A_1 = AT^{-1}, \quad b_1 = b - A\bar{a}.$$

Доказательство приведенных выше соотношений строится следующим образом. Поскольку по предположению множество D_z – компактное, то в параллелепипед $D_x^1(x^-, x^+)$ можно вписать такой эллипсоид наибольшего объема $D_x^4 = D_x^4(T^2, \bar{a}, 1)$, что:

$$D_x^4 = \left\{ x \left| \sum_{i=1}^{r+n} \frac{(x_i - a_i)^2}{t_i^2} \leq 1, a_i = \frac{x_i^+ + x_i^-}{2}, t_i = \frac{x_i^+ - x_i^-}{2} \right. \right\}, \quad (9)$$

Параметры $D_x^4 = D_x^4(T^2, \bar{a}, 1)$ определяются параметрами множества $D_x^1(x^-, x^+)$. Тогда задача вычисления семейства векторов $\bar{x}(\tau) \in D_x^0 \cap D_x^1$ может быть сведена к определению элементов $\bar{x}(\tau) \in D_x^0 \cap D_x^4$, так как $D_x^1 \supset D_x^4$.

Введем вектор новых переменных $y = T(x - \bar{a})$, имеющих координаты $y_i = \frac{x_i - a_i}{t_i}$, причем преобразующая матрица T и вектор $\bar{a}$ определены выше. Образом аппроксимирующего

эллипсоида $D^4(T^2, \bar{a}, 1)$ в пространстве векторов $y \in R^{r+n}$ является шар $D^4(E, 0, 1)$ евклидова пространства, а линейное многообразие $D_x^0(A, b)$ преобразуется в линейное многообразие $D_y^0(A_1, b_1)$, которое определяется соотношением

$$D_y^0(A_1) \mathcal{B}_1 = \left\{ y \mid A_1 y = b_1 \quad A_1 = AT^{-1} \quad b_1 = b - A\bar{a} \right\}$$

$$D_y^4(\mathcal{B}, 1) = \left\{ y \mid \|y\|^2 \leq 1 \right\}$$

Для вычисления семейства элементов $y(\tau) = \tau y_* + (1 - \tau) y_*$ можно использовать операторы, сформулированные в лемме о проекторе на пересечении линейного многообразия и шара, а также в следствии к ней, поскольку выполнены все условия данной леммы.

Тогда существует решение $y(\tau)$, удовлетворяющее ограничениям $y(\tau) \in D_y^0(A_1, b_1)$. В силу взаимной однозначности и взаимной непрерывности отображения $y = T(x - \bar{a})$ имеет место допустимость вектора $\bar{x}(\tau) = T^{-1}y(\tau) + \bar{a} \in D_x^0 \cap D_x^1$, связь которого с векторами $z(\tau)$ определена равенствами, использованными выше.

Таким образом, сформулирована методика аппроксимации допустимых множеств, образованных пересечением линейного многообразия и параллелепипеда, пересечением модифицированного линейного многообразия и шара, что позволяет перейти к построению численно-аналитических решений аппроксимирующей задачи.

4. Аналитические методы совместного прогнозирования ресурсов и операторы конечномерной оптимизации. Задача качественного исследования влияния дефицитов на реализацию

заданных режимов управления частотой и активной мощностью энергетических объединений формулируется в следующей общей постановке. Эти результаты позволяют качественно анализировать влияния параметров режима на достижение целей управления в условиях вынужденного или естественного дефицитов мощности по диапазонам регулирования станций и по предельным диапазонам ЛЭП.

Задача качественного исследования формулируется следующим образом. При этом используется квадратичный вариант функционала задачи конечномерной оптимизации. Необходимо отметить, что для аналитического и численно-аналитического решения рассматриваемых задач математического программирования можно использовать аппроксимацию допустимых множеств. Такие аппроксимации могут быть внешними, внутренними и интервальными (рис. 4.4), причем последний класс аппроксимаций является «промежуточным» между двумя первыми. Ниже рассматривается вариант построения численно-аналитических решений на основе внутренней аппроксимации допустимых множеств. Задача квадратичного программирования, эквивалентная задаче имеет вид: вычислить вектор, минимизирующий квадратичный функционал, на допустимом множестве, в котором параллелепипед аппроксимирован внутренним эллипсоидом минимального объема. Эта задача имеет вид: вычислить

$$X^* = \arg \min \{ \varphi = (X - c)^T (X - c) \mid Ax = b, \quad x^T Qx \leq r^2 \}. \quad (10)$$

Задача (1) представляет собой минимизацию квадратичного функционала на допустимом множестве, которое представляет собой пересечение линейного многообразия и шара. Для решения задачи можно использовать необходимые и достаточные условия



Рис. 4.4. Характеристика аппроксимаций допустимых множеств для аналитического решения экстремальных задач

Куна-Таккера для задач выпуклого программирования или условиями экстремума в дифференциальной форме.

Рассмотрим другой подход к решению задачи, исходя из того, что точка минимума квадратичного функционала принадлежит границе допустимой области или расположена внутри этой области.

В этой ситуации можно воспользоваться отдельным отысканием оптимальных решений с последующим их обобщением в предикатной форме

$$X^* = \begin{cases} X_1^* = \arg \min \{ \varphi \mid AX = b \}, & \text{если } X^* \in \text{int } D, \\ X_2^* = \arg \min \left\{ \varphi \mid \begin{array}{l} AX = b \\ X^T X = r^2 \end{array} \right\}, & \text{если } X^* \notin \text{int } D, \end{cases} \quad (11)$$

где $\text{int } D$ – внутренность множества D , аппроксимирующего параллелепипед в задачах, сформулированных в предыдущих разделах данной работы.

Если точка минимума X^* принадлежит границе области, то

для решения вспомогательной задачи, когда в (10) все ограничения выполняются как равенства.

Для этого случая задача оптимизации может быть сформулирована в следующей форме: вычислить

$$X^* = \arg \min \left\{ \varphi = (X - C)^T (X - C) \left| \begin{array}{l} AX = b, \\ X^T X = r^2, \\ \text{rang } A = m \end{array} \right. \right\},$$

что позволяет использовать необходимые условия для ограничений типа равенств, формулируемые с помощью функции Лагранжа для рассматриваемой задачи. При этом, как было отмечено выше, используется внутренняя аппроксимация параллелепипедов ограничений. Возможно также применение «внешней» аппроксимации параллелепипедов, однако последнее обстоятельство не вносит особенностей в формулировку необходимых условий.

Функция Лагранжа для задачи, полученной при переходе от условия в виде квадратичных неравенств к задаче с квадратичными равенствами, представляется в форме:

$$L = (x - C)^T (x - C) + \lambda_0^T (Ax - b) + \lambda (x^T x - r^2). \quad (12)$$

На основе функции Лагранжа можно получить численно-аналитическое решение совместной задачи по определению энергоресурсов энергетических объединений и соответствующих управлений в следующих режимных ситуациях:

- при ограничении перетоков активной мощности по линиям электропередач;
- при регулировании частоты и обменной мощности объединенных энергосистем;
- при совместном ограничении перетоков и регулировании частоты и активной мощности.

Необходимые условия экстремума для функции Лагранжа представляются в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. Эти уравнения следуют из общей схемы формирования необходимых условий для задач условной оптимизации, полученных с помощью операций дифференцирования функции Лагранжа по исходным переменным и по множителям Лагранжа для ограничений типа линейных и нелинейных равенств. В результате можно получить систему нелинейных алгебраических уравнений, из которой можно определить оператор конечномерной оптимизации. Тогда вектор оптимального решения как функция λ имеет вид:

$$X^*(\lambda) = X^* = \left[P^0(C) + \lambda P^A b \right] \frac{1}{1 + \lambda}. \quad (13)$$

Окончательный вид квадратного уравнения для определения скалярного множителя Лагранжа λ определяется соотношением:

$$\alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0, \quad (14)$$

где параметры уравнения определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b, & \alpha_2 &= -2b^T (AA^T)^{-1} b, \\ \alpha_3 &= r^2 - C^T \tilde{P}^0 C - b^T (AA^T)^{-1} b. \end{aligned}$$

В зависимости от принадлежности точки минимума функционала границе или внутренней части допустимого множества решение задает **оператор математического программирования**:

$$X^* = X^*(\lambda) = \begin{cases} X^* = \left[P^0(C) + \lambda P^A b \right] \frac{1}{(1 + \lambda)^2}, & \text{если } X^* \notin \text{int } D; \\ X^{0*} = P^0(C), & \text{если } X^{0*} \in \text{int } D, \end{cases} \quad (15)$$

где допустимое множество, на котором вычисляется минимум рассматриваемого функционала, определяется соотношениями:

$$D = \left\{ X \in D^0 \cap D^2 \left| \begin{array}{l} D^0 = \{X | AX = b\}, \\ D^2 = \{X | X^T X \leq r^2\} \end{array} \right. , D^0 \cap D^2 - \text{непустое} \right\}, \quad (16)$$

где символом $\text{int } D$ обозначена внутренность множества D , которая определяется как множество точек открытого множества, полученного из этого множества исключением точек, принадлежащих его границе. Параметр λ в оптимальном решении определяется из квадратного уравнения. Из двух решений квадратного уравнения выбирается значение, соответствующее минимуму функционала. Знак параметра λ может быть также определен из условий теоремы Куна-Таккера [71,86].

Критерий совместности ограничений задачи. На основе приведенных выше результатов можно сформулировать критерий совместности ограничений задач математического программирования. Этот критерий формулируется как условие существования вещественных решений квадратного алгебраического уравнения. Очевидно, что условие совместности представляется в форме:

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0, \quad (17)$$

где параметры, связанные с параметрами исходной экстремальной задачи, определены выше.

Разработанные методы численно-аналитического решения могут использоваться для вычисления прогнозов режимов по диапазонам, пропускным способностей линий и управлений в установившихся режимах ЭЭО.

Пример 1. Методика вычисления управлений для стационарных режимов систем ограничения перетоков иллюстрируется на примере рассмотрения выделенной части энергетического объединения. При этом будут использована рассмотренная методика аппроксимации допустимых множеств. Пусть система уравнений-неравенств, описывающая стационарные состояния объекта имеет вид:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, & 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ -10 \leq x_1 \leq 10, & -20 \leq x_2 \leq 20, & -30 \leq x_3 \leq 30.\end{aligned}$$

Допустимые решения этой системы, которые приближенно минимизируют рассматриваемый функционал типа евклидовой нормы:

$$x_* = \arg \min \|x - c\|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

где $c = (-17, 34 \ 51)^T \notin D^0 \cap D^1$. Матрицы, определяющие структуру множеств, имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

а вспомогательные матрицы и векторы, определяющие характеристики аппроксимации параллелепипеда внутренним эллипсоидом, определяются следующим равенствами:

$$T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0,033 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом вспомогательные матрицы задачи принимают вид:

$$A_1 = AT^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 40 & 90 \\ 20 & 40 & 30 \end{bmatrix}, y^0 = T(x^0 - a) = (-1, 7, 1, 7, 1, 7)^T,$$

$$AA_1^T = \begin{bmatrix} 9800 & 4500 \\ 4500 & 2900 \end{bmatrix}, A_1^T(A_1A_1^T)^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} 0,294 & 0,445 & -0,118 \\ 0,445 & 0,724 & 0,073 \\ -0,118 & 0,072 & 0,978 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}^0 = E - A_1^T(A_1A_1^T)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0,705 & -0,441 & 0,118 \\ -0,440 & 0,276 & -0,072 \\ 0,118 & -0,072 & -0,0217 \end{bmatrix}.$$

Вспомогательные векторы определяются равенствами

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} -1,717 \\ 1,138 \\ -0,298 \end{bmatrix}, P^4(\hat{y}) = \begin{bmatrix} 8,182 \\ 8,725 \\ 10,159 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0,908 \\ -0,567 \\ 0,151 \end{bmatrix}.$$

С помощью вспомогательных векторов можно вычислить параметры $\alpha^+ = 1,001, \alpha^- = 2,846, \alpha = 1,001$, определяющие вектор y_* , и решение задачи x_* :

$$x_* = (-8,093, 11,417, -4,404)^T,$$

удовлетворяющее системе уравнений-неравенств и обеспечивающее приближенную минимизацию заданного функционала.

Следующий пример иллюстрирует возможность применения разработанных численно-аналитических процедур для управления в переходных режимах на основе моделей, разработанных в разделе 3.

Пример 2. Пусть объектом управления является локальная энергетическая система, в которой требуется поддерживать

скорость вращения эквивалентного генератора (частоту в сети) на заданном уровне. Тогда в силу математических моделей энергетических объединений, введенных в разделе 3. можно приближенно описать динамику агрегате разностным уравнением:

$$X_{k+1} = HX_k + FU_k.$$

Отклонение частоты является одной из компонент вектора $X_k = (\omega_k, P_k, \varphi_k)^T$, где $X_k^i = \omega_k$, т. е. совпадает с регулируемой координатой. Заданное значение частоты определяется целевым условием типа равенств: $\omega_{k+1} = X_k^i = \omega_{\text{задан}}$.

Требуется решить задачу вычисления необходимых управлений на основе модели переходных режимов

$$X_{k+1}^i = CHX_k + CFU_k = \omega_{\text{зад}} \quad \text{относительно управления:}$$

$$CFU_k = \omega_{\text{зад}} - CHX_k.$$

Введем необходимые обозначения, определяемыми параметрами задачи. Тогда ограничения типа равенств будут иметь вид:

$$AX_k = (CF)(U_k) = b = \omega_{\text{задан}} - CHX_k.$$

Если управления ограничены, т. е. при вычислении управлений должны быть выполнены линейные неравенства или аппроксимирующие их квадратичные неравенства

$$U^- \leq U_k \leq U^+ \sim U_k^T U_k \leq r^2,$$

то можно сформулировать задачу оптимизации энергетического объединения как задачу минимизации функционала:

$$\varphi = (U_{k+1} - \bar{U})^2 \rightarrow \min,$$

имеющего смысл минимизации затрат на управление, поскольку целевые условия для частоты заданы соотношениями типа равенств.

Задача имеет аналитическое решение, поэтому можно построить управление с обратной связью, которое будет задано в аналитической форме. В рассматриваемой задаче наличие обратной связи определяется структурой параметра b , который в силу формулировки задачи и данного выше определения зависит от измеряемого вектора состояния объекта.

Таким образом, предложенная методика вычисления оптимальных решений аппроксимирующей задачи математического программирования позволяет получить аналитически разрешимую систему необходимых условий. Это в конечном варианте позволяет получить предикатное задание решений, т. е. задание решений в виде условных соотношений в зависимости от расположения оптимального решения относительно множества в виде шара в евклидовом пространстве, аппроксимирующего параллелепипед ограничений задачи математического программирования.

5. Выводы и рекомендации. 1. Сформулированы аппроксимирующие задачи для задач определения ресурсов для системы управления частотой и активной мощностью крупных энергетических объединений, которые построены на основе аппроксимации параллелепипедов ограничений эллипсоидами в конечномерном пространстве ресурсов и управлений. При этом использована внутренняя аппроксимация допустимых множеств, которая строится как часть допустимого множества.

Для аппроксимирующих задач предложена характеристика разделения возможных оптимальных решений, что позволило свести общую задачу с ограничениями типа неравенств к двум вспомогательным задачам с учетом принадлежности оптимального решения внутренней части или границе допустимого множества ограничений.

2. Для аппроксимирующих задач на основе функций Лагранжа сформулирована система необходимых условий в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, для которых предложена методика последовательного решения, позволяющая определить множители Лагранжа для различных условий расположения экстремума конечномерной задачи. В результате для аппроксимирующих задач построены отдельные решения:

- принадлежащие границе допустимой области,
- принадлежащие внутренней части допустимой области,

что позволило задать общее решение предикатным (условным) представлением.

3. Предложенное представление решения позволяет получить качественные результаты на основе конструктивных достаточных критериев совместности ограничений задач математического программирования, в частности, при определении необходимых ресурсов для управления частотой и активной мощностью. Предложенный критерий совместности ограничений носит общий характер для решения комплекса задач математического моделирования при управлении различными классами статических и динамических объектов управления.

5. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕДИНЕНИЯХ

Электроэнергетические объединения (ЭЭО) являются сложными динамическими объектами, в которых могут возникать специальные режимы функционирования. Далее приводится классификация динамических систем, в которых могут возникать сложные режимы функционирования [113,133,223-225]. Под этим термином понимаются процессы внешней или внутренней синхронизации, многочастотных колебаний, наконец, хаотических колебаний. Рассматриваемые системы, относящиеся к различным классам, представляют широко известные процессы, имеющие относительно простые математические модели, в которых возникают сложные режимы.

Актуальность анализа определяется тем, что для технических объектов методы создания или точность математических моделей могут быть оптимизированы, однако при этом могут возникать новые особенности, поскольку:

1. Математические модели систем представляются нелинейными дифференциальными уравнениями с одной или несколькими различными нелинейными составляющими в уравнениях динамики.

2. В линейном приближении процессы в таких системах являются слабо демпфированными, часто имеет место отрицательное демпфирование как особенность моделируемого

явления, процесса или системы управления, что характерно, в частности, для электромагнитных процессов (ЭМП) в ЭЭО.

3. Модели систем имеют неоднозначности математического описания, поскольку одна группа элементов моделей относится к параметрам системы, а другая – к фазовым координатам.

Известно, что с уменьшением запасов устойчивости системы, т. е. при уменьшении «способности системы сохранять текущее состояние при наличии внешних возмущений» улучшается ее управляемость как «возможность перевода системы из одного состояния в другое». Однако при этом снижаются ее эксплуатационные качества за счет возможности появления параметрической неустойчивости вследствие влияния внешних факторов. Поэтому возникают ограничения на условия применения и запрещенные режимы, а также другие эксплуатационные особенности, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации систем. Отсутствие учета перечисленных особенностей приводит к катастрофическим последствиям.

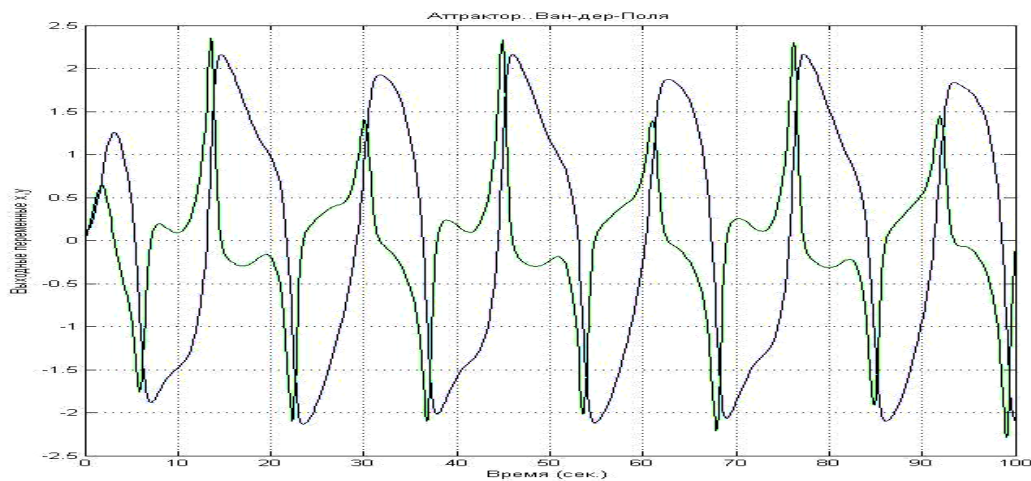
Далее рассматривается ряд различных систем и их математических моделей, используемых в различных областях науки и техники, которые иллюстрируют общие сложные динамические режимы. Это позволяет объяснить возникновение сложных режимов функционирования, а также указать методы анализа таких систем. На основе классификации сценариев перехода к хаотическим режимам приведен ряд фундаментальных результатов, обеспечивающих существование решения задачи управления в таких режимах.

1. Примеры систем с выявленным сложным поведением.
Осциллятор Ван-дер-Поля (табл. 5.1) является одним из таких примеров. Голландский физик и инженер Ван-дер-Поль в

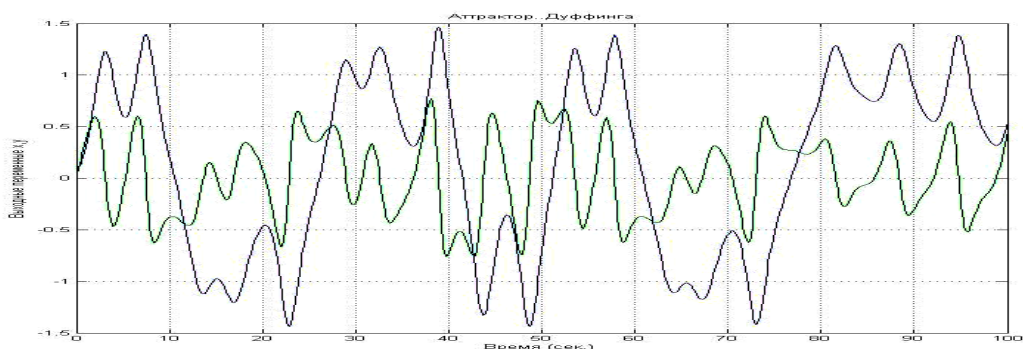
Системы, в которых возникают сложные движения

Математическая модель, параметры хаотических режимов и процессы

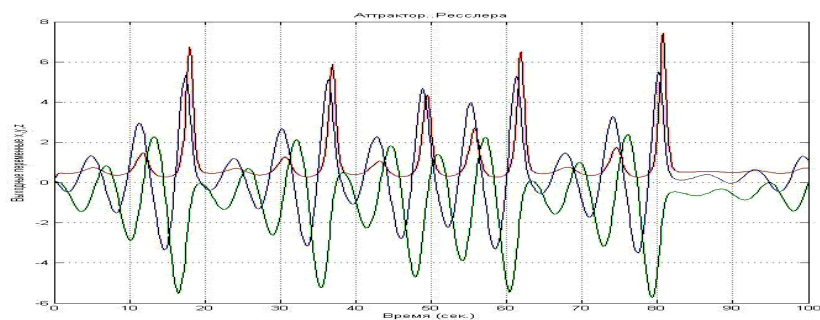
1. Осциллятор, уравнение, аттрактор и процессы Ван-дер-Поля в радиотехнике и электронике:
 $x'' + \varphi(x)x' + \delta x = \gamma \cos(\omega x)$ с параметрами: $\omega = 1, \gamma = 0.3, \delta = 0.25$.



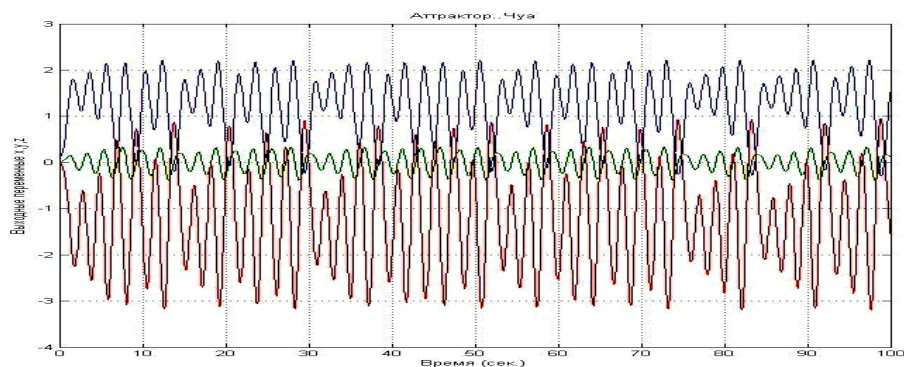
2. Уравнение и аттрактор Дуффинга механической колебательной системы с двумя потенциальными ямами:
 $x'' + \delta x' + \beta x + x^3 = \gamma \cos(\omega t)$ с параметрами: $\alpha = 1,0; \beta = -1,0; \gamma = 0,3; \delta = 0,2; \omega = 1,0$.



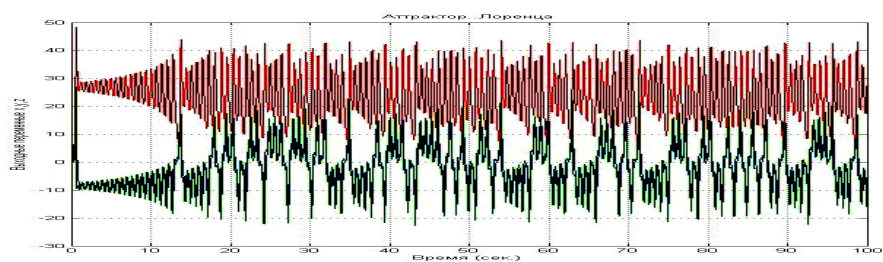
3. Уравнения, аттрактор и процессы Ресслера для химической реакции в смеси с перемешиванием: $x' = -y - z$, $y' = x + \alpha y$, $z' = \beta + z(x - c)$, где параметры: $\alpha = 0,432$; $\beta = 2,0$; $c = 4,0$.



4. Осциллятор, аттрактор и процессы Л. Чуа для искусственной модели радиотехники [4]: $x' = \alpha[y - h(x)]$, $y' = x - y + z$, $z' = -\beta y$ с параметрами: $\alpha = 9,0$; $\beta = 15,0$.



5. Аттрактор Лоренца в гидромеханике как модель физического процесса формирования конвекционных ячеек Бенара, а также для электромагнитных процессов электроэнергетики – модель хаотических режимов: $x' = -\sigma(x - y)$, $y' = rx - y - xz$, $z' = -bx + xy$ с параметрами: $\sigma = 10$; $r = 28$; $b = 8/3$.



1927 году исследовал работу лампового генератора колебаний при периодическом внешнем воздействии. Режимы работы контролировались по шуму в наушниках, при этом исследователь обнаружил ряд типичных явлений – синхронизация при определенных соотношениях частоты воздействия и собственной частоты генератора, шумоподобные колебания при переходах между областями захвата.

Уравнение Дуффинга – это уравнение частицы, движущейся в одномерном потенциальном поле с двумя минимумами, которое впервые движение было изучено в 1918 году немецким инженером Георгом Дуффингом. Следующий пример – **аттрактор Ресслера**, модель которого впервые была предложена в 1976 году, описывает динамику процесса, происходящего в химическом реакторе с перемешиванием (табл. 5.1).

Осциллятор Л. Чуа – это искусственно созданная в 1983 году профессором Калифорнийского университета математическая модель, широко используемая в качестве примера возникновения хаотических режимов по ряду причин (табл. 5.1):

1. Это простейшая **автономная** динамическая схема, в которой могут возникать хаотические режимы.

2. Хаотическое поведение можно описать математической моделью и реализовать на ЭВМ, а также получить экспериментальное подтверждение с помощью электронной схемы.

3. Модель допускает глубокий математический анализ, а ее хаотическое поведение получило математическое доказательство.

В 1963 году американский метеоролог **Э. Лоренц** опубликовал статью «Детерминированное непериодическое

течение», в которой обсуждались результаты численного исследования трех обыкновенных дифференциальных уравнений, моделировавших динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Лоренцом был сделан акцент на взаимосвязи между наблюдаемой сложной динамикой и присущей системе неустойчивостью фазовых траекторий, определивших *аттрактор Лоренца* (табл. 5.1).

Как показано в ряде работ, к уравнениям аналогичного типа приводятся уравнения синхронной машины, которые качественно по классам нелинейных билинейных правых частей билинейного типа обыкновенных дифференциальных уравнений совпадают с уравнениями Лоренца. Это потенциально определяет возможности возникновения *хаотических режимов в ЭЭО*. Это делает актуальным исследование условий возникновения хаотических режимов в ЭЭО, что необходимо для обеспечения энергетической безопасности.

Таким образом, рассмотренные математические модели позволяют сформулировать методы анализа хаотических режимов нелинейных систем и определить комплекс условий возникновения хаотических режимов в ЭЭО, создающих предпосылки к возникновению системных аварий.

2. Структуры моделей, сценарии перехода и прогнозирование сложности поведения систем в хаотических режимах. Выделяются два класса динамических систем, к которым относятся консервативные и диссипативные системы, траектории которых располагаются в ограниченной области. Консервативность понимается в смысле сохранения энергии. В частности, механические колебательные системы при отсутствии трения относятся к *консервативным системам*. При наличии трения механическая энергия не сохраняется, а постепенно рассеивается, т. е. появляется диссипация энергии.

Диссипативные системы и соответствующие модели описывают это явление.

При этом для *консервативных систем «облако точек»*, описывающих функционирование некоторого множества систем, сохраняется объем, изменяется только его форма. Для *диссипативных систем* уменьшается объем изображающих точек и его концентрация на одном или нескольких *аттракторах – предельных множествах*. Такие множества имеют меньшую размерность исходного фазового пространства. Этим обусловлен эффект «забывания начальных условий» для таких систем и «потеря» зависимости решений от начальных условий, по крайней мере, при варьировании начальных условий в некоторых пределах.

Установление в динамической системе хаотического режима движения в результате некоторой последовательности бифуркаций принято называть *сценарием установления развития хаоса*. Количественные аспекты сценариев перехода к хаосу через квазипериодическое движение можно изучать в рамках «ренормализационного анализа», переходя от описания дифференциальными уравнениями к дискретному отображению. Однако, удивителен тот факт, что после нескольких десятилетий развития нелинейной динамики были определены *три основных сценария перехода к хаосу*, иллюстрируемые на рис. 5.1. Причем все они имеют универсальный характер и распространяются на системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных, а также дискретными соотношениями, описывающими динамику систем.

Типичные бифуркации предельного цикла. Здесь α собственное значение в пространстве, определяемом секущей поверхностью. В типичном случае хаотический режим может

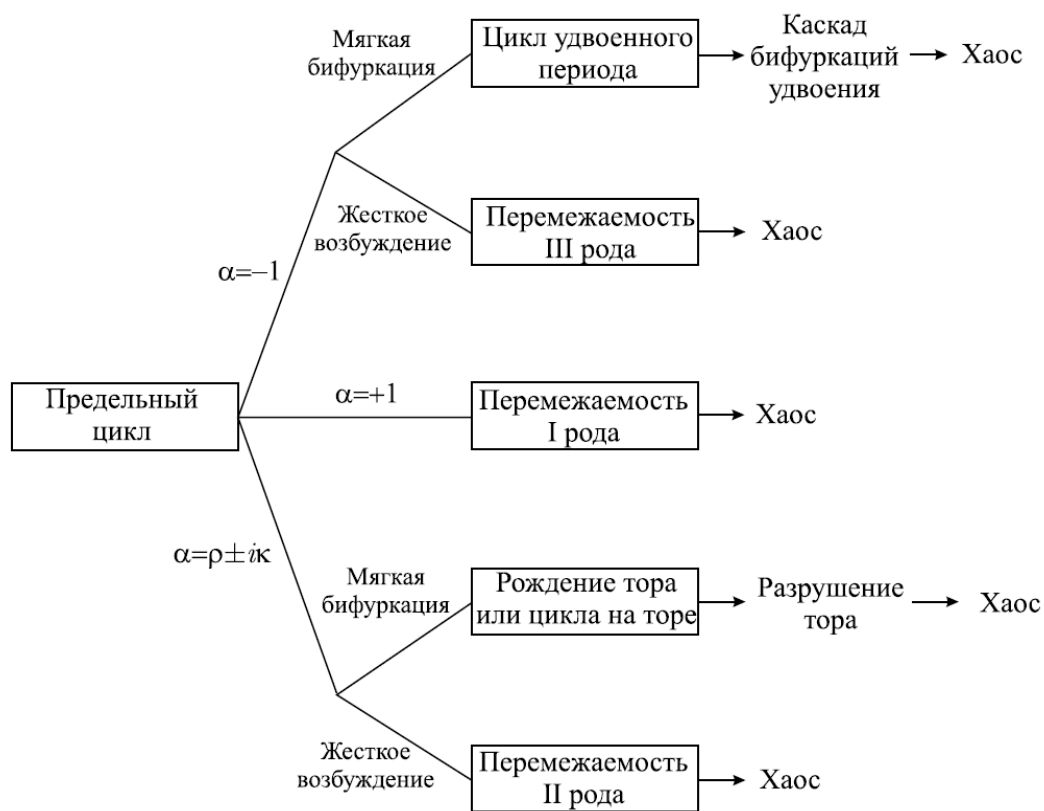


Рис. 5.1. Три основных сценария (условия) перехода к хаотическим режимам

возникать путем последовательности бифуркаций удвоения периода предельного цикла через перемежаемость или разрушение тора.

а). «Перемежаемость» или хаос Помо-Манневиля (1979 г.). Широко распространен механизм возникновения хаотических колебаний, в основе которого лежит сценарий И. Помо и П. Манневиля, связанный с переходом к хаотическому движению через перемежаемость. При таком движении всплески хаотического движения чередуются (перемежаются) с участками, на которых происходят почти периодические колебания. Типичная временная зависимость динамических переменных x_i при *переходе к хаосу через «перемежаемость»* (рис. 5.2). В

таких системах существует критический параметр μ_c причем при $\mu < \mu_c$, существуют две неподвижные точки, одна из которых устойчива а другая – не устойчива. В случае $\mu = \mu_c$ эти точки сливаются в одну точку, а при условии $\mu > \mu_c$ исчезают. Это соответствует ситуации, в которой действительное собственное значение отображения пересекает

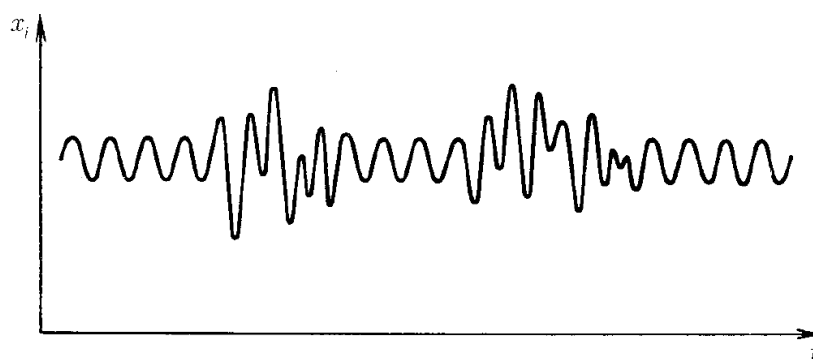


Рис. 5.2. К иллюстрации возникновения хаотических режимов

окружность в точке, равной $+1$. При этом перестройка режима движения в системе представляет собой кризис. Для того чтобы система, описываемая системой дифференциальных уравнений, могла обладать хаотическим режимом, обусловленным **странным аттрактором**, число описывающих ее динамических переменных должно быть не менее трех. Если в такой системе можно перейти к отображению Пуанкаре, то в нем фазовые траектории будут представлять собой некоторое множество точек, нерегулярным образом заполняющих области секущей поверхности. При сильном сжатии отображение Пуанкаре для многих систем оказывается близким к одномерному отображению, т. е. поведение фазовых траекторий может быть приближенно описано одномерным отображением.

Отображающая точка такого одномерного отображения долгое время принадлежит окрестности начала координат. Для

динамической системы это означает, что ее поведение будет почти периодическим. Из области с почти периодическим движением, фазовая точка переходит в другую область фазового пространства, характеризующуюся сложной динамикой. Будучи некоторое время в *пространстве со сложной динамикой*, фазовая точка «выбрасывается» из нее и вновь попадает в область фазового пространства, где происходят почти периодические колебания. При этом фазовая траектория никогда не замыкается и не уходит в бесконечность.

Описанный режим с перемежаемостью появляется путем слияния устойчивой и неустойчивой неподвижных точек (через касательную бифуркацию – **перемежаемость I рода**). Однако возможны другие варианты – одновременное пересечение двух комплексно-сопряженных собственных значений единичной окружности, порождающее **перемежаемость II рода**. При пересечении действительным собственным значением единичной окружности в точке (-1) так, что первоначально устойчивая неподвижная точка становится неустойчивой, порождает **перемежаемость III рода**. Развитие хаоса по этому сценарию наблюдалось численно и экспериментально.

Хаос Рюэля-Тakensа (1978 г.). Допустим, что в результате потери устойчивости предельным циклом в фазовом пространстве динамической системы «родился» двумерный тор.

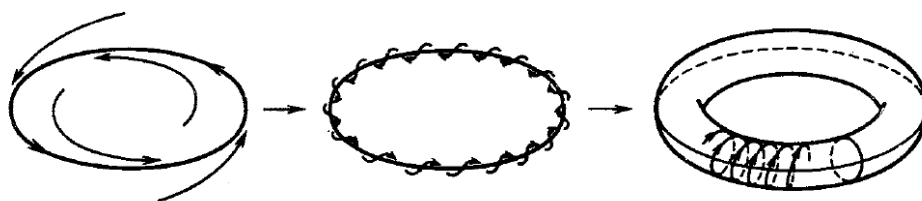


Рис. 5.3. Рождение двумерного тора из теряющего устойчивость предельного цикла

Периодический процесс теряет устойчивость и переходит в режим с двумя частотами ω_1 и ω_2 . Геометрическим образом этого движения является траектория в виде намотки на двумерном торе. Любую траекторию на поверхности тора можно рассматривать как суперпозицию двух движений: по большой окружности с частотой ω_1 и вокруг цилиндра, образующего тор, с частотой ω_2 . В случае решения с двумя частотами, аттрактором является тор T_2 . Если $(\omega_2 / \omega_1) = m / n$ – *рациональное число*, то орбиты после нескольких витков на торе замыкаются. С последующим изменением критического параметра μ , может произойти потеря его устойчивости и «рождение» трехмерного тороидального многообразия. Поведение системы будет характеризоваться тремя независимыми частотами. Дальнейшее изменение управляющего параметра, будет приводить к последовательности бифуркаций, в результате которых будут появляться инвариантные торы возрастающей размерности. Рождается устойчивый предельный цикл, т. е. исчезает квазипериодический режим и устанавливается **новый периодический цикл**. Это означает **синхронизацию** колебаний. Синхронизация – это результат взаимодействия различных периодических движений. Явление синхронизации упрощает движение и делает его периодическим. Если $(\omega_2 / \omega_1) = m / n$ – *иррациональное число*, то геометрический образ решения – незамкнутая обмотка на торе, определяющая квазипериодическое движение (рис. 5.4).

Возможен другой вариант. Следующая бифуркация добавляет еще одну частоту, что соответствует появлению тора T_3 . Если спиралей много, то это явление аналогично хаосу. Однако после трех бифуркаций появляется **странный аттрактор**: поведение перестает быть квазипериодическим и реализуется **детерминистический хаос**.

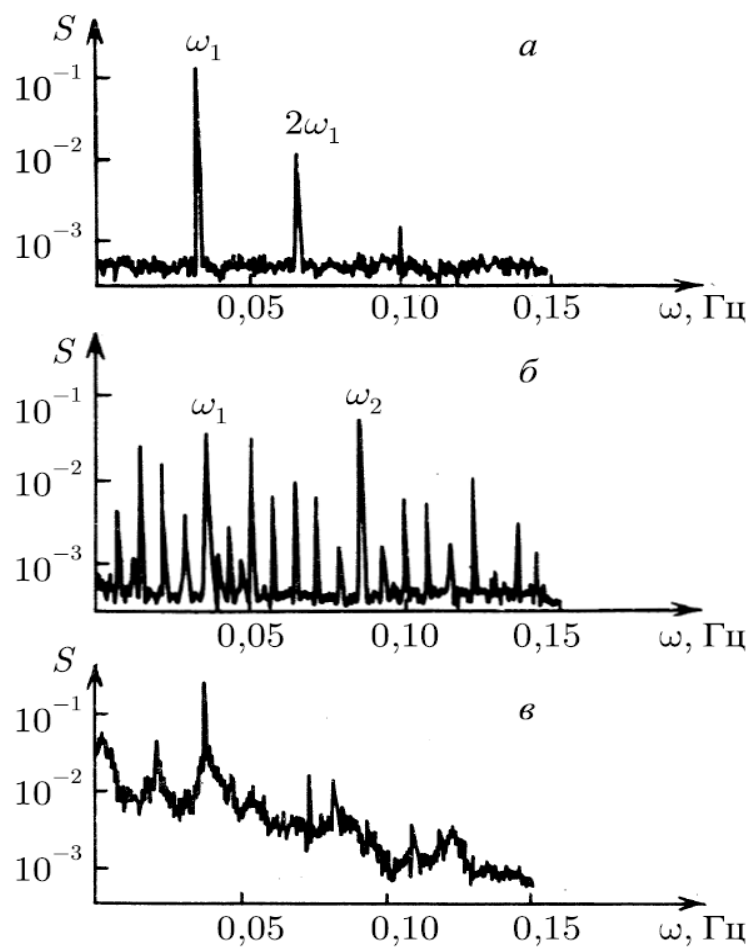


Рис. 5.4. Спектральные плотности периодического (*a*), квазипериодического двухчастотного (*б*) и хаотического режимов движений (*в*)

Удвоение периода или хаос Фейгенбаума (цепочка бифуркаций удвоения, 1977-1978 гг.). Сценарий Фейгенбаума отвечает ситуации, когда в результате потери устойчивости исходного цикла в фазовом пространстве рождается цикл удвоенного периода. При дальнейшем увеличении управляющего параметра может произойти бифуркация потери устойчивости. В результате возникает цикл «учетверенного» (по сравнению с периодом исходного цикла) периода и так далее. В частности, возможна бесконечная последовательность удвоений периодов исходных предельных циклов. Эта последовательность удвоений

происходит на конечном интервале изменения управляющего параметра, и приводит систему от устойчивого периодического движения к хаотической динамике (рис. 5.5).

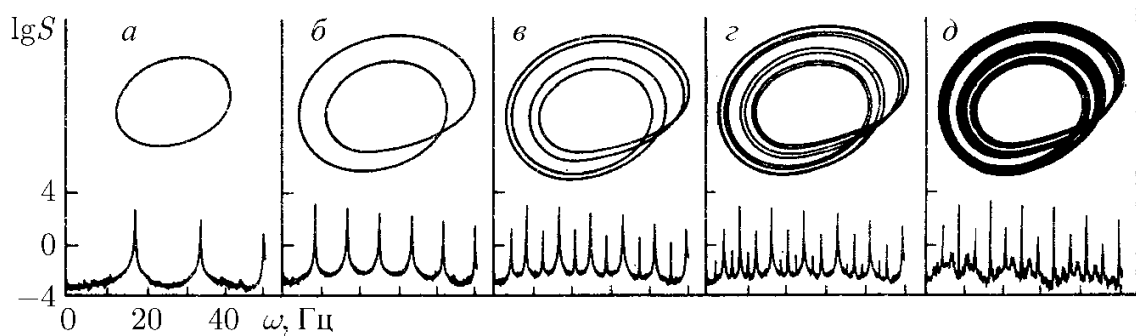


Рис. 5.5. Переход к странному аттрактору через последовательность бифуркаций удвоения предельного цикла в системе Ресслера при значениях $\mu = 2.6; 3.5; 4.1; 4.18; 4.23$ (см. [16])

Значения управляющего параметра $\mu = \mu_m$, при которых происходит очередная бифуркация удвоения, образуют сходящуюся последовательность: $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = \mu_\infty$. В случае $\mu_m = \mu_\infty$ предельный цикл достигает бесконечно большого периода, т. е. превращается в не замыкающуюся притягивающую фазовую траекторию, из которой при условии $\mu_m > \mu_\infty$ формируется *странный аттрактор*. Динамика системы в этом случае характеризуется сплошным спектром и разбеганием близких фазовых кривых. Скорость сходимости бесконечной последовательности μ_m определяется универсальной постоянной – числом Фейгенбаума:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{\mu_{m+1} - \mu_m} = \delta = 4,6692,$$

Описанному сценарию присуща универсальность: константа Фейгенбаума – δ не зависит от конкретного вида динамической

системы. Сценарий развития хаоса Фейгенбаума хорошо подтверждается численными исследованиями. Однако в реальных экспериментах и численных расчетах, где всегда имеются физические шумы или ошибки округления, бесконечную последовательность бифуркаций удвоения наблюдать не удастся. Вместо этого после нескольких бифуркаций удвоения, движение становится хаотическим.

Таким образом, рассмотренные основные примеры возникновения хаотических режимов в нелинейных динамических системах, в частности, описывающих электромагнитные процессы в ЭЭО, что позволяют выполнить анализ методов управления режимами с целью стабилизации и ликвидации негативных последствий в энергетических системах.

5.2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

За последнее время обнаружен класс реальных систем, поведение которых в той или иной степени может быть объяснено с привлечением описанных выше механизмов хаотического движения. Механизм возникновения хаотических процессов имеет место в распределенной модели реактора при слабом изменении пространственной формы распределения нейтронного поля.

1. Характеристики методов исследования хаотических режимов. В работе [18], являющейся только одной, хотя и достаточно типичной работой по данной тематике, рассмотрен механизм возбуждения хаотических колебаний в ЭЭО при вариациях параметров линии передачи. Данный эффект был обнаружен также в 30-е годы и отмечен в книге профессора Ленинградского политехнического института А. А. Горева,

однако каких либо реальных мер противодействия возникающим колебаниям предложено не было. Борьба с подобными режимами ограничилась нормированием длин линий передачи, применением конкретных схем расположения проводников, увеличения мощности генераторов и другими мерами.

В дальнейшем будут рассматриваться непрерывные, автономные динамические системы, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$x' = F(x, u), \quad (1)$$

поскольку неавтономные системы приводятся к указанному виду путем искусственного введения новой переменной, скорость изменения которой равна 1. В уравнении (1) $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазовых координат, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор свободных параметров системы или управлений, в том случае, когда рассматривается управляемая система. С целью выявления неочевидных особенностей поведения систем типа (1) можно определить следующие свойства:

1). **Диссипативность системы**, оценивается функцией

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i,$$

где $F(x)$ определяет правые части системы дифференциальных уравнений (1), описывающих данную динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Для консервативных систем дивергенция нулевая, для диссипативных систем – отрицательная.

2). **Неподвижные точки** динамической системы определяются как решения уравнения $F(x)=0$. При этом каждая из неподвижных точек в линейном приближении может быть как устойчива, так и нет. Для поиска стационарных точек

нелинейных систем вида (1) применяется метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Этот метод для задач определения стационарных точек нелинейной системы вида (1). Если правые части (1) непрерывны и непрерывно дифференцируемые функции не менее одного раза, то можно разложить правую часть в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки x_k . Тогда:

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \dots,$$

где учтены слагаемые нулевой и первой степени. В приведенной формуле $F(x_k)$ – матрица, элементы которой стоящие на пересечении i -го столбца и j -й строки представляют собой производные $\partial F_i(x_0)/\partial x_j$. Для вычисления следующего приближения $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ к стационарной точке, необходимо решить линейную систему уравнений относительно приращения $(x_{k+1} - x_k)$:

$$F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k),$$

$k \in \mathbb{N}$ меняется от 0 до значения, при котором норма $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon^2$. Этот итерационный процесс метода Ньютона сходится, при определенных условиях, причем при определенном выборе параметров метод можно достичь различной степени сходимости.

3). Для оценки устойчивости или неустойчивости необходимо линеаризовать систему вблизи неподвижной точки, то есть вычислить матрицу Якоби

$$A = \partial F(x) / \partial x \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Для вычисления элементов матрицы Якоби можно использовать формулу центральной разности:

$$a_{ij} = \frac{df_i(x)}{dx_j} = \frac{f_i(x + \Delta x_j e_j) - f_i(x - \Delta x_j e_j)}{2\Delta x_j} + O(\Delta x_j^2)$$

где Δx_j – приращение по j -й координате, e_j – единичный вектор, направленный вдоль j -й координаты. Можно показать, что

$$O(\Delta x_j^2) = -\frac{\Delta x_j^2}{6} f''(x) + \dots$$

Ошибка вычисления по приведенной выше формуле состоит из двух компонент – методической, обусловленной неточностью формулы и вычислительной, обусловленной неточностью вычислений по формуле. С уменьшением приращения методическая составляющая снижается, но растет вычислительная составляющая. Обычно используют приращения величиной 10^{-3} - 10^{-4} . По собственным значениям матрицы A можно анализировать устойчивость соответствующих неподвижных точек.

4). Показатель Ляпунова для рассматриваемой системы может быть определен как верхний предел:

$$\lambda_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \|x(T)/T\|,$$

где $\|x(T)/T\|$ – одна из норм конечномерного пространства, поскольку в этом пространстве нормы являются эквивалентными.

Для определения спектра Ляпунова обычно используют алгоритм Бенеттина или его очевидные обобщения. Рассмотрим этот алгоритм для случая трехмерного фазового пространства. Путь r_0 – некоторая точка аттрактора системы (1). Зафиксируем небольшое (по сравнению с линейными размерами аттрактора) положительное число ε и выберем возмущения точки (x_0, y_0, z_0) так, чтобы векторы возмущений:

$$\Delta x_0 = x_0 + r_0, \quad \Delta y_0 = y_0 + r_0, \quad \Delta z_0 = z_0 + r_0,$$

имели длину ε и были взаимно ортогональны. После некоторого небольшого промежутка времени T , точка (x_0, y_0, z_0) эволюционирует в точку (x_1, y_1, z_1) , что иллюстрируется на рис. 5.6.

Рассмотрим новые векторы возмущений:

$$\Delta x_1 = x_1 + r_1, \quad \Delta y_1 = y_1 + r_1, \quad \Delta z_1 = z_1 + r_1,$$

Выполнив ортогонализацию и нормировку этой системы векторов по методу Грамма-Шмидта, можно получить следующие

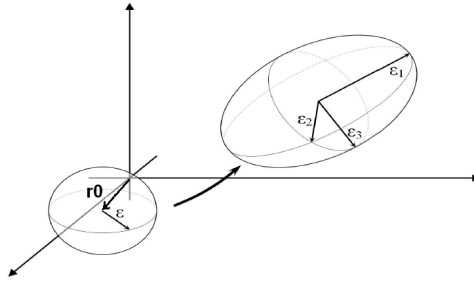


Рис. 5.6. Эволюция фазового объема в трехмерном случае

соотношения:

$$\Delta x'_1 = \Delta x_1, \quad \Delta x''_1 = \Delta x'_1 / \|\Delta x'_1\|,$$

$$\Delta y'_1 = \Delta y_1 - (\Delta y_1, \Delta x''_1) \Delta x''_1, \quad \Delta y''_1 = \Delta y'_1 / \|\Delta y'_1\|,$$

$$\Delta z'_1 = \Delta z_1 - (\Delta z_1, \Delta x''_1) \Delta x''_1 - (\Delta z_1, \Delta y''_1) \Delta y''_1, \quad \Delta z''_1 = \Delta z'_1 / \|\Delta z'_1\|.$$

После ортогонализации и нормировки полученные векторы возмущения будут взаимно ортонормированными, т. е. ортогональными и иметь единичную длину. Выполним линейное

преобразование длин этих векторов так, чтобы длины были равны ε . Тогда система ортонормированных векторов, имеющих длину ε , будет иметь вид:

$$\Delta x_1''' = \Delta x_1'' \varepsilon, \quad \Delta y_1''' = \Delta y_1'' \varepsilon, \quad \Delta z_1''' = \Delta z_1'' \varepsilon.$$

В результате можно получить новую возмущенную точку:

$$x_1' = x_1 + \Delta x_1''', \quad y_1' = y_1 + \Delta y_1''', \quad z_1' = z_1 + \Delta z_1''',$$

Далее итерационный процесс вычислений повторяется, однако вместо вектора (x_0, y_0, z_0) используется вектор (x_1', y_1', z_1') . Повторив эту процедуру M раз можно вычислить суммы:

$$S_1 = \sum_{k=1}^M \ln \|\Delta x_k'\|, \quad S_2 = \sum_{k=1}^M \ln \|\Delta y_k'\|, \quad S_3 = \sum_{k=1}^M \ln \|\Delta z_k'\|,$$

Используя эти суммы, можно вычислить спектр Ляпунова $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, определяемый следующими равенствами

$$\lambda_i = S_i / MT, \quad i = 1, 2, 3.$$

В данном методе требуется правильно выбирать временной промежуток T . Если он является большим, то все возмущенные траектории будут отклоняться в направлении, соответствующему максимальному показателю Ляпунова и результаты усреднения будут искажены.

Свойства притягивающего множества можно сформулировать в виде утверждений:

5). Сумма всех N показателей Ляпунова (спектр ляпуновских показателей) должна быть отрицательна.

6). Аттрактору, отличному от неподвижной точки, обязательно должен соответствовать хотя бы один нулевой показатель

7). Для размерностей фазового пространства $N=1, 2$ и 3

возможны различные сочетания знаков ляпуновских показателей, приведенные в табл. 5.2.

8). Для больших размерностей фазового пространства возможны более сложные сочетания показателей Ляпунова. Например, вместе со странным аттрактором с сигнатурой $\langle +, 0, -, - \rangle$ возможна ситуация *гиперхаоса*, когда имеется два положительных показателя: $\langle +, +, 0, - \rangle$. Естественно, что с ростом размерности фазового пространства количество видов аттракторов растет экспоненциально.

9). Численное построение спектра показателей Ляпунова осуществляется с помощью алгоритма Бенеттина. При этом естественно имеется в виду конкретный аттрактор, относительно которого изучается поведение траекторий.

10). Для диагностики сложных динамических режимов может быть использован ряд методов:

Таблица 5.2

**Характер предельного цикла в зависимости
от сигнатуры показателей Ляпунова**

Порядок системы	Варианты сочетания знаков	Типы аттракторов
1	$\langle - \rangle$	Неподвижная точка
2	$\langle - \rangle, \langle - \rangle$ $\langle 0 \rangle, \langle - \rangle$	Устойчивая неподвижная точка Предельный цикл
3	$\langle - \rangle, \langle - \rangle, \langle - \rangle$ $\langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \langle - \rangle$ $\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle, \langle - \rangle$ $\langle + \rangle, \langle 0 \rangle, \langle - \rangle$	Притягивающая неподвижная точка Предельный цикл Двумерный тор Странный аттрактор

а). *Метод сечений Пуанкаре*, причем в сечении Пуанкаре хаотический режим проявляется в плотно заполненных областях, в которых фазовая траектория пересекает плоскость сечения.

б). *Спектральный метод*, использующий *спектральный анализ траектории*, поскольку спектр динамической системы в хаотическом режиме должен быть практически непрерывным.

в). *Автокорреляционный метод*, основанный на вычислении автокорреляционной функции для фазовых переменных. *Критерием хаотичности* может быть быстрое убывание автокорреляционной функции динамической системы, поскольку в хаотических режимах имеет место эффект слабой зависимости последующих и предыдущих значений.

Необходимо отметить, что если для анализа малых отклонений от стационарных режимов эффективно применяется анализ по первому приближению, восходящий к известной работе А. М. Ляпунова, то для оценки устойчивости систем с периодическими правыми частями эффективно применяется методы теории систем с периодическими правыми частями, принадлежащий Флоке. Для анализа траекторий системы в целом в настоящее время используется метод построения спектра показателей Ляпунова.

2. Практическое использование явления детерминированного хаоса. Можно отметить несколько направлений практического использования явлений детерминированного хаоса при решении технических задач. Основой применения является тот факт, что хаотическая динамика представляет собой движение в некотором ограниченном объеме фазового пространства, то возникает вопрос о возможностях улучшения динамических режимов технических объектов или систем путем создания хаотического

режима с желаемыми характеристиками. При этом естественная динамика объекта или системы должна трансформироваться в хаотический режим, который по ряду причин и может быть более приемлемым, чем естественная динамика.

Эффект нерегулярности траектории может быть использован, например, для снижения средних по времени характеристик средней рассеиваемой мощности. Таким способом можно ограничивать амплитуду автоколебаний в системе, которой такие автоколебания присущи путем создания нелинейной обратной связи с минимальными усилиями в силу чувствительности процесса к изменению параметров динамической системы, описывающей технологический процесс. Эта процедура не должна вызывать теоретических проблем, поскольку представляет собой задачу управления при наличии достаточных ресурсов. Однако хаотические режимы имеют особенность поведения, связанную с их плохой предсказуемостью. Кроме этого, линейные модели применимы в весьма ограниченной сфере, что резко ограничивает спектр методов управления.

Впервые постановка аналогичной задачи была дана в работе [21], использовавшей сценарий создания хаоса для системы Лурье с монотонной нечетной нелинейностью в обратной связи. Сущность подхода состоит в выборе полюсов $s_1, s_2, \dots, s_n$ и нулей $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ передаточной функции линейной части так, чтобы линейная система, замкнутая обратной связью $u = ku$ обладала при всех $k: 0 < k < \infty$ следующими свойствами:

- частичной неустойчивостью, т. е. наличием полюсов с положительными и отрицательными вещественными частями;
- гиперболичностью, т. е. отсутствием полюсов на мнимой оси;

- диссипацией, когда сумма вещественных частей полюсов отрицательна;

- непотенциальностью, когда имеются полюса с ненулевой мнимой частью.

При этом наличие хаоса устанавливается по теореме Шильникова.

Теорема (Шильников, 1965). Пусть поток Φ_t в $\mathbb{R}^3$ имеет в начале координат положение равновесия, для которого одно из собственных значений вещественно и положительно, а два других собственных значения ω и $\bar{\omega}$ - комплексно сопряжены и имеют отрицательные действительные части. При этом, если $|\operatorname{Re}(\omega)| < \lambda$, то поток Φ_t допускает такое возмущение $\underline{\Phi}_t$, которое обладает гомоклинической орбитой $\underline{\gamma}$ вблизи γ , а отображение возврата для $\underline{\gamma}$ вблизи $\underline{\Phi}_t$ имеет счетное множество подходов.

1. Линеаризация отображения Пуанкаре (OGY метод). Возможность преобразования хаотического движения в периодическое за счет внешнего воздействия на систему была обнаружена в середине 1980-х годов. Однако появление интереса к управлению хаотическими системами произошло позже, после публикации, где предложены две основные идеи:

- использование при синтезе регулятора дискретной системы некоторой модели, основанной на *линеаризации отображения Пуанкаре*.

- использование свойства *рекуррентности хаотических траекторий* и применение управляющего воздействия только в такие моменты времени, когда траектория возвращается в некоторую окрестность требуемого состояния или заданной орбиты.

Сущность данного метода состоит в следующем. Пусть

управляемый процесс описывается уравнением (1) и выполнены условия: $\dim x = n$, $\dim u = 1$. Пусть требуемая (целевая) траектория системы $x^*(t)$ является решением (1) при $u(t) \equiv 0$. Эта траектория может быть периодичной или хаотичной, однако в обоих случаях она рекуррентна. Построим сечение Пуанкаре

$$S = \{x \mid s(x) = 0\}. \quad (2)$$

проходящее через заданную точку $x(0) = x^*(0)$ трансверсально к траектории $x^*(t)$ и рассмотрим отображение $x \rightarrow P(x, u)$, в котором $P(x, u)$ – точка первого возвращения на поверхность S решения (1), начинающегося в точке x и полученного при постоянном управлении u . Это отображение называется **управляемым отображением Пуанкаре**, которое определено в силу свойства рекуррентности $x^*(t)$, по крайней мере, для некоторой окрестности точки $x(0)$. Рассматривая последовательность таких отображений, можно получить дискретную систему

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k)$$

где $x_k = x(t_k)$, причем t_k – момент времени для k -го пересечения поверхности S , а u_k – значение управления на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$.

Следующий шаг формирования алгоритма управления состоит в замене исходной системы (1) линеаризованной дискретной системой

$$\ddot{x}_{k+1} = A\ddot{x}_k + Bu_k$$

где $\ddot{x}_k = x_k - x_0$. Для рассматриваемой системы стабилизирующее

управление формируется, например, в виде обратной связи по состоянию: $u_k = C\ddot{x}_k$. Тогда алгоритм управления примет вид:

$$u_k = \begin{cases} C \dot{x}_k, & ||\dot{x}_k|| \leq \Delta, \\ 0, & ||\dot{x}_k|| > \Delta, \end{cases}$$

в котором $\Delta > 0$ некоторый достаточно малый параметр. Сущность метода состоит в том, что управление воздействует только в некоторой (малой) окрестности целевой траектории, т. е. в закон кусочно-постоянного управления вводится «внешняя зона нечувствительности». Этим достигается «малость» управляющего воздействия. Для того, чтобы гарантировать работоспособность метода, следует выбирать параметры регулятора (т. е. матрицу C) таким образом, чтобы норма ошибки $||\ddot{x}_k||$ в линейной замкнутой системе убывала: $||(A + BC)x|| \leq \rho ||x||$, где $\rho < 1$. Тогда однажды при входе в Δ -окрестность целевой траектории, замкнутая система будет принадлежать ей в силу свойства рекуррентности.

2. Обратная связь с запаздыванием (метод Пирагаса).

Метод предложен в 1992 году в процессе решения задачи стабилизации неустойчивой τ -периодической орбиты нелинейной системы вида (1) с помощью закона обратной связи

$$u(t) = K(x(t) - x(t - \tau)) \quad (3)$$

где K – коэффициент передачи, а τ – время запаздывания. Если τ равен периоду существующего периодического решения $\underline{x}(t)$ уравнения (1), то при $u = 0$ и решении $x(t)$ уравнения замкнутой системы (1)-(3), начинающегося на орбите $\Gamma = \{x(t)\}$, остается на этой орбите для всех $t \geq 0$. Оказывается, что $x(t)$ может сходиться к Γ , если начальная точка траектории не находится на Γ . Аналитическое исследование алгоритма управления, предложенного Пирагасом, требует преодоления ряда математических трудностей.

Математические методы анализа определены в леммах С. С. Пью и Д. В. Амосова, требующих введения ряда определений.

Определение 1. Замкнутое множество $\Omega \in \mathbb{R}^N$ называется *аттрактором системы* (1) если выполнены условия:

1). Существует подмножество $\Omega_0 \in \Omega$, открытое и такое, что все траектории $x(t)$ системы (1), начинающиеся в $\Omega_0 \in \Omega$ определены для всех $t > t_0$ стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$.

2). Никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение 2. *Аттрактор называется хаотическим*, если он ограничен и любая начинающаяся на нем траектория неустойчива по Ляпунову.

Определение 3. Система называется *хаотической системой*, если ее уравнения описывают не менее одного *хаотического аттрактора*.

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью от начальных условий», полагающей, что любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние. Для управления существенное значение имеет свойство траекторий, называемое «рекуррентностью», когда со временем эти траектории попадают в сколь угодно малую окрестность своего положения в прошлом.

Определение 4. Функция $x(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *рекуррентной функцией*, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $T_\varepsilon > 0$, что для любого $t \geq 0$ имеется такое $T(t, \varepsilon)$, что при условии $0 < T(t, \varepsilon) < T_\varepsilon$ выполнено неравенство: $\|x[t + T(t, \varepsilon)] - x(t)\| < \varepsilon$.

Такие траектории обладают двумя свойствами, сформулированными в леммах С. С. Пью и Д. В. Аносова.

Лемма 1 (С. С. Пью). Пусть $\underline{x}(t)$, $t > 0$, рекуррентная траектория системы (1), имеющей гладкую правую часть $F(x)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая гладкая функция $\Phi(x)$, что $\|\Phi(x)\|_\infty + \|D\Phi(x)\|_\infty < \varepsilon$ и $x(t)$ – решение системы

$$x' = F(x) + \Phi(x), \quad (4)$$

с тем же начальным условием $x(0) = \underline{x}(0)$ является периодическим.

Лемма 2 (Д. В. Аносов). Пусть $\underline{x}(t)$, $t \geq 0$ – *рекуррентная траектория системы* (1) с гладкой правой частью $F(x)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое x^* , что $\|x^* - x(t)\| < \varepsilon$ и решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x^* = x(0)$ является *периодическим решением*.

Эти леммы показывают, что хаотический аттрактор является замыканием всех содержащихся в нем периодических траекторий, что следует из сформулированного в 1927 году Биркгофом следующего критерия рекуррентности.

Теорема (Биркгоф). Любая траектория, принадлежащая компактному минимальному инвариантному множеству, является *рекуррентной траекторией*. Любое компактное инвариантное минимальное множество является замыканием некоторой рекуррентной траектории.

Из теоремы Биркгофа следует, что любое решение, начинающееся из своего ω -предельного множества является рекуррентным решением. При выполнении дополнительного предположения о том, что *ω -предельное множество* $\underline{x}(t)$, $t \geq 0$, является *аттрактором*, следует, что любая хаотическая траектория, начинающаяся в его ω -предельном множестве рекуррентна и, следовательно, может быть приведена к периодической траектории путем возмущения правой части

системы (1) или изменения начальных условий внутри малой окрестности хаотического режима.

Таким образом, выполнен анализ моделей хаотической динамики пяти динамических систем, являющихся классическими примеров систем, к числу которых относятся ЭЭО. Для этих объектов и их моделей по единой методике можно анализировать процессы, фазовые портреты и спектры мощности. Эти методы могут применяться для анализа нелинейных динамических систем, к которым относятся ЭЭО. В частности, показано, что уравнения электромагнитных процессов ЭЭО обладают свойствами билинейности правых частей. Эти свойства, создающие изменяющиеся по знаку обратные связи, имеют корректно объяснимые условия возникновения хаотических режимов в системах типа Лоренца.

5.3. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ЭНЕРГООБЪЕДИНЕНИЙ

Как показано выше, электромагнитные процессы ЭЭО имеют общность с уравнениями Лоренца, в которых могут возникать хаотические режимы при определенных значениях параметров. Можно определить конкретные значения параметров ЭЭО, при которых также возникают хаотические режимы, которые представляют опасность энергетической безопасности. Поэтому далее приводится исследование этих особенностей динамики.

1. Структура исследуемой системы математические модели ее элементов. Для построения математической модели ЭЭС мы будем ориентироваться на топологию сети, приведенную на рис. 5.7 (соответствующая IEEE second benchmark model-System-1).

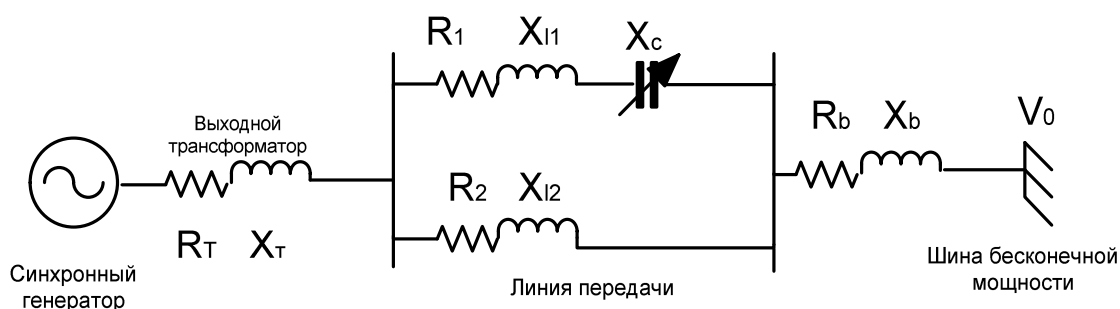


Рис. 5.7. Схема сети энергообъединения

Кроме топологии сети, на функционирование ЭЭО существенное влияние оказывает система автоматического управления напряжением (САУН) и частотой-мощностью (САУ ЧМ) (AVR and PSS), обеспечивающие постоянство напряжения на выходных клеммах синхронного генератора и стабилизацию частоты его вращения. Схема рассматриваемой системы представлена на рис. 5.8.

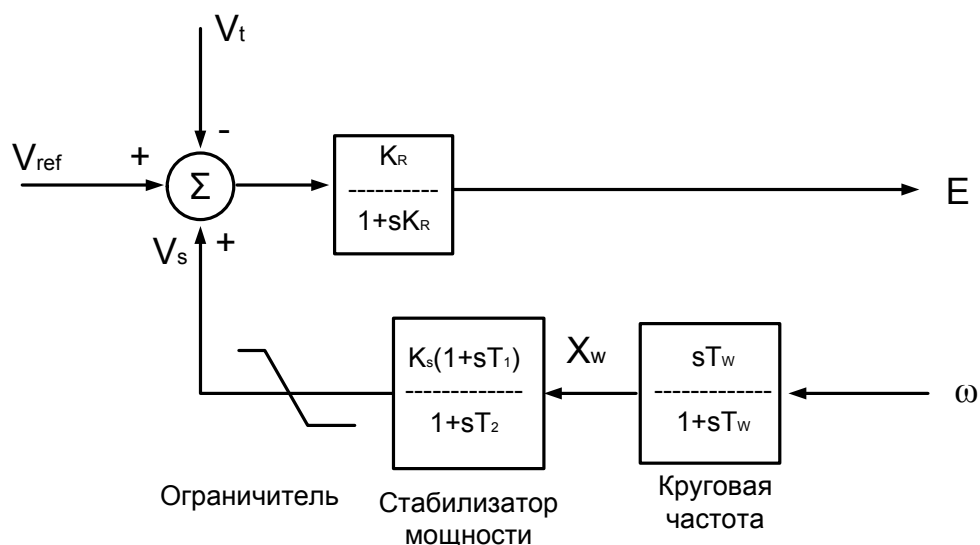


Рис. 5.8. Структура регулятора напряжения и стабилизатора мощности синхронного генератора

Предполагаются заданными управляющие параметры, определяющие динамические характеристики изучаемой

системы. К ним относятся: степень компенсации индуктивности μ , T_m – механический вращающий момент (мощность, подводимая к системе, E_{fd} – напряжение возбуждения, V_0 – уровень напряжения сети). При обсуждении результатов исследования значения параметров будут уточнены.

Схема синхронного генератора, на основании которой получены используемые далее уравнения токов и других координат системы, дана на рис. 5.9. Приведенные предварительные сведения позволяют рассматривать математические модели для исследования условий возникновения хаотических режимов.

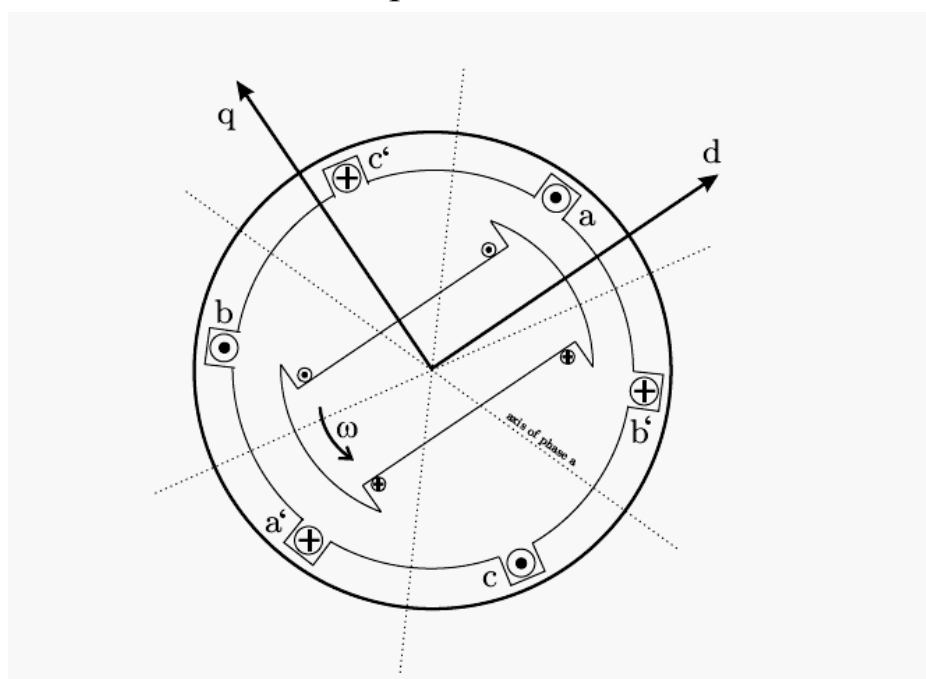


Рис. 5.9. Схема перехода от 3-х фазных токов к двухтоковой системе

2. Математическую модель токов генератора в переменных, приведенных к d-q осям. Соответствующие уравнения можно записать в виде следующей системы дифференциальных уравнений электромагнитных процессов энергетической системы:

$$-(X_d + X_e) i'_d + X_{afd} i'_f + X_{akd} i'_{kd} = \omega_0 ((r_a + R_e) i_d - (X_e + \omega X_q) i_q + \omega X_{akd} i_{kq} + V_0 \sin(\delta) + v_{cd}), \quad (1)$$

$$-(X_q + X_e) i'_q + X_{akd} i'_{kq} = \omega_0 (V_0 \cos(\delta) + v_{cq}), \quad (2)$$

$$-X_{afd} i'_d + X_{ffd} i'_f + X_{fkd} i'_{kd} = -\omega_0 (r_{fd} i_f - r_{fd} \frac{E_{fd}}{X_{afd}}), \quad (3)$$

$$-X_{akd} i'_d + X_{kkd} i'_{kq} = -\omega_0 r_{kq} i_{kq}, \quad (4)$$

$$-X_{akd} i'_d + X_{fkq} i'_f + X_{kkd} i'_{kd} = -\omega_0 r_{kq} i_{kd}, \quad (5)$$

$$V_q = -R_a i_q - X_d i_d + X_{afd} i_{fd}.$$

В уравнениях (1)-(5) использованы следующие обозначения: токи, циркулирующие в синхронном генераторе как фазовые координаты

$$i_d, i_q, i_f, i_{kq}, i_{kd}$$

— два фазных тока, ток в обмотке возбуждения и два тока в демпферных обмотках.

В уравнениях использованы следующие обозначения параметров:

$$k = \frac{\sqrt{(R_2^2 + X_{l2}^2)}}{\sqrt{((R_1 + R_2)^2 + (X_{l1} + X_{l2} - \mu X_{l1})^2)}},$$

$$X_e = X_t + kX_{l1} + X_b, \quad R_e = R_t + kR_{l1} + R_b, \quad \mu = X_c / X_{l1}.$$

а. Уравнения линий передач для фазовых координат v_{cq}, v_{cd} :

$$v'_{cd} = \omega_0 (\mu k X_{ll} i_d + v_{cq}), \quad (6)$$

$$v'_{cq} = \omega_0 (\mu k X_{ll} i_q - v_{cd}). \quad (7)$$

б. Механическая часть ЭЭО, соответствующая генератору, связывает фазовые координаты δ , ω – угол скольжения генератора и круговая частота вращения:

$$\delta' = \omega_0 (\omega - 1), \quad (8)$$

$$M_3 \omega' = D_3 (1 - \omega) + K_{34} (E - \delta) - K_{23} \delta + T_m - T_e, \quad (9)$$

причем параметр

$$T_e = (X_q - X_d) i_d i_q + X_{afd} i_f i_q - X_{akq} i_{kq} i_d + X_{akd} i_{kd} i_q$$

в. Автоматические регуляторы напряжения и мощности, описываются дифференциальными уравнениями, связывающими фазовые координаты X_w , V_s , E :

$$T_w \left(\frac{dX_w}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \right) = -X_w, \quad (10)$$

$$T_2 \frac{dV_s}{dt} - T_1 K_s \frac{dX_w}{dt} = K_s X_w - V_s, \quad (11)$$

$$T_r \frac{dE}{dt} = K_r (V_{ref} + V_s - V_t) - E, \quad (12)$$

где координаты и параметры имеют следующий вид:

$$V_t = \sqrt{(V_d^2 + V_q^2)}, \quad V_d = -R_a i_d + X_q i_q,$$

$$V_q = -R_a i_q - X_d i_d + X_{afd} i_{fd}.$$

3. Результаты моделирования хаотических режимов. Для моделирования были использованы приведенные в [6] данные для тестового ЭЭО в относительных единицах. При этом:

1). Параметры синхронного генератора равны: $X_d = 1.6500$,
 $X_q = 1.5900$, $X_{akd} = 1.5100$, $X_{akq} = 1.4500$, $X_{kkd} = 1.6420$,
 $X_{kkq} = 1.5238$, $X_{ffd} = 1.6286$, $X_{afd} = 1.5100$, $X_{fkd} = 1.5100$,
 $r_a = 0.0045$, $r_{fd} = 0.00096$, $r_{kd} = 0.0160$, $r_{kq} = 0.0116$.

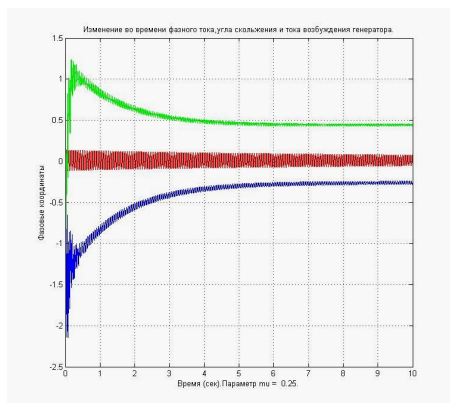
2). Параметры электрической сети: $X_t = 0.1200$, $X_{l1} = 0.4800$,
 $X_b = 0.1800$, $R_b = 0.0084$, $R_t = 0.0012$, $R_{l1} = 0.0444$, $R_{l2} = 0.0402$,
 $X_{l2} = 0.4434$.

3). Параметры механической системы: $M_3 = 1.7581$,
 $D_3 = 0.1758$, $K_{23} = 83.3823$, $K_{34} = 3.7363$.

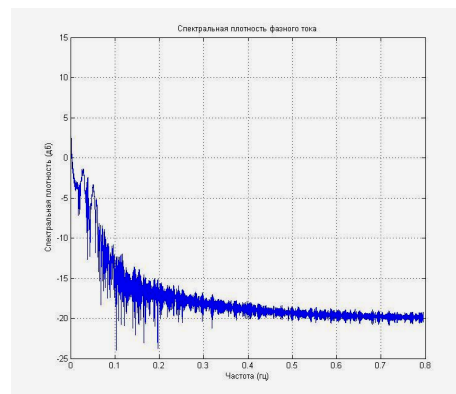
4). Параметры системы САУН и САУ ЧМ: $K_r = 2$, $T_r = 0.01$,
 $T_w = 1/K_s = 0.2$, $T_1 = 0.05$, $T_2 = 0.02$.

В процессе моделирования динамического поведения описанной системы изучалось влияние параметра компенсации μ на характер переходных процессов. Был выполнен анализ динамического поведения системы при различных значениях этого параметра.

Результаты исследований переходных процессов в рассматриваемой системе совместного управления напряжением, частотой и мощностью по исследуемым координатам: по фазному току, углу скольжения генератора и току возбуждения а) и спектральная плотность фазного тока б) приведены на рис. 5.10-5.12.

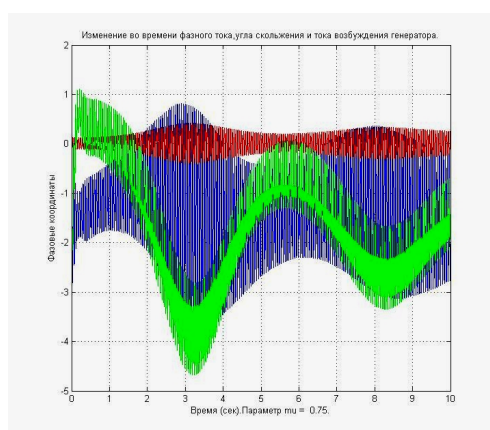


а)

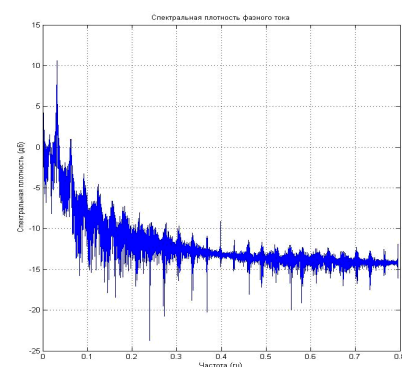


б)

Рис. 5.10. Переходные процессы фазного тока, угла скольжения генератора и тока возбуждения а) и спектральная плотность фазного тока б) при $\mu = 0.25$

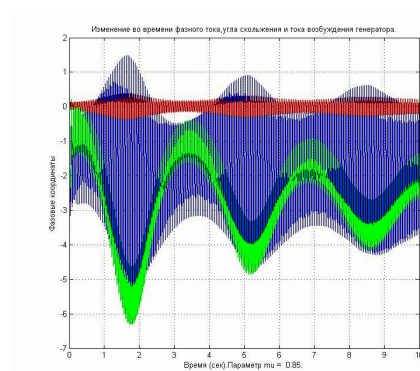


а)

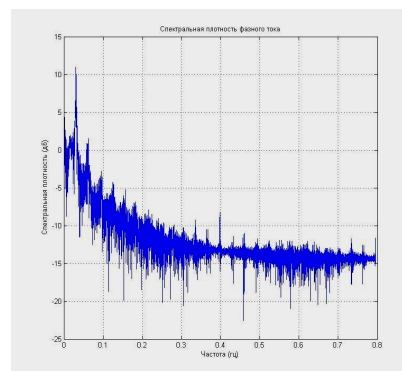


б)

Рис. 5.11. Переходные процессы фазного тока, угла скольжения генератора и тока возбуждения (а) и спектральная плотность фазного тока (б) при $\mu = 0.75$



а)



б)

Рис. 5.12. Переходные процессы фазного тока, угла скольжения генератора, тока возбуждения (а) и спектральная плотность фазного тока (б) при $\mu = 0.95$

Очевидна эволюция характера изменения переходных процессов в системе с ростом μ , все меньшая их упорядоченность, что проявляется, в частности, в изменении спектральной плотности.

4. Анализ результатов. Причины описанного в предыдущем разделе эффекта иллюстрируются на рис. 5.13, на котором приведен график эволюции вещественной части максимального собственного значения $\text{Re } \lambda_{\max}$ линеаризованной модели ЭЭС при изменении параметра μ в пределах от 0.2 до 1.2.

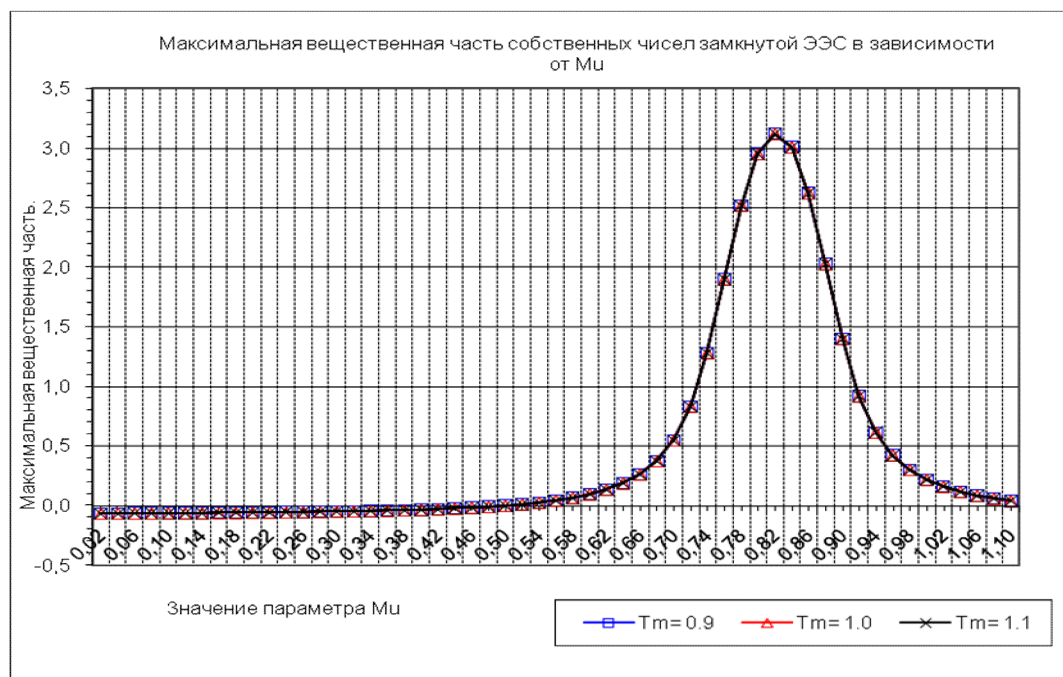


Рис. 5.13. Изменение вещественной части максимального собственного значения $\text{Re } \lambda_{\max}$ линеаризованных уравнений ЭЭС в окрестности соответствующей стационарной точки

Из анализа данных следует, что в районе $\mu \in [0.55, 0.65]$ вещественная часть $\text{Re } \lambda_{\max}$ становится положительной (имеет место бифуркация Андронова-Хопфа). Быстрый рост и достижение максимума $\text{Re } \lambda_{\max}$ имеет место в интервале значения $\mu \in [0.82, 0.86]$, а затем снижается до отрицательных значений.

Этот эффект и обуславливает возникновение описанной в работе хаотичность в поведении системы. При этом зависимость величины максимального собственного значения $\text{Re } \lambda_{\max}$ от других параметров, определяющих поведение системы (например, подведенной к генератору мощности T_m) незначительно.

На рис. 5.14 приведены графики, характеризующие изменения собственных значений линеаризованной модели ЭЭС при T_m , изменяющихся в пределах 0.9-1.1. Различить их практически невозможно, ввиду их близости.

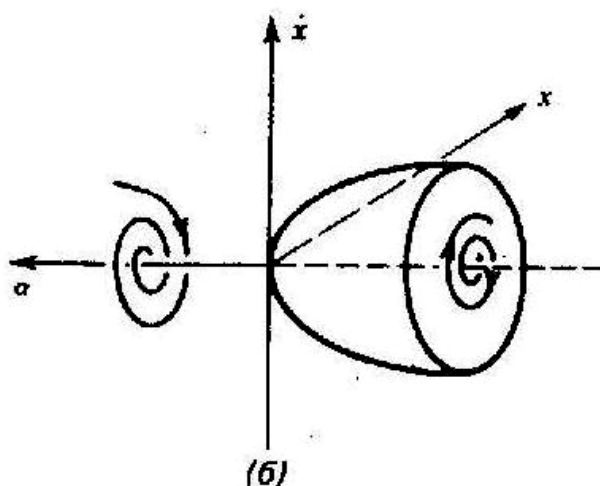


Рис. 5.14. Качественная картина траекторий при наступлении бифуркации Андронова-Хопфа

На рис. 5.14 приведена схема бифуркации Андронова-Хопфа при переходе критического параметра (в нашем случае это μ) через точку бифуркации, меняющую качественное поведение траекторий системы.

Приведенные в работе материалы, свидетельствуют о том, что в ЭЭО могут возникать хаотические режимы поведения при определенных значениях параметров входящих в них подсистем. Эти явления, отмеченные с начала 70-х годов, стали причиной серии аварий, возникших на сильно нагруженных энергосетях

западного побережья США. Эта проблема становится все более актуальными для нашего времени, в связи с ростом сложности и нагрузки ЭЭО. Для решения подобных задач могут применяться следующие активные методы:

- изменения конструкций и параметров элементов ЭЭО с вводом различных компенсирующих устройств, а также пассивные методы, состоящие в отключении части сегментов системы передачи, до стабилизации процессов в ЭЭО;

- идентификация качественных причин возникновения хаотических режимов в ЭЭО (и других объектах) в связи с очевидным, но недостаточно используемым изменением типа обратной связи для систем дифференциальных уравнений с билинейными правыми частями, приводящими к нерегулярной обратной связи и нерегулярной динамике.

К активным методам также относится метод, предполагающий расширение зоны работоспособности ЭЭО путем организации диагностики процессов, происходящих в ней, и формирование управлений для различных внутренних процессов генерации энергии, оказывающих влияние на общие свойства ЭЭО как динамической управляемой системы.

В настоящее время опыт организации управления ЭЭО как динамическими системами управления, функционирующими в различных режимах, не гарантируется энергетическая безопасность, связанная с таким фактором как возникновение хаотических режимов. Для этого необходима разработка целостной системы предупреждения и устранения негативных явлений подобного рода. Проблема не только актуальна сейчас, но и становится все более актуальной со временем в условиях рынка энергоресурсов и усложнения топологии сетей генерации и передачи энергии и увеличением нагрузки на элементы ЭЭО.

6. МЕТОДЫ ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ ПО ЛИНИЯМ В МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТОЙ И АКТИВНОЙ МОЩНОСТЬЮ ЭНЕРГООБЪЕДИНЕНИЙ

6.1. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОГРАНИЧЕНИЯ ПЕРЕТОКОВ ПО ЛИНИЯМ В КРУПНЫХ ЭНЕРГООБЪЕДИНЕНИЯХ

Иерархические системы управления формируются на принципе раздельного управления изменениями плановой и внеплановой частей активной нагрузки. В этих системах управление при внеплановых нагрузках осуществляется САУ ЧМ и СОП активной мощности по ЛЭП с учетом межсистемных и внутрисистемных линий.

Особенностью управления внеплановыми нагрузками в ЕЭС является двухуровневая организация систем САУ ЧМ и СОП, предусматривающая определенное разделение функций между уровнями и установку систем на диспетчерских пунктах ОДУ и центрального диспетчерского управления (ЦДУ) ЕЭС России.

В существующих системах задачи регулирования частоты, обменной мощности и задачи ограничения перетоков мощности по ЛЭП решаются автономно, а для обеспечения их совместности используются различные варианты управления. В результате можно формализовать задачи синтеза управлений на различных уровнях иерархии [40,52,95,99,142,145].

Синтез методов и алгоритмов для двухуровневой системы иерархического управления при внеплановых нагрузках основан на совместном взаимодействии САУ ЧМ и СОП по ЛЭП с учетом ограничений на структуру системы управления, ресурсы управления и допустимые значения перетоков по линиям. При

этом цель управления в условиях заданных ограничений достигается путем использования для описания модели ЭЭО линейных операторов в форме коэффициентов влияния введенных в разделе 2. Это позволяет решить задачи синтеза как задачи квазистационарной оптимизации на основе методов и операторов математического программирования, в частности, методов минимизации линейного или квадратичного функционалов на компактных множествах, допускающих численное или приближенное решение (раздел 3).

1. Математическая формулировка общей задачи.

Имеется объект крупное ЭЭО типа ЕЭС России, схема сети которого представлена направленным графом сети, состоящим из n узлов (объединенных энергосистем – ОЭС) и m межсистемных ЛЭП. Структура сети задана матрицей инцидентий – A^i . Каждый из узлов сети A^i включает сеть, заданную матрицей инцидентий – A_i^B и состоящую из n_i^B узлов (станций) и m^{B_i} внутрисистемных ЛЭП.

Постановка задачи. Схему ЭЭО типа ЕЭС России, представляет сеть, описываемая матрицей A^i , которая определяет объект управления верхнего уровня (уровня ЦДУ), а сеть с матрицей A_i^B – подсистему нижнего уровня – уровня ОДУ. Описание ЭЭО в квазистационарных режимах выполняется с помощью моделей влияния, разработанных в разделе 2.

Требуется синтезировать управление ЭЭО по частоте, обменной мощности и перетокам активной мощности по ЛЭП внутри подсистем и в ЭЭО в целом таким образом, чтобы в стационарных режимах выполнялись условия компенсации внеплановых изменений нагрузки, и обеспечивалось выполнение ограничений на координаты состояния, выходные координаты –

перетоки по ЛЭП и управления на станции или ОЭС. Ограничения задачи вычисления управлений имеют вид:

$$\underline{S}_j^m - S_j^m \leq S_j^m = \sum_{i=1}^n \beta_{ji}^m \Delta U^i \leq \bar{S}_j^m - S_j^m, \quad j=1, \dots, m; \quad (1)$$

$$\underline{P}^i - P^i \leq \Delta P^i = \Delta U^i - K_{\omega}^i \Delta \omega \leq \bar{P}^i - P^i, \quad i=1, \dots, n; \quad (2)$$

$$\Delta U^i - \Delta S_{kp}^i = -\lambda^i = -(\gamma^i \Delta \omega + \Delta S_o^i), \quad i=1, \dots, n; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_{kp}^i = 0; \quad (4)$$

$$\underline{S}_j^{B_i} - S_j^{B_i} \leq \Delta S_j^{B_i} = \sum_{i=1}^{n_i^B} \beta_{jk}^{B_i} (u_k^i + A_i \Delta S^i) \leq \bar{S}_j^{B_i} - S_j^{B_i}, \quad (5)$$

$$k = \overline{1, n_i^B}, \quad j = \overline{1, m_i^{B_i}};$$

$$\sum_{k=1}^{n_i^B} u_k^i = -(\gamma^i \Delta \omega + \Delta S_o^i + \Delta S_{kp}^i); \quad (6)$$

$$\underline{P}_k^i - P_k^i \leq \Delta P_k^i = u_k^i - K_{\omega}^k \Delta \omega \leq \bar{P}_k^i - P_k^i, \quad k=1, \dots, n_i^B; \quad i=1, \dots, n. \quad (7)$$

В ограничениях (1)-(7) использованы следующие обозначения: $\bar{S}_j^i$, $\underline{S}_j^i$, $\bar{S}_j^{B_i}$, $\underline{S}_j^{B_i}$ – предельные верхние и нижние значения перетоков активной мощности по j -й межсистемной и j -й внутрисистемной ЛЭП, соответственно; $\Delta S_o^i = S_{o\varphi}^i - S_o^i$ – отклонения обменной мощности S_o^i для i -й ОЭС от заданного значения $S_{o\varphi}^i$; $\Delta P^i, \Delta P_k^i$ – изменения мощности i -й ОЭС и k -го узла (станции) i -й ОЭС; $\bar{P}^i$, $\underline{P}^i$, $\bar{P}_k^i$, $\underline{P}_k^i$ – предельные верхние и нижние значения генерируемых мощностей i -й ОЭС и k -го узла i -й ОЭС, соответственно; ΔU^i – агрегированная переменная,

характеризующая изменение управления в i -й ОЭС; u_k^i – изменение управления в k -м узле i -й ОЭС; ΔS_{kp}^i – коррекция обменной мощности i -й ОЭС; $\Delta S_j^i, \Delta S_j^{B_i}$ – соответственно изменения перетоков активной мощности по j -й межсистемной и внутрисистемной линиям; $\beta_{ji}^M, \beta_{jk}^{B_i}$ – коэффициенты влияния изменений мощности i -й ОЭС и k -го узла i -й ОЭС на изменение перетока мощности, соответственно, по j -й межсистемной и внутрисистемной ЛЭП; K_ω^i, K_ω^k – коэффициенты усиления контура первичного регулирования частоты (скорости), соответственно, для i -й ОЭС и k -го узла i -й ОЭС; γ^i – крутизна характеристики «частота-мощность» i -й ОЭС; A_i^i – i -я строка матрицы инцидентий A^i ; $\Delta S^M = [\Delta S_1^M, \Delta S_2^M, \dots, \Delta S_m^M]^T$ – вектор изменений межсистемных перетоков; λ^i – «системная ошибка» i -й ОЭС.

Неравенства (1) и (5) отражают режимные требования ограничения перетоков активной мощности соответственно по межсистемным и внутрисистемным ЛЭП. Неравенства (2) и (7) учитывают ограничения на используемые ресурсы по генерируемой мощности.

Уравнения (3) и (6) описывают условия регулирования частоты и обменной мощности по критерию Гранера-Даррье. В этих уравнениях переменная ΔS_{kp}^i вводится для коррекции заданных значений обменных мощностей ОЭС с целью возможности оказания взаимопомощи дефицитным ОЭС, а уравнение (4) отражает условие такой взаимопомощи. Если в ЭЭО имеется заранее нескорректированная систематическая погрешность задания обменных мощностей, то отклонение обменной мощности i -й ОЭС от планового значения имеет вид:

$$\Delta S_{oi} = \Delta S_{o\zeta}^i - S_o^i \pm \Delta S_{oc}^i = \Delta S_o^i \pm \Delta S_{oc}^i$$

Тогда уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned}\Delta U^1 &= -(\gamma^1 \Delta \omega + \Delta S_o^1 \pm \Delta S_{oc}^1 - \Delta S_{kp}^1); \\ \Delta U^2 &= -(\gamma^2 \Delta \omega + \Delta S_o^2 \pm \Delta S_{oc}^2 - \Delta S_{kp}^2); \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta U^n &= -(\gamma^n \Delta \omega + \Delta S_o^n \pm \Delta S_{oc}^n - \Delta S_{kp}^n),\end{aligned}$$

где ΔS_{oc} – систематическая погрешность планового задания обмена.

Суммируя левые и правые части этой системы уравнений, можно получить

$$\sum_{i=1}^n \Delta U^i = -\left(\sum_{i=1}^n \gamma^i \Delta \omega + \sum_{i=1}^n \Delta S_o^i - \sum_{i=1}^n (\Delta S_{kp}^i \mp \Delta S_{oc}^i) \right).$$

Поскольку изменения обменных мощностей по всему ЭЭО удовлетворяют условию:

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_o^i \equiv 0,$$

то из последнего уравнения следует, что для астатического регулирования частоты ($\Delta \omega = 0$) при управлении внеплановыми нагрузками необходимо, чтобы коррекция обмена по ЭЭО с учетом систематической погрешности удовлетворяла условию:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta S_{kp}^i \pm \Delta S_{oc}^i) = 0.$$

Обозначив $\Delta S_{kpi}^i = \Delta S_{kp}^i \pm \Delta S_{oc}^i$, можно получить уравнение

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_{kp}^i = 0,$$

аналогичное условию (4).

Следует отметить, что в этом случае коррекция систематической погрешности планового режима выполняется без учета экономических факторов, характерных для реализации планового режима. При коррекции систематической погрешности специальной системой оперативной коррекции условие (4) остается без изменения.

В целом ограничения (1)-(4) определяют требования к условиям функционирования объекта верхнего уровня (уровня ЦДУ), а ограничения (5)-(7) – к условиям функционирования подсистем нижнего уровня (уровня ОДУ).

Коэффициенты влияния β и предельные значения перетоков активной мощности $\bar{S}_j, S_j$ по ЛЭП зависят от конфигурации сети и параметров входящих в нее элементов. При плановых и аварийных изменениях в сети предусматривается их коррекция путем решения специальных фоновых задач.

Коррекция предельных значений мощностей $\bar{P}, \underline{P}$ узлов, являющихся в общем случае функциями времени, выполняется специальной подсистемой оперативной коррекции. При необходимости она может производиться и диспетчером.

Строгое решение задачи синтеза управлений при совместности систем ограничений (1)-(4) и (5)-(7) возможно лишь при формулировке ее в виде задачи математического программирования. В общем случае выбор вида целевых функций для решения задач оптимизации не формализуем и должен основываться на некоторых априорных соображениях. В частности, для управления внеплановыми нагрузками в ЭЭО должно выполняться требование решения задач управления при

минимальных отклонениях от заданного планового режима, определенного из условий минимизации критерия вида:

$$J = \min \sum_{i=1}^n |\Delta U^i|^l, \quad l = 1, 2, \quad (8)$$

где C_i – весовые коэффициенты; ΔU^i – переменные управления.

Переменные ΔU^i , $i = 1, \dots, n$, доставляющие минимум одного из функционалов J типа (8) при ограничениях (1)-(7) вычисляются как решения задач нелинейного математического программирования, определяющие управления для компенсации изменений внеплановых нагрузок ЭЭО.

2. Задачи координатора – ЦДУ ЕЭС и подсистем нижнего уровня – ОДУ ОЭС. Для двухуровневой иерархической структуры системы управления, задачу (1)-(8) необходимо разделить на задачи *верхнего координирующего уровня* и *нижнего локального уровня*. Эти задачи можно сформулировать, если выбрать принцип координации и установить координируемость локальных задач на основе этого принципа. Последнее означает, что необходимо установить принципы взаимодействия подсистем нижнего уровня через связующие переменные и способы воздействия на эти переменные со стороны верхнего уровня, обеспечивающие достижение общих целей управления.

Как известно, в иерархических системах управления координация может быть выполнена путем прогнозирования, оценки и развязывания взаимодействий [5]. Ниже рассматривается задача синтеза управлений для *координации по принципу прогнозирования взаимодействий подсистем*, которыми являются ОЭС уровня ОДУ.

Идея метода координации по принципу прогнозирования

взаимодействий заключается в том, что верхний уровень, исходя из принятой стратегии управления, определяет необходимые значения *связующих переменных*. Тогда действие нижнего уровня определяется не только принятой для него стратегией управления, а требованиями верхнего уровня по обеспечению желаемых изменений связующих переменных. Для ОЭС ими являются межсистемные перетоки $\Delta S_{ji p}^i$. В случае наличия дефицитных ОЭС требуется скорректировать значения обменных мощностей ΔS_{kp}^i без изменения планового режима обмена $\sum_{i=1}^n \Delta S_{kp}^i = 0$.

Формализация задачи синтеза управлений на каждом из уровней для координации по принципу прогнозирования взаимодействий выполняется следующим образом.

Верхний уровень. Вычислить переменные $\Delta S_{ji p}^i$, ΔS_{kp}^i и управлений ΔU^i , минимизирующие целевую функцию

$$J = \sum_{i=1}^n \left(c_{1i} |\Delta U^i| + c_{2i} |\Delta S_{kp}^i| \right) \quad (9)$$

при ограничениях (1) – (4). При этом

$$\Delta S_{jnp}^m = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}^m \Delta U^i, \quad j \leq m.$$

Задача (9) с ограничениями (1)-(4) является задачей нелинейного программирования. Методом разности переменных она сводится к задаче линейного программирования следующего вида: вычислить переменные U_1^i и U_2^i , $S_{1 kp}^i$ и $S_{2 kp}^i$, обеспечивающие минимизацию целевой функции

$$J = \sum_{i=1}^n \left[c_{1i} (U_1^i + U_2^i) + c_{2i} (S_{1\,kp}^i + S_{2\,kp}^i) \right] \quad (10)$$

при ограничениях

$$\underline{S}_j^{\mathcal{M}} - S_j^{\mathcal{M}} \leq \Delta S_j^{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^n \beta_{ji}^{\mathcal{M}} (U_1^i - U_2^i) \leq \bar{S}_j^{\mathcal{M}} - S_j^{\mathcal{M}}, \quad j = 1, \dots, m; \quad (11)$$

$$(U_1^i - U_2^i) + (S_{1\,kp}^i - S_{2\,kp}^i) = -\lambda^i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (12)$$

$$\underline{P}^i - P^i \leq P^i = (U_1^i - U_2^i) - K_{\omega}^i \Delta \omega \leq \bar{P}^i - P^i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n (S_{1\,kp}^i - S_{2\,kp}^i) = 0; \quad (14)$$

$$U_1^i \geq 0, \quad S_{1\,kp}^i \geq 0; \quad U_2^i \geq 0; \quad S_{2\,kp}^i \geq 0.$$

Задача (10)-(14) является задачей линейного программирования и решается симплекс-методом.

Уровень подсистем. На нижнем уровне координация может быть выполнена с использованием способа *модификации образов* или *модификации ограничений и целевых функций* (модификации образов и целей по Месаровичу).

Координация с использованием модификации ограничений. При этом способе координации сигналы верхнего уровня определяют значения связующих переменных в системе (5)-(7), т. е.

$$\Delta S_{j\,np}^{\mathcal{M}} \quad \text{и} \quad \Delta S_{kp}^i,$$

где j соответствует i -1 ОЭС. Если, как и для верхнего уровня, цель управления задана в форме минимизации расходов на управление:

$$J^i = \min \sum_{k=1}^{n_i^B} c_k^i |u_k^i|, \quad (15)$$

то при модификации ограничений сигналами верхнего уровня систем ограничений (5) – (7) изменяется следующим образом:

$$\underline{S}_j^{B_i} - S_j^{B_i} \leq \Delta S_j^{B_i} = \sum_{k=1}^{n_i^B} \beta_{ji}^{B_i} \left(u_k^i + A_i^M \Delta S_{ip}^M \right) \leq \bar{S}_j^{B_i} - S_j^{B_i}, \quad j=1, \dots, m_i^{B_i}; \quad (16)$$

$$\Delta S_j^M(i) = \alpha_{ji}^M \Delta U^i = \sum_{k=1}^{n_i^B} \alpha_{ji}^M u_k^i; \quad (17)$$

$$\Delta U^i = \sum_{k=1}^{n_i^B} u_k^i = -\lambda^i = -(\gamma^i \Delta \omega + \Delta S_o^i + \Delta S_{kp}^i); \quad (18)$$

$$P_k^i - P_k^i \leq \Delta P_k^i = (u_k^i - K_\omega^k \Delta \omega) \leq \bar{P}_k^i - P_k^i, \quad k=1, \dots, n_i^B, \quad (19)$$

где S_{ip}^i – вектор прогнозируемых значений изменения перетоков по ЛЭП; β_{ji}^M – коэффициент влияния k -то узла i -й ОЭС на j -ю межсистемную ЛЭП; $\Delta S_j^i(i)$ – изменение перетока по j -й межсистемной ЛЭП при изменении управлений в i -й ОЭС.

Решение задачи (15)-(19) при заданных верхним уровнем значениях ΔS_{ip}^i и ΔS_{kp}^i в каждой ОЭС позволяет найти управления u_k^i , $k=1, \dots, n_i^B$.

Координация с использованием модификации образов и целей. Если переход от агрегированных переменных ΔU^i к управлениям отдельными узлами внутри ОЭС u_k^i выполнить без учета внутрисистемных ограничений (16)-(19), например, распределить между станциями в соответствии с характеристиками их экономичности, то обеспечить координацию только путем модификации ограничений

невозможно. Для выполнения ограничений (16) и (19) в этом случае могут потребоваться дополнительные управления, которые нельзя обеспечить без модификации исходной целевой функции.

Пусть в результате принятого в ОЭС способа распределения управлений ΔU^i были определены значения u_k^i т. е. выполнена операция «деагрегирования» вида

$$\Delta U^i = u_1^i + u_2^i + \dots + u_{n_i^B}^i. \quad (20)$$

Фиксирование управлений u_k^i может привести к нарушению ограничений (16), (17) и (19). Для исключения этих нарушений необходимо формирование дополнительных управлений x_k^i . В этом случае целевая функция (15) должна быть изменена и записана в виде

$$J^i = \min \sum_{k=1}^{n_i^B} c_k^i (|u_k^i| + |x_k^i|). \quad (21)$$

Минимизацию этой целевой функции следует производить в условиях модифицированных ограничений (16)-(19), что обуславливается необходимостью сохранения требуемых верхним уровнем значений связующих переменных ΔS_{jnp}^M , ΔS_{kp}^i и баланса генерируемой и потребляемой мощностей. В результате минимизация целевой функции (20) должна выполняться при ограничениях

$$\underline{S}_j^{B_i} - S_j^{B_i} \leq \Delta S_j^{B_i} = \sum_{i=1}^{n_i^B} \beta_{jk}^{B_i} (u_k^i + x_k^i + A_i^M \Delta S_{np}^M) \leq \bar{S}_j^{B_i} - S_j^{B_i}, \quad j \leq 1, \dots, m_i^B; \quad (22)$$

$$\Delta U^i = \sum_{k=1}^{n_i^B} (u_k^i + x_k^i) = -\lambda^i = -(\gamma^i \Delta \omega + \Delta S_o^i + \Delta S_{kp}^i); \quad (23)$$

$$\Delta S_j^M(x_k^i) = \sum_{k=1}^{n_i^B} \beta_{ji}^M x_k^i = 0, \quad j \in i - \text{й ОЭС}, \quad (24)$$

$$\underline{P}_k^i - P_k^i \leq \Delta P_k^i = (u_k^i + x_k^i) - K_\omega^i \Delta \omega \leq \bar{P}_k^i - P_k^i. \quad (25)$$

Локальные задачи (15)-(19) и (20)-(25) методом разности переменных, предусматривающим замены переменных в целевой функции J^i :

$$|u_k^i| = u_{k1}^i + u_{k2}^i \quad \text{и} \quad |x_k^i| = x_{k1}^i + x_{k2}^i, \quad (26)$$

и в системе ограничений

$$u_k^i = u_{k1}^i - u_{k2}^i \quad \text{и} \quad x_k^i = x_{k1}^i - x_{k2}^i, \quad (27)$$

причем $u_{k1}^i \geq 0$, $u_{k2}^i \geq 0$, $x_{k1}^i \geq 0$, $x_{k2}^i \geq 0$, можно свести к задачам линейного программирования и решить симплекс-методом. Отметим, что в системе ограничений (22)-(25) в неявной форме учитывается требование формирования дополнительных управлений x_k^i без нарушения баланса мощности в ОЭС, ибо из (22) следует, что если

$$\sum_{k=1}^{n_i^B} u_k^i = \Delta U^i, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^{n_i^B} x_k^i = 0.$$

Выполнение ограничений в задаче (15)-(19) и (24) в задаче (21)-(25), определяющих необходимые условия координируемости подсистем по принципу прогнозирования взаимодействий, возможно при соблюдении определенных условий. Ниже приводится утверждение, доказанное В. П. Васильевым.

Утверждение. При $\exists u_k^i \neq 0$ и $\forall \alpha_{jk}^M \neq 0$, если $r^i = n_i \leq m_i^M$, где m_i^M — число контролируемых межсистемных

ЛЭП, примыкающих к i -й ОЭС, r^i – ранг системы ограничений (17), необходимым условием координируемости подсистем (15)-(20) по принципу прогнозирования взаимодействий является равенство коэффициентов влияния внутренних узлов на межсистемные перетоки по ЛЭП, примыкающим к данной ОЭС.

Доказательство. Пусть (17) преобразованы к виду:

$$\begin{aligned}\Delta S_1^M(i) &= \beta_{1i}^M \Delta U^i = \sum_{k=1}^{n_i^B} \beta_{1k}^M u_k^i; \\ \Delta S_2^M(i) &= \beta_{2i}^M \Delta U^i = \sum_{k=1}^{n_i^B} \beta_{2k}^M u_k^i; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta S_{m_i}^M(i) &= \beta_{m_i i}^M \Delta U^i = \sum_{k=1}^{n_i^B} \beta_{m_i k}^M u_k^i.\end{aligned}\tag{28}$$

Так как $\Delta U^i = u_1^i + u_2^i + \dots + u_{n_i}^i$, то систему (28) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_i^B} (\beta_{1k}^M - \beta_{1i}^M) u_k^i &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n_i^B} (\beta_{m_i k}^M - \beta_{m_i i}^M) u_k^i &= 0\end{aligned}\tag{29}$$

Значения линейных операторов β определяются параметрами конкретной схемы ЭЭО и не могут выбираться произвольно. Поэтому ниже будем рассматривать необходимые условия координируемости подсистем для любых не равных нулю, но заданных значений β .

По условию, в (29) $m_i^i \geq n_i^B$. После исключения зависимых уравнений система (29) преобразуется в систему однородных

уравнений вида $\tilde{\beta}u = 0$, где $\tilde{\beta}$ – квадратная матрица с элементами $\beta_{jk}^m - \beta_{ji}^m$ размера $(n_i^B \times n_i^B)$.

Как известно, система однородных уравнений при условии $\det \tilde{\beta} \neq 0$ всегда совместна и имеет тривиальное решение $u_k^i \equiv 0$. Если рассматривается нетривиальное решение ($u_k^i \neq 0$), то очевидно, что матрица $\tilde{\beta}$ должна быть особенной, т. е. $\det \tilde{\beta} = 0$.

Последнее условие для любых значений β_{ji}^m и β_{jk}^m , не равных нулю, может быть только тогда, когда выполняется соотношение вида

$$\beta_{ji}^m = \beta_{jk}^m, \quad j = 1, \dots, m_i^m, \quad k = 1, \dots, n_i^B. \quad (30)$$

Утверждение доказано.

Примечание. При условии $n_i^B > m_i^i$ система $\tilde{\beta}u = 0$ не определена. Нетривиальное решение в этом случае можно получить путем решения общей задачи математического программирования (15)-(20).

Приведенное выше утверждение полностью справедливо и для задачи (21)-(25). Последнее очевидно, если в ограничениях (24) провести замену переменных вида $\tilde{u}_k^i = u_k^i + x_k^i$ и учесть, что

$$\sum_{k=1}^{n_i^B} \alpha_{jk}^i u_k^i = \alpha_{ji}^i \Delta U^i$$

Условие (30) при отсутствии учета потерь в сетях выполняется для ЭЭО, имеющих радиально-цепочечную (древовидную) структуру, показанную рис. 6.1.

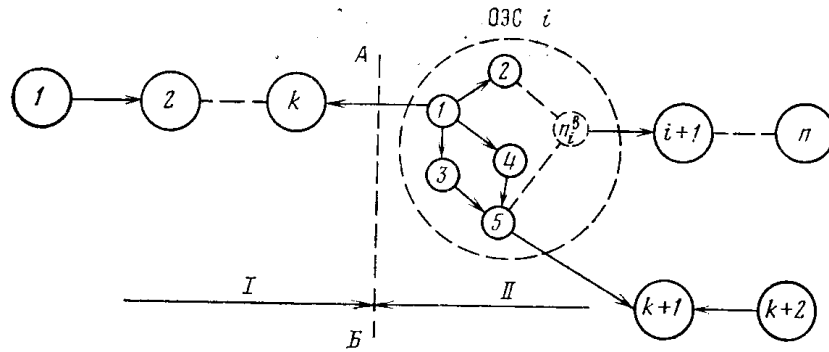


Рис. 6.1. Структура сети иерархической
САУ ЧМ и СОП по ЛЭП

Действительно, в соответствии с [2,6] матрицу коэффициентов, влияния можно записать следующим образом

$$\beta^m = P(A_{-k}^m)^T \left[A_{-k}^m P(A_{-k}^m)^T \right]^{-1} \Gamma \quad (31)$$

где $P = \text{diag} \{ \rho_j \}$ – диагональная матрица удельных синхронизирующих мощностей ρ_j – размера $(m \times m)$; A_{-k}^m – матрица инцидентов, полученная из матрицы A^i вычеркиванием k -й строки, соответствующей номеру базисного узла; Γ – матрица, составленная из коэффициентов γ^i каждого узла (ОЭС). Матрица Γ , например при $k=1$, имеет следующую структуру [6]:

$$\Gamma = \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} -\gamma^2 & \Gamma - \gamma^2 & -\gamma^2 \dots & -\gamma^2 \\ -\gamma^3 & -\gamma^3 & \Gamma - \gamma^3 \dots & -\gamma^3 \\ \vdots & & & \\ -\gamma^n & -\gamma^n & -\gamma^n \dots & \Gamma - \gamma^n \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \sum_{i=1}^n \gamma^i. \quad (32)$$

Для сети, имеющей древовидный граф, всегда выполняется

условие $m < n$, причем $m = n - 1$. Следовательно, матрицы A_{-k}^m и $(A_{-k}^m)^T$ являются квадратными, неособенными и обратимыми. Тогда

$$\beta^m = P(A_{-k}^m)^T \left[(A_{-k}^m)^T \right]^{-1} P^{-1} (A_{-k}^m) \Gamma = (A_{-k}^m)^{-1} \Gamma, \quad (33)$$

поскольку

$$(A_{-k}^m)^T \left[(A_{-k}^m)^T \right]^{-1} \equiv E, \quad PP^{-1} = E.$$

Матрица $\Gamma = F(\gamma)$, определяемая в соответствии со структурой (32), не зависит от параметров ρ_i . Так как A_{-k}^m также не зависит от параметров ρ_i , то и матрица β^m также не зависит от этих параметров. Если такую сеть разделить относительно некоторой j -й линии на две части (линия АБ на рисунке), то коэффициенты влияния узлов, принадлежащих к одной из частей сети, на переток по рассматриваемой линии можно определить, подставив в (33) конкретные значения A_{-k}^i и Γ . преобразований получим

$$\beta_{ji}^m = \pm \sum_{r \in O \setminus C_i} \gamma^r / \sum_{i=1}^n \gamma^i \quad (34)$$

где r – номера узлов той части схемы, которой не принадлежит i -й узел. Знаки коэффициентов влияния определяются принятой ориентацией графа сети.

Аналогично можно получить и выражение для коэффициентов влияния внутренних узлов i -й ОЭС на межсистемные перетоки по j -й линии

$$\alpha_{jk}^i = \pm \sum_{r \in I \setminus \tilde{N}_i} \gamma^r / \sum_{i=1}^n \gamma^i \quad (35)$$

Из (34) и (35) следует, что $\alpha_{ji}^i = \alpha_{jk}^i$.

Таким образом, координируемость подсистем ЭЭО по принципу прогнозирования взаимодействий существенно зависит от числа регулирующих станций. При малом числе станций $n_i^B < m_i^i$ необходимым *условием координируемости* является равенство коэффициентов влияния внутренних узлов на межсистемные перетоки по примыкающим ЛЭП. В общем случае это условие выполняется только для ЭЭО, не содержащих замкнутых контуров. Достаточным условием координируемости подсистем, а для ЭЭО с большим числом регулирующих станций $n_i^B < m_i^i$ необходимым и достаточным условием является известное из линейной алгебры как условие совместности систем ограничений (15)-(19) и (21)-(25).

Управления в иерархических САУ ЧМ для координации по принципу прогнозирования взаимодействий можно реализовать в три этапа:

Этап 1. На основании измерений $\Delta\omega$ и S_0^i каждая из подсистем формирует системную ошибку $\lambda^i = \gamma^i \Delta\omega + S_0^i$ и передает ее в ЦДУ.

Этап 2. На уровне ЦДУ решается задача (10)-(14). В результате решения определяются значения ΔU^i , ΔS_{kp}^i и ΔS_{ip}^i . Полученные управления и координирующие сигналы передаются в системы САУ ЧМ.

Этап 3. С учетом полученной с верхнего уровня информации в АРЧ ОДУ решаются задачи (15)-(19) или (21)-(25) и определяются значения управлений u_k^i или u_k^i и x_k^i . На этом цикл координации заканчивается.

Алгоритмы двухуровневого иерархического управления

ЭЭО исследованы методами математического моделирования на ЭВМ для системы, представленной на рис. 6.1. Для верхнего уровня принимались значения $n = 11$, $m = 14$. На нижнем уровне подробно моделировалась одна из подсистем (ОЭС Средней Волги). Для этой подсистемы $n_i^B = 16$, из них регулирующих узлов. $n_{ip}^B = 6$. Число внутрисистемных линий $m_i^B = 21$.

Анализ результатов моделирования полностью подтвердил работоспособность метода совместного управления частотой, обменной мощностью и перетоками активной мощности по ЛЭП и реализуемость описанных алгоритмов иерархического управления.

3. Выводы. На основе приведенных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Иерархическое управление ЭЭО типа ЕЭС России может быть формализовано как задача математического программирования.

2. Модели ЭЭО и координации по принципу прогнозирования взаимодействий позволяют вычислить управления в виде двухэтапной конечно-шаговой оптимизационной задачи.

3. Условия координируемости подзадач в виде конечно-шагового процесса взаимодействия верхнего и нижнего уровней существенно зависит конфигурации и параметров сети ЭЭО. С учетом аналитических представлений решений задач математического программирования (разделы 3, 4) возможен корректный анализ в целом иерархических структур управления ЭЭО для обеспечения энергетической безопасности.

6.2. СИНТЕЗ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГООБЪЕДИНЕНИЯМИ

Синтез управлений рассматривается с учетом свойств крупномасштабных энергетических объектов, состоящих из большого числа энергосистем, представляющих подсистемы. Для таких объектов традиционные методы вследствие высокой размерности задач не могут применяться или требуют упрощающих преобразований. Принципы синтеза основываются на идеях координации и декомпозиции, что позволяет сформулировать процедуры координации на основе аналитико-численных решений задач математического программирования, к которым сведены исходные задачи управления. Приводятся результаты исследования устойчивости данного класса систем.

1. Варианты постановок задач синтез координаторов подсистем. При большой размерности пространства состояний синтез закона управления традиционными методами требует больших затрат ресурсов либо становится невозможным, несмотря на совершенство современных ЭВМ.

Декомпозиционный метод Бейли-Матросова позволяет преодолеть ряд трудностей. Основу метода составляют анализ поведения проектируемой системы и достижение заданных показателей качества и устойчивости путем многократного использования итерационных процедур при первоначальном задании свойств изолированных подсистем.

Решение задачи в классе двухуровневых структур позволяет осуществить целенаправленный синтез регулятора верхнего уровня, подчиненного конечной цели управления. При этом, как правило, глобальное управление служит целям нейтрализации эффектов взаимодействия. Выбор коэффициентов

глобального регулятора, обеспечивающих выполнение условий Севастьянова-Котелянского для агрегатной матрицы, осуществляется с помощью обобщенного обречения Мура-Пенроза. Однако возможность получения устойчивой агрегатной матрицы зависит от выбора собственных значений матриц и степени связности локальных подсистем.

Далее представлен двухуровневый алгоритм синтеза. Функционирование регулятора нижнего уровня подчинено локальным целям подсистем, а его синтез может быть выполнен по методике, предлагаемой в предыдущих главах. Для синтеза управлений верхнего уровня используются операторы решения неравенств. Это позволяет записать координирующий алгоритм в виде конечных формул. Замкнутая форма решения задачи синтеза обеспечивает заданную степень устойчивости взаимосвязанных процессов.

Постановка задачи. Электроэнергетическое объединение рассматривается как крупномасштабный динамический объект, математическая модель которого в пространстве состояний имеет вид

$$X' = AX + BU, \quad X(0) = X_0,$$

где $X \in R^n$ - вектор координат состояний системы; $U \in R^m$ - вектор управлений; $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ - матрицы параметров системы. В силу физической природы объекта возможна декомпозиция системы на N взаимодействующих подсистем с линейными связями:

$$X'_i = A_i X_i + B_i U_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} X_j, \quad X_i(0) = X_{i0}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^N n_i = n$ - вектор координат состояния i -ой

подсистемы; $U_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\sum_{i=1}^N m_i = m$ – вектор управления i -ой подсистемы; $R_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ – матрица i -ой подсистемы (энергосистемы) с диагональными блоками матрицы A ; $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ – матрицы взаимосвязи i -ой и j -ой подсистем (недиагональные блоки матрицы A); $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ – матрицы входов i -ой подсистемы.

Требуется синтезировать управление, которое обеспечивает оптимальность подсистем по отношению к локальным интегральным критериям качества

$$J_i = \int_0^{T=\infty} (\|X_i\|_{Q_i}^2 + \|U_i\|_{R_i}^2) dz, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где $Q_i = Q_i^T \geq 0$; $R_i = R_i^T \geq 0$ и глобальную устойчивость системы.

Решение задачи будем формировать в классе двухуровневых структур, где управление каждой энергосистемой имеет вид: $U_i = U_i^{\pi} + U_i^{\varepsilon}$. Первое слагаемое суммы U_i^{π} формируется локальным регулятором по линейному закону отрицательной обратной связи по вектору координат состояния подсистемы:

$$U_i^{\pi} = -R_i^{-1} B_i^T P_i X_i, \quad (3)$$

где матрица P_i , как известно, может быть определена из решения алгебраического уравнения Риккати для i -ой подсистемы. Уравнение системы, замкнутой локальным управлением, имеет вид

$$X_i' = \bar{A}_i X_i + B_i U_i^{\pi} + \sum_{j=1}^N A_{ij} X_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где $\bar{A}_i = A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_i$ – матрица замкнутой локальной подсистемы.

В соответствии с теоремой Н. Н. Красовского для изолированных подсистем существует квадратичная функция Ляпунова.

$$v_i = X_i^T P_i X_i,$$

удовлетворяющая оценкам

$$c_{1i}^2 \|X_i\|^2 \leq v_i(X_i) \leq c_{2i}^2 \|X_i\|^2.$$

Эта функция будет использована при синтезе.

2. «Диагональная» декомпозиция систем с последствием. Трудности, возникающие при синтезе крупномасштабных динамических энергетических объектов (в случае линейно-квадратичной задачи), связаны с необходимостью решения нелинейного дифференциального или разностного уравнения Риккати высокой размерности. Наличие многократных временных запаздываний в передаче координат состояний и управлений увеличивает эти трудности, так как их учет может приводить к увеличению размерности пространства состояний.

Иерархические методы оптимизации, например, метод предсказания взаимодействий, позволяют преодолеть многие трудности. Однако, являясь методами вычислительной декомпозиции, они приводят к построению разомкнутых или частично замкнутых систем управлений ЭЭО. Создание замкнутых стратегий требует определенного подхода для разработки аналитико-численных алгоритмов.

Далее рассматривается подход к проектированию оптимальных систем для управления крупномасштабными

объектами на основе децентрализованных регуляторов. Общие классические и обобщенные процедуры синтеза объектов подобного типа приведены в главе 3. Они применены для объектов невысокого порядка (менее 10). Специфика излагаемых далее алгоритмов состоит в том, что на основе нахождения матрицы обратной связи из решения уравнения Риккати для подсистем оцениваются «степени возмущенности» исходной задачи и определяются условия устойчивости замкнутой системы управления ЭЭО в целом.

Постановка задачи. Формулируется линейно-квадратичная задача оптимального управления ЭЭО как крупномасштабными объектами с последствием, где взаимосвязанные энергосистемы по отношению друг к другу являются дестабилизирующим фактором. Представляется метод построения децентрализованного управления, основанный на возмущении исходной целевой функции системы. Возмущение критериальной функции позволяет существенно упростить вычислительные процедуры при определении управления. Элементы возмущенного функционала находятся в инверсной процедуре оптимизации на основании решений уравнений Риккати для подсистем с использованием свойств их взаимосвязей.

Рассмотрим задачу синтеза управлений для энергетической системы, описываемой дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами следующего вида

$$X' = \bar{A}X + \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j X(t - \tau_j) + BU, \quad (5)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^m$ – числовые векторы состояний и управлений:
 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{A} = \text{diag}\{A_i\}$ – числовые матрицы объекта управлений:
 $\tilde{A}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ – матрицы взаимовлияний:

$$\tilde{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & j & 0 \end{bmatrix}.$$

Числовая матрица $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица передач управлений;
 $X(s) = \varphi(s)$; $s \in [t_0 - \tau, t_0]$, $\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_N$ – постоянные запаздывания
такие, что: $\varphi(s) \in C_\tau$; $\varphi(s)$ – непрерывная ограниченная начальная
 $\varphi(s)$ вектор функция; C_τ – пространство непрерывных
функций на отрезке $[-\tau, 0]$ с нормой $\|\varphi\|_\tau = \max \|\varphi(s)\|$;
 $\|\varphi(s)\|$ – евклидова норма вектора $\varphi(s) \in \mathbb{R}^n$;
 $\tau = \max \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$.

Уравнения (12) можно представить в эквивалентном виде

$$X'_i = A_i X_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} X_j (t - \tau_j) + B_i U_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^N n_i = n$ – вектор состояний i -й подсистемы
управления; $U_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\sum_{i=1}^N m_i = m$ – вектор управлений i -й
подсистемы; $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ – матрицы уравнений
состояния i -й подсистемы, а $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ – матрица влияния j -й
подсистемы на i -ю подсистему.

Управление U считается принадлежащим некоторому
множеству допустимых управлений

$$U \in \Omega_u = \left\{ \Omega_{U_i} \mid \Omega_U = \prod_{i=1}^N \Omega_{U_i} \right\} \in \mathbb{R}^m. \quad (7)$$

Требуется определить управление:

$$U = U(x, i), \quad (8)$$

которое на траекториях системы (12) минимизирует заданный функционал

$$J = \int_0^{\infty} (|X|_{\bar{Q}}^2 + |U|_R^2) dt, \quad (9)$$

где использованы следующие обозначения матриц:

$$Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0, \quad \bar{Q} = \text{diag} \{a_i\}, \quad R = \text{diag} \{R_i\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Функционал (9) можно представить в блочно-сепарабельном виде

$$J = \sum_{i=1}^N J_i \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} (|X|_{Q_i}^2 + |U|_{R_i}^2) dt. \quad (10)$$

Синтез управлений. Для реализации управлений в классе децентрализованных структур управления для случая управлений

$$U_i = U_i(X_i, t), \quad i = \overline{1, N}, \quad (11)$$

Исходный функционал (9) модифицируется следующим образом

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (|X|_{\tilde{Q}}^2 + |U|_R^2) dt, \quad (12)$$

где матрицы определяются равенствами

$$Q = Q^T \geq 0 \quad Q = \bar{Q} + \tilde{Q}, \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Поставленную задачу можно решить с использованием метода динамического программирования и аппарата функционалов Ляпунова-Красовского.

Функционал Ляпунова-Красовского выбирается в виде:

$$V = X^T P X + \sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^0 X(t+s)^T H_j X(t+s) ds. \quad (13)$$

Далее вычисляется полная производная функционала Ляпунова-Красовского в силу уравнений (6). Тогда можно получить полную производную функционала по времени, представленную в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{V} = X^T & \left(\bar{A}^T P + P \bar{A} + \sum_{j=1}^N H_j \right) X + 2X^T P \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j X(t - \tau_j) + 2X^T P B U - \\ & - \sum_{j=1}^N X^T(t - \tau_j) H_j X(-\tau_j). \end{aligned}$$

Оптимальное управление определяется из решения функционального уравнения Р. Беллмана

$$\min_{U \in \mathbb{R}^m} \{ V' + X^T Q X + U^T R U \} \equiv 0. \quad (14)$$

Вычислив точку безусловного минимума по U , можно получить

$$U = -R^{-1} B^T P X. \quad (15)$$

Матрицы квадратичных форм функционала Ляпунова-Красовского P и H_j , $j = \bar{1}, \bar{N}$, определяются из тождества

$$V' + X^T Q X + U^T R U \equiv 0. \quad (16)$$

При подстановке в (16) управления U вида (15) получаем тождество:

$$\begin{aligned}
& X^T \left(\bar{A}^T P + P \bar{A} + Q + \sum_{j=1}^N H_j - P B R^{-1} B^T P \right) X + \\
& + 2X^T P \sum_{j=1}^N \bar{A}_j X_j(t - \tau_j) - \sum_{j=1}^N X_j^T(t - \tau_j) H_j(t - \tau_j) \equiv 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

Используя далее соотношения

$$2X^T P \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j X_j(t - \tau_j) = NX^T P \exp + \sum_{j=1}^N X^T(t - \tau_j) \tilde{A}_j A_j^T X(t - \tau_j),$$

преобразуем тождество (17) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& X^T \left[\bar{A}^T P + P \bar{A} - P(BR^{-1}B^T - NE)P + Q + \sum_{j=1}^N H_j \right] X + \\
& + \sum_{j=1}^N X^T(t - \tau_j) [\tilde{A}_j \tilde{A}_j^T - H_j] X(t - \tau_j) \equiv 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Для того чтобы тождество (18) выполнялось для каждого вектора X и $X(t - \tau_j)$ необходимо одновременное выполнение равенств

$$\begin{aligned}
& \bar{A}^T P + P \bar{A} - P(BR^{-1}B^T - NE)P + Q + \sum_{j=1}^N H_j = 0, \\
& \sum_{j=1}^N (\tilde{A}_j \tilde{A}_j^T - H_j) = 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

На основании представления матрицы Q как суммы матриц $\bar{Q}$ и $\tilde{Q}$ уравнение (26) эквивалентно системе

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} - P(BR^{-1}B^T - NE)P + \bar{Q} = 0, \quad (20)$$

$$\tilde{Q} + \sum_{j=1}^N H_j = 0.$$

Диагональная структура матриц $\bar{A}$, $\bar{Q}$, B , R позволяет разделить уравнение Риккати для системы (5) на N уравнений, соответствующих взаимодействующим подсистемам (6).

В результате система (19) становится эквивалентной N системам следующего вида

$$A_i^T P_i + P_i (B_i R_i^{-1} B_i^T - N E_i) P_i + Q_i = 0, \quad \tilde{A}_j \tilde{A}_j^T - H_j = 0,$$

$$\tilde{Q}_j + H_j = 0, \quad \tilde{Q}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & Q_{ij} \\ Q_{ji} & \dots & 0 \\ i & & j \end{bmatrix}, \quad Q_{ij} = -(A_{ij} A_{ij}^T),$$

а оптимальное управление (22) принимает требуемую диагональную структуру

$$U_i = -R_i^{-1} B_i^T P_i X_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (21)$$

Для синтезированного оптимального управления справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть все пары (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, N$, управляемые. Тогда для класса систем вида (12) децентрализованное управление (28) является оптимальным по отношению к функционалу качества (19) при всех матрицах Q , удовлетворяющих следующему неравенству для собственных чисел:

$$\lambda_{j \min} (\bar{Q} + P B R^{-1} B^T P) > \lambda_{\max} \left(\sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \tilde{A}_j^T \right). \quad (22)$$

Доказательство. Полная производная функционала Ляпунова-Красовского, вычисленная на траекториях системы (5), замкнутой управлением (21), определяется равенствами:

$$\begin{aligned}
& V' + X^T \bar{A}^T P X - 2X^T P B R^{-1} + X^T P \bar{A} X + 2X^T P \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j X(t - \tau_j) + \\
& + \sum_{j=1}^N X_j^T H_j X_j - \sum_{j=1}^N X_j(t - \tau_j) H_j X_j(t - \tau_j) = \\
& = -X^T \left(\bar{Q} + P B R^{-1} B^T P + \sum_{j=1}^N H_j \right) X + \\
& + \sum_{j=1}^N X_j(t - \tau_j) (\tilde{A}_j \tilde{A}_j^T - H_j) X_j(t - \tau_j) = \\
& = -X^T \left(\tilde{Q} + P B R^{-1} B^T P - \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \tilde{A}_j^T \right) X \leq \left[\lambda_{j \min} (\bar{Q} + P B R^{-1} B^T P) \right],
\end{aligned} \tag{23}$$

и при выполнении условий (22), (23) является отрицательно определенной функцией.

Следовательно, в соответствии с теоремой Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости тривиального решения системы с запаздывающим аргументом система с взаимосвязями (5), замкнутая децентрализованным управлением (21), асимптотически устойчива.

Полная производная функционала Ляпунова-Красовского имеет вид

$$V' = -X^T \left(Q + P B R^{-1} B^T P + \sum_{j=1}^N P \right) X \leq 0,$$

откуда следует положительная полуопределенность матрицы $\left(Q + \sum_{j=1}^N H_j \right)$. При этом матрица

$$\Pi(i\omega) = R + G^*(i\omega) \left[Q + \sum_{j=1}^N H_j \right] G(i\omega) \geq 0, \quad G(i\omega) = -(A - i\omega)^{-1} B$$

также будет неотрицательной.

В данном случае согласно частотной теореме В. А. Якубовича будет существовать матрица P , удовлетворяющая уравнению (20), и децентрализованное управление с соответствующей матрицей P будет оптимальным по отношению к модифицированному функционалу (12).

Таким образом, сформулирована процедура синтеза децентрализованного регулятора для класса крупномасштабных ЭЭО, описываемых дифференциальными уравнениями нейтрального типа. Управление вычисляется с помощью решения функционального уравнения Беллмана. Модификация исходной блочно-сепарабельной целевой функции позволила расчленить задачу нахождения матриц квадратичных форм функционала Ляпунова-Красовского на N независимых подзадач и перейти от решения $n(n+1)/2$ нелинейных уравнений, соответствующих уравнению Риккати для всей системы, решению N уравнений размерностью $n_i(n_i+1)/2$ для каждой i системы. Например, при $n = 100$, $n = 10$, $N = 10$ объем вычислений уменьшается на порядок. В случае, когда системы состоят из однотипных подсистем, вычислительные затраты уменьшаются в большей степени.

Синтезированное управление является оптимальным по отношению к возмущенной форме целевой функции системы. Вычисление недиагональных элементов возмущенного функционала из решений уравнений Ляпунова для взаимосвязей подсистем обеспечивает устойчивость всей системы.

3. Обобщенный метод синтеза. Развиваемый подход допускает дальнейшие обобщения для нелинейных случаев. Очевидно, что применение операторного описания ограничений на управления позволяет сформулировать обобщенные следствия

из уравнения Беллмана и процедуру синтеза, соответствующую данному варианту исследуемой задачи.

Естественно, что все трудности в проведении синтеза в нелинейной постановке особенно характерны для крупномасштабных систем. Преодоление этих трудностей возможно различными путями. В частности, для отыскания подходящей функции Ляпунова или функционала Ляпунова-Красовского используют либо численные методы, либо оценки областей притяжения. Последние могут быть построены на основе рассмотрения уравнений линейного приближения для объектов с учетом нелинейностей закона управления.

Обобщенная задача субоптимальной стабилизации крупномасштабных систем. Рассмотрим процедуру обобщения задачи путем наделения локальных регуляторов достаточно широкими функциональными возможностями. В этом случае вследствие существенных нелинейностей, вносимых операторами управления локальных подсистем, задача устойчивости требует определенного подхода. Один из таких подходов основан на введении векторной функции Ляпунова и применении теорем сравнения. При этом используется вариант синтеза на основе процедуры Бейли-Матросова.

Постановка задачи. Пусть ЭЭО как динамический объект содержит подсистемы в виде отдельных энергосистем

$$X_i' = A_i X_i + B_i U_i^* + \sum_{j=1}^N H_{ij} X_j, \quad (24)$$

где $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – вектор состояния; $U_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ – векторы управлений. A_i, B_i – матрицы уравнений подсистем; H_{ij} – матрицы, учитывающие влияние других подсистем. Будем полагать, что уравнения отдельных подсистем удовлетворяют

условиям полной управляемости, т. е.

$$\text{rang} [B_i, A_i B_i, \dots, A_i^{n_i-1} B_i] = n_i \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

Задача управления состоит в формулировке условий асимптотической устойчивости для случая обобщенных целей, возложенных на регуляторы локальных подсистем. В этой задаче требуется определить вектор управлений локальными подсистемами как решение задачи математического программирования: найти вектор субоптимальных управлений

$$U^* = \arg \min \left[\|\tilde{X}_i\|^2 + \|U_i\|^2 \right] \quad (25)$$

при учете ограничений на переменные (перетоки по линиям)

$$X_i^- \leq X_i \leq X_i^+ \quad (26)$$

и ограничений на управления (воздействия на станции ЭЭО)

$$U_i^- \leq U_i \leq U_i^+ \quad (27)$$

при условии, что уравнения связи между фазовыми координатами и управлениями определяются матрицами коэффициентов влияния (для установившихся режимов), которые имеют вид

$$\tilde{X}_i = X_i + \beta_{xi} U_i, \quad \beta_{xi} = -A_i^{-1} B_i. \quad (28)$$

Равенства (28) определяют модель ЭЭО для управления.

Математическая модель замкнутой системы. Уравнения системы будут представлены в обобщенном виде с использованием аналитико-численных процедур решения экстремальных задач, рассмотренных в главе 3. Поскольку уравнения крупномасштабного объекта соответствуют (24), а вектор субоптимальных управлений U_i^* можно вычислить с помощью численно-аналитической процедуры:

$$U^* = y + a\tilde{P}^0 [\Phi(y) - y], \quad y = P^0(U^0),$$

где $P^0(U^0)$ – оператор проектирования на линейное многообразие вида, а $\tilde{P}^0$ – проектор на соответствующее линейное подпространство. Оператор $z = \Phi(y)$ – проектор на множество D , определяемое ограничениями (26) и (27) так, что

$$D = \{(X, U) \mid X^- \leq X \leq X^+, \quad U^- \leq U \leq U^+\}.$$

В результате $z = \Phi(y)$ представляет собой оператор $U_i = \Phi(X_k)$, описывающий оператор управления локальными подсистемами с обратной связью по состоянию каждой подсистемы.

Условия стабилизируемости по частям. Эти условия совпадают с известными условиями стабилизируемости объектов. Представим эти условия в форме, которая будет необходима в дальнейшем. Если ввести семейство функций Ляпунова

$$V_1 = X_1^T P_1 X_1, \quad \dots, \quad V_N = X_N^T P_N X_N,$$

где P_i – положительно определенные симметрические матрицы, и вычислить полную производную по времени для этого семейства в силу системы (31) при условии: $H_{ij} = 0$, то

$$\dot{V}_i = X_i^T (P_i A_i + A_i^T P_i) X_i + \theta(X_i U_i). \quad (29)$$

В последних соотношениях, записанных в общем виде, учитывается, что формирование управлений локальным регулятором характеризуется линейной и нелинейной составляющими.

Оценка **области притяжения** может быть получена по стандартной методике, позволяющей задать область притяжения неявным образом:

$$\theta(X_i, U_i) \leq -X_i^T \nabla Q_i X_i - U_i^T R_i U_i. \quad (30)$$

Применение оценки позволяет получить предельные значения управлений, которые необходимы для стабилизации системы в некоторой области фазового пространства. Соблюдение условий устойчивости в ограниченной области не является предельным случаем. Область устойчивости можно расширить до асимптотической устойчивости в целом при введении взаимосвязей.

Стабилизация с учетом связывания подсистем. Рассмотрим полную производную функций Ляпунова для каждой подсистемы учетом влияния взаимосвязей с остальными подсистемами. Тогда можно получить представление полной производной по времени функции Ляпунова для отдельных подсистем

$$V_i'(X_i) \leq -\alpha_i V_i(X_i) + 2 \left(P_i X_i, \sum_{j=1}^N H_{ij} X_j \right) < 0, \quad (31)$$

С учетом ограничений на величину нормы операторов связей $\|H_{ij} X_j\| \leq h_{ij} \|X_j\|$ можно преобразовать соотношение (31) к виду:

$$\begin{aligned} V_i'(X_i) &\leq -\alpha_i V_i(X_i) + 2 \sum_{j=1}^N \|P_i X_i\| h_{ij} \|X_j\| \leq \\ &\leq -\alpha_i V_i(X_i) + 2 \sqrt{c_{i2} V_i(X_i)} \sum_{j=1}^N h_{ij} \|X_j\|. \end{aligned}$$

Воспользуемся результатами Бейли, применив оценки для квадратичных функций Ляпунова на основании информации о собственных числах матрицы. Такие оценки имеют вид:

$c_{i1} \|X_i\|^2 \leq V_i(X_i) \leq c_{i2} \|X_i\|^2$, где c_{i1} и c_{i2} - наименьшее и наибольшее из собственных значений матрицы P . Тогда оценка производной функции Ляпунова на траекториях системы примет вид

$$V'_i(X_i) \leq -\alpha_i V_i(X_i) + 2\sqrt{c_{i2} V_i(X_i)} \sum_{j=1}^N h_{ij} \|X_j\|.$$

Продолжая преобразование оценки, можно получить неравенство

$$V'_i(X_i) \leq -\frac{\alpha_i}{2} V_i(X_i) + 2 \left(\sum_{j=1}^N h_{ij} \|X_j\| \right) \frac{c_{i2}}{\alpha_i}.$$

В силу неравенства Коши

$$\left(\sum_{j=1}^N h_{ij} \|X_j\| \right)^2 \leq \sum_{j=1}^N h_{ij}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^N \|X_j\|^2,$$

можно представить полученную оценку в следующем виде

$$V'_i(X_i) \leq -\frac{\alpha_i}{2} V_i(X_i) + 2 \frac{c_{i2}}{\alpha_i} \sum_{j=1}^N h_{ij}^2 \sum_{j=1}^N \|X_j\|^2.$$

Учитывая приведенные оценки функции Ляпунова на основе собственных чисел матрицы квадратичной формы, можно получить

$$V'_i(X_i) \leq -\frac{\alpha_i}{2} V_i(X_i) + 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{c_{i2}}{\alpha_i c_{j1}} \sum h_{ij}^2 \right) V_j(X_j).$$

Далее воспользуемся теоремой о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина. В результате можно утверждать, что:

$$V_i(X_i(t)) \leq \eta_i(t), \quad t > 0, \text{ если } V_i(X_i(0)) \leq \eta_i(0),$$

и

$$\eta'_i = -\frac{\alpha_i}{2}\eta_i + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^N \left(\frac{c_{i2}}{\alpha_i c_{j1}} \sum h_{ij}^2 \right) \eta_{ij}.$$

Последнее условие является достаточным для асимптотической устойчивости замкнутой системы с алгоритмической обратной связью. Характерно, что применение операторного представления управлений локальными подсистемами позволяет использовать специальную методику исследования устойчивости.

Необходимо отметить, что на основе линейных систем сравнения можно сформулировать условия устойчивости в виде неравенств: $(-1)^i \Delta_i > 0$ где Δ_i – главные диагональные миноры матрицы сравнения.

Таким образом, рассмотренные методы вычисления управлений и синтеза замкнутых крупномасштабных систем управления ЭЭО для ограничения перетоков и управления частотой и активной мощностью позволяют использовать иерархические структуры управления, сложившиеся к настоящему времени в Единой энергосистеме России с учетом разделения задач по уровням ЦДУ и ОДУ ОЭС АСДУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Обзор исследований по вопросам управления частотой и мощностью энергетических объединений позволил сформулировать один из аспектов энергосбережения как задачу формирования ресурсов для системы совместного ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач и задачу регулирования частоты и обменной мощности объединенных энергосистем.

2. Математические модели энергетических объединений в виде коэффициентов распределения, коэффициентов влияния, системы обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных уравнений многоагрегатных систем позволяют обеспечить комплекс задач синтеза и исследования систем управления частотой и активной мощностью. Синтез управлений для задач ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач различного класса и задачи регулирования частоты и обменной мощности энергетических объединений должен обеспечивать технологические режимы энергетических объединений.

3. Математические постановки и формулировки задач систем ограничения перетоков и совместного формирования ресурсов и вычисления управлений сформулированы в виде совокупности задач математического программирования на основе принципов «рациональность-допустимость» и «оптимальность-допустимость», которые позволяют формализовать соответствующие целевые условия и технологические ограничения.

4. Задачи вычисления ресурсов и управлений систем ограничения перетоков активной мощности могут быть решены аналитическими или численно-аналитическими методами

математического программирования. Эти методы определяют прогнозы необходимых ресурсов для ограничения перетоков и регулирования частоты и обменной мощности энергетических объединений. Последнее может быть достигнуто за счет:

- вычислений прогнозов регулировочных диапазонов станций или «уставок» по предельным значениям перетоков и управлений.

- прогнозов заданий по обменным мощностям и прогнозов величин регулировочных диапазонов станций, выбираемых из условия сохранения статической устойчивости параллельной работы энергетических систем.

5. Задачи математического программирования для определения ресурсов системы совместного ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач и регулирования частоты и обменной мощности энергетических объединений позволяют создать алгоритмическую основу для решения задач энергосбережения и вычисления управляющих воздействий на регулирующие станции за счет универсальности ограничений и функционалов задач математического программирования.

6. Использование модульных (кусочно-линейных) и квадратичных функционалов позволяет обеспечить разнообразие вычислительных методов решения задач математического программирования рассматриваемого класса, включая численные, аналитико-численные и аналитические процедуры конечномерной оптимизации. Математические постановки перечисленных выше задач и подходы к численному или аналитическому решению сформулированных задач определяют комплекс методов и алгоритмов совместного прогнозирования и управления.

7. Разработанные модели и методы формирования ресурсов и управлений обобщают подходы, направленные на обеспечение энергетическими ресурсами систем управления по частоте и активной мощности в установившихся и переходных режимах. Полученные результаты позволяют обеспечить первичные и вторичные возможности сохранения устойчивости параллельной работы объединенных энергосистем за счет введения необходимых ресурсов управления в виде требуемых регулировочных диапазонов станций и предельных «уставок» по передаче активной мощности по линиям электропередач энергетических объединений.

8. Сформулированы аппроксимирующие задачи для определения ресурсов системы управления частотой и активной мощностью крупных энергетических объединений, которые построены на основе аппроксимации параллелепипедов ограничений соответствующими эллипсоидами в конечномерном пространстве ресурсов и управлений. При этом использована внутренняя аппроксимация допустимых множеств, которая строится как часть допустимого множества. Для аппроксимирующих задач предложена характеристика разделения возможных оптимальных решений, что позволило преобразовать общую задачу с ограничениями типа неравенств к двум вспомогательным задачам с ограничениями типа неравенств с учетом вариантов принадлежности оптимального решения внутренней части или границе допустимого множества, которое возможно на основе необходимых и достаточных условий типа Куна-Таккера.

9. Для аппроксимирующих задач на основе функций Лагранжа сформулирована система необходимых условий в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, для которых

предложена методика последовательного решения, позволяющая определить множители Лагранжа. Предложенные решения позволяют получить качественные результаты на основе конструктивных достаточных критериев совместности ограничений задач математического программирования, в частности, при определении необходимых ресурсов для управления частотой и активной мощностью. Предложенный критерий совместности ограничений носит общий характер для решения задач управления ЭЭО.

10. Предлагаемые методы позволяют дополнить существующее математическое обеспечение автоматизированного обеспечения диспетчерского управления объединенных диспетчерских управлений энергетических объединений (советчиков диспетчеров по типовым и нетиповым режимам) в части формирования прогнозируемых значений ресурсов управления для ЭС, внутрисистемных, межсистемных и транзитных перетоков активной мощности по ЛЭП.

11. Рассмотренные условия возникновения хаотических режимов позволяют направленно синтезировать управляющие алгоритмы с учетом специфики энергообъединений. Предлагаемые критерии и методы управления в условиях потенциальной возможности возникновения хаоса позволяют ввести соответствующие корректировки в законы управления, и повысить энергетическую безопасность ЕЭС России.

12. Полнота рассмотренных централизованных, иерархических и децентрализованных структур реализации методов и алгоритмов управления соответствует имеющейся структуре АСДУ ЕЭС России, что позволяет использовать результаты для обеспечения энергетической безопасности энергетики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абраменкова Н. А., Воропай Н. И., Заславская Т. Б. Структурный анализ электроэнергетических систем в задачах моделирования и синтеза. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. 224 с.
2. Автоматизированная система оперативно-диспетчерского управления электроэнергетическими системами / Под ред. Розанова М. Н., Семенова В. Л. Новосибирск: Наука, 1986. – 204 с.
3. Александров Г. Н. Молния и молниезащита / под ред. Козлова В. Н. М.: Наука. 2006.
4. Александров Г. Н., Лунин В. П. Управляемые реакторы. Учебное пособие. Центр подготовки кадров энергетики. СПб. 2005.
5. Алексеев С. В., Копылов И. Б., Машанский А. М. Описание энергообъединения как объекта управления режимом по частоте и активной мощности // Электричество, 1980, № 12, с. 23-30.
6. Алексеенко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Изд-во Институт компьютерных исследований. Новосибирск. 2005. – 504 с.
7. Али Р., Козлов В. Н. Теория автоматического управления. Синтез методами H_2 и H_∞ -теорий. СПб.: СПбГПУ, 2002. -90 с.
8. Аметистов Е. В. Основы теории теплообмена. М.: 2000.
9. Аметистов Е. В. Основы современной энергетики. М.: 2002.
10. Андреюк В. А., Сказыбаева Н. С. Методы построения консервативной модели энергосистемы для анализа режимов и устойчивости // Изв. РАН. Энергетика. 1997. № 5. с. 107-110.
11. Аржанников С. Г., Захаркин О. В., Петров А. М. Адаптивный алгоритм расчета дозировки УВ для централизованного комплекса ПА // В кн.: Объединенная энергетическая система Сибири: современное состояние и перспективы развития. Материалы конференции. Ч. 2. Новосибирск: 1996.
12. Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006. – 151 с.
13. Баринов В. А., Совалов С. А. Режимы энергосистем: методы анализа и управления. М.: Энергоатомиздат. 1990.

14. Бартоломей П. И., Грудинин Н. И. Расчет установившихся режимов электрических систем и их оптимизация методом квадратичной аппроксимации // Изв. РАН. Энергетика, 1992, № 5. с. 95-106.
15. Батенин В. М. Лазеры на самоограниченных переходах атомов металлов.- М.: Наука, 2009.
16. Беркович М. А., Комаров А. Н., Семенов В. А. Основы автоматики энергосистем. – М.: Энергоиздат. 1981.
17. Большов Л. А., Арутюнян Р. В., Васильев А. Д., Стрижов В. Ф. Физические модели тяжелых аварий на АЭС. М.: Наука, 1992 г.
18. Большов Л. А. О реальной экологической безопасности атомной энергетики. Доклад на Международной научно-технической конференции «Безопасность, эффективность и экономика атомной энергетики – 2006». МНТК-2006, Москва, ВНИИАЭС, 19-21 апреля 2006 г.
19. Бондаренко А. Ф., Комаров А. Н. Регулирование режимов работы энергетического объединения по перетокам мощности и поддержание нормального уровня частоты. Электричество. 1994. № 5. С. 1-11.
20. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.- М.: Книжный дом «Либроком», 2010.-224 с.
21. Будовский В. П. Риск дефицита мощности энергосистемы // Электричество. 2009. № 8. с. 17-26.
22. Бусурин В. Н., Козлов В. Н., Рассохин В. А., Шашихин В. Н. Иерархический подход к многорежимной оптимизации энергетических установок // Изв. РАН. Энергетика. 1996. № 2. с. 153-159.
23. Бутырин П. А., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. М.: Наука, 2006.
24. Васильев В. П., Козлов В. Н., Строганов Р. П. и др. Формализация задач оптимального управления внеплановой нагрузкой энергообъединений // Электричество, 1986, N 6.- с. 1-5.
25. Васильев В. П., Козлов В. Н., Строганов Р. П. Иерархическое управление внеплановыми нагрузками в энергообъединениях // Изв. РАН. Энергетика и транспорт. 1984. № 5. с. 22-28.
26. Васильев В. П., Козлов В. Н., Строганов Р. П. Электромеханические процессы при управлении частотой и активной

мощностью энергосистем // Изв. Вузов СССР. Электромеханика. 1980. № 12.

27. Васильев В. П., Козлов В. Н., Строганов Р. П. и др. Формализация задач управления энергообъединениями по частоте и активной мощности // Электричество. 1986. № 6.

28. Васильев Ю. С., Поршнев Г. П.. Машиностроение. Энциклопедия в 40 томах. Раздел 4. Расчет и конструирование машин. М.: Машиностроение, 2009. – 399 с.

29. Васильев Ю. С., Данилевич Я. Б., Рутберг Ф. Г. Творческий вклад академика РАН И. А. Глебова в решение научно-технических проблем. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 268 с.

30. Васильев Ю. С., Козлов В. Н. К синтезу адаптивного управления энергообъединениями // Известия РАН. Энергетика. 1998. № 1.

31. Вайман М. Я. Устойчивость нелинейных механических и электромеханических систем. М.: Машиностроение, 1981. 125 с.

32. Вайман В. Я. Исследование систем устойчивых «в большом». М.: Наука, 1981. 255 с.

33. Веников В. А., Суханов Р. П. Кибернетические модели электрических систем. Изв. вузов СССР – Электромеханика, 1982, с. 323.

34. Волков Э. П., Баринов В. А., Маневич А. С. Проблемы и перспективы развития электроэнергетики России. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 432 с.

35. Волков Э. П., Баринов В. А. Вопросы совершенствования систем управления развитием и функционированием электроэнергетики в условиях ее реформирования // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 6. с. 35-48.

36. Волчков Э. П. Пристенные газовые завесы. Новосибирск: Наука, 1983. – 240 с.

37. Воропай Н. И. Упрощение математических моделей динамики электроэнергетических систем. Новосибирск; Наука, 1981.

38. Воропай Н. И., Деревяшкин К. Н. Об учете распределенной генерации при анализе надежности основной структуры электроэнергетических систем // Методические вопросы надежности систем энергетики и методы их решения. Сб. статей в 2-х книгах. Книга 1. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – 250 с.

39. Воропаева Н. В., Соболев В. А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с.

40. Воронов А. А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. – 352 с.
41. Вычислительные методы для исследования энергетических систем. Под ред. проф. В. А. Веникова. М.: «Энергия», 1973.
42. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1976. – 336 с.
43. Галактионов Ю. И., Картвелишвили Н. А. Идеализация сложных динамических систем. М.: «Энергия», 1977.
44. Гамм А. З., Голуб И. И. Наблюдаемость электроэнергетических систем. – М.: Наука, 1990. – 220 с.
45. Герасимов А. С., Есипович А. Х., Зеккель А. С. Алгоритм безытеративного расчета области существования стационарных режимов энергообъединений. Электричество. 2002. N 1. С. 9-14.
46. Глебов И. А. Научные основы проектирования систем возбуждения мощных синхронных машин. Л.: Наука, 1985. – 400 с.
47. Глебов И. А., Данилевич Я. Б. Научно-технические проблемы крупного турбогенераторостроения. М.: Наука. 1990.
48. Глебов И. А., Кашарский Э. Г., Рутберг Ф. Г. Синхронные генераторы кратковременного и ударного действия. Л.: Наука. Ленинградское отделение, 1985. 324 с.
49. Глухих В. А., Тананаев В. А., Кириллов И. Р. Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике М. : Энергоатомиздат, 1987. - 264 с.
50. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. Л.: Наука, 1985. –502 с.
51. Грехов И. В. Кремниевая силовая электроника (Состояние и перспективы развития) // Научно-технические ведомости СПбГТУ / Санкт-Петербургский технический университет — Санкт-Петербург., 2000 . № 3. С. 8-18.
52. Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Роббенс–Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наук. думка, 1984. – 308 с.
53. Давыдов В. Г. и др. Цифровой регулятор частоты и активной мощности для объединенных энергосистем. «Электричество», 1970, № 12, стр. 11–14.

54. Давыдов В. Г., Козлов В. Н., Куприянов В. Е. и др. Использование адаптивного управления в АСУ крупными энергообъединениями. – В кн.: Труды ЛПИ № 337. Изд. Ленингр. Политехнического института, Л., 1974.

55. Данилевич Я. Б. Фундаментальные проблемы электроэнергетики // Проблемы создания и эксплуатации новых типов электроэнергетического оборудования (Вып. 3). СПб.: ОЭЭП РАН. СПб.: 2001. С. 3-9.

56. Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л. Теоретические основы электротехники. В 3-х т. СПб.: Питер, 2003.

57. Демирчян К. С., Бутырин П. А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1988.- 335 с.

58. Диденко А. Н., Григорьев В. П. Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977.

59. Драгунов Ю. Г., Махутов Н. А., Фролов К. В. Динамика и прочность водо-водяных энергетических реакторов. М.: Наука, 2004.-440 с.

60. Дьяков А. Ф., Окин А. А., Семенов В. А. Диспетчерское управление мощными энергообъединениями. М.: изд-во МЭИ, 1996. – 243 с.

61. Дьяков А. Ф., Нечаев В. В., Ольховский Г. Г. Техническое перевооружение действующих ТЭС // Теплоэнергетика. 1996. № 7.

62. Евдокунин Г. А., Рагозин А. А. Исследование статической устойчивости дальних линий электропередач с управляемыми шунтирующими реакторами. - Электричество, 1996, N 8.

63. Жданов П. С. Устойчивость электрических систем. – М.; Л.: ГЭИ, 1948. – 399 с.

64. Заборовский В. С., Козлов В. Н., Сегура Х. Характеристика чувствительности энергообъединений к управлению частотой и активной мощностью // Электричество. 1986. № 3.

65. Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. Наукова думка, Киев, 2004. – 588 с.

66. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959. – 324 с.

67. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. Наука, 1964.

68. Кадомская К. П. Квазистационарные перенапряжения. Изд-во НЭТИ. Новосибирск. 1981.

69. Калюжный А. Х., Соколов Ю. В. Исследование установившихся и неуставившихся послеаварийных режимов с учетом динамики частоты // Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук, 1978, № 13, вып. 3.

70. Каньгин В. В., Козлов В. Н. Аппаратные и программные средства систем управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 418 с.

71. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М: Наука, 1980.

72. Кирчмейер Л. К. Применение вычислительной модели при разработке систем автоматического управления режимом энергосистемы. В сб. «Автоматическое регулирование частоты и активной мощности в энергосистемах». Под ред. Л. Д. Стернинсона. Госэнергоиздат, 1960.

73. Ковальчук Б. М., Жерлицын А. А., Смородов Г. В. Конденсаторные блоки с воздушной изоляцией для линейных трансформаторов // Приборы и техника эксперимента, 2009, - № 6. - с. 1-13.

74. Коверда В. П., Решетников А. В., Скоков В. Н. и др. Фликкершум и самоорганизованная критичность в кризисных режимах кипения // Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ). РАН, Сиб. отд-ние.-Новосибирск.- 2002.-Т. 43, № 1 (251).- с. 131-136.

75. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007.– 472 с.

76. Козлов В. В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре.- Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 320 с.

77. Козлов В. Н., Строганов Р.П., Ярмийчук В. Д. и др. Использование адаптации в автоматических системах ограничения перетоков активной мощности по ВЛ для повышения надежности и эффективности работы энергообъединений // Доклады на III Всесоюзном научно-техническом совещании по устойчивости и надежности энергосистем СССР. Л.: Энергия. 1973.

78. Козлов В. Н. Анализ динамических систем с использованием нелинейных операторов. – Тезисы IX Всесоюзного научно-технического совещания «Создание и внедрение автоматизированных и автоматических систем управления непрерывными и дискретно-непрерывными технологическими процессами», ч. 1. – М., 1980, с. 88-90.

79. Козлов В. Н. Синтез и исследование алгоритмов оптимизации адаптивной системы автоматического ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач энергообъединений / Автореферат дисс. к.т.н. Л.: ЛПИ им. М. И. Калинина. 1975. 20 с.

80. Козлов В. Н. К аналитическому решению систем линейных алгебраических неравенств // Автоматика и телемеханика, 1989, № 4. с. 101-104.

81. Козлов В. Н. Анализ устойчивости алгоритмически оптимизируемых систем управления // Автоматика. 1992. № 2. с. 9-13.

82. Козлов В. Н. Функциональный анализ с приложениями в энергетике. Изд-во Политехн. ун-та. СПб.: 2011.- 420 с.

83. Козлов В. Н. Математические модели совместного ресурсного обеспечения и управления системы ограничения перетоков активной мощности энергообъединений // Изв. РАН. Энергетика. 2006. № 5. с. 57-62.

84. Козлов В. Н. Управление энергетическими системами. Электромеханические процессы // под ред. акад. Ю. С. Васильева. СПб.: изд-во СПбГПУ.- 2000, 166 с.

85. Козлов В. Н. Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем. – Л.: Изд-во ЛГУ им. А. А. Жданова, 1986. – 167 с.

86. Козлов В. Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений. М.: «Проспект». 2010. – 173 с.

87. Козлов В. Н. Метод негладких операторов: теория и приложения. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008.- 100 с.

88. Козлов В. Н. Нелинейные операторы одного класса в задачах управления. Труды ЛПИ им. М. И. Калинина. – Л., 1980, с. 105 – 106.

89. Козлов В. Н. Необходимые условия и оценки оптимальности нелинейных систем. – Труды ЛПИ им. М. И. Калинина, – Л., 1981.-с. 98.

90. Козлов В. Н. Математические модели для проектирования нелинейных систем управления // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1982. № 6. С. 45-51.

91. Козлов В. Н. Неявный метод анализа кусочно-линейных управляемых систем // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1984. № 6. С. 105-108.

92. Козлов В. Н. Математические модели систем управления с

алгоритмической обратной связью // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1987. № 10. С. 35-40.

93. Козлов В. Н. Синтез управлений частотой и активной мощностью энергообъединений // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1987. № 1. С. 43-46.

94. Козлов В. Н., Строганов Р. П. Математическая модель асимптотического движения сложных энергообъединений // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1980. № 5. С. 38-46.

95. Козлов В. Н., Шашихин В. Н. Синтез крупномасштабных систем с запаздыванием в перекрестных связях // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. № 4. с. 20-25.

96. Козлов В. Н., Шашихин В. Н. Принцип сравнения в синтезе координирующих управлений многомашинными энергосистемами // Изв. РАН. Энергетика. 1995. № 1. с. 65-76.

97. Козлов В. Н., Шашихин В. Н. Синтез стабилизирующих управлений многомашинными энергосистемами при параметрических возмущениях // Изв. РАН. Энергетика. 1998. № 3. с. 97-104.

98. Козлов В. Н., Каменский В. Е., Шашихин В. Н. Динамическая оптимизация систем управления частотой и мощностью энергоагрегатов // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 3. С. 58-67.

99. Козлов В. Н., Шашихин В. Н. Стратегия гарантированного результата в синтезе двух уровневой системы управления синхронных генераторов // Изв. РАН. Энергетика. 2006. № 5. С. 63-70.

100. Козлов В. Н., Магомедов К. А. Аддитивные кусочно-линейные разностные схемы для анализа электрических цепей // Изв. РАН. Энергетика. 2002 № 4.

101. Козлов В. Н., Нгуен Х., Фирсов А. Н. Математическое моделирование и оптимизация гидравлических сетей при установившихся режимах транспортировки слабосжимаемой жидкости. Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. № 2, 2011.

102. Козлов В. Н., Колесников Д. Н. Решение задач автоматики и вычислительной техники методами исследования операции. – Л.: ЛПИ им. М. И. Калинина, 1982. – 102 с.

103. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Заборовский В. С. Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. - Л.: ЛГУ им. А. А. Жданова, 1989. – 232 с.

104. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Шашихин В. Н. Модели, устойчивость и синтез автоматических систем (с приложением в энергетике) – СПб.: изд-во СПбГПУ, 1996.– 103 с.

105. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Шашихин В. Н. Вычислительная математика и теория управления. СПб.: изд-во СПбГТУ, 1996. –180 с.

106. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Шашихин В. Н. Управление энергетическими системами. Ч. 1. Теория автоматического управления / под ред. Козлова В. Н. СПб.: Изд-во политехн. ун-та. 2003. – 256 с.

107. Козлов В. Н. Управление энергетическими системами. Ч. 2. Электромеханические процессы. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. – 256 с.

108. Козлов В. Н., Магомедов К. А. Управление энергетическими системами. Ч. 3. Модели теплопроводности. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2003. – 160 с.

109. Козлов В. Н., Хлопин С. В. Управление энергетическими системами. Ч. 4. Обобщенные модели теплопроводности. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. – 125 с.

110. Козлов В. Н., Акимов И. А. Управление энергетическими системами. Ч. 5. Математические модели и разностные задачи теплофизических процессов в многослойных конструкциях с фазовыми переходами. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2007. – 205 с.

111. Козлов В. Н., Пономарев А. Г. Управление энергетическими системами. Ч. 6. Обобщенные математические модели для управления электромеханическими процессами. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2008. – 115 с.

112. Козлов В. Н., Магомедов К. А. Негладкие операторы и электрические цепи. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2004.- 70 с.

113. Козлов В. Н., Тросько И. У. О структуре систем управления с хаотическими режимами // Фундаментальные исследования и инновации в национальных технических университетах. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2011. – с. 140-148.

114. Козлов В. Н., Шишкин К. А. Управление энергетическими системами. Часть 7. Математические модели и методы прогнозирования генерируемых и сетевых ресурсов и управления частотой и активной мощностью. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 100 с.

115. Козлов В. Н., Строганов Р. П. Адаптивный алгоритм динамической оптимизации одного класса систем ограничения // В кн.: Синтез алгоритмов сложных систем. Изд. Таганрогского радиотехн. Ин-та, Таганрог, 1974.

116. Козлов В. Н., Строганов Р. П., Ярмийчук В. Д. Исследование динамики цифровой системы управления частотой и активной мощностью в объединенных энергосистемах на цифроаналоговом комплексе // Сб. Теория, математическое обеспечение и применение неоднородных вычислительных систем. М.: МДНТП, 1973.

117. Концепция регулирования частоты и перетоков в энергообъединении стран СНГ и Балтии. Утверждена решением Электроэнергетического совета СНГ от 27 октября 2005 г. N 28.

118. Коротеев А. А., Мадеев В. Г. Безопасность эксплуатации ядерных реакторных установок: Учеб. пособие - М.: Изд-во МАИ, 2001. - 196 с.

119. Коротеев А. С., Мартишин В. М., Пришледов А. Б. Ракетные двигатели и ракетные установки на основе газофазного ядерного реактора / под ред. Коротеева А. С. М.: Машиностроение, 2002.- 432 с.

120. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / под ред. А. С. Коротеева. М.: Машиностроение, 2004.

121. Короткевич А. М. О величине вращающегося резерва мощности в энергосистемах, имеющих значительную долю тепловых электростанций в парке генерирующего оборудования // В сб. Математические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 55 Методические и практические задачи надежности систем энергетики.- Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005.- с. 48-51.

122. Костюк В. В., Лепешинский И. А., Иванов О. К., Зуев Ю. В., Решетников В. А., Воронецкий А. В., Ципенко А. В. Исследование процессов межфазного взаимодействия в многофазных турбулентных струях М.: Математическое моделирование Т. 11, № 4.- 1999.- с. 59-69.

123. Котов Ю. А., Лабутин С. К., Рукин С. Л. и др. Исследование процессов нано- и субсекундного обрыва сверхмощных токов в полупроводниках и создание на их основе нового класса сверхмощных полупроводниковых приборов и электрофизических устройств. Екатеринбург. Ин-т электрофизики УрО РАН. 2002.

124. Кощеев Л. А. Автоматическое противоаварийное управление в энергетических системах. Л.: 1990. – 140 с.

125. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: «Наука», 1969. - 455 с.

126. Крумм Л. А. Методы оптимизации при управлении электроэнергетическими системами. Новосибирск: Наука, 1981.

127. Кузовкин В. А., Степанов А. В. Оценка запаса динамической устойчивости энергосистем прямым методом Ляпунова. Электричество. 2002. N 1. С. 2-8.

128. Кузьменко А. А. Синэнергетическое управление электроэнергетическими системами. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006.- 88 с.

129. Куприянов В. Е. Разработка и исследование алгоритмов ограничения перетоков активной мощности энергообъединений. Автореф. дисс. на соиск. ученой степени к.т.н. Л.: ЛПИ им. М. И. Калинина. 1973. – 16 с.

130. Кутовой Г. П., Макаров А. А., Шамраев Н. Г. Создание благоприятной базы для развития российской электроэнергетики на рыночной основе // Теплоэнергетика. 1997. № 11.

131. Л. А. Крумм. Методы решения общих уравнений стационарного режима электрической системы с учетом статических характеристик нагрузок и генераторов при автоматическом регулировании частоты, напряжения и мощности. Изд-во Таллинского политехн. ин-та. Таллин, 1957. Серия А, № 124. –19 с.

132. Левинштейн М. Л., Щербачев О. В. Статическая устойчивость электрических систем. 1994.

133. Леонов Г. А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. – 144 с.

134. Леонтьев А. И., Волчков Э. П., Лебедев А. В. Тепловая защита стенок плазмотрона (низкотемпературная плазма). Т. 15. Новосибирск, СО РАН, 1995.

135. Леонтьев А. И. Где мысль сильна – там дело полно силы. Лекция Лауреата премии «Глобальная энергия». Изд-во Политехн. ун-та. СПб.: 2011. – 20 с.

136. Лоечко М. Ю. Улучшение внешней оценки множества решений задач удовлетворения ограничений // Новосибирск, 2000.- 42 с. – Препр. / РАН. ИСИ; № 79.

137. Макаров А. А., Мелентьев Л. А. Методы исследования и оптимизации энергетического хозяйства. Новосибирск: Наука. СО.- 1973. 274 с.
138. Макаров А. А. Мировая энергетика и Евразийское энергетическое пространство. М.: Энергоатомиздат, 1998.
139. Макаров А. А., Веселов Ф. В., Волкова Е. А., Макарова А. С. Методологические основы разработки перспектив развития электроэнергетики. М.: ИНЭИ РАН, 2007. 102 с.
140. Малкин П. А. Обеспечение надежности покрытия нагрузки в рыночных условиях // В сб. Математические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 55 Методические и практические задачи надежности систем энергетики.- Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005.- с. 103-109.
141. Маркович Л. М. Режимы энергетических систем. М.: Энергия. – 430 с.
142. Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лиля С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наук. Думка, 1989.- 272 с.
143. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. – М.: Физматлит, 2001. – 384 с.
144. Меркурьев Г. В., Шаргин Ю. М. Устойчивость энергосистем. Монография. Книга 2 СПб.: НОУ «Центр подготовки кадров энергетики». 2008. – 376 с.
145. Месарович М., Такахаро Н., Мако О. Теория многоуровневых иерархических систем. М.: Мир, 1975. 400 с.
146. Минаева Н. В. О критериях адекватности математических моделей консервативных и неконсервативных систем // Изв. Вузов. Машиностроение. 2006. № 1. С. 23-26.
147. Михневич Г. В. Синтез структуры системы автоматического регулирования возбуждения синхронных машин. – М.: Наука, 1984.
148. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990. 206 с.
149. Накоряков В. Е. Эволюция ударной волны в газожидкостной среде кластерной структуры / Накоряков В. Е., Донцов В. Е. // Доклады Российской академии наук. - 2004. - Т. 394, N 4. - С. 480-483.

150. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / под ред. В. А. Треногина, А. Ф. Филиппова. – М.: Физматлит, 2003. – 464 с.

151. Ножин Л. Э., Рагозин А. А., Родченко Е. А. Системы автоматического регулирования частоты и активной мощности. Л.: 1989.- 89 с.

152. Ольховский Г. Г. Пути развития мировой энергетики // Электрические станции. 1999. № 6.

153. Ольховский Г. Г., Тумановский А. Г. Теплоэнергетические технологии в период до 2030 г. // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 6. с. 79-94.

154. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986, 616 с.

155. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: 1979.

156. Полежаев Ю. В., Михатулин Д. С. Теплообмен в гетерогенных потоках // В кн. Машиностроение. Энциклопедия в 40 томах. Том 1-2, Теоретическая механика, термодинамика, раздел 5. М.: Машиностроение, 1999. – с. 383-433.

157. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. -303 с.

158. Пономарев-Степной Н. Н., Лихоманов А. А., Дербакова Е. П., Клосс Ю. Ю., Колядко Г. С., Мадеев В. Г. Разработка на основе OpenGL проблемно-решающей среды моделирования физических процессов переноса ядерных излучений // Электронный журнал «Исследовано в России», 4, 1777-1781, 2001.

159. Правила оперативно-диспетчерского управления в электроэнергетике. Постановление Правительства РФ от 27 декабря 2004 г. N 854.

160. Приказ ОАО РАО «ЕЭС России» от 18.09.2002 № 524 «О повышении качества первичного и вторичного регулирования частоты электрического тока в ЕЭС России».

161. Путилова А. Т., Тагиров М. А., Заславская Т. Б. Об аналитических критериях синхронной динамической устойчивости многомашинных систем // Изд-во СО АН СССР. 1968. Вып. 2. № 8. с. 148-154.

162. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.- М.: Наука, 1975.

163. Режимная управляемость систем энергетики / Кощеев Л. А., Руденко Ю. Н., Ставровский Е. Р. и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. - 234 с.

164. Родюков Ф. Ф. Математическая модель большой электро-энергетической системы. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. Ун-та, 2006. – 153 с.

165. Рудницкий М. П. Элементы теории устойчивости и управления режимами энергосистем. Свердловск: Изд-во УПИ, 1984. – 96 с.

166. Рутберг Ф. Г., Гончаренко Р. Б., Кашарский Э. Г., Ханларова Н. Г. О режимах стабилизатора частоты в энергосистеме // Проблемы создания и эксплуатации новых типов электроэнергетического оборудования (вып. 3). СПб.: ОЭЭП РАН, 2001. С. 18-26.

167. Рутберг Ф. Г., Шакарян Ю. Г., Гончаренко Р. Б. и др. О перспективных направлениях использования асинхронизированных генераторов в электроэнергетике // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 1. с. 1-33.

168. Рутберг Ф. Г., Гончаренко Р. Б., Кашарский Э. Г. Перспективы энергосбережения в электрических сетях с пониженной динамической устойчивостью при помощи маховичковых агрегатов // Изв. РАН. Энергетика, 1999. № 3.

169. Рыкованов Г. Н., Андрияш А. В. и др. Генерация лазерного рентгеновского излучения при двухимпульсном облучении мишеней на пикосекундной установке СОКОЛ-П // Квантовая электроника. Quantum Electronics: ежемесячный журнал / Российская академия наук. Физический институт им. П. Н. Лебедева, Институт общей физики им. А. М. Прохорова.- М., 2006 .- Т. 36, № 6 .- С. 511-514.

170. Саркисов А. А. Научно-технические проблемы создания термоэлектрических генераторов с ядерным нагревом // Известия РАН. Энергетика. М.: 1995. № 4.

171. Селезнев В. Е. Численное моделирование пожаров на объектах топливно-энергетического комплекса // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 1.

172. Сидоров А. Ф. Исследование предельных по частоте дефицитных режимов энергосистемы // Электричество. М.: 2002. № 1. – с. 20-24.

173. Системный анализ и принятие решений / под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. М.: Изд-во «Высшая школа», 2004. -800 с.
174. Системный анализ и принятие решений. Словарь-справочник / под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. М.: Высшая школа. 2005.- 605 с.
175. Справочник. Термины и определения ОАО РАО «ЕЭС России» (утвержден приказом N 296 от 11.05.2005).
176. Стандарт ОАО РАО «ЕЭС России» СТО 17330382.29.240.001-2005 Правила предотвращения развития и ликвидации нарушений нормального режима электрической части энергосистем.
177. Строганов Р. П. Управляющие машины и их применение. – М.: Высшая школа, 1978.
178. Строганов Р. П., Юревич Е. И., Давыдов В. Г., Куприянов В. Е. Адаптивная система ограничения перетоков активной мощности по линиям электропередач для Единой энергетической системы // Сб. Теория и применение адаптивных систем. Алма-Ата, 1971.
178. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
179. Туккель И. Л. Исследование динамики совместного регулирования частоты, сальдо и перетоков в объединенных энергосистемах. Автореф. канд. дисс., ЛПИ им. М. И. Калинина, 1970.
180. Устинов С. М., Масленников В. А. Аппроксимация модального управления в задачах статической устойчивости энергосистем // Изв. РАН. Энергетика. 2006. № 5. с. 91-97.
181. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. – М.: Наука, 1974, с. 256.
182. Ушаков Е. И. О моделях переходных процессов ЭЭС с учетом частоты // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 3. с. 63-67.
183. Фаворский О. Н., Леонтьев А. И., Федоров В. А. и др. Эффективные технологии производства электрической и тепловой энергии // Энергия: экономика, техника, экология.- 2002. № 7. с. 10-13.
184. Федеральный закон «О техническом регулировании» N 184-ФЗ.
185. Федоров М. П., Романов М. Ф. Математические основы экологии. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999, 156 с.
186. Федосов Е.А. Новые перспективные методы проектирования многомерных динамических систем. М.: Наука, 1989.
187. Филиппов С. П. Энергетические ресурсы мира: стоимостной

анализ / Рос. АН, Сиб. отд-ние, Сиб. энерг. ин-т им. Л. А. Мелентьева, Иркутск, 1994. –61 с.

188. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.- 448 с.

189. В. Е. Фортов, Д. Хоффманн, Б. Ю. Шарков. Интенсивные ионные пучки для генерации экстремальных состояний вещества, УФН, 2008, 2, с. 113-139.

190. Фортов В. Е., Шпильрайн Э. Э. Энергия и энергетика. – М.: Изд-во «Бурос» 2004. – 76 с.

191. Харитонов В. Л. Интервальная устойчивость полиномов в задачах управления. Автореферат на соискание ученой степени д.ф.-м.н. СПб, СПбГУ. 1994.

192. Хлопкин Н. С. О перспективах гражданского атомного флота // Энергия: экономика, техника, экология. - 2006. - N 8. - с. 12-18.

193. Хомич В. Ю., Иванов Е. В., Мошкунев С. И. и др. Генератор высоковольтных наносекундных импульсов на основе составного твердотельного коммутатора // Прикладная физика: Науч.-техн. журн. / ; Всерос. науч.-исслед. ин-т межотрасл. информации, Акад. технол. наук России, Моск. физ. об-во. Москва, 2006 .- № 2 .- С. 122-125.

194. Хэррис К., Валенка Ж. Устойчивость динамических систем с обратной связью. М.: Мир, 1987.- 360 с.

195. Цурков В. И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1991. 351 с.

196. Черный Г. Г. Газовая динамики. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 424 с.

197. Чубраева Л. И. Генераторы нетрадиционного исполнения: исследования и методы расчета. Научное издание. Л., Наука. Ленингр. отделение. 1991. – 125 с.

198. Чуканов В. Н., Коробицын Б. А., Якшина Н. В. Моделирование радиоактивного загрязнения р. Течи с применением искусственных нейронных сетей // Атомная энергия : ежемесячный теоретический и научно-технический журнал / Федеральное агентство по атомной энергии; Ядерное общество России; Российская академия наук .- М., 2008 .- Т. 105.- Вып. 2.-С. 107-112.

199. Шарковский А. Н. Динамика одномерных отображений. Киев. Наукова думка. 1989.

200. Шарков Б. Ю., Субботин В. И., Смирнов В. П., и др. Ядерный синтез с инерционным удержанием, Физматлит, 2005.

201. Шашихин В. Н. Децентрализованное субоптимальное управление параметрически возмущенными системами с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998, № 1, с. 56-63.

202. Шашихин В. Н. Теория автоматического управления. Методы декомпозиции, агрегирования и координации. Учеб. пособие. СПб: изд-во Политехн. ун-та, 2004. – 166 с.

203. Щедрин Н. Н. Упрощение электрических систем при моделировании. – М.: Л.: Энергия, 1966. – 159 с.

204. Шейндлин А. Е. Новая энергетика. М.: 1987.

205. Graner H. Vorschläge für den Betrieb von Netzverbänden Elektrotech., Z, 1934, Bd 55, s. 1069.

206. Darries G. Frequenz und Leistungsregulierung in grossen Netzverbänden, Bull. Sweiz. Elektrotech. Ver. 1952, Bd 43, s. 552.

207. Kozlov V. N. The Method of Minimization of Linear Functionals Based on Kompakt Sets. Proceedings of the 12th international workshop on computer science and information technologies (CSIT 2010), Russia, Moscow-Saint-Petersburg, Russia, 2010. Volume 2. p. 157-159.

208. Saaty Tomas L. Modern nonlinear equations. Dover Publications, Inc., New York. 1981.

209. Semadeni Z. Banach spaces continuous functions, Warszawa, 1971, s. 558.

210. Wilson R. G., Fischer D. G., Seborg D. E. Model reduction for discrete – time dynamic system. Int. J. Control, 1972, v. 16, № 3.

211. Ansorge R., Sonar T. Mathematikal Models of Fluid Dynamics. Weinheim / WILEY-VCH Verlag. 2009. 227 p.

212. Kirk D. Optimal Control Theorie and Introduction. Mineola, New York. 1998. 452 p.

213. Deimling K. Nonlinear functional analysis. Berlin : Springer, 1985. 450 p.

214. Friedman A. Generalizet Funktions and Partial Differential Eguations. Mineola. New York. Dover Publikations, Inc. 2005. 340 p.

215. Friedman A. Differential Games. Mineola. New York. Dover Publikations, Inc. 1999. 338 p.

216. Kaballo W. Grundkurs Funktionalanalysis. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg / 2011. 344 p.
217. Leigh J. R. Functional Analysis and Linear Control Theorie. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 1980. 160 p.
218. Mendelson E. Number system and the foundations analysis. New York, Akademic Press, 1973. 358 p.
219. Bruce A. Francis and Allen R. Tannenbaum. Feedback Control, Nonlinear Systems, and Complexity. Springer-Verlag London Limited, 1995. 275 p.
220. Semadeny Z. Functions Space of continuous. Warszawa. 1971. 559 p.
221. Momoh James A. Elektric Power Systems Application of Optimisation, Second Edition (Power Engineering (Willis)). 2008. 450 p.
222. Zames G. Feedback Control. Nonlinear System. Francis, Bruce.- 1994.
223. Recommended Practice for Excitation System Models for Power System Stability Studies, IEEE Power Engineering Society, 2005.
224. Paul M. Anderson, B. L. Agrawal, J. E. Jan Ness. Subsynchronous Resonance in Power Systems, January 1999, Wiley-IEEE Press.
225. A. M. Harb, M. S. Widyan, Modern nonlinear Theory As applied to SSR of the IEEE second Benchmark Model, Bologna PowerTech 2003 Conference, Bologna-Italy 2003.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Козлов В. Н., Нгуен Х. Д., Фирсов А. Н.

Рассматривается гидравлическая сеть (ГС), схема которой иллюстрируется на рис. П.1. Представление гидравлической сети с помощью графа, состоящего из m узлов, n ветвей и s линейно-независимых контуров. Узлы нумеруются индексом i , а ветви сети индексом j . Модель ГС рассмотрена в [П.1].

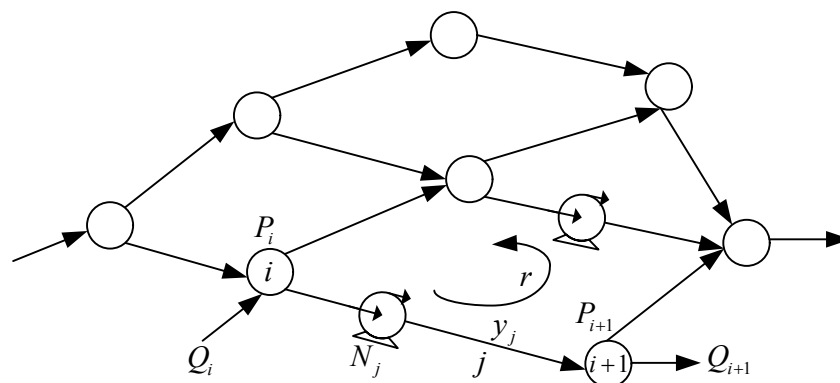


Рис. П.1. Схема гидравлической сети (N_j — насос, создающий действующий напор или активное давление; r — r -й контур)

Структура (топология) ГС описывается матрицей инцидентий $\bar{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{i=m, j=n}$ размера $(m \times n)$:

$$\bar{A}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если поток по ветви } j \text{ не имеет связь с узлом } i; \\ 1, & \text{если поток по } j\text{-й ветви, примыкающей к } i\text{-му узлу,} \\ & \text{направлен в положительном направлении;} \\ -1, & \text{если поток направлен в отрицательном направлении.} \end{cases} \quad (1)$$

Каждый столбец матрицы $\bar{A}$ имеет только два ненулевых элемента, равных 1 или -1, поэтому сумма всех ее строк представляет собой нулевую строку, что означает их линейную зависимость. Таким образом, ранг матрицы $\bar{A}$ равен $(m-1)$. В силу этого свойства матрицы $\bar{A}$ может использоваться неполная матрица соединений A размера $((m-1) \times n)$ для описания структуры гидравлической сети.

Система линейно-независимых контуров ГС описывается с помощью матрицы B размера $(c \times n)$:

$$B_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j\text{-я ветвь не принадлежит } r\text{-му контуру;} \\ 1, & \text{если } j\text{-я ветвь принадлежит } r\text{-му контуру и положительное} \\ & \text{направление потока по ней совпадает с направлением обхода контура;} \\ -1, & \text{если } j\text{-я ветвь принадлежит } r\text{-му контуру и ее направление} \\ & \text{не совпадает с направлением обхода контура.} \end{cases} \quad (2)$$

Узлы гидравлической сети являются источниками, потребителями или точками ветвления. Пусть Q_i – расход жидкости источников или потребителей и P_i – давление в i -м узле, причем:

$$Q_i = \begin{cases} > 0, & \text{для источников;} \\ < 0, & \text{для потребителей;} \\ = 0, & \text{для узлов ветвлений.} \end{cases} \quad (3)$$

Матрица A используется для формирования уравнений баланса конечных приращений расходов, а матрица B – для баланса конечных приращений (перепадов) давлений. Для разработки математической модели гидродинамики течения жидкости исходная ГС разделяется на элементарные линейные участки трубопроводов, а затем записывается система уравнений динамики жидкости для каждого линейного участка. При этом

пренебрегаются потерями в точках соединений между элементами ГС (между отдельными трубами или между трубой и насосом). Тогда можно рассматривать давления и расходы на выходе одного элемента в качестве входных давлений и расходов для следующих элементов. В точках соединения трех или более труб на входах и выходах элементов должен выполняться закон сохранения массы. На практике при исследовании гидродинамики в системе трубопроводов, как правило, применяется одномерный способ описания процессов перекачки жидкости. При этом предполагается, что труба имеет форму круглого цилиндра и постоянную по длине толщину стенок. Стенки трубы считаются упругими, а течение в трубе предполагается осесимметричным. Сдвиговая вязкость жидкости считается постоянной, при этом объемная вязкость жидкости не учитывается. Кроме того, при перекачке жидкости по системе трубопроводов скорость движения жидкости можно считать малой в сравнении со скоростью звука в жидкости. Система уравнений описывает динамику течения жидкости в j -й трубе в координатах «расход-давления» следующим образом [П.2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_j}{\partial z} + \frac{S_j}{c^2} \frac{\partial p_j}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial p_j}{\partial z} + \frac{1}{S_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} + 2a_j x_j \right) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где: $p_j(z, t)$ – давление жидкости в j -й трубе; $x_j(z, t) = \rho S_j w_j$ – массовой расход в j -й трубе. Величина $2a_j = \lambda_j |w_j| / 2d_j$ называется коэффициентом затухания в j -й трубе; w_j – скорость жидкости в j -й трубе; S_j – площадь сечения j -й трубы; d_j –

диаметр j -й трубы; λ_j – коэффициент потери давления на трения j -й трубы; c – скорость распространения звука в жидкости; z – координата по длине трубы.

Система уравнения (4) содержит элемент $2a_j x_j$, который является нелинейным в отношении от расхода x_j , что существенно затрудняет решение. В практике используются способы линеаризации, описывающие нелинейные элементы:

$$2a_j x_j = \frac{\lambda_j |w_j|}{2d_j} x_j = b_j x_j, \quad (5)$$

где $b_j = \left(\frac{\lambda_j |w_j|}{2d_j} \right)_{cp} = const > 0$. При ламинарном режиме течения

жидкости в круглых трубах коэффициент потери давления на трения $\lambda_j = 64/Re$, где $Re = \rho |w_j| d_j / \mu$ – число Рейнольдса. Тогда:

$$2a_j = \frac{\lambda_j |w_j|}{2d_j} = \frac{64}{\frac{\rho |w_j| d_j}{\mu}} \frac{|w_j|}{2d_j} = \frac{32\mu}{\rho d_j^2} = b_j = const, \quad (6)$$

где μ – динамическая вязкость жидкости.

Большинство магистральных трубопроводов содержат длинные трубопроводы в десятки или сотни километров, и в отдельных пунктах трассы имеются промежуточные насосные станции для создания дополнительных давлений или активных давлений жидкостей в трубопроводах. Математическая модель представляется системой уравнений (4), которая соответствует линейному трубопроводу и не учитывает наличие промежуточных насосных станций. Если исходить из системы уравнений (4), то влияния насосных станций должны быть учтены при составлении граничных условий, которые

увеличивают размер гидравлической сети и затрудняют их решения. В работах [П.3,П.4] предлагалась методика, позволяющая учесть влияние промежуточных насосных станций в дифференциальных уравнениях. При этом сложная трубопроводная система со многими промежуточными насосными станциями рассматривалась как единая линейная трубопроводная система. В общем уравнении учитывалось влияние этих промежуточных станций. Рассмотрим движение жидкости в j -м трубопроводе при наличии насосной станции, создающей активное давление H_j в промежуточной точке z_j трубы. Тогда система уравнений (4) запишется в виде [П.3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_j}{\partial z} + \frac{S_j}{c^2} \frac{\partial p_j}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial p_j}{\partial z} - H_j \delta(z - z_j) + \frac{1}{S_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} + 2a_j x_j \right) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $\delta(z - z_j)$ – дельта функция Дирака, $\delta(z - z_j) = 0$, при $z \neq z_j$; $\delta(z - z_j) = \infty$, при $z = z_j$. В стационарном режиме течения жидкости, расходы и давления не зависят от времени, т. е.:

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x_j}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Из первого уравнения (4), следует $\partial x_j / \partial z = 0$. Из уравнений (8) и интегрирования второго уравнения (7) по z следует:

$$p_{i+1} - p_i - H_j + \frac{b_j x_j \Delta z}{S_j} = 0, \quad (9)$$

где: $\Delta z = z_{i+1} - z_i = l_j$ – расстояния от узла $(i+1)$ -го до i -го узлов; l_j – длина j -й трубы. Тогда (9) переписывается в виде:

$$y_j + H_j = R_j x_j, \quad (10)$$

где $y_j = p_i - p_{i+1}$ – перепад давления на концах j -й трубы;
 $R_j = b_j l_j / S_j = \lambda_j l_j |w_j| / 2 d_j S_j$ – коэффициент гидравлического сопротивления j -й трубы, при ламинарном режиме течения $R_j = b_j l_j / S_j = 32 \mu l_j / \rho S_j d_j^2$.

Уравнение (10) иллюстрирует закон гидравлического сопротивления, связывающий общую потерю $R_j x_j$ давления на трение, перепад давления y_j на концах трубы и действующий напор H_j . Перепишем уравнение (10) в матричном виде:

$$y + H = R x, \quad (11)$$

где: $y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)^T$ – вектор перепада давления на ветвях;
 $H = (H_1, \dots, H_j, \dots, H_n)^T$ – вектор действующих напоров на ветвях.
 Для пассивных ветвей $H_j = 0$; $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_n)$ – матрица $(n \times n)$ гидравлического сопротивления сети; $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)^T$ – вектор расхода на ветвях.

Из определения матрицы $\bar{A}$ вектор перепада давления y на ветвях определяется равенством:

$$y = \bar{A}^T \bar{P}, \quad (12)$$

где $\bar{P} = (P_1, \dots, P_i, \dots, P_m)^T$ – вектор давления в узлах.

Для любого замкнутого гидравлической сети, из определения перепад давления $y_j = p_i - p_{i+1}$, откуда следует, что сумма перепадов давлений в любом замкнутом контуре равна нулю, т. е. справедливо линейное алгебраическое уравнение относительно перепадов давлений:

$$\sum_{j \in K_r} y_j = 0, \quad (13)$$

где K_r – множество ветви принадлежат в r -му контуру. В матричном виде соотношение (13) имеет вид:

$$By = 0. \quad (14)$$

Соотношение (14) представляет собой, по существу, **второй закон Кирхгофа для давлений в узлах сети** [П.1]. В каждом узле сети должны быть выполнены условия неразрывности, для несжимаемой жидкости: количество жидкости, втекающее в узел i , равно количеству жидкости, вытекающего из этого узла, т. е.:

$$\sum_{j \in D_i} x_j = Q_i, \quad (15)$$

где D_i – множество ветвей j , которые имеют один конец в i -й узле. В матричном виде, соотношение (15) имеет вид:

$$Ax = Q, \quad (16)$$

где $Q = (Q_1, \dots, Q_j, \dots, Q_m)^T$ – вектор расхода в узлах.

Соотношение (16) представляет собой **первый закон Кирхгофа для расходов на ветвях сети**. Кроме того, по всем узлам, должен быть выполнен закон сохранения массы жидкости, т. е. должно быть выполнено соотношение:

$$\sum_{i=1, \dots, m} Q_i = 0. \quad (17)$$

Из уравнений (11), (12), (14), (16) и (17) следует система уравнений, описывающая стационарное состояние распределения массовых расходов и давления в гидравлической сети, т. е. уравнения справедливы для установившихся состояний и имеют следующий вид:

$$Ax = Q, \quad By = 0, \quad y + H = Rx, \quad y = \bar{A}^T \bar{P}, \quad \sum_{i=1,m} Q_i = 0. \quad (18)$$

Первое и второе уравнения системы (18) представляют собой первый и второй закон Кирхгофа для расходов в ветвях и давлений в узлах. Закон гидравлического сопротивления в общем случае является нелинейной функцией расходов, поэтому система (18) является нелинейной алгебраической системой.

Использование модели (18) позволяет сформулировать задачу приближенного вычисления распределения расходов и давления в гидравлической сети, если заданы вектор Q , вектор действующего напора H и давления в опорном узле (например P_m), и закон гидравлического сопротивления. В случае системы с сосредоточенными параметрами, величины R_j , действующие напоры H_j и узловые расходы Q_i , считаются постоянными. В общем случае гидравлическая сеть является системой с ограниченными координатами, когда при управлении требуется учесть наличие регулирующих устройств (регуляторов расхода, давления, дросселирующих устройств), изменения характеристик транспортируемой среды и прочие факторы. Тогда $R_j(x_j)$, $H_j(x_j)$, $Q_i(P_i)$ являются функциями неизвестных расходов x_j и давления P_i в узлах, которые усложняют задачи.

На основе рассмотренной модели можно сформулировать задачу оптимального управления ГС, обеспечивающего функциональность сети с минимальными затратами [П.5-П.7].

Задача 1: Вычислить вектор управлений как давлений H , создаваемых насосами, чтобы обеспечить заданные расходы Q потребителей в узлах с минимальными затратами (энергиями) в насосных станциях при ограничении давления в узлах, чтобы минимизировать целевую функцию затрат:

$$F_1(H) = c^T |H| = c_1 |H_1| + c_2 |H_2| + \dots + c_n |H_n|, \quad (19)$$

при ограничениях $\bar{P}_{\min} \leq \bar{P} \leq \bar{P}_{\max}$, где c_j , $j=1, \dots, n$, – удельные стоимости энергии, вырабатываемой насосом с давлением H_j ; $\bar{P}, \bar{P}_{\min}, \bar{P}_{\max} \in \mathbb{R}^m$.

Задача 2: Вычислить вектор управления H для перевода жидкости от одного стационарного состояния к новому стационарному состоянию ГС с минимальными отклонениями давлений в узлах от заданных значений на основе минимизации целевой функции:

$$F_2(P) = d^T |\bar{P} - \bar{P}^*| = d_1 |P_1 - P_1^*| + d_2 |P_2 - P_2^*| + \dots + d_m |P_m - P_m^*|, \quad (20)$$

где d_i , $i=1, \dots, m$, – удельные затраты по отклонению давления в i -м узле. Целевая функция может также иметь следующий вид

$$F'_2(P) = \|\bar{P} - \bar{P}^*\|^2 = \sum_i^m (P_i - P_i^*)^2, \quad (21)$$

где $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^m z_i^2\right)^{1/2}$ – евклидова норма, при ограничениях, приведенных выше.

Если кроме минимизации отклонений давлений в узлах, минимизируется энергия в насосных станциях, то целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F_3(H) &= c^T |H| + d^T |\bar{P} - \bar{P}^*| = \\ &= c_1 |H_1| + \dots + c_n |H_n| + d_1 |P_1 - P_1^*| + \dots + d_m |P_m - P_m^*| \end{aligned} \quad (22)$$

Задача 3: Вычислить вектор управления $\bar{P}$ для

максимизации возможной подачи жидкостей заданному подмножеству потребителей при удовлетворении расходов в остальных потребителей, т. е. максимизировать целевую функцию затрат:

$$F_3(Q) = \sum_{i \in I^*} Q_i, \quad (23)$$

где I^* – подмножество номера узлов-потребителей.

При ламинарном режиме течения жидкости в круглых трубах, когда матрица R в уравнении (11) постоянна, сформулированные задачи оптимизации являются задачами кусочно-линейного программирования, и могут быть сведены к задаче линейного или квадратичного программирования.

Литература

1. Меренков А. П., Хасилев В. Я. Теория гидравлических цепей, Наука, 1985, 277 с.
2. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидродинамика, Москва Ижевск, 2005, 544 с.
3. Гусейнзаде М. А., Юфин В. А. Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах, Москва Недра, 1983, 232 с.
4. Гусейнзаде М. А., Юфин В. А. Методы расчета неустановившегося движения нефтепродуктов и нефти в магистральных трубопроводах с промежуточными насосными станциями, М. Недра, 1973.
5. Козлов В. Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений, Москва, «Проспект», 2010, 173 с.
6. Козлов В. Н. Управления энергетическими системами, СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008, 492 с.
7. Козлов В. Н. Управления энергетическими системами. Электромеханические процессы, СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2000, 166 с.