

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

**Приоритетный национальный проект «Образование»  
Национальный исследовательский университет**

***К. Г. КУЛИКОВ***

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по университетскому политехническому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлениям подготовки «Системный анализ и  
управление» и «Техническая физика»*

Санкт-Петербург

Издательство Политехнического университета

2011

УДК 519.6, 577.35, 535.8  
ББК 22.37  
К 903

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор  
Санкт-Петербургского государственного университета  
М.А. Нарбут

Кандидат физико-математических наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета  
А.Н.Фирсов

**Куликов К.Г. Математическое моделирование медико-биологических систем : учеб. пособие / К. Г. Куликов. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 240 с.**  
ISBN

Изложены вопросы, связанные с математическим моделированием взаимодействия лазерного излучения с биологическими тканями, позволяющие решать проблемы биомедицинской диагностики; рассмотрены задачи рассеяния лазерного излучения на частицах моделирующей клетки крови и на биологических структурах (дерма, эпидермис, сплетение кровеносных сосудов). Излагается аналитическая теория, которая базируется на решении волнового уравнения для электромагнитного поля и допускает точный анализ интерференционных эффектов, возникающих при суперпозиции частично рассеянных волн. Разбирается применение теории переноса излучения к оптике биологических сред. Рассмотрены приближенные методы решения уравнения переноса излучения.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки магистров «Системный анализ» и «Техническая физика». Оно также может быть использовано для студентов инженерно - физических специальностей высших учебных заведений, магистров, аспирантов и стажеров-исследователей.

Табл. 3. Ил. 37. Библиогр.: 27 назв.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня в целях повышения конкурентоспособности национальной экономики».

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

© Куликов К.Г., 2011

© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2011

ISBN

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
<b>1. Методы описания взаимодействия лазерного излучения с биологическими тканями и объектами.....</b>	<b>8</b>
1.1. Отражение и преломление.....	13
1.2. Поглощение.....	16
1.3. Рассеяние.....	19
1.4. Непрозрачные среды.....	22
1.5. Три подхода в теории ослабления и рассеяния света в дисперсных средах .....	22
<b>2. Теоретические методы для расчета характеристик рассеяния света отдельными частицами.....</b>	<b>28</b>
2.1. Поглощение и рассеяние произвольной частицей .....	28
2.2. Разложение плоской волны по векторным сферическим гармоникам.....	35
2.3. Внутреннее и рассеянное поле .....	39
2.4. Функции, зависящие от угла.....	41
2.5. Коэффициенты ряда рассеяния.....	43
2.6. Сечения и элементы матриц .....	45
2.7. Матрица рассеяния.....	47
2.8. Параметр асимметрии и давление излучения.....	50
2.9. Более сложные частицы .....	52
2.10. Шар в оболочке .....	53
2.11. Методика вычисления оптических характеристик сферических частиц.....	55
2.12. Бесконечный прямой круговой цилиндр .....	57
2.13. Поглощение и рассеяние света агрегатами сферических частиц .....	64
2.14. Матричная формулировка рассеяния для $j$ -частицы произвольной формы .....	71
2.15. Задача рассеяния для $j$ -неоднородной частицы нерегулярной формы .....	79
2.16. Построение математических моделей для расчета взаимодействия лазерного излучения с мутными биотканями.....	86
2.17. Модель для прогноза электрофизических характеристик крови и определения скорости кровотока в капиллярном русле при облучении лазерным лучом .....	90
2.18. Отражение плоской волны от слоя с медленно меняющейся	

толщиной .....	91
2.19. Отражение гауссова пучка от слоя с медленно меняющейся толщиной .....	99
2.20. Запись отраженного поля.....	101
2.21. Расчет скорости кровотока в капилляре .....	104
2.22. Численные расчеты с модельной средой. Выводы.....	105
2.23. Моделирование тепловых процессов, вызываемых воздействием лазерного излучения на органические среды.....	107
<b>3. Применение теории переноса излучения в оптике биотканей.....</b>	<b>114</b>
3.1. Приближенные методы решения уравнения переноса излучения.....	118
3.2. Нестационарная теория переноса. Уравнение переноса Больцмана.....	132
3.3. Разложение уравнения Больцмана по сферическими гармоникам.....	133
3.4. $P_N$ -приближение.....	137
3.5. $P_1$ -приближение.....	138
3.6. Приведенный коэффициент рассеяния.....	141
3.7. Уравнение $P_1$ и стандартное уравнение диффузии.....	142
3.8. Решение стандартного уравнения диффузии при модуляционном подходе.....	145
3.9. Модели переноса излучения .....	146
Библиографический список.....	150
Приложение 1. Специальные функции математической физики.....	152
Приложение 2. Асимптотические методы.....	191
Приложение 3. Бесконечные системы уравнений.....	216
Приложение 4. Основные параметры биологических моделей.....	220
Приложение 5. Словарь некоторых основных терминов и понятий, употребляемых в тексте .....	234

## ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассматриваются принципы взаимодействия лазерного излучения с биологическими клетками и тканями, лежащие в основе биомедицинской диагностики.

Главной причиной издания данного пособия является то, что в последнее время лазерные технологии активно используются для решения широкого класса задач в различных областях науки и техники от физики и химии до биологии и медицины.

Одной из важнейших областей применения лазерного излучения является биомедицинская оптика. Здесь лазерные источники используются для диагностики, терапии или хирургических операций. В последнее время применение лазерного излучения в медицине и биологии интенсивно расширяется. Объектом воздействия здесь являются биологические клетки или ткани.

При лазерной обработке биологической среды часто необходимо осуществлять селективное термическое поражение объекта, расположенного в данной среде. То есть необходимо нагреть объект, не повреждая окружающие его структуры. Для этих целей необходимо осуществить выбор оптимальных спектральных, временных и энергетических характеристик лазерного излучателя. В большинстве случаев основным параметром для достижения селективности (выбора) считается длина волны излучения. Действительно, если подобрать такую длину волны излучения, которая поглощается объектом воздействия и не поглощается окружающими тканями, то селективность будет достигнута. Однако такая ситуация является идеальной и не всегда может быть достижима на практике. Большое значение также имеет длительность обработки, размеры объекта, глубина его расположения.

При воздействии лазерного излучения на биологические ткани необходимо учитывать такие факторы, как, например, движение крови по сосудам и процессы терморегуляции. Течение крови может оказывать большое влияние на результат воздействия, если он зависит от степени термического повреждения биоткани, поскольку кровотоки могут оказаться дополнительным и достаточно эффективным механизмом отведения тепла от места облучения. Таким образом, данный эффект может повлиять как на эффективность, так и на безопасность процедуры, поскольку нарушается локальность нагрева. Механизмы терморегуляции вносят нелинейность в процесс лазерного нагрева кожи.

Также зачастую возникает необходимость обработки тканей последовательностью импульсов, перемещающихся по поверхности ткани, например зубной эмали. Здесь необходимо оптимизировать параметры ла-

зерного излучателя и режим обработки, которые бы позволили произвести нужный эффект.

Таким образом, оптимизация параметров лазерного излучателя для осуществления селективного нагрева многокомпонентных сред является неоднозначной задачей.

С постоянным появлением новых областей применения лазерного излучения для обработки биологических тканей возникла острая необходимость выработки методик и критериев для оптимизации параметров лазерных излучателей.

Для этих целей разрабатываются различные математические модели, обычно призванные решить какую-либо конкретную задачу. В большинстве случаев проблема выбора лазерного источника и его характеристик решается на основе спектров поглощения и времен релаксации рассматриваемых объектов (сред). Моделирование такого рода обычно призвано решить задачу оптимизации параметров лазерного излучателя и оценить результат, полученный при воздействии уже выбранным лазером на биологическую среду. Для того чтобы корректно построить математическую модель, описывающую взаимодействие лазерного излучения с тканью, необходимо в первую очередь хорошо представлять основные эффекты, возникающие при распространении излучения в веществе.

В данном учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с изучением механизмов взаимодействия лазерного излучения с биологическими тканями, исследование различных эффектов взаимодействия лазерного излучения с биотканями методами компьютерного моделирования. Данное пособие призвано решить следующие задачи:

1. Знакомство с основными методами математического моделирования, необходимого для решения задач взаимодействия лазерного излучения с биотканью.
2. Исследование различных эффектов взаимодействия лазерного излучения с биотканями методами компьютерного моделирования.
3. Знакомство с лазерными медицинскими технологиями.

При помощи моделей, построенных в пособии, на основе результата воздействия лазера на биоткань при определенных параметрах, можно, последовательно изменяя исходные параметры, произвести оптимизацию спектральных и энергетических параметров лазерных излучателей для достижения необходимого в каждом конкретном случае эффекта.

При написании пособия были использованы результаты исследований, опубликованные в журналах «Оптика и спектроскопия», «Журнал технической физики», «Квантовая электроника», «Оптический журнал»,

«Applied Optics», «Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer», «Journal of Biomedical Optics», а также в книгах, перечисленных в библиографическом списке.

Пособие адресовано исследователям, аспирантам и дипломникам, специалистам по биомедицинской физике, интересующимся разработкой и применением лазерных и оптических методов диагностики в медицинских исследованиях. Благодаря большому количеству основополагающих представлений и результатов исследований по взаимодействию лазерного излучения с биологической тканью, пособие должно быть интересно и гораздо более широкой аудитории, в том числе студентам по направлению «техническая физика», «биологическая физика» и «системный анализ и управление».

Пособие состоит из трех глав. Первая посвящена введению в рассеяние света биологическими объектами. В данной главе рассмотрены эффекты, которые возникают при взаимодействии электромагнитного излучения с веществом: отражение и преломление, поглощение и рассеяние. Сформулированы три подхода в теории ослабления и рассеяния света в дисперсных средах. Во второй главе рассмотрены теоретические методы для расчета характеристик рассеяния света отдельными частицами. Рассмотрены оригинальные математические модели, моделирующие взаимодействие лазерного излучения с биотканью. Третья глава посвящена применению теории переноса излучения в оптике биотканей. Также в прил. 1 и 2 даны описания специальных функций, асимптотических методов (метод стационарной фазы, метод перевала), необходимых для лучшего понимания теоретического материала, приведенного в первой и второй главах. Рассмотрены методы решений бесконечных систем линейных уравнений методом усечения (прил. 3), в прил. 4 рассмотрены основные параметры моделируемых биологических систем и в прил. 5 дан словарь понятий, употребляемых в данном учебном пособии.

## 1. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С БИОЛОГИЧЕСКИМИ ТКАНЯМИ И ОБЪЕКТАМИ

Рассеяние и поглощение электромагнитного излучения широко используются в различных областях науки и техники для изучения структуры и свойств неоднородных сред. Теория и практика методов светорассеяния в силу их исключительной важности для таких приложений, как оптика атмосферы и океана, распространение радиоволн и радиосвязь, физическая химия растворов и коллоидов, материаловедение и химическая технология, биофизика и лазерная биомедицина, разработаны в настоящее время довольно глубоко. Теоретические модели, техника экспериментальных исследований и методы интерпретации данных разрабатывались специалистами различных дисциплин (от астрофизики до лазерной офтальмологии), поэтому существуют различия в традициях и терминологические барьеры, которые препятствуют эффективному взаимодействию разных научных школ. Скажем, для специалистов в области атмосферной оптики и астрофизики естественной является идеология уравнения переноса излучения, а для интерпретации данных малоуглового рентгеновского или нейтронного рассеяния более привычен язык, использующий аппарат корреляционных функций и структурного фактора рассеяния. Другой пример относится к технологии композиционных сред, где основными являются понятия эффективной диэлектрической проницаемости и эффективного показателя преломления, а в оптике коллоидов наиболее популярна модель рассеяния на изолированной частице, которое описывается либо в терминах строгой электромагнитной теории Максвелла, либо на основе различных приближений.

Несмотря на терминологические и иные различия, фундаментальная основа многих методов, использующих рассеяние нейтронов, рентгеновского излучения, света или радиоволн, оказывается достаточно универсальной. В отношении рассеяния электромагнитных волн различной частоты эта универсальность объясняется, очевидно, единой классической основой – электромагнитной – теорией Максвелла, дополняемой физическими моделями рассеивающих сред. Далее в случае рассеяния частиц на потенциалах, связанных с той или иной неоднородностью среды, общая теоретическая трактовка рассеяния (например, в рамках T-матричного формализма) может быть точно такой же, как и в электромагнитной теории.

В силу большого разнообразия и структурной сложности биологических систем разработка адекватных оптических моделей рассеяния и поглощения света является зачастую наиболее сложной частью исследования. Эти модели охватывают практически все основные разделы оптики дисперсных сред: простое приближение однократного рассеяния, некогерент-



ное многократное рассеяние, описываемое уравнением переноса, и многократное рассеяние электромагнитных волн в конденсированных системах взаимодействующих рассеивателей или неоднородностей. Вполне понятно, что столь широкий круг проблем исключает возможность подробного рассмотрения технических деталей, поэтому в данное пособие включены только некоторые элементы теоретического аппарата, используемого в перечисленных выше разделах оптики рассеивающих сред, или ссылки на соответствующие оригинальные работы.

Перед описанием особенностей математического моделирования взаимодействия лазерного излучения с биотканями рассмотрим основные понятия.

Итак, модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Человек применяет модели с незапамятных времен при изучении сложных явлений, процессов, конструировании новых сооружений. Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. Более того, некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом.

Процесс построения модели называется моделированием. Другими словами, моделирование – это процесс изучения строения и свойств оригинала с помощью модели. Различают материальное и идеальное моделирование.

Материальное моделирование, в свою очередь, делится на физическое и аналоговое. Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту противопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия. В широком смысле, любой лабораторный физический эксперимент является моделированием, поскольку в эксперименте наблюдается конкретный случай явления в частных условиях, а требуется получить общие закономерности для всего класса подобных явлений в широком диапазоне условий. Искусство экспериментатора заключается в достижении физического подобия между явлением, наблюдаемым в лабораторных условиях, и всем классом изучаемых явлений. Соответствующие данному типу моделирования модели изучаемых объектов называют физическими моделями.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями).

От предметного (материального) моделирования принципиально отличается идеальное моделирование, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Основным типом идеального моделирования является знаковое моделирование. Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики. Математические модели обычно обладают важным свойством универсальности: принципиально разные реальные явления могут описываться одной и той же математической моделью. Таким образом, изучая одну математическую модель, мы изучаем сразу целый класс описываемых ею явлений.

Существует два основных класса задач, связанных с математическими моделями: прямые и обратные. В первом случае все параметры модели считаются известными, и нам остается только исследовать ее поведение. Например, определение глубины проникновения излучения в среду при известных параметрах излучения и среды – это прямая задача. В других случаях требуется решить обратную задачу: какие-то параметры модели неизвестны (например, не могут быть измерены явно), и требуется их найти, сопоставляя поведение реальной системы с ее моделью. Еще одна обратная задача: подобрать параметры модели таким образом, чтобы она удовлетворяла каким-то заданным условиям – такие задачи требуется решать при проектировании систем.

Технология моделирования требует от исследователя умения ставить корректно проблемы и задачи, прогнозировать результаты исследования, проводить разумные оценки, выделять главные и второстепенные факторы для построения моделей, выбирать аналогии и математические формулировки, решать задачи с использованием компьютерных систем, проводить анализ компьютерных экспериментов.

Процесс моделирования включает в себя три элемента: субъект (исследователь), объект исследования, модель, определяющую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

**Первый этап** построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отображает (воспроизводит, имитирует) какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимой и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть моделью), так и в случае чрезмерно-

го во всех существенных отношениях отличия от оригинала. Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от исследования других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

**На втором этапе** модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является множество (совокупность) знаний о модели.

**На третьем этапе** осуществляется перенос знаний с модели на оригинал – формирование множества знаний. Одновременно происходит переход с «языка» модели на «язык» оригинала. Процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели.

**Четвертый этап** – практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им.

Моделирование – циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта или ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах.

Основной задачей процесса моделирования является выбор наиболее адекватной оригиналу модели и перенос результатов исследования на оригинал.

Прежде чем переходить непосредственно к рассмотрению принципов построения математических моделей для расчета взаимодействия лазерного излучения с мутными средами, рассмотрим основные процессы, происходящие при взаимодействии оптического излучения с веществом.

При взаимодействии электромагнитного излучения с веществом, как правило, возникают три основных эффекта, способные помешать свободному распространению света:

**- отражение и преломление,**

- поглощение,
- рассеяние.

На рис. 1.1 показаны типичные процессы, происходящие при падении пучка света на тонкий слой вещества.

Отношения между процессами отражения и преломления выражаются законами Френеля. Поэтому эти два процесса могут быть отнесены в одну категорию процессов. Для использования лазерного излучения в медицине преломление играет важную роль только в случае облучения прозрачных сред. В непрозрачных средах, эффект преломления обычно сложно измерить вследствие поглощения и рассеяния. Только неотраженные и непоглощенные или рассеянные вперед фотоны проходят через образец и вносят вклад в интенсивность света, измеряемую за образцом. Отношение прошедшей и падающей на образец интенсивностей называется прозрачностью среды.

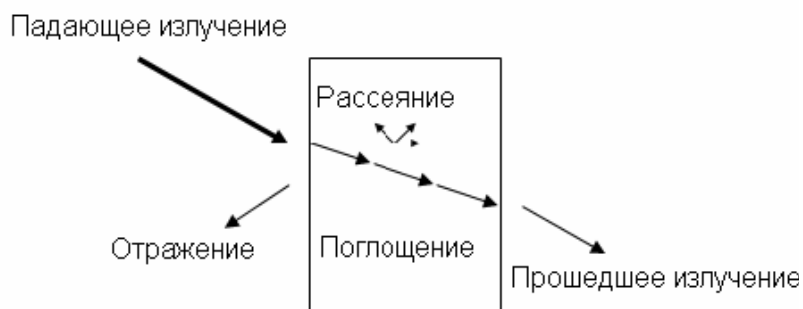


Рис. 1.1. Геометрия отражения, преломления, поглощения и рассеяния

Количество отраженного, поглощенного и рассеянного света в основном зависит от типа вещества и длины волны падающего излучения. Длина волны является очень важным параметром. Она определяет показатель преломления, а также коэффициенты поглощения и рассеяния. Показатель преломления определяет полную отражательную способность среды. Он сильно зависит от длины волны только в областях с сильным поглощением.

В рассеивающих биологических средах указанные процессы имеют некоторые особенности (рис. 1.2). За счет многократного рассеяния и поглощения лазерный пучок уширяется и затухает при распространении в ткани. Объемное рассеяние является причиной распространения значительной доли излучения в обратном направлении (обратное рассеяние). Поглощенный свет преобразуется в тепло, переизлучается в виде флуоресценции или фосфоресценции, а также тратится на фотобиохимические реакции.

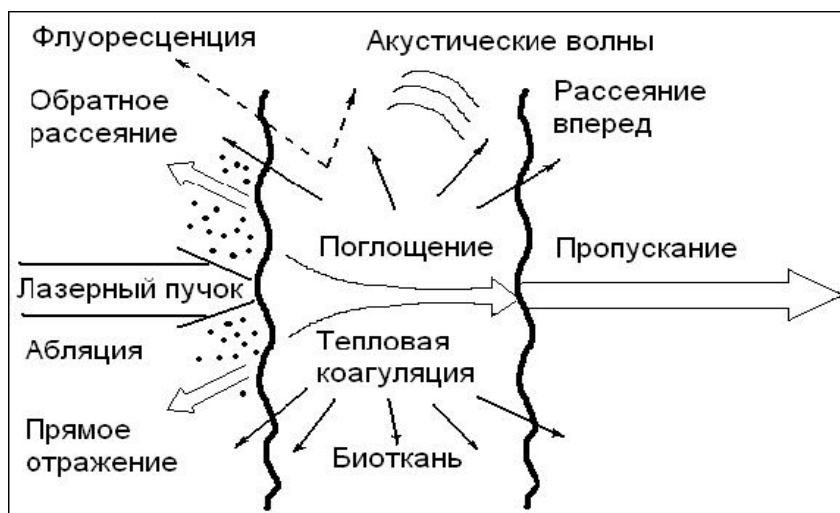


Рис. 1.2. Виды взаимодействия лазерного излучения с биотканью

В лазерной хирургии для проведения успешной операции существенным является знание поглощающих и рассеивающих свойств выбранной ткани. При воздействии лазерным излучением на сильно отражающие поверхности, например металлические имплантанты в стоматологии или ортопедии, показатель преломления будет играть важную роль. Поскольку биологические объекты являются, как правило, сложными и неоднородными структурами, для описания взаимодействия излучения с биотканью обычно вводят различные приближения. Рассмотрим теперь вышеупомянутые процессы более подробно.

### 1.1. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ

Отражением является процесс возвращения электромагнитного излучения поверхностью, на которую оно падает. Вообще, отражающая поверхность – это физическая граница двух сред с разными показателями преломления, например, таких как воздух и биоткань. Простой закон отражения гласит, что волновые нормали падающего и отраженного пучков, а также нормаль к отражающей поверхности лежат в одной плоскости, называемой плоскостью падения, и угол падения равен углу отражения  $\theta$ :  $\theta'$

$$\theta' = \theta, \quad (1.1)$$

где  $\theta$  и  $\theta'$  – углы между нормалью к поверхности и падающим и отраженным лучами соответственно. Поверхность принимается гладкой, с неровностями относительно малыми по сравнению с длиной волны излучения. Такое приближение также называют зеркальным отражением. В случае, например, когда величина шероховатости отражающей поверхности сравнима или даже больше, чем длина волны излучения, имеет место диффузное отражение. Также отдельные отражаемые пучки необязательно лежат в плоскости падения. В подобных случаях уравнение (1.1) уже не является

верным. Диффузное отражение является обычным явлением для всех тканей, поскольку ни одна из них не имеет сильно отполированной поверхности, как у оптических зеркал. Только в отдельных случаях, таких как увлажненные поверхности тканей, зеркальное отражение может быть больше, чем диффузное.

Преломление обычно имеет место, когда отражающая поверхность разделяет две среды с различными показателями преломления. Оно происходит вследствие изменения скорости световой волны. Простое математическое отношение, описывающее преломление, известно как закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v}{v'}, \quad (1.2)$$

где  $\theta''$  – угол преломления;  $v$  и  $v'$  – скорости света в среде до и после отражающей поверхности соответственно. Соответствующие показатели преломления определяются следующим образом:

$$n = \frac{c}{v}; \quad n' = \frac{c}{v'}, \quad (1.3)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Такие показатели преломления называются абсолютными. Тогда уравнение (1.2) можно переписать:

$$n \sin \theta = n' \sin \theta''. \quad (1.4)$$

Данное равенство не соблюдается только в случае, если  $\sin \theta > \frac{n'}{n}$ , что означает отсутствие преломления. Эту ситуацию также называют полным отражением.

На практике определяют так называемый относительный показатель преломления  $n_{12}$ , т. е. отношение скорости света в одной среде к скорости прохождения света в другой среде. Согласно закону преломления света, относительный показатель преломления света равен отношению синуса угла падения  $\theta$  к синусу угла преломления  $\theta''$ :

$$n_{21} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta''}. \quad (1.5)$$

Показатель преломления зависит от природы вещества, температуры, длины волны падающего света, концентрации (для растворов) и давления (для газов).

Мерой количества отраженного излучения является отражательная способность поверхности. Она определяется как отношение отраженной и падающей амплитуд электрического поля. Отношение соответствующих интенсивностей определяет коэффициент отражения, который, соответственно, равен квадрату отражательной способности. Отражательная способность и коэффициент отражения зависят от угла падения, поляризации

излучения и от показателей преломления сред, формирующих преломляющую поверхность. Отношения между отраженным и преломленным лучами известны как законы Френеля, записываемые следующим образом:

$$\frac{E'_s}{E_s} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} ; \quad (1.6a)$$

$$\frac{E'_p}{E_p} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta'')} ; \quad (1.6б)$$

$$\frac{E''_s}{E_s} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')} ; \quad (1.6в)$$

$$\frac{E''_p}{E_p} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta + \theta'')} , \quad (1.6г)$$

где  $E$ ,  $E'$  и  $E''$  – амплитуды векторов электрических полей падающего, отраженного и преломленного света соответственно. Индексы  $s$  и  $p$  обозначают две плоскости колебания векторов,  $s$  перпендикулярна плоскости падения, а  $p$  – параллельна ей.

Дальнейшее взаимодействие падающего света с тонким слоем материи ограничивается только преломленным лучом. Можно ожидать, что падающая интенсивность будет равна сумме интенсивностей преломленного и отраженного лучей. Однако это неверно, поскольку интенсивность определяется как энергия на единицу площади, а поперечное сечение преломленного луча отличается от поперечного сечения падающего и отраженного лучей, кроме случая нормального падения. Таким образом, сохраняется только полная энергия этих пучков.

Коэффициенты отражения в каждой плоскости записываются следующим образом:

$$R_s = \left( \frac{E'_s}{E_s} \right)^2 ; \quad (1.7a)$$

$$R_p = \left( \frac{E'_p}{E_p} \right)^2 . \quad (1.7б)$$

Угол, при котором  $R_p$  называется углом Брюстера, в случае отражения на границе воздух–вода (показатели преломления соответственно  $n = 1$ ,  $n' = 1,33$ ) составляет  $53^\circ$ . При нормальном падении ( $\theta = 0$ ) коэффициенты отражения в каждой плоскости равны около 2%. Эта величина не может быть получена явно из уравнений (1.6a) и (1.6б), так как подстановка в них  $\theta = \theta'' = 0$  дает неопределенный результат. Однако ее можно оценить.

Так как и  $\theta$  и  $\theta''$  очень малы в приближении нормального падения, мы можем положить тангенсы в уравнении (1.6б) равными синусам, тогда:

$$R_p = R_s \approx \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} = \left( \frac{\sin \theta \cos \theta'' - \cos \theta \sin \theta''}{\sin \theta \cos \theta'' + \cos \theta \sin \theta''} \right)^2. \quad (1.8)$$

Когда разделим числитель и знаменатель уравнения (1.8) на  $\sin \theta''$  и заменим  $\sin \theta / \sin \theta''$  на  $n'$ , т. е. предположим,  $n = 1$ , получим

$$R_p = R_s \approx \left( \frac{n' \cos \theta'' - \cos \theta}{n' \cos \theta'' + \cos \theta} \right)^2 \approx \left( \frac{n' - 1}{n' + 1} \right)^2. \quad (1.9)$$

Приближенное равенство становится строгим в приближении нормального падения. Таким образом, полагая  $n' = 1,33$ , получаем

$$R_p = R_s \approx 2\%. \quad (1.10)$$

В некоторых случаях этой частью падающего излучения нельзя пренебрегать. К примеру, это является одной из главных причин, по которой всегда требуется соответствующая защита глаз при работе с лазерными приборами.

Показатель преломления достаточно сильно зависит от длины волны излучения. Даже если бы эта зависимость была весьма слабой в видимом диапазоне, ее было бы необходимо учитывать для наилучшего предсказания результатов. Вообще, для многих типов тканей показатели преломления трудноизмеримы вследствие поглощения и рассеяния. Отражение от таких тканей должно быть получено опытным путем.

Например, коэффициент отражения от кожи лежит в пределах от 10 до 55% и зависит от спектра излучения, а также от степени пигментации и морщинистости кожи, наличия жира и влаги, которые в свою очередь зависят от пола, возраста и цвета кожи (расы). В инфракрасном диапазоне кожа может отражать до 40% излучения, имеются некоторые различия, связанные с полом и возрастом больного, пигментацией его кожных покровов и др. Уменьшить отражение и тем самым повысить эффективность воздействия можно путем очистки зоны воздействия от жира и пота путем протирки спиртом или эфиром, смазывания раствором йода или бриллиантовой зелени. Еще одним методом является непосредственный контакт излучателя с кожным покровом и легким прижатием к телу, вызывающим местный отток крови и тем самым увеличение прозрачности ткани.

## 1.2. ПОГЛОЩЕНИЕ

Вследствие поглощения интенсивность падающей электромагнитной волны ослабляется при прохождении через среду. Поглощательная способность среды определяется как отношение поглощенной и падающей ин-



тенсивностей. Поглощение является следствием частичного перехода световой энергии в тепловое движение или колебания молекул поглощающего вещества. Полностью прозрачная среда не поглощает свет, т. е. полная световая энергия, вошедшая в такую среду, и энергия, вышедшая из нее, одинаковы. Среди биологических тканей почти прозрачными для видимого света можно считать роговицу и хрусталик глаза. Структуры же, в которых падающее излучение практически полностью ослабляется, называют непрозрачными.

Термины «прозрачный» и «непрозрачный» относительны, так как они, безусловно, зависят от длины волны. Роговица и хрусталик, например, в основном состоят из воды, которая сильно поглощает в инфракрасной области спектра. Поэтому эти ткани выглядят непрозрачными в этой области спектра. На самом деле, не известно ни одного вещества, которое было бы прозрачным или непрозрачным для всех длин волн электромагнитного спектра. Говорят, что вещество полностью поглощает, если оно ослабляет интенсивность всех длин волн в рассматриваемом диапазоне на одинаковую величину. Поэтому в случае видимого света, такие вещества будут выглядеть бесцветными для невооруженного глаза. С другой стороны, селективное (избирательное) поглощение – это преимущественное поглощение определенных длин волн относительно других. Вообще, существование цветов порождается селективным поглощением. Обычно цвета тела и цвета поверхности различны. Цвет тела определяется светом, который проникает на определенную глубину в вещество. Посредством рассеяния назад он затем поворачивает и выходит обратно из поверхности, но только после того как он был частично поглощен на определенных длинах волн. В отличие от этого, цвет поверхности определяется отражением от самой поверхности. В основном он зависит от коэффициентов отражения, связанных с длиной волны падающего излучения отношением (1.13). Способность вещества поглощать электромагнитное излучение зависит от некоторого количества факторов, главным образом от электронного состава его атомов и молекул, длины волны излучения, толщины поглощающего слоя и внутренних параметров, таких как температура или концентрация поглощающих центров. Зачастую используются два закона, которые описывают влияние толщины или концентрации на поглощение соответственно. Обычно их называют законом Ламберта и законом Бера и записывают следующим образом:

$$I(z) = I_0 \exp(-\mu_a z), \quad (1.11)$$

где  $z$  обозначает оптическую ось;  $I(z)$  – интенсивность на расстоянии  $z$ ,  $I_0$  – падающая интенсивность,  $\mu_a$  – коэффициент поглощения среды. Из уравнения (1.11) получаем

$$z = \frac{1}{\mu_a} \ln \frac{I_0}{I(z)}$$

Величина, обратная коэффициенту поглощения, называется длиной поглощения:

$$L_a = \frac{1}{\mu_a}.$$

Длина поглощения показывает расстояние, на котором интенсивность  $I(z)$  уменьшится в  $e$  раз от ее начальной величины  $I_0$ .

В биологических тканях поглощение в основном вызвано молекулами воды или макромолекулами.

У белков хромофорами являются фрагменты аминокислот, которые поглощают свет преимущественно в ультрафиолетовой области спектра (от 200 до 300 нм). В этом же диапазоне длин волн поглощают нуклеиновые кислоты (их хромофоры – ароматические и гетероциклические кольца азотистых оснований). Клетки биологических тканей содержат сотни хромофоров, поглощающих свет в видимой и ближней ультрафиолетовой областях спектра, среди которых основными являются витамины, флавины, флавиновые ферменты, гемоглобин, каротиноиды, фикобилины, фитохромы и др. В инфракрасной области спектра все биомолекулы имеют достаточно интенсивные колебательные полосы поглощения. Начиная с  $\lambda = 1500$  нм и более, спектр поглощения тканей в основном определяется спектром поглощения воды. Одними из основных биологических поглотителей являются меланин и гемоглобин (Hb). Меланин является основным пигментом кожи и, безусловно, самым главным хромофором эпидермиса. Его коэффициент поглощения монотонно возрастает по всему видимому диапазону спектра с уменьшением длины волны. Гемоглобин преобладает в сосудистой ткани. Основной особенностью всех биомолекул является их комплексная структура полосы между 400 и 600 нм. Так как ни макромолекулы, ни вода не поглощают сильно в ближнем ИК-диапазоне, «терапевтическое окно» заключено приблизительно между 600 и 1200 нм. В этом спектральном диапазоне излучение проникает в биологические ткани с наименьшими затруднениями, что делает возможным лечение достаточно глубоких тканевых структур.

Если рассматривать биоткани в целом, например кожу, стенку аорты и роговицу, то среди них, наиболее сильно поглощающей будет являться кожа, тогда как роговица почти совершенно прозрачна в видимом диапазоне спектра. Из-за уникальности спектров поглощения, каждый из них может быть расценен как отпечаток пальца соответствующей ткани.

Также необходимо отметить, что спектры поглощения стенки аорты и гемоглобина практически идентичны. Это наблюдение можно объяснить

тем фактом, что гемоглобин – как установлено ранее – является доминирующим в сосудистой ткани. Таким образом, становится очевидным, что в обоих спектрах должны присутствовать одинаковые пики поглощения. Так как зеленая и желтая длины волн лазера на ионах криптона соответственно 531 и 568 нм почти точно попадают в пики поглощения гемоглобина, эти лазеры могут быть использованы для коагуляции крови и кровеносных сосудов. Для определенных клинических испытаний альтернативой могут быть лазеры на красителях, так как возможность перестройки длины волны этих лазеров может быть использована преимущественно для соответствия длины волны излучения определенным полосам поглощения специфических протеинов и пигментов. Однако для медицинской лазерной хирургии важным является не только поглощение биологических тканей. В определенных случаях применения лазера, например при склеростомиях, зачастую используются специальные красители и чернила перед лазерным воздействием. С их помощью увеличивают исходный коэффициент поглощения специфических тканей, что приводит к повышению эффективности лазерной обработки. Более того, за счет увеличения поглощения данной ткани можно достигнуть повышения селективности воздействия с наименьшим повреждением окружающих тканей.

### 1.3. РАССЕЯНИЕ

Когда упруго связанные заряженные частицы подвергаются воздействию электромагнитных волн, они приводятся в движение электрическим полем. Если частота волны равна естественной частоте колебаний частиц, происходит резонанс, сопровождающийся значительным поглощением. Рассеяние же имеет место на частотах, не совпадающих с естественными частотами частиц. Результирующее колебание называется вынужденным колебанием. Это колебание будет иметь ту же частоту и направление, что и напряженность электрического поля падающей волны. Однако его амплитуда будет намного меньше, чем в случае резонанса. Также фаза вынужденного колебания отличается от падающей волны, так как скорость фотонов уменьшается при проникновении в более плотную среду. Отсюда рассеяние может быть рассмотрено как основной источник дисперсии.

Вторичные фотоны, излучаемые возбужденными биомолекулами, образуют вторичный поток излучения, распространяющийся (рассеивающийся) в телесный угол  $4\pi$  и возбуждающий другие молекулы биоткани и т. д. Поскольку разнообразие биомолекул в организме велико, вторичное излучение является широкополосным, некогерентным и неполяризованным. Степень ослабления вторичного излучения значительно меньше, чем первичного лазерного, и составляет менее 10 раз на каждый 1 см глубины

биоткани. Поэтому именно вторичное излучение и обеспечивает большую глубину проникновения в биоткани.

Некоторые фотоны после многократного рассеяния выходят обратно из ткани под случайными углами. Это так называемый диффузно отраженный свет. Он спектрально зависим. Доля энергии диффузно отраженного света может достигать 30–40% от энергии падающего луча.

Рассеянные фотоны постепенно удаляются от оси пучка, но в среднем они сохраняют ее направление и формируют ореол вокруг конуса основного пучка. Размер этого ореола и доля энергии, которая в нем содержится, в значительной степени зависят от оптических свойств биоткани и от поперечного диаметра пучка света. Чем меньше диаметр пучка, тем большая доля фотонов будет в ореоле. Таким образом, эффективность лазерного облучения зависит не только от оптических параметров ткани, но и от геометрических размеров лазерного пучка. Формирование конуса излучения и ореола может оказаться существенным лишь при селективном воздействии на объекты, расположенные в глубине ткани. При воздействии на поверхностный слой ткани широким пучком света роль этого эффекта незначительна.

Различают упругое и неупругое рассеяние в зависимости от того, изменяется ли начальная энергия фотона во время процесса рассеяния. Далее будем в первую очередь рассматривать упругое рассеяние, при котором падающие и рассеянные фотоны имеют одинаковую энергию. Отдельным видом упругого рассеяния является рэлеевское рассеяние. Оно накладывает ограничение, заключающееся в том, что рассеивающие частицы должны быть меньше, чем длина волны падающего излучения.

Пусть плоская электромагнитная волна падает на тонкую рассеивающую среду с толщиной  $L$ . В частном случае электрическое поле падающей волны можно записать:

$$E(z) = E_0 \exp(ikz),$$

где  $E_0$  – амплитуда падающего электрического поля;  $k$  – величина волнового вектора;  $z$  обозначает оптическую ось.

В первом приближении предполагаем, что волна в некоторой точке  $P$  на оптической оси будет в высокой степени являться начальной волной плюс небольшой вклад от рассеяния. Потери интенсивности вследствие рассеяния описываются отношением, схожим с аналогичным отношением для поглощения:

$$I(z) = I_0 \exp(-\mu_s z), \quad (1.12)$$

где  $\mu_s$  является коэффициентом рассеяния. Дифференцирование (1.12) по  $z$  дает:

$$dI = -\mu_s I dz . \quad (1.13)$$

Интенсивность, рассеянная тонким слоем вещества толщиной  $L$ , как показано на рис. 1.3, будет, таким образом, пропорциональна  $\mu_s$  и  $L$ :

$$I_s \sim \mu_s L. \quad (1.14)$$

Запишем закон рассеяния Рэля, пренебрегая зависимостью показателя преломления от длины волны [1]:

$$I_s \sim \frac{1}{\lambda^4} . \quad (1.15)$$

Если принять во внимание угол рассеяния  $\theta$ , получим более точную зависимость

$$I_s(\theta) \sim \frac{1 + \cos(\theta)^2}{\lambda^4} . \quad (1.16)$$

где  $\theta = 0$  обозначает рассеяние вперед. В пределах видимого диапазона рассеяние всегда значительно ослабляется, если сравнивать зеленый и красный свет. Рассеяние Рэля является упругим, то есть рассеянный свет имеет те же значения  $k$  и  $\lambda$  что и падающий свет. Одним из важных типов неупругого рассеяния является рассеяние Бриллюэна. Оно возникает при распространении через среду акустических волн, вызывающих неоднородности показателя преломления. Рассеяние Бриллюэна для света с более высокими (или более низкими) частотами происходит, так как рассеивающие частицы движутся навстречу (или удаляются) относительно источника света. Таким образом это может быть рассмотрено как оптический эффект Доплера, когда частота фотонов увеличивается или уменьшается. При взаимодействии лазерного излучения с тканью рассеяние Бриллюэна становится значительным только во время образования ударной шокковой волны.

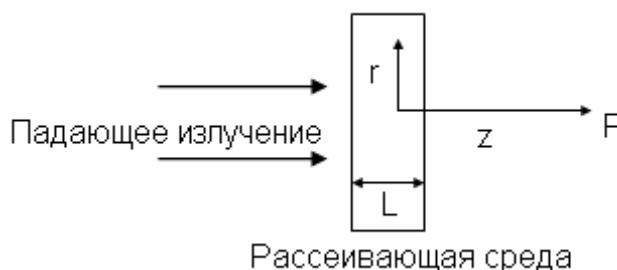


Рис. 1.3. Геометрия рэлеевского рассеяния

В приведенном законе Рэля поглощение не учитывалось. Поэтому выражения (1.15) и (1.16) верны только для длин волн далеких от полос поглощения. Далее поглощение и рассеяние будут рассмотрены совместно. Пространственный размер рассеивающих частиц также не принимали во внимание. Если этот размер становится соизмеримым с длиной волны падающего излучения, как в случае клеток крови, закон Рэля становится неприменим и имеет место другой тип рассеяния, называемый рассеяние Ми.

Теория рассеяния Ми несколько сложнее и поэтому здесь не будет рассмотрена. Однако необходимо особо отметить два важных отличия между рассеянием Ми и рассеянием Рэлея. Во-первых, рассеяние Ми показывает более слабую зависимость от длины волны по сравнению с рассеянием Рэлея. Во-вторых, рассеяние Ми происходит предпочтительно в направлении вперед, тогда как рассеяние Рэлея, пропорционально  $1 + \cos(\theta)^2$ , т. е. интенсивность света, рассеянного вперед и назад одинаковы.

#### 1.4. НЕПРОЗРАЧНЫЕ СРЕДЫ

Ранее было рассмотрено проявление либо поглощения, либо рассеяния в отдельности. Однако в большинстве тканей они проявляются одновременно. Такие среды называются непрозрачными (мутными) средами. Их полный коэффициент ослабления может быть выражен так:

$$\mu_t = \mu_a + \mu_s.$$

Теперь перейдем непосредственно к рассмотрению принципов построения математических моделей для расчета взаимодействия лазерного излучения с мутными средами. Одним из примеров такой среды, как было отмечено выше, является биоткань человека. Биоткань является многослойной средой, содержащей различные включения, такие как, например, кровеносные сосуды, в которых происходит движение крови. Все это осложняет понимание процессов, происходящих при воздействии лазерным излучением на биоткань.

Для описания этих процессов на данный момент существует множество различных математических и физических моделей, каждая из которых призвана решить какую-либо конкретную задачу, описать частный случай. Рассмотрим здесь основные подходы в теории построения математических моделей, описывающих взаимодействие лазерного излучения с многокомпонентными многослойными мутными средами.

#### 1.5. ТРИ ПОДХОДА В ТЕОРИИ ОСЛАБЛЕНИЯ И РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

В оптике рассеивающих сред можно выделить три основных направления.

**Первое направление** связано с решением задач дифракции для отдельных рассеивателей и установлением связи характеристик поглощения и рассеяния с оптическими геометрическими и структурными параметрами частиц. Начиная со второй половины 80-х гг. в этой области разработан ряд новых методов и алгоритмов, которые позволяют получить количественные результаты для очень широкого класса размеров, форм, структур и

оптических параметров частиц. Важность этой области теории рассеяния для ее применения к реальным системам определяется следующими обстоятельствами. Во-первых, для сильно разреженных и оптически тонких сред характеристики рассеяния ансамбля частиц (интенсивности, интегральные сечения и т. д.) находятся простым сложением без учета интерференции. В этом состоит так называемое приближение однократного рассеяния. Конечно, в некоторых специальных случаях этим приближением нужно пользоваться с осторожностью. Например, рассеяние в направлении падающей волны является когерентным, по крайней мере если время когерентности падающего света больше времени его распространения в рассеивающем слое и меньше характерного времени изменения конфигурации частиц, поэтому для малых углов должны складываться поля, а не интенсивности. Однако для типичных размеров рассеивающего образца область таких углов оказывается очень малой и практически может не учитываться. Приближение однократного рассеяния может применяться также в варианте, когда складываются рассеянные поля с учетом геометрических фазовых сдвигов от разных рассеивателей. Однако сами рассеянные поля рассчитываются на основе возбуждения рассеивателя исходной падающей волной, т. е. без учета облучения от других частиц.

Другим важным приложением теории рассеяния малыми частицами является вычисление характеристик рассеяния так называемого «элементарного рассеивающего объема», фигурирующего в теории переноса излучения. Кроме того, электродинамическая теория для отдельной частицы определяет так называемый оператор рассеяния, который используется в теории многократного рассеяния волн и описывает реакцию частицы на заданное возбуждающее поле.

**Второе направление** теории рассеяния света связано с уравнением переноса излучения (УПИ). Это уравнение оперирует с фотометрическими величинами и феноменологическими характеристиками среды, такими как коэффициенты рассеяния, поглощения и индикатриса рассеяния единичного объема. В теории переноса многократное рассеяние учитывается феноменологически на основе закона сохранения энергии и понятия лучевой интенсивности. Физическая картина, лежащая в основе УПИ, базируется на представлении о взаимном многократном некогерентном облучении неоднородностей. По сути дела, предметом теории переноса является кинетика диффузии фотонов в неоднородной среде. Включение в теорию переноса поляризационных параметров Стокса приводит к матричной формулировке УПИ, однако физическая основа матричной теории переноса остается точно такой же, как и в скалярном случае. Элементарный объем рассеивающей среды играет роль квадратичного детектора, который; расщепляет поле на некогерентные пучки (фотоны), а сам акт рассеяния трактует-

ся всегда в энергетическом смысле, с усреднением по времени и объему. Представления о диффузии фотонов в неоднородной среде естественным образом приводят к статистической схеме решения УПИ в рамках идеологии метода Монте-Карло. Этот метод требует значительных компьютерных ресурсов, зато может быть использован для реальной геометрии эксперимента.

**Третье направление** теории рассеяния, наиболее строгое, по сути является электродинамикой статистически неоднородных сред. Этот подход учитывает многократное рассеяние волн на дискретных или непрерывных неоднородностях, векторный характер электромагнитного поля. Основные физические принципы теории многократного рассеяния волн одинаковы для систем с непрерывными и дискретными неоднородностями, однако детали формализма несколько различаются. Далее мы для определенности будем иметь в виду случай дискретных рассеивателей.

Теория распространения и многократного рассеяния излучения в среде взаимодействующих рассеивателей относится к довольно сложному классу многочастичных электродинамических задач. Для их решения разработаны специальные диаграммные методы, которые приводят к уравнению Дайсона для средней функции Грина или уравнению Бете–Солпитера для коррелятора функции Грина. Из-за сложностей чисто математического характера заметный прогресс в этой области, в том числе появление эффективных численных алгоритмов, достигнут сравнительно недавно.

Будучи довольно сложной в математическом отношении, теория многократного рассеяния волн базируется на простых физических принципах. Во-первых, считается, что известны пространственная конфигурация всех частиц и ее статистические свойства. Во-вторых, предполагается, что известен оператор рассеяния отдельной частицы, который описывает рассеянное поле для заданного возбуждающего поля. Поскольку мы имеем дело с системой электродинамически взаимодействующих мультипольных осцилляторов, возбуждающее поле складывается из падающего поля и поля многократного рассеяния от всех остальных частиц. Отсюда ясно, что нахождение возбуждающего поля с учетом всех возможных порядков рассеяния от всех взаимодействующих частиц и представляет главную сложность теории. Различные ее варианты отличаются в основном только способами приближенного вычисления возбуждающего поля с учетом статистических свойств ансамбля, описывающего пространственную конфигурацию и оптические свойства рассеивателей. Если возбуждающие поля найдены, то дальнейший анализ состоит в вычислении рассеянных полей отдельных частиц и сложении этих полей с учетом фазовых сдвигов. Поскольку мы имеем дело со случайным полем, то для вычисления наблюда-



емых фотометрических характеристик необходимо использовать соответствующий корреляционный анализ.

В рамках строгой теории МРВ довольно детально разработана теория когерентного распространения излучения в среде с плотноупакованными рассеивателями, основным результатом которой является вывод дисперсионного уравнения для эффективного волнового числа, описывающего распространение когерентного поля в среде и отличающегося от волнового числа свободного пространства. Это дисперсионное уравнение учитывает оптические свойства рассеивателей и статистические свойства их пространственного расположения. Как правило, при выводе дисперсионного уравнения делаются определенные упрощающие предположения. Например, используется квазикристаллическое приближение, для того чтобы расцепить бесконечную цепочку уравнений многократного рассеяния, а для описания парных корреляций в положениях частиц используется приближение Перкуса–Йевики.

Следует отметить, что имеется тесная связь между теорией когерентного распространения света в плотноупакованных дисперсных системах и в однородных молекулярных или кристаллических средах. Связь между показателем преломления  $n$  такой среды, концентрацией  $N$  и поляризуемостью молекул  $\alpha$  дается хорошо известной формулой Лоренц–Лоренца

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha$$

В контексте нашего анализа важно иметь в виду, что соотношение Лоренц–Лоренца может быть получено как вспомогательный результат вывода теоремы Эваль-да-Озеена. В этом выводе оптические свойства среды трактуются на основе представления полного светового поля как суммы падающей волны и всех волн, многократно рассеянных молекулами, возбуждаемыми самосогласованным полем рассеяния остальных молекул (кроме данной рассматриваемой молекулы).

Принципиальной особенностью теории МРВ является то, что оптические свойства взаимодействующих частиц отличаются от тех характеристик, которые получаются при решении задачи рассеяния для изолированной частицы. Например, сечения экстинкции частиц в кластере не совпадают с расчетом по обычной теории Ми. Даже в простейшем случае двух абсолютно идентичных контактирующих сфер сечение рассеяния каждой частицы зависит от ориентации этой бисферы по отношению к падающей плоской волне.

Эффекты такого типа часто называются «коллективными» или «кооперативными» эффектами рассеяния взаимодействующих частиц.

Следует подчеркнуть, что кооперативные эффекты могут иметь различную природу и соответственно экспериментальное проявление. Во-первых, как уже указывалось выше, возбуждающее локальное поле может существенно отличаться от поля падающей волны и даже от среднего поля в дисперсной среде из-за больших локальных флуктуаций. В этом случае сам по себе оптический отклик каждой частицы будет существенно отличаться от случая изолированного рассеивателя.

Даже если положения взаимодействующих частиц совершенно случайны и никак не коррелированы, оптические свойства такой дисперсной системы будут отличаться от случая однократного рассеяния невзаимодействующих частиц. Другая причина возникновения кооперативных эффектов в плотноупакованных системах связана с конструктивной интерференцией индивидуальных рассеянных полей, которая обусловлена наличием определенной упорядоченности в расположении частиц. Физические механизмы возникновения этой упорядоченности связаны с конкуренцией сил притяжения или отталкивания и теплового движения (энтропийного фактора). В зависимости от природы указанных сил, корреляции в положениях частиц могут быть либо короткодействующими, либо дальнедействующими. В случае незаряженных частиц обычно наблюдается упорядоченность только ближнего порядка, которую можно описать с помощью модели твердых сфер, потенциала Леннарда–Джонса.

В общем случае кооперативные эффекты многократного рассеяния имеют две составляющие, и их расчет достаточно сложен. Однако для биологических систем ситуация несколько упрощается за счет того, что оптические свойства взаимодействующих частиц обычно не сильно отличаются от свойств окружающей среды. Даже при наличии многократного переоблучения частиц отличия возбуждающего поля от поля падающей волны не бывают слишком большими. Это означает, что основное влияние на оптические характеристики среды оказывают не флуктуации локальных возбуждающих полей, а интерференция полей рассеяния, которая обусловлена корреляциями ближнего порядка в положениях частиц. При этом сами по себе рассеянные поля в первом приближении можно оценивать в рамках однократного приближения, т. е. полагая возбуждающее поле просто равным полю падающей волны.

Строгий анализ условий для применимости того или иного варианта теории светорассеяния представляет собой нетривиальную задачу, в которой требуется учитывать свойства когерентности падающего излучения, размер, концентрацию и оптические свойства частиц, характерное время стабильности микроструктуры среды (т. е. характерные времена релаксации флуктуации), геометрические параметры рассеивающего образца, характеристики фотоприемника и т. д. Например, если время когерентности

падающего излучения меньше времени пробега фотона между двумя последовательными актами рассеяния, то эти акты рассеяния будут статистически независимы. В этом случае, типичном для рассеяния нейтронов или жесткого рентгеновского излучения, применимы либо теория УПИ, либо приближение однократного рассеяния (почти прозрачные среды).

Качественно возможность применения каждого из трех перечисленных подходов к описанию распространения и рассеяния излучения в дисперсной среде определяется пятью характерными размерами: длиной волны  $\lambda$ , размером частиц (неоднородностей)  $\alpha$ , средним расстоянием между ними (радиусом корреляции)  $R$ , геометрической толщиной среды (и средней длиной когерентности излучения  $l_c$ ). Для концентрированных дисперсных сред  $R \sim \alpha$ ; если при этом размер частиц сравним с длиной волны, то рассеивающие частицы не являются независимыми и требуется учитывать многократное переоблучение в рамках теории МРВ. Конкретная формулировка теории зависит от соотношения между размером частиц, длиной волны и геометрическими параметрами рассеивающего объема.

Если среднее расстояние  $R \gg \alpha, \lambda, l_c$  (умеренно концентрированные и разбавленные среды произвольной оптической толщины), то применима теория УПИ, конкретная форма которой опять же зависит от отношений  $\alpha / \lambda$  и  $R / l, R / l_c$  (малоугловое приближение, диффузионное приближение и т. д.). С физической точки зрения необходимым условием применимости УПИ является малость длины волны и размера частиц по сравнению с характерной длиной светового поля. Заметим, однако, что в некоторых ситуациях теория УПИ принципиально неприменима. В частности, она непригодна для описания эффекта усиленного обратного рассеяния.

В случае разбавленных и оптически тонких дисперсных сред, когда  $R \gg \alpha, \lambda$  и оптическая толщина  $\sigma_e l / R^3 \ll 1$  ( $\sigma_e$  – сечение экстинкции частицы), применимо приближение однократного рассеяния, в котором фотометрические величины, квадратичные по рассеянному полю, являются просто суммой по всем частицам. Важно иметь в виду, что границы применимости однократного приближения по концентрации частиц взвеси (или оптической толщине) существенно различаются в зависимости от типа измеряемых эффектов.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ СВЕТА ОТДЕЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

### 2.1. ПОГЛОЩЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЕЙ

Пусть частица, характеризуемая определенными размером, формой и оптическими свойствами, освещается монохроматической волной. Требуется определить электромагнитное поле во всех точках частицы и во всех точках однородной среды, в которую погружена эта частица. Поле внутри частицы обозначим  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ ; поле  $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$  в среде, окружающей частицу, представляет собой суперпозицию падающего поля  $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$  и рассеянного поля  $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$  (рис. 2.1):

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s,$$

где

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t), \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t),$$

а  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, соответствующий окружающей среде. Эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad (2.4)$$

всюду, где  $\epsilon$  и  $\mu$  непрерывны. Применив операцию  $\nabla \times$  к уравнениям (2.3) и (2.4), имеем

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2 \epsilon\mu\mathbf{E},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \epsilon\mu\mathbf{H},$$

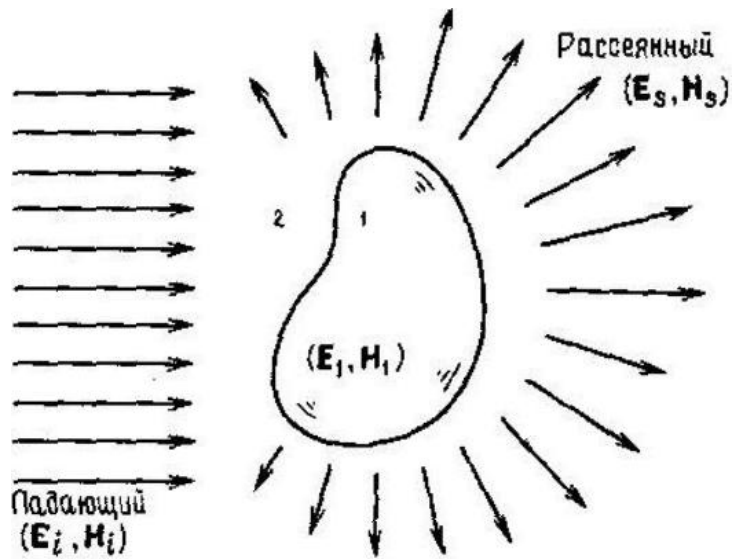
а воспользовавшись векторным тождеством

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}), \quad (2.5)$$

получим

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2.6)$$

где  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$  и  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})$ . Таким образом,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют *векторному волновому уравнению*. Любое векторное поле с нулевой дивергенцией, которое удовлетворяет векторному волновому уравнению, описывает некое электрическое поле, при этом соответствующее магнитное поле выражается через ротор электрического поля при помощи соотношения (2.3). Отметим, что утверждение, что компоненты  $\mathbf{E}$  по отдельности удовлетворяют *скалярному волновому уравнению*



$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

к которому мог бы привести поверхностный взгляд на уравнение (2.6), неверно, кроме частного случая, когда  $\mathbf{E}$  задано в прямоугольной декартовой системе координат.

Рис. 2.1. Падающее поле  $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ , приводящее к появлению поля  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$  внутри частицы и рассеянного поля  $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$  в окружающей частицу среде

**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ.** От электромагнитного поля требуется, чтобы оно удовлетворяло уравнениям Максвелла в точках, где  $\epsilon$  и  $\mu$  непрерывны. Между тем при пересечении границы между частицей и средой обычно имеет место резкое изменение этих свойств. Это изменение происходит в пределах переходной области толщиной порядка атомных размеров. С макроскопической точки зрения, следовательно, имеется разрыв на границе. В таких граничных точках мы налагаем следующие условия на поля:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_2(x) - \mathbf{E}_1(\bar{x})] \times \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\ [\mathbf{H}_2(x) - \mathbf{H}_1(x)] \times \hat{\mathbf{n}} &= 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где  $\hat{\mathbf{n}}$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$  частицы. Граничные условия (2.7) представляют собой требование непрерывности *тангенциальных компонент*  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на границе, разделяющей среды с различными свойствами.

В разд. 2.1 было показано, что физически реализуемое гармоническое электромагнитное поле  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  в линейной изотропной однородной среде должно удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

где  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ , и иметь нулевую дивергенцию

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Кроме того,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не являются независимыми:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \omega \mu \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i \omega \varepsilon \mathbf{E}.$$

Предположим, что из заданных *скалярной* функции  $\psi$  и произвольного *постоянного* вектора  $\mathbf{c}$  мы образуем *векторную* функцию  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi).$$

Дивергенция ротора любой векторной функции обращается в нуль:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0.$$

Воспользовавшись векторными тождествами

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \end{aligned}$$

получим

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times \left[ \mathbf{c}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi) \right].$$

Отсюда видно, что  $\mathbf{M}$  удовлетворяет *векторному* волновому уравнению при условии, что  $\psi$  является решением *скалярного* волнового уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Кроме того, можно написать  $\mathbf{M} = -\mathbf{c} \times \nabla \psi$ , откуда следует, что  $\mathbf{M}$  перпендикулярен  $\mathbf{c}$ . Построим теперь из  $\mathbf{M}$  другую векторную функцию:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}$$

с нулевой дивергенцией, которая также удовлетворяет векторному волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0.$$

Имеем также

$$\nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}.$$

Таким образом,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  обладают всеми необходимыми свойствами электромагнитного поля: они удовлетворяют векторному волновому уравнению, их дивергенции равны нулю, ротор вектора  $\mathbf{M}$  пропорционален  $\mathbf{N}$ , а ротор  $\mathbf{N}$  пропорционален  $\mathbf{M}$ . Следовательно, задача нахождения решений уравнений поля сводится к сравнительно простой задаче нахождения решений скалярного волнового уравнения. Скалярную функцию  $\psi$  мы будем называть *производящей функцией* для *векторных гармоник*  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , а вектор  $\mathbf{c}$  иногда называют направляющим вектором.

Выбор производящих функций диктуется видом симметрии, которая имеется в задаче. В этой главе мы рассматриваем рассеяние шаром, вследствие чего выбираем функции  $\psi$ , удовлетворяющие волновому уравнению, записанному в сферических координатах (рис. 2.1). Выбор направляющего вектора несколько менее очевиден. Мы можем выбрать некоторый произвольный вектор  $\mathbf{c}$ . Между тем, если мы положим

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi), \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, то  $\mathbf{M}$  будет решением векторного волнового уравнения в сферических координатах. Поэтому в задачах со сферической симметрией в качестве фундаментальных решений уравнений поля мы будем брать функцию  $\mathbf{M}$ , определяемую (2.8), и соответствующую функцию  $\mathbf{N}$ . Отметим, что  $\mathbf{M}$  всюду является касательным к любой сфере  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  (т. е.  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} = 0$ ).

Скалярное волновое уравнение в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (2.9)$$

Будем искать частные решения (2.9) в виде

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi),$$

которые после подстановки в (2.9) дают три отдельных уравнения:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0, \quad (2.12)$$

где константы разделения  $m$  и  $n$  определяются из дополнительных условий, которым должна удовлетворять функция  $\psi$ . Во-первых, заметим, что если для данного  $m$   $\Phi_m$  – решение (2.10), то  $\Phi_{-m}$  не является линейно независимым решением. Линейно независимыми являются решения вида

$$\Phi_e = \cos m\phi, \quad \Phi_o = \sin m\phi,$$

где индексы  $e$  и  $o$  обозначают *четное* (*even*) и *нечетное* (*odd*). Потребуем, чтобы  $\psi$  была *однозначной* функцией азимутального угла  $\phi$ :

$$\lim_{\nu \rightarrow 2\pi} \psi(\phi + \nu) = \psi(\phi) \quad (2.13)$$

для всех  $\phi$ , за исключением, быть может, точек, лежащих на границе между областями с различными свойствами. Однако нам не нужно рассматривать такие граничные точки, нас интересуют лишь решения скалярного волнового уравнения внутри однородных областей. Тогда условие (2.13) требует, чтобы  $m$  было целым числом или нулем, при этом положительных значений  $m$  достаточно для получения всех линейно независимых решений уравнения (2.10).

Решениями (2.11), которые конечны при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , являются *присоединенные функции Лежандра* первого рода  $P_n^m(\cos\theta)$ , где  $n$  – степень,  $m$  – порядок, причем  $n = m, m+1, \dots$ . Эти функции ортогональны:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta_{nn'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (2.14)$$



где  $\mu = \cos \theta$  и  $\delta_{n'n}$  – символ Кронекера, который равен единице при  $n' = n$  и нулю в противном случае. При  $m = 0$  присоединенные функции Лежандра называют *полиномами Лежандра* и обозначают через  $P_n$ .

Если перейти к безразмерной переменной  $\rho = kr$  и ввести функцию  $Z = R\sqrt{\rho}$ , то уравнение (2.12) можно переписать в виде

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dZ}{d\rho} \right) + \left[ \rho^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0. \quad (2.15)$$

Линейно независимые решения (2.15) выражаются *бесселевыми функциями* первого и второго рода  $J_\nu$  и  $Y_\nu$  (вместо  $Y_\nu$  часто используется символ  $N_\nu$ ), где *порядок*  $\nu = n + 1/2$  является полуцелым. Следовательно, линейно независимыми решениями (2.12) являются сферические *бесселевы функции*

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{\nu+1/2}(\rho), \quad (2.16)$$

$$y_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{\nu+1/2}(\rho), \quad (2.17)$$

где постоянный множитель  $\sqrt{\pi/2}$  введен из соображений удобства. Сферические бесселевы функции удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$z_{n-1}(\rho) + z_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho} z_n(\rho), \quad (2.18)$$

$$(2n+1) \frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = n z_{n-1}(\rho) - (n+1) z_{n+1}(\rho), \quad (2.19)$$

где  $z_n$  – это либо  $j_n$ , либо  $y_n$ . Для первых двух порядков

$$j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad j_1(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho},$$

$$y_0(\rho) = -\frac{\cos \rho}{\rho}, \quad y_1(\rho) = -\frac{\cos \rho}{\rho^2} - \frac{\sin \rho}{\rho},$$

а функции более высоких порядков могут быть построены по рекуррентной формуле. Заметим, что для всех порядков  $n$  функция  $y_n(kr)$  обращается в бесконечность при стремлении  $r$  к нулю.

Любая линейная комбинация  $j_n$  и  $y_n$  также является решением (2.12). Поэтому при желании мы могли бы взять в качестве фундаментальных решений уравнения (2.12) и две любые линейно независимые комбинации. Две такие комбинации заслуживают особого внимания – это *сферические бесселевы функции третьего рода* (называемые иногда сферическими функциями Ганкеля):

$$h_n^{(1)}(\rho) = j_n(\rho) + iy_n(\rho), \quad (2.20)$$

$$h_n^{(2)}(\rho) = j_n(\rho) - iy_n(\rho). \quad (2.21)$$

Таким образом, мы построили производящие функции, которые удовлетворяют скалярному волновому уравнению в сферических координатах:

$$\psi_{emn} = \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \quad (2.22)$$

$$\psi_{omn} = \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \quad (2.23)$$

где  $z_n$  – любая из четырех сферических бесселевых функций:  $j_n$ ,  $y_n$ ,  $h_n^{(1)}$  или  $h_n^{(2)}$ . Более того, в силу *полноты* системы функций  $\cos m\phi$ ,  $\sin m\phi$ ,  $P_n^m(\cos\theta)$ ,  $z_n(kr)$  любая функция, удовлетворяющая скалярному волновому уравнению в сферических координатах, может быть разложена в бесконечный ряд по функциям (2.22) и (2.23). Векторные сферические гармоники, порождаемые  $\psi_{emn}$  и  $\psi_{omn}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{emn} &= \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{emn}), & \mathbf{M}_{omn} &= \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{omn}), \\ \mathbf{N}_{emn} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{emn}}{k}, & \mathbf{N}_{omn} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{omn}}{k}, \end{aligned}$$

или в компонентной записи

$$\mathbf{M}_{emn} = \frac{-m}{\sin\theta} \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{M}_{omn} = \frac{m}{\sin\theta} \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{emn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos m\phi n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta - \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$-m \sin m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{omn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \sin m\phi n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$+m \cos m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

где  $r$  – компонента  $\mathbf{N}_{mn}$  упрощена за счет использования того факта, что  $P_n^m$  удовлетворяет уравнению (2.21). Всякое решение уравнений поля может быть теперь разложено в бесконечный ряд по функциям (2.24)–(2.27). Таким образом, имея в своем распоряжении векторные гармоники, мы приступим к решению задачи рассеяния на шаре произвольного радиуса.

## 2.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ПО ВЕКТОРНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

В этом разделе мы покажем, как следует находить коэффициенты в таком разложении.

Наша задача относится к рассеянию плоской  $x$ -поляризованной волны произвольным шаром. В сферических координатах эта волна записывается в виде

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{ikr \cos\theta} \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (2.28)$$

где

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (2.29)$$

Первым шагом в решении этой задачи является разложение (2.28) по векторным сферическим гармоникам:

$$\mathbf{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{emn} \mathbf{M}_{emn} + B_{omn} \mathbf{M}_{omn} + A_{emn} \mathbf{N}_{emn} + A_{omn} \mathbf{N}_{omn}) \quad (2.30)$$

Поскольку  $\sin m\varphi$  ортогонален  $\cos m\varphi$  для всех  $m$  и  $m'$ , то отсюда следует, что  $\mathbf{M}_{emn}$  и  $\mathbf{M}_{omn}$  ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{em'n'} \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (\text{для всех } m, m', n, n').$$

Аналогично взаимно ортогональными системами функций являются также  $(\mathbf{N}_{omn}, \mathbf{N}_{emn})$ ,  $(\mathbf{M}_{omn}, \mathbf{N}_{omn})$  и  $(\mathbf{M}_{emn}, \mathbf{N}_{emn})$ . Свойства ортогональности  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$  означают, что все векторные гармоники разных порядков  $m$  взаимно ортогональны.

Чтобы доказать ортогональность функций  $(\mathbf{M}_{emn}, \mathbf{N}_{omn})$  и  $(\mathbf{N}_{emn}, \mathbf{M}_{omn})$ , достаточно показать, что интеграл

$$m \int_0^\pi \left( P_n^m \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + P_{n'}^m \frac{dP_n^m}{d\theta} \right) d\theta = m P_n^m P_{n'}^m \Big|_0^\pi \quad (2.31)$$

обращается в нуль для всех  $n$  и  $n'$ . Присоединенная функция Лежандра  $P_n^m$  связана с  $m$ -й производной соответствующего полинома Лежандра  $P_n$ :

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}, \quad (2.32)$$

где  $\mu = \cos \theta$ , откуда следует, что  $P_n^m$  обращается в нуль при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , исключая случай  $m = 0$ . Следовательно, (2.31) обращается в нуль для всех  $m$ ,  $n$  и  $n'$ . Для доказательства остальных соотношений ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{emn} \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin \theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{omn} \cdot \mathbf{M}_{omn'} \sin \theta d\theta d\phi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{emn} \cdot \mathbf{N}_{em'n'} \sin \theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{omn} \cdot \mathbf{N}_{omn'} \sin \theta d\theta d\phi = 0, \end{aligned}$$

при  $n \neq n'$  и  $m \neq 0$ , требуется показать, что

$$\int_0^\pi \left( \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + m^2 \frac{P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta = 0. \quad (2.33)$$

Поскольку обе функции  $P_n^m$  и  $P_{n'}^m$ , удовлетворяют уравнению (2.31), после некоторых преобразований имеем

$$2 \sin \theta \left( \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + m^2 \frac{P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) = 2n(n+1)P_n^m P_{n'}^m \sin \theta +$$

$$+ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} P_n^m + \sin \theta \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{n'}^m \right), \quad (2.34)$$

откуда, приняв во внимание условие ортогональности для  $P_n^m$ , легко прийти к (2.33). При  $m=0$   $\mathbf{N}_{omn}$  и  $\mathbf{M}_{omn}$  обращаются в нуль, ортогональность  $\mathbf{M}_{emn}$  и  $\mathbf{N}_{emn}$  при  $m=0$  также вытекает из (2.33) и (2.34).

Установленная выше ортогональность всех векторных сферических гармоник означает, что коэффициенты в разложении (2.30) имеют вид

$$B_{emn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi}.$$

Аналогичные выражения имеют место для  $B_{omn}$ ,  $A_{emn}$  и  $A_{omn}$ . Из (2.24), (2.20) и (2.29) и из ортогональности синуса и косинуса следует, что  $B_{emn} = A_{omn} = 0$  для всех  $m$  и  $n$ . Более того, все остальные коэффициенты по той же причине обращаются в нуль, кроме случая  $m=1$ . Поскольку падающее поле конечно в начале координат, то производящим функциям  $\Psi_{o1n}$  и  $\Psi_{e1n}$  должна соответствовать сферическая бесселева функция  $j_n(kr)$ . При этом мы отбрасываем функции  $y_n$ , поскольку они имеют особенность в начале координат. Векторным сферическим гармоникам, у которых радиальная зависимость производящих функций определяется  $j_n$ , будем приписывать верхний индекс (1). Таким образом, разложение для  $\mathbf{E}_i$ , имеет вид

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} (B_{o1n} \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} + A_{e1n} \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}). \quad (2.35)$$

Интеграл, стоящий в знаменателе выражения для  $B_{o1n}$ , можно легко найти, пользуясь формулой (2.34).

Между тем числитель содержит интеграл

$$\int_0^\pi \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P_n^1) e^{ip \cos \theta} d\theta. \quad (2.36)$$

Из (2.32) имеем

$$P_n^1 = -\frac{dP_n}{d\theta}, \quad (2.37)$$

где полиномы Лежандра степени  $n$  удовлетворяют уравнению (2.11):

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) = -n(n+1)P_n \sin \theta. \quad (2.38)$$

Следовательно, интеграл (2.36) пропорционален

$$\int_0^\pi e^{ip \cos \theta} P_n \sin \theta d\theta.$$

Последний шаг состоит в предложенном Гегенбауэром обобщении интеграла Пуассона

$$j_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{ip \cos \theta} P_n \sin \theta d\theta. \quad (2.39)$$

В результате приходим к выражениям для коэффициентов разложения

$$B_{0ln} = i^n E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (2.40)$$

Коэффициенты разложения  $A_{emn}$  вычисляются несколько сложнее, а именно: приходится вычислять интеграл

$$j_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{ip \cos \theta} P_n \sin \theta d\theta. \quad (2.41)$$

который можно взять по частям, что дает

$$\frac{2n(n+1)j_n(\rho)i^n}{i\rho},$$

где мы воспользовались также соотношениями (2.37)–(2.39). Далее перейдем к вычислению интеграла

$$\int_0^\pi \left( \cos \theta \frac{dP_n^1}{d\theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \right) e^{ip \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (2.42)$$

Его можно вычислить, умножив сначала (2.39) на  $\rho$ , а затем продифференцировав получающееся выражение по  $\rho$ . После некоторых алгебраических преобразований для (2.42) получаем

$$\frac{2n(n+1)i^n}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho j_n).$$

Отсюда получаем коэффициенты разложения:

$$A_{eln} = -iE_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (2.43)$$

Таким образом, приходим к искомому разложению плоской волны по сферическим гармоникам

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{oln}^{(1)} + i\mathbf{N}_{eln}^{(1)}) \quad (2.44)$$

### 2.3. ВНУТРЕННЕЕ И РАССЕЯННОЕ ПОЛЯ

Предположим, что на однородный изотропный шар радиусом  $a$  падает плоская волна (рис. 2.2). Как было показано в предыдущем разделе, электрическое поле падающей волны можно разложить в бесконечный ряд по векторным сферическим гармоникам. Соответствующее магнитное поле падающей волны получается путем вычисления ротора выражения (2.44):

$$\mathbf{H}_i = \frac{-k}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{eln}^{(1)} + i\mathbf{N}_{oln}^{(1)}). \quad (2.45)$$

Рассеянное электромагнитное поле ( $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ ) и поле ( $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ) внутри шара также можно разложить по векторным сферическим гармоникам. На границе между шаром и окружающей средой необходимо наложить условия (2.7):

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0. \quad (2.46)$$

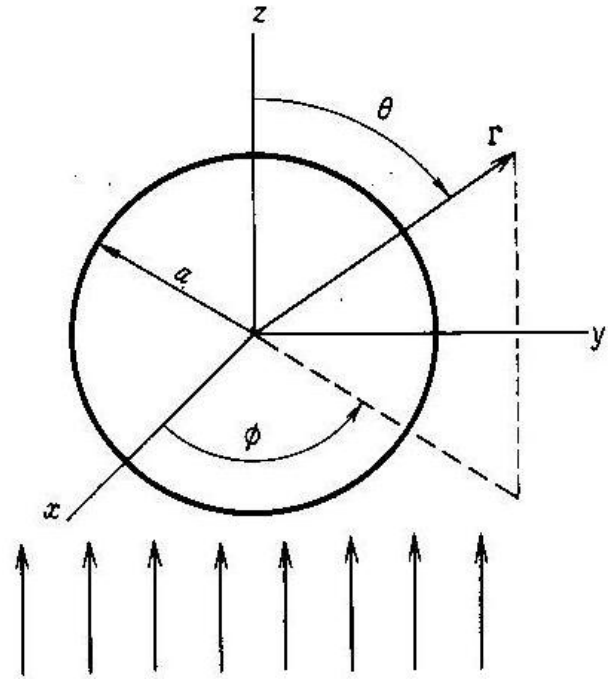


Рис. 2.2. Сферическая система координат с началом в центре сферической частицы радиусом  $a$

Граничные условия (2.46), ортогональность векторных гармоник и вид разложения падающего поля определяют вид разложений рассеянного поля и поля внутри шара: коэффициенты в этом разложении обращаются в нуль для всех  $m \neq 1$ . Ограниченность решения в начале координат требует, чтобы в качестве производящих функций для векторных гармоник внутри шара были взяты функции  $j_n(k_1 r)$ , где  $k_1$  – волновое число внутри шара. Таким образом, разложение поля  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$  имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( c_n \mathbf{M}_{oln}^{(1)} - i d_n \mathbf{N}_{eln}^{(1)} \right), \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{-k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( d_n \mathbf{M}_{eln}^{(1)} + i c_n \mathbf{N}_{oln}^{(1)} \right),\end{aligned}\tag{2.47}$$

где  $E_n = i^n E_0 (2n+1)/[n(n+1)]$ , а  $\mu_1$  – магнитная проницаемость шара.

Снаружи шара функции  $j_n$  и  $y_n$  ведут себя «хорошо». Поэтому разложение рассеянного поля содержит обе эти функции. Однако сейчас вновь обратимся к сферическим функциям Ганкеля  $h_n^{(1)}$  и  $h_n^{(2)}$ . На основе анализа асимптотических разложений функций Ганкеля порядка  $\nu$  при больших значениях  $|\rho|$  можно показать, что требуется лишь одна из этих функций. Действительно,

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(\rho) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i[\rho - \nu\pi/2 - \pi/4]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, m)}{(2i\rho)^m}, \\ H_\nu^{(2)}(\rho) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i[\rho - \nu\pi/2 - \pi/4]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu, m)}{(2i\rho)^m},\end{aligned}\tag{2.48}$$

где  $(\nu, m) = \Gamma(\nu + m + 1/2)/[m! \Gamma(\nu - m + 1/2)]$ ,  $\Gamma$  – гамма-функция, причем если  $n$  – целое неотрицательное число, то  $\Gamma(n+1) = n!$ . Из (2.48) следует, что асимптотические представления для сферических функций Ганкеля имеют вид

$$\begin{aligned}h_n^{(1)}(kr) &\sim \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr}, \\ &kr \gg n^2,\end{aligned}\tag{2.49}$$



$$h_n^{(2)}(kr) \sim -\frac{i^n e^{-ikr}}{ikr}. \quad (2.50)$$

Первое из этих асимптотических выражений соответствует *уходящей* сферической волне, а второе – *приходящей* сферической волне. Поскольку из физических соображений рассеянное поле на больших расстояниях от частицы должно быть уходящей волной, то в производящих функциях следует использовать только  $h_n^{(1)}$ . При анализе рассеянного поля на больших расстояниях нам понадобится также асимптотическое выражение для производной функции  $h_n^{(1)}$ . Оно получается из тождества

$$\frac{d}{d\rho} z_n = \frac{nz_{n-1} - (n+1)z_{n+1}}{2n+1}$$

и формулы (2.49) и имеет вид

$$\frac{dh_n^{(1)}}{d\rho} \sim \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho}, \quad (\rho \gg n^2). \quad (2.51)$$

В результате для разложения рассеянного поля имеем

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( ia_n \mathbf{N}_{eln}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{oln}^{(3)} \right), \quad \mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( ib_n \mathbf{N}_{oln}^{(3)} - a_n \mathbf{M}_{eln}^{(3)} \right), \quad (2.52)$$

где мы приписали верхний индекс (3) векторным сферическим гармоникам, для которых радиальная зависимость производящих функций задается функцией  $h_n^{(1)}$ .

#### 2.4. ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ УГЛА

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin \theta}, \quad \tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta}. \quad (2.53)$$

Их можно вычислить на основе рекуррентных соотношений

$$\pi_n = \frac{2n-1}{n-1} \mu \pi_{n-1} - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2}, \quad \tau_n = n\mu \pi_n - (n+1)\pi_{n-1}, \quad (2.54)$$

где  $\mu = \cos \theta$ , начиная с  $\pi_0 = 0$  и  $\pi_1 = 1$ . При этом  $\pi_n$  и  $\tau_n$  представляют собой либо четные, либо нечетные функции  $\mu$ :

$$\pi_n(-\mu) = (-1)^{n-1} \pi_n(\mu), \quad \tau_n(-\mu) = (-1)^n \tau_n(\mu). \quad (2.55)$$

Хотя сами функции  $\pi_n$  и  $\tau_n$  не представляют собой ортогональной системы, из (2.33) и (2.34) следует, что ортогональными системами функций являются  $\pi_n + \tau_n$  и  $\pi_n - \tau_n$ :

$$\int_0^\pi (\tau_n + \pi_n)(\tau_m + \pi_m) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (\tau_n - \pi_n)(\tau_m - \pi_m) \sin \theta d\theta \quad (2.56)$$

$(m \neq n).$

Теперь можно записать векторные сферические гармоники (2.24)–(2.27) (при  $m=1$ ) в разложениях внутреннего поля (2.47) и рассеянного поля (2.52) в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{oln} &= \cos \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \mathbf{M}_{eln} &= -\sin \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \mathbf{N}_{oln} &= \sin \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \sin \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \mathbf{N}_{eln} &= \cos \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \cos \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi. \end{aligned} \quad (2.57)$$

К функциям  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  будут добавлены верхние индексы для обозначения рода сферической функции Бесселя  $z_n$ : индекс (1) обозначает  $j_n(k_1 r)$ , а (3) –  $h_n^{(1)}(kr)$ . Как отмечалось ранее,  $\mathbf{M}$  не имеет радиальной составляющей, а при достаточно больших  $kr$  радиальная составляющая  $\mathbf{N}$  для рассеянного поля пренебрежимо мала по сравнению с поперечной составляющей.

## 2.5. КОЭФФИЦИЕНТЫ РЯДА РАССЕЯНИЯ

В этом разделе мы получим явные выражения для *коэффициентов ряда рассеяния*  $a_n$  и  $b_n$ .

Для данного  $n$  имеется четыре неизвестных коэффициента  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  и  $d_n$ , так что нам необходимо иметь четыре независимых уравнения, которые получаются из граничных условий (2.46), написанных для компонент поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i\theta} + \mathbf{E}_{s\theta} &= \mathbf{E}_{l\theta}, & \mathbf{E}_{i\phi} + \mathbf{E}_{s\phi} &= \mathbf{E}_{l\phi}, \\ \mathbf{H}_{i\theta} + \mathbf{H}_{s\theta} &= \mathbf{H}_{l\theta}, & \mathbf{H}_{i\phi} + \mathbf{H}_{s\phi} &= \mathbf{H}_{l\phi}, \end{aligned} \quad r = a.$$

Из ортогональности  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , соотношений (2.56), приведенных выше граничных условий вместе с разложениями (2.44), (2.43), (2.47), (2.52), а также из выражений (2.57) для векторных гармоник получаем в итоге четыре линейных уравнения для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} j_n(mx)c_n + h_n^{(1)}(x)b_n &= j_n(x), \\ \mu [mxj_n(mx)]' c_n + \mu_1 [xh_n^{(1)}(x)]' b_n &= \mu_1 [xj_n(x)]', \\ \mu mj_n(mx)d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(x)a_n &= \mu_1 j_n(x), \\ [mxj_n(mx)]' d_n + m [xh_n^{(1)}(x)]' a_n &= m [xj_n(x)]', \end{aligned} \quad (2.58)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу, стоящему в круглых скобках, а через  $x$  и  $m$  обозначены соответственно *параметр дифракции* и *относительный показатель преломления*:

$$x = ka = \frac{2\pi Na}{\lambda}, \quad m = \frac{k_1}{k} = \frac{N_1}{N},$$

где  $N_1$  и  $N$  – показатели преломления частицы и среды соответственно. Полученные четыре совместных линейных уравнения (2.58), решаются относительно коэффициентов поля внутри частицы:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\mu_1 j_n(x) [xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [xj_n(x)]'}{\mu_1 j_n(mx) [xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [mxj_n(mx)]'}, \\ d_n &= \frac{\mu_1 mj_n(x) [xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 mh_n^{(1)}(x) [xj_n(x)]'}{\mu m^2 j_n(mx) [xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [mxj_n(mx)]'}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

и коэффициентов рассеянного поля:

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx) [xj_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx) [xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [mxj_n(mx)]'}, \quad (2.60)$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx) [xj_n(x)]' - \mu j_n(x) [mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx) [xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [mxj_n(mx)]'}.$$

Отметим, что знаменатели выражений для  $c_n$  и  $b_n$ , так же как и для  $a_n$  и  $d_n$ , совпадают. Если для некоторого  $n$  частота (или радиус) такова, что один из этих знаменателей очень мал, то соответствующая мода будет преобладать в рассеянном поле. Мода  $a_n$  преобладает, если приближенно выполняется условие

$$\frac{[xh_n^{(1)}(x)]'}{h_n^{(1)}(x)} = \frac{\mu_1 [mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)}, \quad (2.61)$$

аналогично преобладает мода  $b_n$ , если приближенно выполнено равенство

$$\frac{[xh_n^{(1)}(x)]'}{h_n^{(1)}(x)} = \frac{\mu [mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx)}. \quad (2.62)$$

В общем случае рассеянное поле является суперпозицией нормальных мод.

Частоты, для которых равенства (2.61) и (2.62) являются точными, или так называемые собственные частоты шара, комплексны, и о соответствующих модах иногда говорят, что они являются *виртуальными*. Если мнимые части этих комплексных частот малы по сравнению с действительными, то последние отвечают приближенно вещественным частотам падающих электромагнитных волн, которые возбуждают различные электромагнитные моды.

Коэффициенты ряда рассеяния (2.60) можно упростить, введя функции Риккати –Бесселя:

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho).$$

Если принять, что магнитная проницаемость частицы и окружающей среды одна и та же, то

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \quad (2.63)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\psi_n(mx)\xi'_n(x) - m\xi_n(x)\psi'_n(mx)}. \quad (2.64)$$

Заметим, что при  $m$ , стремящемся к единице,  $a_n$  и  $b_n$  стремятся к нулю, т.е. вместе с частицей исчезает и рассеянное поле.

## 2.6. СЕЧЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЦ

В разделе 2.3 рассмотрено рассеяние только  $x$ -поляризованного света, тем не менее, пользуясь симметрией частицы, можно найти рассеянное поле для падающего света с произвольным направлением линейной поляризации, а следовательно, и для света с любым состоянием поляризации. Так, например, рассеянные электрические поля для  $x$ -поляризованной и  $y$ -поляризованной плоских волн равной амплитуды связаны соотношением

$$E_s(\varphi; x\text{-поляризованная}) = E_s(\varphi + \pi/2; y\text{-поляризованная}).$$

Таким образом, располагая коэффициентами рассеяния  $a_n$  и  $b_n$ , можно определить все измеряемые величины, связанные с рассеянием и поглощением, как, например, сечения рассеяния и элементы матрицы рассеяния.

Сечения для шара можно получить путем вычисления суммарной скорости  $W_a$ , с которой электромагнитная энергия пересекает поверхность воображаемой сферы с центром в месте расположения частицы. Если окружающая среда является непоглощающей, то  $W_a$  не зависит от радиуса этой воображаемой сферы, который из соображений удобства выберем достаточно большим, с тем чтобы можно было воспользоваться приближением дальней зоны для электромагнитного поля. Между тем можно дать вывод точных выражений для сечений сферической частицы.

Запишем  $W_a$  как  $W_{\text{ext}} - W_s$ , где

$$W_s = -\int_S S_s \cdot \mathbf{i}_r dS, \quad S_s = \frac{1}{2} \text{Re}(E_s \times H_s^*),$$

$$W_{\text{ext}} = -\int_S S_{\text{ext}} \cdot \mathbf{i}_r dS, \quad S_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \text{Re}(E_i \times H_s^* + E_s \times H_i^*),$$

где  $E_s, H_s$  определяется выражением (2.52), а  $E_i, H_i$ , соответственно, – выражениями (2.44) и (2.45), значок «\*» обозначает комплексное сопряжение.

В сферической системе координат  $W_{\text{ext}}, W_s$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \mathbf{E}_{i\phi} \mathbf{H}_{s\theta}^* - \mathbf{E}_{i\theta} \mathbf{H}_{s\phi}^* - \mathbf{E}_{s\theta} \mathbf{H}_{i\phi}^* + \mathbf{E}_{s\phi} \mathbf{H}_{i\theta}^* \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \\ W_s &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \mathbf{E}_{s\theta} \mathbf{H}_{s\phi}^* - \mathbf{E}_{s\phi} \mathbf{H}_{s\theta}^* \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (2.65)$$

При этом радиус  $r \geq a$  воображаемой сферы произволен. Из физических соображений ясно, что  $W_{\text{ext}}$  и  $W_s$  не зависят от состояния поляризации падающего света. Поэтому при вычислении интегралов (2.65) можно считать падающий свет  $x$ -поляризованным:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i\theta} &= \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\psi_n \pi_n - i\psi'_n \tau_n), & \mathbf{H}_{i\theta} &= \frac{k}{\omega\mu} \operatorname{tg} \phi \mathbf{E}_{i\theta}, \\ \mathbf{E}_{i\phi} &= \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i\psi'_n \pi_n - \psi_n \tau_n), & \mathbf{H}_{i\phi} &= \frac{-k}{\omega\mu} \operatorname{ctg} \phi \mathbf{E}_{i\phi}, \end{aligned}$$

где  $\rho = kr$ . Соответствующее рассеянное поле есть

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s\theta} &= \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \xi'_n \tau_n - b_n \xi_n \pi_n), \\ \mathbf{E}_{s\phi} &= \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (b_n \xi_n \tau_n - ia_n \xi'_n \pi_n), \\ \mathbf{H}_{s\theta} &= \frac{k}{\omega\mu} \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \xi'_n \tau_n - a_n \xi_n \pi_n), \\ \mathbf{H}_{s\phi} &= \frac{k}{\omega\mu} \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \xi'_n \pi_n - a_n \xi_n \tau_n). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Подставим разложения в виде рядов (2.66) в интеграл  $W_s$ , а получающиеся ряды произведений проинтегрируем почленно, то получим

$$W_s = \frac{\pi |E_0|^2}{k\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re} \{g_n\} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

где мы воспользовались формулой (2.31) и соотношением

$$\int_0^\pi (\pi_n \pi_m + \tau_n \tau_m) \sin \theta d\theta = \delta_{nm} \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1},$$

вытекающим из (2.34). Величина  $g_n$ , определяемая как  $-i\xi_n^* \xi_n'$ , может быть записана в виде

$$g_n = (\chi_n^* \psi_n' - \psi_n^* \chi_n') - i(\psi_n^* \psi_n' + \chi_n^* \chi_n'),$$

где  $\chi_n$  – функция Риккати–Бесселя и определяется как  $\rho y_n(\rho)$  и, следовательно,  $\xi_n = \psi_n - i\chi_n$ . Функции  $\psi_n$  и  $\chi_n$  принимают вещественные значения для вещественного аргумента, поэтому, если использовать вронскиан

$$\chi_n \psi_n' - \psi_n \chi_n' = 1, \quad (2.67)$$

то отсюда следует, что сечение рассеяния равно

$$C_{\text{sca}} = \frac{W_s}{I_i} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (2.68)$$

Аналогично находим сечение экстинкции

$$C_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_i} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}\{a_n + b_n\}, \quad (2.69)$$

где, как и при выводе выражения для сечения рассеяния, основным пунктом является соотношение (2.67).

## 2.7. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Мы предполагаем, что ряд (2.52), в который разлагается рассеянное поле, равномерно сходится. Поэтому в этом ряде можно ограничиться  $n_c$  членами, причем ошибка будет сколь угодно малой при любых  $kr$ , если  $n_c$  достаточно велико. Если, кроме того,  $kr \gg n_c$ , то можно подставить в этот оборванный ряд асимптотические выражения (2.49) и (2.51). В результате для поперечных компонент рассеянного электрического поля получим

$$\begin{aligned} E_{s\theta} &\sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \cos \phi S_2(\cos \theta), \\ E_{s\phi} &\sim -E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sin \phi S_1(\cos \theta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n), \\
S_2 &= \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n),
\end{aligned} \tag{2.70}$$

а ряды после  $n_c$  членов обрываются. Поэтому амплитуды падающего и рассеянного полей связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

На основе (2.32) можно показать, что

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \left. \frac{dP_n}{d\mu} \right|_{\mu=1}.$$

Но  $P_n$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.11), из которого с учетом равенства  $P_n(1) = 1$  следует, что

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом, в направлении вперед ( $\theta = 0^\circ$ )

$$S_2(0^\circ) = S_1(0^\circ) = S(0^\circ) = \frac{1}{2} \sum_n (2n+1)(a_n + b_n). \tag{2.72}$$

Из (2.71) следует соотношение, связывающее параметры Стокса падающего и рассеянного света:

$$\begin{pmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 r^2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & -S_{34} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{2} [ |S_2|^2 + |S_1|^2 ], & S_{12} &= \frac{1}{2} [ |S_2|^2 - |S_1|^2 ], \\
S_{33} &= \frac{1}{2} [ S_2^* S_1 + S_2 S_1^* ], & S_{34} &= \frac{i}{2} [ S_1 S_2^* + S_2 S_1^* ].
\end{aligned}$$



Только три из четырех элементов матрицы являются независимыми:  
 $S_{11}^2 = S_{12}^2 + S_{33}^2 + S_{34}^2$ .

Если падающий свет полностью поляризован в направлении, *параллельном* некоторой плоскости рассеяния (можно взять любую плоскость рассеяния), то параметры Стокса рассеянного света имеют вид

$$I_s = (S_{11} + S_{12})I_i, \quad Q_s = I_s, \quad U_s = V_s = 0,$$

где нами опущен множитель  $1/k^2 r^2$ . Таким образом, рассеянный свет тоже оказывается полностью поляризованным параллельно этой плоскости рассеяния. Обозначим через  $i_{\parallel}$  рассеянную интенсивность, приходящуюся на единичную падающую интенсивность при условии, что падающий свет поляризован параллельно плоскости рассеяния:

$$i_{\parallel} = S_{11} + S_{12} = |S_2|^2.$$

Если падающий свет поляризован *перпендикулярно* плоскости рассеяния, то параметры Стокса рассеянного света равны

$$I_s = (S_{11} - S_{12})I_i, \quad Q_s = -I_s, \quad U_s = V_s = 0.$$

Следовательно, рассеянный свет также поляризован перпендикулярно плоскости рассеяния. Обозначим через  $i_{\perp}$  рассеянную интенсивность, приходящуюся на единичную падающую интенсивность, при условии что падающий свет поляризован перпендикулярно плоскости рассеяния:

$$i_{\perp} = S_{11} - S_{12} = |S_1|^2.$$

Если падающий свет *не поляризован*, то параметры Стокса рассеянного света равны

$$I_s = S_{11}I_i, \quad Q_s = S_{12}I_i, \quad U_s = V_s = 0.$$

Отношение

$$P = -\frac{S_{12}}{S_{11}} = \frac{i_{\perp} - i_{\parallel}}{i_{\perp} + i_{\parallel}}$$

таково, что  $|P| \leq 1$ . Если  $P$  *положительно*, то рассеянный свет частично поляризован *перпендикулярно* плоскости рассеяния; если  $P$  *отрицательно*, то рассеянный свет частично поляризован *параллельно* плоскости рассеяния, причем степень поляризации равна  $|P|$ . Независимо от размера и состава шара  $P(0^\circ) = P(180^\circ) = 0$ .

Если падающий свет поляризован *под углом*  $45^\circ$  к плоскости рассеяния, то рассеянный свет будет, вообще говоря, *эллиптически* поляризованным, однако азимут эллипса поляризации не обязательно равен  $45^\circ$ . Величина поворота по азимуту, так же как и эллиптичность, зависит не только от свойств частицы, но и от направления, в котором рассеивается свет.

## 2.8. ПАРАМЕТР АСИММЕТРИИ И ДАВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Параметр асимметрии определяется как среднее значение косинуса угла рассеяния, в общем случае зависит от состояния поляризации падающего света. Между тем параметр асимметрии для сферической частицы, очевидно, не зависит от поляризации и дается формулой

$$k^2 C_{\text{sca}} \langle \cos \theta \rangle = \pi \int_{-1}^1 (|S_1|^2 + |S_2|^2) \mu d\mu,$$

где  $\mu = \cos \theta$  и

$$|S_1|^2 + |S_2|^2 = \sum_n \sum_m \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left[ (a_n a_m^* + b_n b_m^*) (\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m) + (a_n b_m^* + a_m^* b_n) (\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m) \right].$$

Поэтому, чтобы найти параметр асимметрии, необходимо вычислить интегралы

$$T_{nm}^{(1)} = \int_{-1}^1 (\tau_n \pi_m + \pi_n \tau_m) \mu d\mu, \quad T_{nm}^{(2)} = \int_{-1}^1 (\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m) \mu d\mu.$$

Первый из этих интегралов можно записать в виде

$$T_{nm}^{(1)} = \int_0^\pi \left( \frac{dP_m^1}{d\theta} P_n^1 + P_m^1 \frac{dP_n^1}{d\theta} \right) \cos \theta d\theta,$$

затем проинтегрировать по частям, что дает

$$T_{nm}^{(1)} = \delta_{nm} \frac{2n(n+1)}{2n+1},$$

где мы воспользовались ортогональностью  $P_n^1$  (формула (2.14)). Из (2.55) следует, что  $\tau_n \tau_m + \pi_n \pi_m$  – четная функция  $\mu$ , если  $m+n$  четно. Поэтому  $T_{nm}^{(2)}$  обращается в нуль, если только не выполнено равенство  $m = n \pm p$ , где  $p = 1, 3, \dots$  Воспользовавшись рекуррентными соотношениями

$$\tau_n = n\pi_{n+1} - (n+1)\mu\pi_n, \quad \tau_n = n\mu\pi_n - (n+1)\pi_{n-1},$$

МОЖНО ПОКАЗАТЬ, ЧТО

$$\begin{aligned} \mu\tau_n &= \frac{\pi_n}{n(n+1)} + \frac{n^2\tau_{n+1}}{(n+1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{n(2n+1)}\tau_{n-1}, \\ \mu\pi_n &= \frac{\tau_n}{n(n+1)} + \frac{n^2\pi_{n+1}}{(n+1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{n(2n+1)}\pi_{n-1}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (2.31) и (2.33) следует

$$T_{nm}^{(2)} = \begin{cases} \frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}, & \text{если } m = n+1, \\ \frac{2n(n+1)^2(n-1)^2}{(2n+1)(2n-1)}, & \text{если } m = n-1, \\ 0, & \text{если } m \neq n \pm 1. \end{cases}$$

Поэтому для параметра асимметрии находим

$$Q_{\text{sca}} \langle \cos \theta \rangle = \frac{4}{x^2} \left[ \sum_n \frac{n(n+2)}{n+1} \operatorname{Re} \{ a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^* \} + \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} \operatorname{Re} \{ a_n b_n^* \} \right].$$

Помимо энергии свет несет *импульс*, в силу чего пучок при взаимодействии с частицей действует на эту частицу с некоторой силой, называемой *радиационным давлением* или *давлением излучения*. Поток импульса плоской однородной волны, имеющей фазовую скорость  $v$ , равен  $S/v$ . Если рассмотреть теперь пучок света как поток фотонов, то приемлемым с физической точки зрения является утверждение о том, что фотоны, поглощаемые частицей, полностью передают свои импульсы частице и поэтому действуют на нее с силой в направлении распространения. Если интерпретировать  $C_{\text{abc}}$  как эффективную площадь поглощения, то импульс, передаваемый частице, пропорционален  $I_i C_{\text{abc}}$ , где  $I_i$  – интенсивность падающего пучка. Будем теперь рассматривать  $C_{\text{sca}}$  как эффективную площадь рассеяния. Фотоны, падающие на эту площадь, испытывают упругое рассеяние с некоторым угловым распределением по  $\theta$ , при этом результирующая скорость передачи импульса в направлении распространения пропорциональна  $I_i C_{\text{sca}} (1 - \langle \cos \theta \rangle)$ . В результате полная скорость передачи

импульса частице оказывается пропорциональной  $I_i(C_{\text{ext}} - C_{\text{sca}} \langle \cos \theta \rangle)$ , и можно определить *эффективность давления излучения*  $Q_{\text{pr}}$  как

$$Q_{\text{pr}} = Q_{\text{ext}} - Q_{\text{sca}} \langle \cos \theta \rangle.$$

Приведенный выше вывод формулы для эффективности давления излучения является эвристическим.

## 2.9. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Теоретический анализ поглощения и рассеяния на однородном изотропном шаре, хотя и громоздок, все же вполне выполним, нужно просто следовать по прямому пути, проложенному хорошо известными методами математической физики. Без особых трудностей эти методы можно обобщить и на случай других частиц регулярной формы. Под частицами регулярной формы здесь и ниже имеются в виду частицы простой формы, поверхность которых описывается достаточно простыми гладкими функциями.

Но если речь идет о рассеянии на неоднородных частицах, либо на частицах нерегулярной формы, либо с анизотропными оптическими свойствами, то решение такой задачи может оказаться более запутанным, особенно если размеры частиц соизмеримы с длиной волны.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые теоретические методы, описывающие рассеяние на частицах, которые неоднородны, либо имеют несферическую форму. Мы начнем с рассмотрения частного случая неоднородной частицы – многослойного шара. В природе нередко встречаются частицы цилиндрической формы – это и паутина, и вирусы, и различные волокна. Поэтому значительная часть этого раздела посвящена рассеянию на прямом круговом цилиндре.

Далее излагаются возможные теоретические методы решения задачи рассеяния на случайно неоднородных частицах, дается решение задачи рассеяния света на несферических частицах, включая и случай частиц произвольной формы, в заключительной части рассматриваются две математические модели: модель исследования оптических характеристик крови и скорости кровотока в капиллярном русле и модель тепловых процессов, вызываемых воздействием лазерного излучения на органические среды. В предложенных моделях используются результаты, полученные в разделах 2.1–2.5.

## 2.10. ШАР В ОБОЛОЧКЕ

Мы рассмотрим задачу рассеяния на однородном шаре, покрытом однородной оболочкой постоянной толщины. Впервые эта задача была решена [М. Kerker]. Однородный шар в оболочке представляет собой один из простейших примеров частицы с меняющимся показателем преломления и допускает непосредственное обобщение на случай шара с многослойным покрытием.

Отметим, что поле, рассеянное произвольной сферически-симметричной частицей, составленной из веществ, которые описываются материальными уравнениями (2.14)–(2.16), по форме совпадает с рассмотренным в разделе 2.1 полем рассеяния однородного шара с тем отличием, что коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  теперь зависят от закона изменения  $\epsilon$  и  $\mu$  по радиальной координате.

Пусть электромагнитная волна (2.44), (2.45) падает на изображенный на рис. 2.3 шар в оболочке, внутренний радиус которого равен  $a$ , а внешний —  $b$ .

В области  $0 \leq r \leq a$  электромагнитное поле  $(E_1, H_1)$  определяется формулой (2.47), а рассеянное поле  $(E_s, H_s)$  — формулой (2.52). Из-за требования ограниченности поля в начале координат радиальная часть функций (2.22) и (2.23), порождающих векторные гармоники в разложении  $(E_1, H_1)$ , может зависеть только от  $j_n$ .

Что касается области  $a \leq r \leq b$  ( $a \neq 0$ ), то в ней конечны обе сферические функции Бесселя  $j_n$  и  $y_n$ , поэтому разложение поля  $(E_2, H_2)$  в этой области имеет вид

$$\mathbf{E}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[ f_n \mathbf{M}_{oln}^{(1)} - i g_n \mathbf{N}_{eln}^{(1)} + v_n \mathbf{M}_{oln}^{(2)} - i w_n \mathbf{N}_{eln}^{(2)} \right],$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[ g_n \mathbf{M}_{eln}^{(1)} + i f_n \mathbf{N}_{oln}^{(1)} + w_n \mathbf{M}_{eln}^{(2)} + i v_n \mathbf{N}_{oln}^{(2)} \right],$$

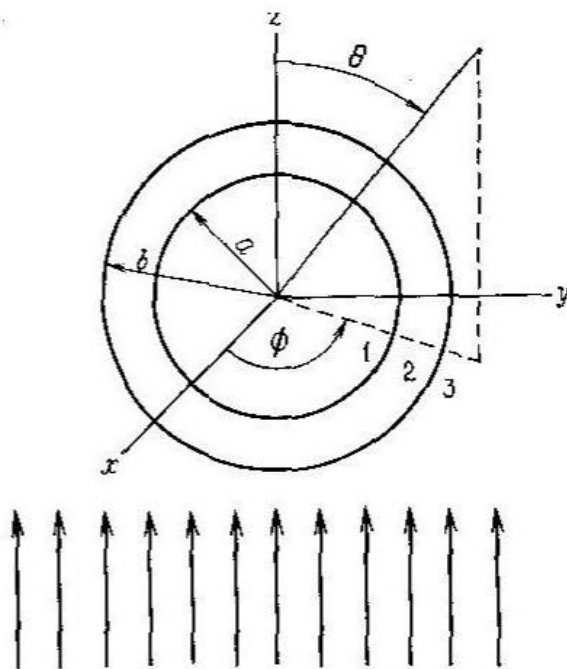


Рис. 2.3. Шар в оболочке

где векторные гармоники  $\mathbf{M}_{eln}$  и т. д. порождаются функциями вида (2.22) и (2.23), в которых радиальная зависимость определяется функциями  $y_n(k_2r)$ . Граничные условия

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, & (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, & r &= a \\ (\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, & (\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_i - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_r &= 0, & r &= b \end{aligned}$$

приводят к восьми уравнениям для коэффициентов  $a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, g_n, v_n, w_n$ :

$$\begin{aligned} f_n m_1 \psi_n(m_2 x) - v_n m_1 \chi_n(m_2 x) - c_n m_2 \psi_n(m_1 x) &= 0, \\ w_n m_1 \chi'_n(m_2 x) - g_n m_1 \psi'_n(m_2 x) + d_n m_2 \psi'_n(m_1 x) &= 0, \\ v_n \mu_1 \chi'_n(m_2 x) - f_n \mu_1 \psi'_n(m_2 x) + c_n \mu_2 \psi'_n(m_1 x) &= 0, \\ g_n \mu_1 \psi_n(m_2 x) - w_n \mu_1 \chi_n(m_2 x) - d_n \mu_2 \psi_n(m_1 x) &= 0, \\ m_2 \psi'_n(y) - a_n m_2 \xi'_n(y) - g_n \psi'_n(m_2 y) + w_n \chi'_n(m_2 y) &= 0, \\ m_2 b_n \xi_n(y) - m_2 \psi_n(y) + f_n \psi_n(m_2 y) - v_n \chi_n(m_2 y) &= 0, \\ m_2 \psi_n(y) - a_n \mu_2 \xi_n(y) - g_n \mu \psi_n(m_2 y) + w_n \mu \chi_n(m_2 y) &= 0 \\ b_n \mu_2 \xi'_n(y) - \mu_2 \psi'_n(y) + f_n \mu \psi'_n(m_2 y) - v_n \mu \chi'_n(m_2 y) &= 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

где через  $m_1$  и  $m_2$  обозначены относительные (по отношению к окружающей среде) показатели преломления сердцевинки шара и оболочки;  $\mu, \mu_1, \mu_2$  – магнитные проницаемости окружающей среды, сердцевинки шара и оболочки;  $x = ka$ ,  $y = kb$ . Через  $\chi_n(z)$  обозначена функция Риккати – Бесселя, равная  $-zy_n(z)$ . Предположив для простоты, что  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  и решив систему уравнений (2.73) относительно коэффициентов рассеяния  $a_n$  и  $b_n$ , найдем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\psi_n(y) [\psi'_n(m_2 y) - A_n \chi'_n(m_2 y)] - m_2 \psi'_n(y) [\psi_n(m_2 y) - A_n \chi_n(m_2 y)]}{\xi_n(y) [\psi'_n(m_2 y) - A_n \chi'_n(m_2 y)] - m_2 \xi'_n(y) [\psi_n(m_2 y) - A_n \chi_n(m_2 y)]}, \\ b_n &= \frac{m_2 \psi_n(y) [\psi'_n(m_2 y) - B_n \chi'_n(m_2 y)] - \psi'_n(y) [\psi_n(m_2 y) - B_n \chi_n(m_2 y)]}{m_2 \xi_n(y) [\psi'_n(m_2 y) - B_n \chi'_n(m_2 y)] - \xi'_n(y) [\psi_n(m_2 y) - B_n \chi_n(m_2 y)]}, \\ A_n &= \frac{m_2 \psi_n(m_2 x) \psi'_n(m_1 x) - m_1 \psi'_n(m_2 x) \psi_n(m_1 x)}{m_2 \chi_n(m_2 x) \psi'_n(m_1 x) - m_1 \chi'_n(m_2 x) \psi_n(m_1 x)}, \\ B_n &= \frac{m_2 \psi_n(m_1 x) \psi'_n(m_2 x) - m_1 \psi_n(m_2 x) \psi'_n(m_1 x)}{m_2 \chi'_n(m_2 x) \psi_n(m_1 x) - m_1 \psi'_n(m_1 x) \chi_n(m_2 x)}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Если  $m_1 = m_2$ , то  $A_n = B_n = 0$ , и коэффициенты (2.74) сводятся к коэффициентом для однородного шара. В пределе, когда радиус сердцевины стремится к нулю, имеем  $\lim_{a \rightarrow 0} A_n = \lim_{a \rightarrow 0} B_n = 0$ . В этом случае коэффициенты (2.74) сводятся к коэффициентам для однородного шара радиусом  $b$  с относительным показателем преломления  $m_2$ , как это и должно быть. При  $m_2 = 1$  коэффициенты сводятся к коэффициентам для шара радиусом  $a$  с относительным показателем преломления  $m_1$ . Все это и подтверждает правильность приведенного решения.

## 2.11. МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Систематические численные расчеты интегральных и угловых характеристик светорассеяния однородных частиц с применением строгой теории рассеяния электромагнитных волн сопряжены с некоторыми вычислительными трудностями и требуют определенных затрат машинного времени. При этом многократное применение рекуррентных формул в расчетах оптических характеристик отдельных частиц может привести к ошибочным или неточным результатам. Опишем метод вычисления оптических характеристик сферических частиц, который довольно распространен и используется для получения приведенных ниже результатов.

Для вычисления функций  $\Psi_n, \xi_n$  и их производных пользуются известными рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} \Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x), \\ \xi_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} \xi_n(x) - \xi_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Однако многократное использование зависимости (2.75) при вычислении  $\psi_n(x)$  от малых  $n$  к большим сопровождается быстрым накоплением относительной погрешности.

Чтобы уменьшить вычислительные ошибки при расчетах функций  $\psi_n(x)$  целесообразно использовать следующую схему [G. W. Kattawar, G. N. Plass], а именно: если

$$D_n(x) = [\ln \Psi_n(x)]', \quad G_n(x) = [\ln \xi_n(x)]', \quad (2.76)$$

то амплитуды парциальных волн однородных шаров можно записать в виде

$$a_n = \frac{\psi_n(\rho)[D_n(m\rho) - mD_n(\rho)]}{\xi_n(\rho)[D_n(m\rho) - mG_n(\rho)]}, \quad b_n = \frac{\psi_n(\rho)[mD_n(m\rho) - D_n(\rho)]}{\xi_n(\rho)[mD_n(m\rho) - G_n(\rho)]}, \quad (2.77)$$

В выражениях (2.77) множитель перед квадратными скобками включает только функции действительного аргумента.

Логарифмические производные (2.76) удовлетворяют соотношениям

$$D_{n-1}(x) = \frac{l}{x} - \frac{1}{D_n(x) + n/x}, \quad (2.78)$$

$$G_{n-1}(x) = \frac{l}{x} - \frac{1}{G_n(x) + n/x}. \quad (2.79)$$

Вычисление  $D_n(x)$  по (2.78) от малых значений  $n$  к большим приводит к нестабильности численных результатов при  $n > |x|$ . При расчете от больших значений  $n$  к малым рекурсия (2.78) всегда численно стабильна.

В силу быстрой сходимости  $D_n(x)$  к правильным значениям логарифмических производных для  $n = N \gg |x|$  удобно положить  $D_N = 0$  и, подставив в (2.78), вычислить  $D_n(x)$  с номерами  $N-1, N-2, \dots, 0$ . При заведомо больших  $N$  точность получаемых результатов нечувствительна к выбору начального номера  $N$ .

При вычислении  $G_n(x)$  по (2.79) от малых значений  $n$  к большим относительная ошибка не накапливается.

Для расчета функций  $\xi_n(\rho), \psi_n(\rho)$  может использоваться восходящая рекурсия (2.75). Зная

$$\begin{aligned} \xi_0(\rho) &= \sin(\rho) - i \cos(\rho), & \xi_1(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho} - \cos \rho - i \left( \sin \rho + \frac{\cos \rho}{\rho} \right), \\ \psi_0(\rho) &= \sin(\rho), & \psi_1(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho} - \cos \rho, \end{aligned} \quad (2.80)$$

можно получить все остальные  $\xi_n(\rho), \psi_n(\rho)$ .

При вычислении рядов для  $a_n, b_n$  суммирование прекращается, когда вклад  $N^*$ -го члена ряда  $S_{N^*}$  составляет не более  $10^{-8}$  от суммы предыдущих членов ряда:



$$S_{N^*} \leq 10^{-8} \sum_{l=1}^{N^*-1} S_l.$$

Как показано в авторами [В. Н. Лопатин, Ф. Я. Сидько], при этом  $N^* \approx 1,2\rho + 10$ .

## 2.12. БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

Многие встречающиеся в природе биологические частицы, например некоторые вирусы, лучше всего описывать как цилиндры, длина которых во много раз превосходит диаметр. Поэтому в данном разделе мы построим строгое решение задачи поглощения и рассеяния на бесконечно длинном круговом цилиндре и изучим его некоторые свойства.

Как и в задаче рассеяния на шаре, мы будем исходить из скалярного волнового уравнения  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ , которое в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (2.81)$$

Решение уравнения (2.81) ищем в виде:

$$\psi_n(r, \phi, z) = Z_n(\rho) e^{in\phi} e^{ihz} \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (2.82)$$

где  $\rho = r\sqrt{k^2 - h^2}$ , а  $Z_n$  – решение уравнения Бесселя

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} Z_n \right) + (\rho^2 - n^2) Z_n = 0. \quad (2.83)$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.83) являются функции Бесселя первого и второго рода ( $J_n$  и  $Y_n$ ) с целочисленным индексом  $n$ . В общем случае на константу разделения  $h$  ограничения не налагаются, но в рассматриваемых нами задачах величина  $h$  определяется видом падающего поля и необходимостью удовлетворить граничным условиям (2.7) на наружной поверхности цилиндра.

Производящие (2.82) векторные цилиндрические гармоники имеют вид

$$\mathbf{M}_n = \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_z \psi_n), \quad \mathbf{N}_n = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_n}{k},$$

где в качестве направляющего вектора мы взяли единичный вектор, параллельный оси цилиндра (рис. 2.4). В компонентной записи векторные гармоники равны

$$\mathbf{M}_n = \sqrt{k^2 - h^2} \left( in \frac{Z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r - Z'_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) e^{i(n\phi + hz)},$$

$$\mathbf{N}_n = \frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \left( ihZ'_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_r - hn \frac{Z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \sqrt{k^2 - h^2} Z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z \right) e^{i(n\phi + hz)}.$$

Они ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{M}_m^* d\phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{N}_n \cdot \mathbf{N}_m^* d\phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{N}_m^* d\phi = 0 (n \neq m).$$

Рассмотрим теперь бесконечный прямой круговой цилиндр радиусом  $a$ , на который падает однородная плоская волна  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{ik\hat{\mathbf{e}}_i x}$ , распространяющаяся в направлении  $\hat{\mathbf{e}}_i = -\sin\zeta \hat{\mathbf{e}}_x - \cos\zeta \hat{\mathbf{e}}_z$ , составляющем с осью цилиндра угол  $\zeta$  (рис. 2.4).

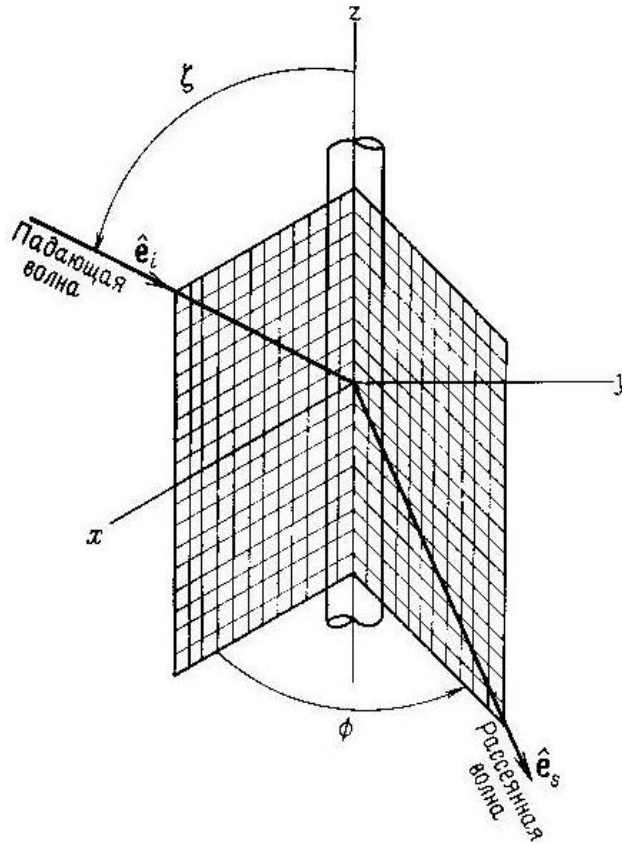


Рис. 2.4. Наклонное падение плоской волны на бесконечный цилиндр

Имеется два возможных направления поляризации падающей волны: ее электрическое поле может быть поляризовано параллельно плоскости  $xz$

или перпендикулярно ей. Каждую из этих поляризаций мы рассмотрим отдельно.

Случай I. *Электрическое поле параллельно плоскости  $xz$ .*

Прежде всего нужно разложить падающее электрическое поле

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0(\sin \zeta \hat{\mathbf{e}}_z - \cos \zeta \hat{\mathbf{e}}_x) e^{ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}$$

по векторным цилиндрическим гармоникам. Для того чтобы разложение было конечным при  $r = 0$ , необходимо исключить функции Бесселя  $Y_n$  из радиальной части производящей функции; кроме того, из вида  $\mathbf{E}_i$  ясно, что входящая в (2.82) константа  $h$  должна быть равна  $-k \cos \zeta$ . Таким образом, разложение  $\mathbf{E}_i$  имеет вид

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{M}_n^{(1)} + B_n \mathbf{N}_n^{(1)}],$$

причем производящей векторные гармоники функцией здесь является  $J_n(kr \sin \zeta) e^{in\phi} e^{ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}$ . Для определения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  воспользуемся ортогональностью векторных гармоник; при этом нам потребуется вычислить интегралы

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_n^{(1)} &= \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} d\phi, \\ \mathfrak{I}_n^{(2)} &= \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} \cos \phi d\phi, \\ \mathfrak{I}_n^{(3)} &= \int_0^{2\pi} e^{-i(n\phi + \rho \cos \phi)} \sin \phi d\phi, \end{aligned}$$

где  $\rho = kr \sin \zeta$ . Из интегрального представления функции Бесселя

$$J_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\phi + \rho \cos \phi)} d\phi,$$

которая при вещественных  $\rho$  вещественна, немедленно следует, что

$$\mathfrak{I}_n^{(1)} = 2\pi (-i)^n J_n(\rho).$$

Дифференцируя  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  по  $\rho$ , получаем

$$\mathfrak{Z}_n^{(2)} = 2\pi i(-i)^n J'_n(\rho).$$

Третий интеграл можно записать следующим образом:

$$2i\mathfrak{Z}_n^{(3)} = \mathfrak{Z}_{n-1}^{(1)} - \mathfrak{Z}_{n+1}^{(1)}.$$

Если воспользоваться тождеством

$$\frac{2nZ_n}{\rho} = Z_{n-1} + Z_{n+1},$$

то можно показать, что  $\mathfrak{Z}_n^{(3)} = 2\pi(-i)^n J_n(\rho)n/\rho$ .

Таким образом, разложение падающего электромагнитного поля имеет вид

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \mathbf{N}_n^{(1)}, \quad \mathbf{H}_i = \frac{-ik}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \mathbf{M}_n^{(1)},$$

где  $E_n = E_0(-i)^n / (k \sin \zeta)$ ,  $A_n = 0$ ,  $B_n = \frac{E_0(-i)^n}{k \sin \zeta}$ ;

Для того чтобы выполнялись условия непрерывности (2.7) на границе цилиндра при всех  $z$  необходимо, чтобы константа разделения  $h$ , входящая в выражение для волновых функций, являющихся производящими для векторных гармоник поля внутри цилиндра, тоже равнялась  $-k \cos \zeta$ ; для ограниченности решения в начале координат требуется, чтобы радиальная зависимость определялась только функциями Бесселя  $J_n$ . Отсюда следует, что для внутреннего поля  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$  производящими функциями являются функции  $J_n(kr\sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta})e^{in\phi}e^{-ikz \cos \zeta}$ , где  $m$  – относительный (по отношению к окружающей среде) показатель преломления цилиндра. Соответствующие разложения имеют вид

$$\mathbf{E}_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[ g_n \mathbf{M}_n^{(1)} + f_n \mathbf{N}_n^{(1)} \right],$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{-ik_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[ g_n \mathbf{N}_n^{(1)} + f_n \mathbf{M}_n^{(1)} \right].$$

Другими линейно независимыми решениями уравнения (2.83) являются функции Ганкеля  $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$  и  $H_n^{(2)} = J_n - iY_n$ , их асимптотические выражения даются формулой (2.41):

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\rho) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} (-i)^n e^{-i\pi/4}, \\ H_n^{(2)}(\rho) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\rho} i^n e^{i\pi/4}. \end{aligned} \quad |\rho| \gg n^2$$

Следовательно, производящими функциями в разложениях для рассеянного поля ( $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ )

$$\mathbf{E}_s = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[ b_{n\mathbf{I}} \mathbf{N}_n^{(3)} + ia_{n\mathbf{I}} \mathbf{M}_n^{(3)} \right], \quad \mathbf{H}_s = \frac{ik}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[ b_{n\mathbf{I}} \mathbf{M}_n^{(3)} + ia_{n\mathbf{I}} \mathbf{N}_n^{(3)} \right],$$

должны быть функции  $H_n^{(1)}(kr \sin \zeta) e^{in\phi} e^{-ikz \cos \zeta}$ , поскольку на больших расстояниях от цилиндра рассеянное поле должно представлять собой уходящую волну.

Использование граничных условий (2.7) при  $r = a$  позволяет получить четыре уравнения для четырех входящих в разложение коэффициентов, из которых можно найти выражения для коэффициентов  $a_{n\mathbf{I}}, b_{n\mathbf{I}}$  рассеянного поля:

$$a_{n\mathbf{I}} = \frac{C_n V_n - B_n D_n}{W_n V_n + iD_n^2}, \quad b_{n\mathbf{I}} = \frac{W_n B_n - iD_n C_n}{W_n V_n + iD_n^2},$$

$$D_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left( \frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad B_n = \xi \left[ m^2 \xi J_n'(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J_n'(\xi) \right], \quad \sqrt{\quad}$$

$$C_n = n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left( \frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad V_n = \xi \left[ m^2 \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) \right],$$

$$W_n = i\xi \left[ \eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) - \xi J_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right]. \quad (2.84)$$

Здесь мы положили  $\mu = \mu_1$  и ввели обозначения:  $\xi = x \sin \zeta$ ,  $\eta = x \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ ,  $x = ka$ . Из соотношений  $J_{-n} = (-1)^n J_n$  и  $Y_{-n} = (-1)^n Y_n$  следует, что  $a_{-n\mathbf{I}} = -a_{n\mathbf{I}}$ ,  $b_{-n\mathbf{I}} = b_{n\mathbf{I}}$ ,  $a_{0\mathbf{I}} = 0$ . Если падающее поле направ-

лено по нормали к оси цилиндра ( $\zeta = 90^\circ$ ), то коэффициент  $a_{nI}$  обращается в нуль, а

$$b_{nI}(\zeta = 90^\circ) = b_n = \frac{J_n(mx)J'_n(x) - mJ'_n(mx)J_n(x)}{J_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - mJ'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}. \quad (2.85)$$

Случай II. Электрическое поле перпендикулярно плоскости  $xz$ .

Разложение электрического поля падающей волны  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{e}}_y e^{-ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}$  имеет вид

$$\mathbf{E}_i = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \mathbf{M}_n^{(1)},$$

а применение к нему оператора *rot* дает выражение для магнитного поля падающей волны. Входящие в рассеянное поле

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[ ia_{nII} \mathbf{M}_n^{(3)} + b_{nII} \mathbf{N}_n^{(3)} \right]$$

коэффициенты можно записать в следующем виде:

$$a_{nII} = -\frac{A_n V_n - i C_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad b_{nII} = -i \frac{C_n W_n - A_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad (2.86)$$

где  $D_n, C_n$  и т. д. определены в предыдущем разделе, причем

$$A_n = i\xi [\xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi)].$$

Из свойств функций Бесселя следует, что

$$a_{-nII} = a_{nII}, \quad b_{-nII} = -b_{nII}, \quad b_{0II} = 0.$$

Можно показать, что

$$a_{nI} = -b_{nII},$$

Если свет падает по нормали к оси цилиндра, то  $b_{nII}$  обращается в нуль, а

$$a_{nII}(\zeta = 90^\circ) = a_n = \frac{mJ'_n(x)J_n(mx) - J_n(x)J'_n(mx)}{mJ_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - J'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}. \quad (2.87)$$

*Асимптотика рассеянного поля.* На больших расстояниях от цилиндра ( $kr \sin \zeta \gg 1$ ) асимптотическое выражение для рассеянного поля (случай I) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s \sim -E_0 e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \sin \zeta}} e^{ik(r \sin \zeta - z \cos \zeta)} \times \\ \times \sum_n (-1)^n e^{in\phi} \left[ a_{nI} \hat{\mathbf{e}}_\phi + b_{nI} (\cos \zeta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin \zeta \hat{\mathbf{e}}_z) \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Если же электрическое поле падающей волны поляризовано перпендикулярно плоскости  $xz$  (случай II), то асимптотика рассеянного поля дается формулой (2.88), в которой  $a_{nI}$  нужно заменить на  $-a_{nII}$ , а  $b_{nI}$  заменить на  $-b_{nII}$ .

Поверхности постоянной фазы или *волновые фронты* рассеянной волны (2.94), точки которых удовлетворяют уравнению

$$f(x, y, z) = r \sin \zeta - z \cos \zeta = C,$$

представляют собой *конусы* с углом раствора  $2\zeta$  и с вершиной в точке  $z = -C \cos \zeta$  (рис. 2.5). Поэтому процесс распространения рассеянной волны можно наглядно представить в виде конуса, который скользит вдоль цилиндра. В каждой точке этого конуса направление распространения волны, или *волновая нормаль* (нормаль к волновому фронту), задается единичным вектором  $\hat{\mathbf{e}}_s$ , который равен

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \nabla f = \sin \zeta \hat{\mathbf{e}}_r - \cos \zeta \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Таким образом, вектор Пойнтинга направлен вдоль  $\hat{\mathbf{e}}_s$ . Если падающий пучок направлен по нормали к оси цилиндра ( $\zeta = 90^\circ$ ), то конус вырождается в цилиндр.

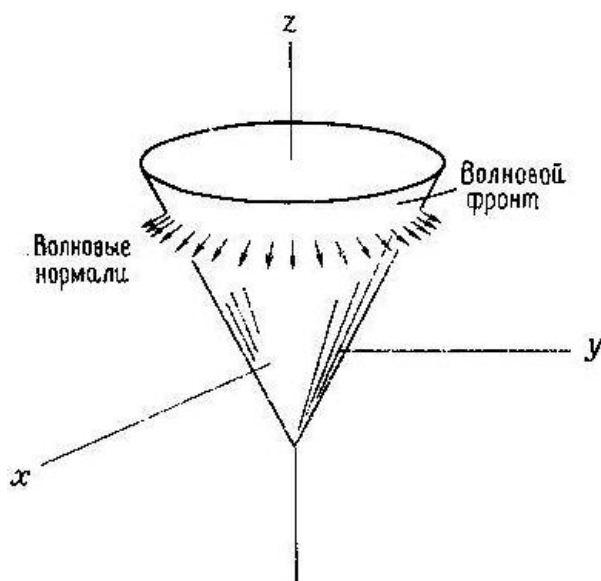


Рис. 2.5. Волновой фронт и волновые нормали света, рассеянного на бесконечном цилиндре

### 2.13. ПОГЛОЩЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ СВЕТА АГРЕГАТАМИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Пусть на группу однородных частиц, моделирующих эритроциты с радиусами  $a^j$  и показателями преломления  $N^j$ , где  $j$  – номера частиц, падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Направление падающей волны произвольно. Совокупность частиц рассматривается в трехмерной системе координат, начало которой расположено в центре частицы с некоторым номером  $j_0$ . Радиус-вектор любой другой  $j$ -частицы обозначим через  $\mathbf{r}_{j_0,j}$ . Требуется определить рассеянное электромагнитное поле на группе частиц.

Запишем выражения для внутреннего, рассеянного и падающего поля на  $j$ -частице.

Выражение для внутреннего поля в  $j$ -частице имеет вид:

$$\mathbf{E}_I(j) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ d_{mn}^j \mathbf{N}_{mn}^1 + c_{mn}^j \mathbf{M}_{mn}^1 \right],$$

$$\mathbf{H}_I(j) = -\frac{k^j}{\text{щ}\mu^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} \left[ c_{mn}^j \mathbf{N}_{mn}^1 + d_{mn}^j \mathbf{M}_{mn}^1 \right].$$

Так как поле ограничено в начале координат, то в качестве бесселевых функций для векторных гармоник внутри  $j$ -частицы выбираем функции  $j_n(kr)$ , определяемые выражением

$$j_n(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} J_{n+\frac{1}{2}}(p), \quad y_n(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} Y_{n+\frac{1}{2}}(p),$$

$$h_n^{(1)} = j_n(p) + iy_n(p), \quad h_n^{(2)} = j_n(p) - iy_n(p).$$

Запишем выражение для рассеянного поля на  $j$ -частице. Рассеянное поле на больших расстояниях от частицы должно быть уходящей волной. Поэтому используем функции  $h_n^{(1)}$ , где

$$h_n^{(1)} = (-i)^n \exp[ikr] / [ikr], \quad kr > n^2.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{E}_s(j) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ a_{mn}^j \mathbf{N}_{mn}^3 + b_{mn}^j \mathbf{M}_{mn}^3 \right],$$



$$\mathbf{H}_s(j) = \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} \left[ b_{mn}^j \mathbf{N}_{mn}^3 + a_{mn}^j \mathbf{M}_{mn}^3 \right].$$

Запишем разложение падающей волны на поверхности  $j$ -частицы по векторным сферическим гармоникам. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(j) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} \left[ p_{mn}^j \mathbf{N}_{mn}^1 + q_{mn}^j \mathbf{M}_{mn}^1 \right], \\ \mathbf{H}_i(j) &= - \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} \left[ q_{mn}^j \mathbf{N}_{mn}^1 + p_{mn}^j \mathbf{M}_{mn}^1 \right], \end{aligned} \quad (2.89)$$

где

$$E_{mn} = |E_0| i^n [2n+1] \frac{(n-m)!}{(n+m)!}.$$

Для определения коэффициентов

$$a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$$

необходимо использовать на границе между  $j$ -частицей и окружающей средой граничное условие (2.7)

$$(\mathbf{E}_i(j) + \mathbf{E}_s(j) - \mathbf{E}_1(j)) \times \hat{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{H}_i(j) + \mathbf{H}_s(j) - \mathbf{H}_1(j)) \times \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (2.90)$$

Из граничных условий (2.90) получаем следующие выражения для тангенциальных компонент поля:

$$\mathbf{E}_{i\theta}(j) + \mathbf{E}_{s\theta}(j) = \mathbf{E}_{I\theta}(j), \quad (2.91)$$

$$\mathbf{E}_{i\varphi}(j) + \mathbf{E}_{s\varphi}(j) = \mathbf{E}_{I\varphi}(j), \quad (2.92)$$

$$\mathbf{H}_{i\theta}(j) + \mathbf{H}_{s\theta}(j) = \mathbf{H}_{I\theta}(j), \quad (2.93)$$

$$\mathbf{H}_{i\varphi}(j) + \mathbf{H}_{s\varphi}(j) = \mathbf{H}_{I\varphi}(j). \quad (2.94)$$

Из (2.91)–(2.94) получается система уравнений для определения коэффициентов рассеянного поля и поля внутри частицы. Выпишем систему уравнений для коэффициентов разложения рассеянного поля

$$a_{mn}^j = a_n^j p_{mn}^j, \quad b_{mn}^j = b_n^j q_{mn}^j, \quad (2.95)$$

где

$$a_n^j = \frac{\mu(m^j)^2 j_n(m^j x^j) \left[ x^j j_n(x^j) \right]' - \mu^j j_n(x^j) \left[ m^j x^j j_n(m^j x^j) \right]'}{\mu(m^j)^2 j_n(m^j x^j) \left[ x^j h_n^1(x^j) \right]' - \mu^j h_n^j(x^j) \left[ m^j x^j j_n(m^j x^j) \right]'}, \quad (2.96)$$

$$b_n^j = \frac{\mu^j j_n(m^j x^j) \left[ x^j j_n(x^j) \right]' - \mu j_n(x^j) \left[ m^j x^j j_n(m^j x^j) \right]'}{\mu^j j_n(m^j x^j) \left[ x^j h_n^1(x^j) \right]' - \mu h_n^1(x^j) \left[ m^j x^j j_n(m^j x^j) \right]'}, \quad (2.97)$$

и соответственно для поля внутри частицы

$$c_{mn}^j = c_n^j q_{mn}^j, \quad d_{mn}^j = d_n^j p_{mn}^j,$$

где

$$c_n^j = \frac{\mu^j j_n(x^j) \left[ x^j h_n^1(x^j) \right]' - \mu^j h_n^1(x^j) \left[ x^j j_n(x^j) \right]'}{\mu^j j_n(m^j x^j) \left[ x^j h_n^1(x^j) \right]' - \mu h_n^1(x^j) \left[ m^j x^j j_n(m^j x^j) \right]'},$$

$$d_n^j = \frac{\mu^j m^j j_n(x^j) \left[ x^j h_n^1(x^j) \right]' - \mu^j m^j h_n^1(x^j) \left[ x^j j_n(x^j) \right]'}{\mu(m^j)^2 j_n(m^j x^j) \left[ x^j h_n^1(x^j) \right]' - \mu^j h_n^j(x^j) \left[ m^j x^j j_n(m^j x^j) \right]'},$$

где  $x^j = ka^j$ ,  $a^j$  – радиус  $j$ -частицы,  $m^j = (N^j)/(N)$ ,  $N^j$  – комплексный показатель преломления  $j$ -частицы,  $N$  – показатель преломления окружающей среды. Штрих здесь означает операцию дифференцирования.

Электромагнитное поле, падающее на поверхность  $j$ -частицы, состоит из двух частей – первоначально падающего поля и поля, рассеянного группой других частиц, расположенных в окружающей среде с показателем  $N$ . Тогда можно записать следующее выражение [К. Г. Куликов, А. М. Радин]:

$$\mathbf{E}_i(j) = \mathbf{E}_0(j) + \sum_{l \neq j} \mathbf{E}_s(l, j), \quad (2.98)$$

$$\mathbf{H}_i(j) = \mathbf{H}_0(j) + \sum_{l \neq j} \mathbf{H}_s(l, j).$$

где  $\mathbf{E}_s(l, j)$ ,  $\mathbf{H}_s(l, j)$  – сумма рассеянных полей на  $j$ -частице. Индексы  $l, j$  подразумевают переход из  $l$  в  $j$  координатную систему.

Падающее поле определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(j) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ p_{mn}^{j,j} \mathbf{N}_{mn}^1 + q_{mn}^{j,j} \mathbf{M}_{mn}^1 \right], \\ \mathbf{H}_0(j) &= -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} \left[ q_{mn}^{j,j} \mathbf{N}_{mn}^1 + p_{mn}^{j,j} \mathbf{M}_{mn}^1 \right]. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Волны падают относительно центра каждой  $j$ -частицы, т. е. в  $j$ -системе координат.

Ориентация волнового вектора  $\mathbf{k}$  относительно направления к оси  $z$  под углом  $\alpha$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{k} = k(\mathbf{e}_x \sin \alpha \cos \beta + \mathbf{e}_y \sin \alpha \sin \beta + \mathbf{e}_z \cos \alpha),$$

$\beta$  – угол между осью  $x$  и проекцией вектора  $\mathbf{k}$  на  $xy$  плоскости,  $\alpha$  – угол падения волны относительно оси  $z$ .

Обычно рассматривают две поляризации падающей волны – магнитную (ТМ) и электрическую (ТЕ).

Для определенности будем рассматривать ТМ-поляризацию. Коэффициенты  $p_{mn}^{j,j}$ ,  $q_{mn}^{j,j}$ , используемые для записи падающего поля, в этом случае имеют следующий вид:

$$p_{mn}^{j,j} = \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{j0j}] p_{mn}^0, \quad q_{mn}^{j,j} = \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{j0j}] q_{mn}^0,$$

где

$$\begin{aligned} q_{mn}^0 &= \frac{1}{n(n+1)} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} P_n^m(\cos \alpha) \cos \beta - i \frac{m}{\sin \alpha} P_n^m(\cos \alpha) \sin \beta \right], \\ p_{mn}^0 &= \frac{1}{n(n+1)} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} P_n^m(\cos \alpha) \cos \beta - i \frac{m}{\sin \alpha} P_n^m(\cos \alpha) \sin \beta \right]. \end{aligned}$$

Для описания рассеяния на  $j$ -частице используем теоремы сложения для вектор-сферических функций [O. R. Cruzan ]:

$$\mathbf{M}_{mn} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ A O_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{M}'_{\mu\nu} + B O_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{N}'_{\mu\nu} \right],$$

$$\mathbf{N}_{mn} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ BO_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{M}'_{\mu\nu} + AO_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{N}'_{\mu\nu} \right],$$

$\mathbf{M}_{mn}$ ,  $\mathbf{N}_{mn}$  – базисные вектор-сферические волновые функции, определенные с центром в точке  $O$ ;  $\mathbf{M}'_{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{N}'_{\mu\nu}$  – с центром в точке  $O'$ ;  $\mathbf{M}'_{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{N}'_{\mu\nu}$  имеют ту же самую форму, что и  $\mathbf{M}_{mn}$ ,  $\mathbf{N}_{mn}$ , где

$$AO_{\mu\nu}^{mn}(l, j) = (-1)^{\mu} i^{\nu-n} \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} \times \sum_{p=|n-\nu|}^{n+\nu} (-i)^p [n(n+1) + \nu(\nu+1) - p(p+1)] \times \\ \times \alpha(m, n, -\mu, \nu, p) h_p^1(kr_{(l,j)}) P_p^{m-\mu}(\cos\theta_{(l,j)}) e^{i(m-\mu)\varphi_{l,j}},$$

$$BO_{\mu\nu}^{mn}(l, j) = (-1)^{\mu} i^{\nu-n} \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} \times \sum_{p=|n-\nu|}^{n+\nu} (-i)^p b(m, n, -\mu, \nu, p, p-1) \times \\ \times h_p^1(kr_{(l,j)}) P_p^{m-\mu}(\cos\theta_{(l,j)}) e^{i(m-\mu)\varphi_{l,j}},$$

$$b(m, n, -\mu, \nu, p, p-1) = \frac{2p+1}{2p-1} \times$$

$$\times [(v-\mu)(v+\mu+1)\alpha(m, n, -\mu-1, \nu, p-1) - (p-m+\mu)(p-m+\mu-1) \times \\ \times \alpha(m, n, -\mu+1, \nu, p-1) + 2\mu(p-m+\mu)\alpha(m, n, -\mu, \nu, p-1)],$$

где

$$\alpha(m, n, \mu, \nu, p) = \frac{2p+1}{2} \frac{(p-m-\mu)!}{(p+m+\mu)!} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{\nu}^{\mu}(x) P_n^{m+\mu}(x) dx.$$

В этих выражениях  $p_{l,j}$ ,  $\theta_{l,j}$ ,  $\varphi_{l,j}$  – сферические координаты в центре  $l$ -частицы в  $j$ -й координатной системе. Из теорем сложения следует, что

$$\mathbf{M}_{mn}^3(l) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ AO_{\mu\nu}^{mn}(l, j) \mathbf{M}_{\mu\nu}^1(j) + BO_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{N}_{\mu\nu}^1(j) \right], \quad (2.100)$$

$$\mathbf{N}_{mn}^3(l) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ BO_{\mu\nu}^{mn}(l, j) \mathbf{M}_{\mu\nu}^1(j) + AO_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{N}_{\mu\nu}^1(j) \right]. \quad (2.101)$$

Запишем выражения для рассеянного поля из (2.98) с учетом (2.100), (2.101)

$$\mathbf{E}_s(l, j) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ p_{mn}^{l,j} \mathbf{N}_{mn}^1 + q_{mn}^{l,j} \mathbf{M}_{mn}^1 \right], \quad (2.102)$$

$$\mathbf{H}_s(l, j) = -\frac{k}{\mu\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} \left[ q_{mn}^{l,j} \mathbf{N}_{mn}^1 + p_{mn}^{l,j} \mathbf{M}_{mn}^1 \right].$$

где

$$p_{mn}^{l,j} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \right],$$

$$q_{mn}^{l,j} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \right],$$

$$A_{mn}^{\mu\nu} = \frac{E_{\mu\nu}}{E_{mn}} A O_{mn}^{\mu\nu} = i^{\nu-n} \frac{(2\mu+1)(n+m)!(\nu-\mu)!}{(2n+1)(n-m)!(\nu+\mu)!} A O_{mn}^{\mu\nu},$$

$$B_{mn}^{\mu\nu} = \frac{E_{\mu\nu}}{E_{mn}} B O_{mn}^{\mu\nu} = i^{\nu-n} \frac{(2\mu+1)(n+m)!(\nu-\mu)!}{(2n+1)(n-m)!(\nu+\mu)!} B O_{mn}^{\mu\nu}.$$

Подставляя в (2.98) выражения (2.89), (2.100), (2.102), получим

$$p_{mn}^j = p_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j}^L \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \right], \quad (2.103)$$

$$q_{mn}^j = q_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j}^L \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \right].$$

Система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $a_{mn}^j, b_{mn}^j$  вытекает из (2.103), (2.95) и имеет следующий вид:

$$a_{mn}^j = a_n^j \left[ p_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j}^L \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[ a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \right] \right], \quad (2.104)$$

$$b_{mn}^j = b_n^j \left[ q_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \left[ a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) \right] \right],$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n.$$

Систему (2.104) необходимо решать методом редукции (**прил. 3**).

Для нахождения коэффициентов внутреннего поля нужно использовать следующие соотношения:

$$d_n^j a_{mn}^j - a_n^j d_{mn}^j = 0, \quad c_n^j b_{mn}^j - b_n^j c_{mn}^j = 0. \quad (2.105)$$

После того как из системы (2.104) найдены коэффициенты  $a_{mn}^j$ ,  $b_{mn}^j$ , мы можем записать в основной системе координат выражения для рассеянного поля

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ a_{mn} \mathbf{N}_{mn}^3 + b_{mn} \mathbf{M}_{mn}^3 \right], \quad (2.106)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\mu\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^3 + a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^3 \right],$$

где

$$a_{mn} = \sum_{l=1}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \left[ a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) \right],$$

$$b_{mn} = \sum_{l=1}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \left[ a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) \right].$$

Запишем выражения для рассеянного поля в дальней зоне. После несложных вычислений получаем

$$\mathbf{E}_{s\theta} \sim \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \times \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left[ a_{mn} \tau_{mn} + b_{mn} \pi_{mn} \right] e^{im\varphi}, \quad (2.107)$$

$$\mathbf{E}_{s\varphi} \sim \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \times \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left[ a_{mn} \pi_{mn} + b_{mn} \tau_{mn} \right] e^{im\varphi}, \quad (2.108)$$

где

$$\tau_{mn} = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta), \quad \pi_{mn} = \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta).$$

Символ « $\sim$ » означает, что выражения (2.107) и (2.108), вытекающие из (2.106) при  $kr > 1$ , понимаются в асимптотическом смысле.

Ввиду того что рассматривается рассеяние на больших расстояниях от  $j$ -частиц, электрические векторы рассеянного поля будут параллельны электрическому вектору падающего поля, т. е. в дальней зоне будет отличаться от нуля только  $\theta$ -компонента.

Выражения (2.107) и (2.108) в упростятся:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{s\theta} &\sim \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_{mn}\tau_n + b_{mn}\pi_n], \\ \mathbf{E}_{s\varphi} &\sim \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_{mn}\pi_n + b_{mn}\tau_n], \end{aligned} \quad (2.109)$$

где

$$\tau_n = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta), \quad \pi_n = \frac{1}{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$$

Аналогично получают выражения для магнитного поля  $H$ .

#### 2.14. МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ $j$ -ЧАСТИЦЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть на группу однородных частиц, моделирующих, например, эритроциты с радиусами  $a^j$  и показателями преломления  $N^j$ , где  $j$  – номера частиц, падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Направление падающей волны произвольно. Совокупность частиц рассматривается в трехмерной системе координат, начало которой расположено в центре частицы с некоторым номером  $j_0$ . Радиус-вектор любой другой  $j$ -частицы обозначим через  $\mathbf{r}_{j_0, j}$ . Всюду принимается, что поверхность (обозначим ее через  $s$ ) частицы достаточно регулярна, что к ней применима теорема Грина и что поверхность рассеивателя  $s$  имеет непрерывную однозначную нормаль  $\mathbf{n}$  в каждой точке. Рассматривается только простая гармоническая зависимость от времени с угловой частотой  $\omega$ , причем множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опускается. Предполагаем, что размеры частицы, моделирующей эритроцит больше длины волны падающего поля, т. е.  $ka^j = (\omega N^j a^j) / c > 1$ ,  $N^j = n^{(o)j} + i\chi^j$ , где  $a^j$  – радиус частицы с номером  $j$ ,  $\omega$  – частота падающего поля,  $N^j$  – комплексный показатель преломления  $j$ -частицы

Запишем систему уравнений Максвелла для поля в окрестности частицы с номером  $j_0$ , искаженного присутствием других частиц

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ik \in \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{E} = 0, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0.$$

На границе между частицей и окружающей средой необходимо наложить граничные условия

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_I, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_i - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_I,$$

где  $k$  – волновое число,  $\in$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\mathbf{E}_s$  – рассеянное поле,  $\mathbf{E}_I$  – падающее поле,  $\mathbf{E}_i$  – внутреннее поле. Выражения для этих полей будут приведены ниже.

Полное поле можно представить в виде  $\mathbf{E}(r') = \mathbf{E}_I(r') + \mathbf{E}_s(r')$ . Согласно [L. Tsang, J. A. Rony, R. T. Shin] запишем соответствующее интегральное уравнение

$$\mathbf{E}_I(r') + \nabla \times \int_s \mathbf{n} \times \mathbf{E}(r) G(r, r') ds + \frac{i}{k \in} \nabla \times \nabla \times \int_s \mathbf{n} \times \mathbf{H}(r) G(r, r') ds = 0, \quad (2.110)$$

где  $G(r, r')$  – функция Грина, которая определяется следующим образом [L. Tsang]:

при  $r > r'$

$$G(r, r') = \frac{ik}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m E_{mn} \left[ \mathbf{M}_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{M}_{mn}^1(kr', \theta', \varphi') + \right. \\ \left. + \mathbf{N}_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \times \mathbf{N}_{mn}^1(kr', \theta', \varphi') \right], \quad (2.111)$$

при  $r > r'$

$$G(r, r') = \frac{ik}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m E_{mn} \left[ \mathbf{M}_{-mn}^1(kr, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{M}_{mn}^3(kr', \theta', \varphi') + \right. \\ \left. + \mathbf{N}_{-mn}^1(kr, \theta, \varphi) \times \mathbf{N}_{mn}^3(kr', \theta', \varphi') \right], \quad (2.112)$$

где  $\mathbf{M}_{mn}, \mathbf{N}_{mn}, \mathbf{M}_{-mn}, \mathbf{N}_{-mn}$  – векторные сферические гармоники.

Отметим, что выбор векторных сферических гармоник следует осуществлять на основе свойства инвариантности (в смысле замкнутости), а именно: при вращении системы координат векторные сферические гармоники  $\mathbf{M}_{mn}, \mathbf{N}_{mn}$  должны преобразовываться независимо друг от друга.



Искомым свойством инвариантности удовлетворяют следующие векторные сферические гармоники [L. Tsang, J. A. Rony, R. T. Shin ]

$$M_{mn}^J(kr) = (-1)^m d_n z_n^J(kr) C_{mn}(\theta) \exp(im\varphi), \quad (2.113)$$

$$N_{mn}^J(kr) = (-1)^m d_n \left[ \frac{n(n+1)}{kr} z_n^J(kr) P_{mn}(\theta) + \frac{1}{kr} z_n^J(kr) B_{mn}(\theta) \right] \exp(im\varphi), \quad (2.114)$$

$$B_{mn}(\theta) = i_\theta \frac{d}{d\theta} d_{om}^n(\theta) + i_\varphi \frac{im}{\sin(\theta)} d_{om}^n(\theta), \quad (2.115)$$

$$C_{mn}(\theta) = i_\theta \frac{im}{\sin(\theta)} d_{om}^n(\theta) - i_\varphi \frac{d}{d\theta} d_{om}^n(\theta),$$

$$P_{mn}(\theta) = i_r d_{om}^n(\theta), d_n = \sqrt{\frac{(2n+1)}{4n(n+1)}}, \quad (2.116)$$

$z_n^J$  – любая из четырех сферических функций:

$$j_n(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} J_{n+\frac{1}{2}}(p), y_n(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} Y_{n+\frac{1}{2}}(p), h_n^{(1)} = j_n(p) + iy_n, h_n^{(2)} = j_n(p) - iy_n,$$

$$d_{om}^n(\theta) = \frac{(-1)^{n-m}}{2^n n!} \left[ \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} (1 - \cos^2(\theta))^{-m/2} \frac{d^{n-m}}{(d \cos(\theta))^{n-m}} [(1 - \cos^2(\theta))^n].$$

Запишем разложение падающей волны на поверхности на  $j$ -частице по векторным сферическим гармоникам:

$$E_I(r')(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} \left[ p_{mn}^j N_{mn}^1(kr') + q_{mn}^j M_{mn}^1(kr') \right]. \quad (2.117)$$

Подставим выражения (2.2.116), (2.2.117) и (2.2.122) в интегральное уравнение (2.2.115). Тогда получим

$$\frac{ik^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \int_s n \times E(r) \begin{pmatrix} N_{mn}^3(kr, \theta, \varphi) \\ M_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ j \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_s n \times H(r) \begin{pmatrix} M_{mn}^3(kr, \theta, \varphi) \\ N_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds = - \begin{pmatrix} p_{mn}^j \\ q_{mn}^j \end{pmatrix}.$$

Запишем выражение для внутреннего нуля на  $j$ -частице по векторным сферическим гармоникам

$$E(r')(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} [d_{mn}^j N_{mn}^1(k_1 r') + c_{mn}^j M_{mn}^1(k_1 r')]. \quad (2.118)$$

Запишем выражения для  $n \times E(r)$  и  $n \times H(r)$ :

$$n \times E(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{mn}^j n \times M_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi) + d_{mn}^j n \times N_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi)]$$

$$n \times H(r) = -i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{mn}^j n \times N_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi) + d_{mn}^j n \times M_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi)]$$

Тогда

$$\frac{ik^2}{\pi} \int_s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m [c_{mn}^j n \times M_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi) + d_{mn}^j n \times N_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi)] \begin{pmatrix} N_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \\ M_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ \frac{ik^2}{\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \int_s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m [c_{mn}^j n \times N_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi) + d_{mn}^j n \times M_{m'n'}^1(k_1 r, \theta, \varphi)] \times$$

$$\begin{pmatrix} M_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \\ N_{-mn}^3(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds = - \begin{pmatrix} p_{mn}^j \\ q_{mn}^j \end{pmatrix}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} I^{21} + \tilde{m} \cdot I^{12} & I^{22} + \tilde{m} \cdot I^{11} \\ I^{22} + \tilde{m} \cdot I^{11} & I^{12} + \tilde{m} \cdot I^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^j \\ c^j \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix}, \quad (2.119)$$

где  $\tilde{m}$  – относительный показатель преломления частицы,  $I^{11}, I^{12}, I^{21}$  и  $I^{22}$  определены ниже.

Запишем разложение для рассеянного поля на  $j$ -частице по векторным сферическим гармоникам:

$$E_s(r')(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ a_{mn}^j N_{mn}^3(kr') + b_{mn}^j M_{mn}^3(kr') \right] \quad (2.120)$$

Тогда подставляя в (2.110) с учетом (2.111), (2.112) и (2.120), получим

$$\begin{aligned} & \frac{ik^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \int_s \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} N_{mn}^1(kr, \theta, \varphi) \\ M_{-mn}^1(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds + \\ & + j \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_s \mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} M_{mn}^1(kr, \theta, \varphi) \\ N_{-mn}^1(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds = - \begin{pmatrix} a_{mn}^j \\ b_{mn}^j \end{pmatrix}, \\ & \frac{ik^2}{\pi} \int_s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \left[ c_{mn}^j \mathbf{n} \times N_{m'n'}^1(k_1r, \theta, \varphi) + d_{mn}^j \mathbf{n} \times M_{m'n'}^1(k_1r, \theta, \varphi) \right] \times \\ & \quad \times \begin{pmatrix} M_{-mn}^1(kr, \theta, \varphi) \\ N_{-mn}^1(kr, \theta, \varphi) \end{pmatrix} ds = - \begin{pmatrix} a_{mn}^j \\ b_{mn}^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} I'^{21} + \tilde{m} \cdot I'^{12} & I'^{22} + \tilde{m} \cdot I'^{11} \\ I'^{22} + \tilde{m} \cdot I'^{11} & I'^{12} + \tilde{m} \cdot I'^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^j \\ c^j \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

$I'^{11}, I'^{12}, I'^{21}$  и  $I'^{22}$  будут определены ниже. Объединяя выражения (2.119) и (2.121), получим

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I'^{21} + \tilde{m} \cdot I'^{12} & I'^{22} + \tilde{m} \cdot I'^{11} \\ I'^{22} + \tilde{m} \cdot I'^{11} & I'^{12} + \tilde{m} \cdot I'^{21} \end{pmatrix}^{-1} \times \quad (2.122) \\ (\times) \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix}$$

Обозначим матрицы соответственно через  $Q_1^{11}$  и  $Q_1^{31}$ . Тогда выражение (2.122) примет вид

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = T_1^j \begin{pmatrix} p^j \\ q^j \end{pmatrix}, T_1^j = -Q_1^{11} \cdot [Q_1^{31}]^{-1}. \quad (2.123)$$

Элементы T-матрицы выражаются в виде поверхностных интегралов:

$$I_{mm'n'}^{11} = \alpha(-1)^m \int_S [M_{(-mn)}^3(kr) \times M_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.124)$$

$$I_{mm'n'}^{12} = \alpha(-1)^m \int_S [M_{(-mn)}^3(kr) \times N_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.125)$$

$$I_{mm'n'}^{21} = \alpha(-1)^m \int_S [N_{(-mn)}^3(kr) \times M_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.126)$$

$$I_{mm'n'}^{22} = \alpha(-1)^m \int_S [N_{(-mn)}^3(kr) \times N_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.127)$$

$$I_{mm'n'}^{11'} = \alpha(-1)^{m'} \int_S [M_{(-mn)}^1(kr) \times M_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.128)$$

$$I_{mm'n'}^{12'} = \alpha(-1)^{m'} \int_S [M_{(-mn)}^1(kr) \times N_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.129)$$

$$I_{mm'n'}^{21'} = \alpha(-1)^{m'} \int_S [N_{(-mn)}^1(kr) \times M_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.130)$$

$$I_{mm'n'}^{22'} = \alpha(-1)^{m'} \int_S [N_{(-mn)}^1(kr) \times N_{(m'n')}^1(k_1r)] ndS, \quad (2.131)$$

где  $\alpha = k^2/\pi$ .

Таким образом, коэффициенты разложения рассеянного и падающего полей связаны линейным преобразованием T-матрицей, которая является инвариантом относительно направления распространения падающего излучения в фиксированной системе координат и зависит от физических и геометрических характеристик рассеивающего объекта (таких как показатель преломления, размер по отношению к длине волны света, морфология).

Приведенное выше представление метода T-матриц имеет ряд преимуществ по сравнению с другими представлениями, которые выражаются в использовании векторных сферических гармоник, инвариантных относительно вращения системы координат, а также в симметричной форме представления основных соотношений. Отметим, что T-матричный метод является непосредственным обобщением стандартной теории Ми на случай не-

сферических частиц. Действительно, если рассеиватель является сферически симметричным, то Т-матрица становится диагональной, причем диагональные элементы даются с точностью до знака, соответствующими коэффициентами Ми  $a_n$  и  $b_n$  (см. раздел 2.5).

Электромагнитное поле, падающее на поверхность  $j$ -частицы, состоит из 2-х частей – первоначально падающего поля и поля, рассеянного группой других частиц, расположенных в окружающей среде. Тогда можно записать следующее выражение, по аналогии с (2.98):

$$E_i(j) = E_0(j) + \sum_{l \neq j} E_s(l, j), \quad (2.132)$$

где  $E_s(l, j)$  – сумма рассеянных полей на  $j$ -частице. Индексы  $l, j$  подразумевают переход из  $l$  в  $j$  координатную систему.

Падающее поле определяется следующим образом:

$$E_0(\mathbf{j}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ p_{mn}^{j_0, j} N_{mn}^1(kr) + q_{mn}^{j_0, j} M_{mn}^1(kr) \right]. \quad (2.133)$$

Волны падают относительно центра каждой  $j$ -частицы, т. е. в  $j$ -системе координат.

Коэффициенты разложения падающей плоской электромагнитной волны имеют следующий вид [L. Tsang., J.A Rony., R.T Shin]:

$$p_{mn}^{j_0, j} = 4\pi(-1)^m i^n d_n C_{mn}^*(\theta_{inc}) \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{k}_{inc}, \mathbf{r}_{j_0, j}) \exp(-im\varphi_{inc}),$$

$$q_{mn}^{j_0, j} = 4\pi(-1)^m i^{n-1} d_n B_{mn}^*(\theta_{inc}) \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{k}_{inc}, \mathbf{r}_{j_0, j}) \exp(-im\varphi_{inc}),$$

где  $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{k}_{inc}, \mathbf{r}_{j_0, j})$  – вектор линейной поляризации,  $\mathbf{k}_{inc}$  – волновой вектор, звездочка означает комплексное сопряжение,  $d_n$ ,  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  определяются соответственно выражениями (2.115) – (2.116).

Запишем выражения для рассеянного поля

$$E_s(l, j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ p_{mn}^{l, j} N_{mn}^1(kr) + q_{mn}^{l, j} M_{mn}^1(kr) \right], \quad (2.134)$$

где  $p_{mn}^{l, j}, q_{mn}^{l, j}$  определено в разделе 2.13.

Объединяя выражения (2.117), (2.132), (2.133), (2.134) с учетом (2.123) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для  $j$ -й частицы произвольной формы:

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = T^j \left[ \begin{pmatrix} p^{j_0, j} \\ q^{j_0, j} \end{pmatrix} + \sum_{l \neq j} \begin{pmatrix} A(l, j) & B(l, j) \\ B(l, j) & A(l, j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^l \\ b^l \end{pmatrix} \right], \quad (2.135)$$

где коэффициенты  $A(l, j), B(l, j)$  определены в разделе 2.13. Полученную систему (2.135) необходимо решать методом редукции (**прил. 3**).

После того как из системы (2.135) найдены коэффициенты  $a_{mn}^j, b_{mn}^j$  мы можем записать в основной системе координат выражения для рассеянного поля

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} [a_{mn} N_{mn}^3(kr) + b_{mn} M_{mn}^3(kr)], \quad (2.136)$$

Покомпонентная запись рассеянного поля имеет вид:

$$E_{s\theta} \sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [a_{mn} \tau_{mn} + b_{mn} \pi_{mn}] e^{im\phi}, \quad (2.137)$$

$$E_{s\phi} \sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [a_{mn} \pi_{mn} + b_{mn} \tau_{mn}] e^{im\phi}, \quad (2.138)$$

где

$$\tau_{mn} = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta), \pi_{mn} = \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta)$$

Символ ( $\sim$ ) означает, что выражения (2.137) и (2.138), вытекающие из (2.136) при ( $kr \gg 1$ ) понимаются в асимптотическом смысле.

В виду того что мы рассматриваем рассеяние на больших расстояниях от  $j$ -частицы, электрические векторы рассеянного поля будут параллельны электрическому вектору падающего поля, т. е. в дальней зоне будет отлична от нуля только  $\theta$ -компонента и выражения (2.137) и (2.138) упростятся:

$$\begin{aligned} E_{s\theta} &\sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_{mn} \tau_n + b_{mn} \pi_n] \\ E_{s\phi} &\sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_{mn} \pi_n + b_{mn} \tau_n], \end{aligned} \quad (2.139)$$

где

$$\tau_n = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta), \pi_n = \frac{1}{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$$

Аналогично, получаются выражения для компонент магнитного поля:  $H_{s\phi}, H_{s\theta}$ .

## 2.15. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ $j$ -НЕОДНОРОДНОЙ ЧАСТИЦЫ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ФОРМЫ

Специфика, биологических частиц (форменных элементов крови) требует усложненной более адекватной модели, в связи с тем, что возможно наличие ядра, цитоплазмы и плазматической мембраны, присущих исследуемому объекту [Н. Грин, У. Стаут, Тейлор]. Пусть  $r_1$  – радиус ядра клетки,  $r_2$  – радиус плазматической мембраны.

Рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны на  $j$ -неоднородной частицы с нерегулярной формой (рис. 2.7)

Запишем систему уравнений Максвелла, для соответствующих полей:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = -ik \epsilon \mathbf{E}_s, \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = ik\mu \mathbf{H}_s$$

для области  $D_s$ ,

$$\nabla \times \mathbf{H}_{i,1} = -ik \epsilon_1 \mathbf{E}_{i,1}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{i,1} = ik\mu_1 \mathbf{H}_{i,1}$$

для области  $D_{i,1}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{H}_{i,2} = -ik \epsilon_2 \mathbf{E}_{i,2}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{i,2} = ik\mu_2 \mathbf{H}_{i,2}$$

для области  $D_{i,2}$ .

Эти поля должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_{i,1} - \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_s = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_{i,1} - \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_s = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1,$$

$$\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_{i,1} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_{i,2}, \quad \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_{i,1} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_{i,2},$$

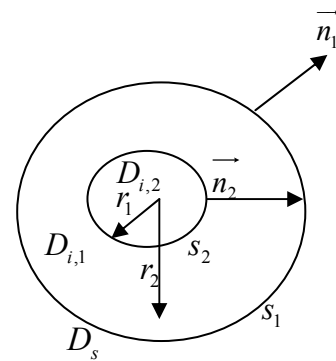


Рис. 2.7. Рассеяние плоской электромагнитной волны на  $j$ -неоднородной частице

где  $k$  – волновое число,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $E_s$  – рассеянное поле,  $E_I$  – падающее поле,  $E_{i,1}$  – внутреннее поле, поле  $E_{i,2}$  будет определено ниже. Запишем соответствующее интегральное уравнение для области  $D_i$

$$E_I(r'_1) + \nabla \times \int_s \mathbf{n} \times E_{i,1}(r) G(r_1, r'_1) ds + \frac{i}{k \in} \nabla \times \nabla \times \int_s \mathbf{n} \times H_{i,1}(r) G(r_1, r'_1) ds = 0, r_1 \in D_i, \quad (2.140)$$

где  $D_i = D_{i,1} \cup D_{i,2} \cup S_2$ ,  $G(r, r')$  – функция Грина

$$-\nabla \times \int_{s_1} [\mathbf{n}_1 \times E_{i,1}(r)] G(r_1, r'_1) ds - \frac{i}{k \in_{i,1}} \nabla \times \nabla \times \int_{s_1} [\mathbf{n}_1 \times H_{i,1}(r)] G(r_1, r'_1) ds + \nabla \times \int_{s_2} [\mathbf{n}_2 \times E_{i,2}(r)] G(r_1, r'_1) ds - \frac{i}{k \in_{i,2}} \nabla \times \nabla \times \int_{s_2} [\mathbf{n}_2 \times H_{i,2}(r)] G(r_1, r'_1) ds = 0,$$

где

$$r_1 \in D_s \cup D_{i,2},$$

Для рассеянного поля имеем следующее выражение [P.C. Watermann]:

$$E_s(r')(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n 4 \cdot i E_{mn} \left[ a_{mn}^j N_{mn}^3(kr') + b_{mn}^j M_{mn}^3(kr') \right], \quad (2.141)$$

Для падающего поля

$$E_I(r')(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} \left[ p_{mn}^j N_{mn}^1(kr') + q_{mn}^j M_{mn}^1(kr') \right], \quad (2.142)$$

Для внутреннего поля в области  $0 \leq r \leq r_1$ ,

$$E_{i,1}(r')(j) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} \left[ d_{mn}^j N_{mn}^1(k_1 r') + c_{mn}^j M_{mn}^1(k_1 r') \right], \quad (2.143)$$

Для внутреннего поля в области  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,



$$E_{i,2}(r')(j) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n iE_{mn} \left[ \alpha_{mn}^j N_{mn}^1(k_1 r') + \beta_{mn}^j M_{mn}^1(k_1 r') + \gamma_{mn}^j N_{mn}^3(k_1 r') + \delta_{mn}^j M_{mn}^3(k_1 r') \right] \quad (2.144)$$

Поступая аналогично, так же как и в случае задачи рассеяния на однородной частице нерегулярной формы, получим решение задачи рассеяния на неоднородной частице произвольной геометрии, а именно

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = T_2^j \begin{pmatrix} p^j/4 \\ q^j/4 \end{pmatrix}, \quad (2.145)$$

где  $T_2^j = -[Q_2^{11} + Q_2^{13}] \cdot D [[Q_2^{31} + Q_2^{33}] \cdot D]^{-1}$ , здесь

$$(Q)_2^{13} = \begin{pmatrix} K^{13} + \tilde{m} \cdot J^{13} & I^{13} + \tilde{m} \cdot L^{13} \\ L^{13} + \tilde{m} \cdot I^{13} & J^{13} + \tilde{m} \cdot K^{13} \end{pmatrix},$$

$$(Q)_2^{31} = \begin{pmatrix} K^{31} + \tilde{m} \cdot J^{31} & I^{31} + \tilde{m} \cdot L^{31} \\ L^{31} + \tilde{m} \cdot I^{31} & J^{31} + \tilde{m} \cdot K^{31} \end{pmatrix},$$

$$(Q)_2^{11} = \begin{pmatrix} K^{11} + \tilde{m} \cdot J^{11} & I^{11} + \tilde{m} \cdot L^{11} \\ L^{11} + \tilde{m} \cdot I^{11} & J^{11} + \tilde{m} \cdot K^{11} \end{pmatrix},$$

$$(Q)_2^{33} = \begin{pmatrix} K^{33} + \tilde{m} \cdot J^{33} & I^{33} + \tilde{m} \cdot L^{33} \\ L^{33} + \tilde{m} \cdot I^{33} & J^{33} + \tilde{m} \cdot K^{33} \end{pmatrix},$$

а элементы матриц  $Q_2^{13}, Q_2^{31}, Q_2^{11}$  и  $Q_2^{33}$  выражаются в виде поверхностных интегралов

$$K_{mmm'n'}^{31} = \alpha(-1)^m \int_S [N_{(-mn)}^3(kr) \times M_{(m'n')}^1(k_1 r)] ndS,$$

$$J_{mmm'n'}^{31} = \alpha(-1)^m \int_S [M_{(-mn)}^3(kr) \times N_{(m'n')}^1(k_1 r)] ndS,$$

$$I_{mmm'n'}^{31} = \alpha(-1)^m \int_S [N_{(-mn)}^3(kr) \times N_{(m'n')}^1(k_1 r)] ndS,$$

$$L_{mnm'n'}^{31} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^3(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^1(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$K_{mnm'n'}^{13} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{N}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$J_{mnm'n'}^{13} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{N}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$I_{mnm'n'}^{13} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{N}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{N}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$L_{mnm'n'}^{13} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$K_{mnm'n'}^{11} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{N}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^1(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$J_{mnm'n'}^{11} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^1(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$I_{mnm'n'}^{11} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{N}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{N}_{(m'n')}^1(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$L_{mnm'n'}^{11} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^1(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^1(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$K_{mnm'n'}^{33} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{N}_{(-mn)}^3(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$J_{mnm'n'}^{33} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^3(kr) \times \mathbf{N}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$I_{mnm'n'}^{33} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{N}_{(-mn)}^3(kr) \times \mathbf{N}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

$$L_{mnm'n'}^{33} = \alpha(-1)^m \int_s \left[ \mathbf{M}_{(-mn)}^3(kr) \times \mathbf{M}_{(m'n')}^3(k_1r) \right] nd\mathbf{S},$$

где  $\alpha = k^2/\pi$ ,  $D = S_{12} \cdot T_1^j \cdot S_{21}$ ,  $T_1^j = -Q_1^{11} \cdot [Q_1^{31}]^{-1}$ ,  $S_{12} = \tau^{11} R(\alpha, \beta, \gamma)$ ,

$$S_{21} = R^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \tau^{33}, \tau^{11} = \tau^{33} = \begin{pmatrix} A_{mn,m'n'}^1(kr) & B_{mn,m'n'}^1(kr) \\ B_{mn,m'n'}^1(kr) & A_{mn,m'n'}^1(kr) \end{pmatrix},$$

$$A_{mn,m'n'}^1(kr) = \frac{i^{n'-n}}{2\pi\sqrt{nn'(n+1)(n'+1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [mm'\pi_n^{|m|}(\beta)\pi_n^{|m'|}(\beta) + \tau_n^{|m|}(\beta)\tau_n^{|m'|}(\beta)] \exp(i(m-m')\alpha) \exp(ik(\beta,\alpha)r) \sin\beta d\beta d\alpha,$$

$$B_{mn,m'n'}^1(kr) = \frac{i^{n'-n}}{2\pi\sqrt{nn'(n+1)(n'+1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [m\pi_n^{|m|}(\beta)\tau_n^{|m'|}(\beta) + m'\tau_n^{|m|}(\beta)\pi_n^{|m'|}(\beta)] \exp(i(m-m')\alpha) \exp(ik(\beta,\alpha)r) \sin\beta d\beta d\alpha,$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} R_{mn,m'n'}(\alpha,\beta,\gamma) & 0 \\ 0 & R_{mn,m'n'}(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix},$$

где

$$R_{mn,m'n'}(\alpha,\beta,\gamma) = D_{m'm'}^n(\alpha,\beta,\gamma)\delta_{n'n'},$$

$$D_{m'm'}^n(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{(m+m')} \exp(im\alpha) d_{mm'}^{\sim m}(\beta) \exp(im'\gamma)$$

– Вигнера D-функции, которые определяются как матричные элементы неприводимого представления веса  $n$  на группе вращений [И.М. Гельфанд., Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро] или как матричные элементы оператора поворота  $D(\alpha\beta\gamma)$  в  $JM$ -представлении

$$\langle JM | D(\alpha\beta\gamma) | J'M' \rangle = \delta_{JJ'} D_{mm'}^J(\alpha\beta\gamma).$$

Функции  $D_{mm'}^n(\alpha\beta\gamma)$  представляются в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых зависит только от одного угла Эйлера [Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский]:

$$D_{mm'}^n(\alpha\beta\gamma) = \exp(-im\alpha) d_{mm'}^n(\beta) \exp(-im'\gamma),$$

где  $d_{mm'}^n(\beta)$  – функции Вигнера, удовлетворяют условиям унитарности

$$\begin{aligned} [D^{-1}(\alpha\beta\gamma)]_{mm'}^n &= [D^*(\alpha\beta\gamma)]_{m'm}^n \\ \sum_{m=-n}^n D_{mm'}^n(\alpha\beta\gamma) D_{mm_1}^{n*}(\alpha\beta\gamma) &= \sum_{m=-n}^n D_{mm'}^n(\alpha\beta\gamma) D_{m_1m}^{n-1}(\alpha\beta\gamma) = \delta_{m'm_1} \end{aligned}$$

и ортогональности

$$\frac{2n+1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{mm'}^n(\alpha\beta\gamma) D_{m_1m_1'}^{n*}(\alpha\beta\gamma) = \delta_{nn'} \delta_{mm_1} \delta_{m'm_1'}$$

для функций  $d_{mm'}^n(\beta)$

$$\int_0^\pi \sin\beta d\beta d_{mm'}^n(\beta) d_{m'm'}^{n'}(\beta) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}$$

Функции  $d_{mm'}^n(\beta)$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \frac{m}{\sin\beta} d_{0m}^n(\beta) \right|_{\beta=0} = 1/2 \delta_{m\pm 1} [n(n+1)]^{1/2},$$

$$\left. \frac{d}{d\beta} d_{0m}^n(\beta) \right|_{\beta=0} = 1/2 m \delta_{m\pm 1} [n(n+1)]^{1/2},$$

$$\frac{m}{\sin\beta} d_{0m}^n(\beta) = 1/2 [n(n+1)]^{1/2} [d_{1m}^n(\beta) + d_{-1m}^n(\beta)],$$

$$\frac{d}{d\beta} d_{0m}^n(\beta) = 1/2 [n(n+1)]^{1/2} [d_{1m}^n(\beta) - d_{-1m}^n(\beta)],$$

а также теореме умножения в виде

$$d_{mm'}^n(\beta) d_{m_1m_1'}^{n'}(\beta) = \sum_{n_1=|n-n'|}^{n+n'} C_{nmm'n_1}^{n_1m+m_1} C_{n_1m_1'm_1'}^{n_1m'+m_1'} d_{m+m_1, m'+m_1'}^{n_1}(\beta),$$

и соотношениям симметрии

$$d_{mm'}^n(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{-m-m'}^n(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{m'm}^n(\beta).$$

Произведение двух  $D$ -функций  $D_{m_1 m_1'}^{n_1}(\alpha\beta\gamma)$  и  $D_{m_2 m_2'}^{n_2}(\alpha\beta\gamma)$  может быть записано в виде следующей суммы, называемой рядом Клебша–Гордона [Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.]:

$$D_{m_1 m_1'}^{n_1}(\alpha\beta\gamma) D_{m_2 m_2'}^{n_2}(\alpha\beta\gamma) = \sum_{n_3=|n_1-n_2|}^{n_1+n_2} C_{n_1 m_1 n_2 m_2}^{n_3 m_1+m_2} D_{m_1+m_2, m_1'+m_2'}^{n_3}(\alpha\beta\gamma) C_{n_1 m_1' n_2 m_2'}^{n_3 m_1'+m_2'}.$$

Формула сложения для  $D$ -функций Вигнера имеет вид [Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский]

$$\sum_{\hat{m}=-n}^n D_{m\hat{m}}^n(\alpha_1\beta_1\gamma_1) D_{\hat{m}m'}^n(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = D_{mm'}^n(\alpha\beta\gamma),$$

где углы Эйлера  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  характеризуют поворот системы координат  $S \rightarrow S_1$ ,  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  –  $S_1 \rightarrow S_2$ , углы результирующего поворота  $S \rightarrow S_2$  –  $\alpha, \beta, \gamma$  относительно исходной ( $S$ ) системы координат.

Рекуррентное соотношение для расчета функций Вигнера имеет вид

$$\begin{aligned} & n\sqrt{(n+1)^2 - m^2} \sqrt{(n+1)^2 - q^2} d_{qm}^{n+1}(\beta) + \\ & + (n+1)\sqrt{n^2 - q^2} \sqrt{n^2 - m^2} d_{qm}^{n-1}(\beta) = \\ & = (2n+1)(n(n+1)\cos\beta - mq) d_{qm}^n(\beta), \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} d_{qm}^{n_*} &= \frac{(-1)^{(q-m+|q-m|)/2}}{2^{n_*}} \left[ \frac{(2n_*)I}{(|q-m|!|q+m|!)} \right]^{1/2} \times \\ & \times (1 - \cos\beta)^{|q-m|/2} (1 + \cos\beta)^{|q+m|/2}, \\ n_* &= \max(|m|, |q|), \end{aligned}$$

Таким образом, мы рассмотрели задачу рассеяния на двухслойных сферических частицах, на бесконечно длинном круговом цилиндре и на неоднородных частицах нерегулярной формы.

## 2.16. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С МУТНЫМИ БИОТКАНЯМИ

Перейдем теперь непосредственно к рассмотрению принципов построения математических моделей для расчета взаимодействия лазерного излучения с мутными биотканями.

Мутными называют среды, в которых присутствует как поглощение, так и рассеяние излучения. Одним из примеров такой ткани является кожа человека (**прил. 4**). В то же время кожа является живой многослойной средой, содержащей различные включения, такие как, например, кровеносные сосуды, в которых происходит движение крови. Рассмотрим основные этапы построения математических моделей, описывающих взаимодействие лазерного излучения с многокомпонентными многослойными мутными средами, такими как кожа человека.

Практически все модели строятся по одинаковым принципам (рис. 2.8). Сначала описывается объект исследования, его геометрия. Затем определяются оптические и физические параметры всех его компонентов. Далее производится расчет распространения излучения в среде, и (для некоторых моделей) вычисление температурных полей.

Различия между моделями становятся заметны уже на этапе построения геометрии. В большинстве случаев кожа представляется в виде последовательности плоских слоев с различными оптическими и теплофизическими свойствами. Количество слоев кожи может варьироваться от одного до семи. Самая простая геометрия включает в себя только дерму [D.Y. Paithankar, V.E. Ross, B.A. Saleh, M.A. Blair, B.S. Graham]. Такая упрощенная модель используется, например, для моделирования лечения угревой болезни лазерным излучением с длиной волны 1450 нм. В данной работе считалось, что поскольку на данной длине волны излучение поглощается преимущественно водой, то можно считать кожу одним цельным слоем с оптическими свойствами, близкими к свойствам воды. Более глубокие слои кожи не влияют на результат, поскольку излучение с данной длиной волны не проникает глубже 1 мм.

Наибольшее количество слоев модели представлено в работе [А.Ю. Сетейкин]. Здесь в коже выделены 7 слоев: роговой слой, эпидермис, верхняя дерма, дерма с поверхностным сплетением сосудов, нижняя дерма, дерма с глубинным сплетением сосудов, гиподерма (рис. 2.9). Каждый из них имеет свои оптические характеристики. Однако такое достаточно подробное разделение кожи на слои используется только для оптического расчета, а для расчета распределения температуры выделены только эпидермис, кровь и дерма.



Рис. 2.8. Схема построения моделей, описывающих взаимодействие лазерного излучения с объектами

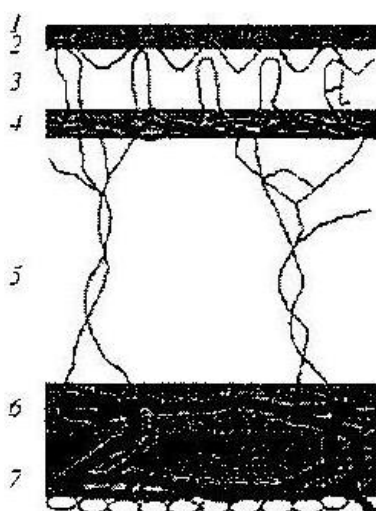


Рис. 2.9. Модель кожи [А.Ю. Сетейкин]:

- 1 – роговой слой,
- 2 – эпидермис,
- 3 – капиллярная (верхняя) дерма,
- 4 – верхнее сплетение микрососудов,
- 5 – ретикулярная (нижняя) дерма,
- 6 – глубокое сосудистое сплетение,
- 7 – гиподерма

В некоторых работах, например, в [А.Ю. Сетейкин, L.O. Svaasand, L.T. Norvang, E.J. Fiskerstrand, E.K.S. Stopps, M.W. Berns, J.S.Nelson], наличие кровеносных сосудов в коже моделировалось с помощью изменения оптических свойств выделенных в дерме плоских слоев, в которых предполагается наличие крови.

Некоторые авторы выделяют кровь как отдельный слой с характеристиками чистой крови, либо как некий объект внутри ткани. Одиночный кровеносный сосуд иногда прямоугольной [С.Т.В. Lahaye, M.J.C. van Gemert] или чаще цилиндрической [Л.Г. Астафьева, Г.И. Желтов] формы обычно помещается в дерме. Пример модели кожи с кровеносным сосудом цилиндрической формы приведен на рис. 2.10. [Л.Г. Астафьева, Г.И. Желтов, А.С. Рубанов].

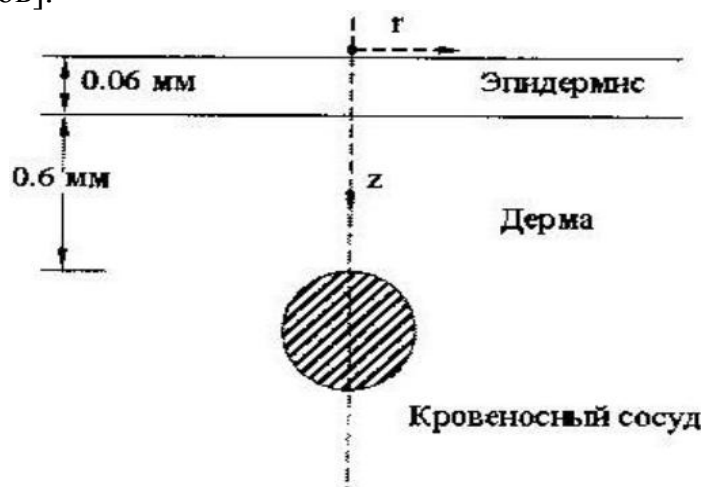


Рис. 2.10. Модель, учитывающая расположение кровеносного сосуда в подкожных тканях. Сосуд размещается в центре луча

Считается (в большинстве случаев) что стенка сосуда имеет такие же свойства, как окружающая ткань и поэтому отдельно ее, как правило, не выделяют. Модели с сосудом, расположенным в дерме, обычно используют для получения распределения интенсивности излучения и температуры внутри вен.

Оптические свойства, как правило, считают постоянными для данной длины волны и не зависящими от температуры. В [M.J.C. van Gemert, D.J. Smithies, W. Verkruysse, T.E. Milner, J.S. Nelson] сделан анализ зависимости коэффициента поглощения воды на длине волны 1450 нм от температуры. Считалось, что максимальное изменение температуры ткани при обработке может быть от 30 до 90°C. Такой перепад температуры соответствует снижению коэффициента поглощения воды на  $0,885 \text{ см}^{-1}$ . Поскольку содержание воды в коже авторы считают равным 70%, то соответственно изменение оптического поглощения кожи будет равно  $0,6195 \text{ см}^{-1}$ . По сравнению



с коэффициентом поглощения кожи, который был принят равным  $20 \text{ см}^{-1}$ , полученное уменьшение считалось незначительным.

Зависимости теплофизических параметров от температуры или содержания крови в тканях авторы обычно не учитывают. Иногда даже считают, что теплофизические свойства для кожи и крови одинаковы [J.K. Barton, D.X. Hammer, T.J. Prefer, D.J. Lund, B.E. Stuck, A.J. Welch].

Несколько отличающейся от остальных моделей с точки зрения задания оптических характеристик объекта является модель кожи, представленная в работе [L.E. Dolotov, Yu. P. Sinichkin, V.V. Tuchin, S.R. Utz, G.B. Altshuler, I.V. Yaroslavsky.] (рис. 2.11).

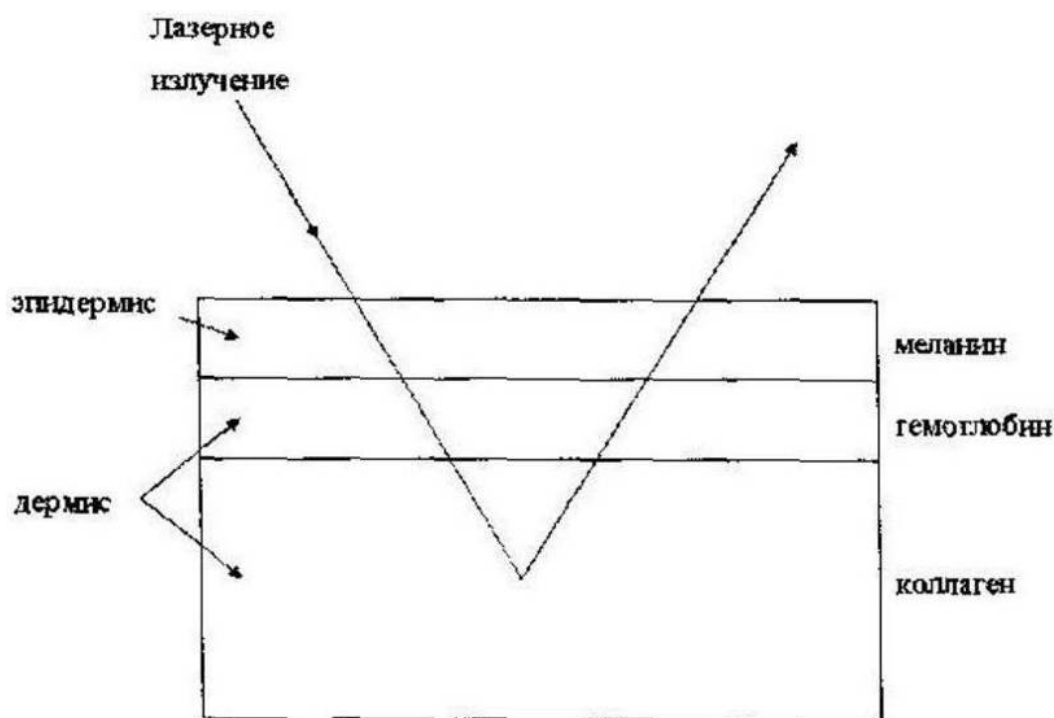


Рис. 2.11. Модель кожи

Считается, что кожа состоит из эпидермиса и дермы. Падающее излучение сначала проходит через эпидермис, где наибольший коэффициент поглощения имеет меланин, поэтому оптические свойства эпидермиса считаются равными свойствам меланина. Пройдя часть, попадает в дерму, где поглощается преимущественно гемоглобином, присутствующим в поверхностном слое дермы. Оставшееся излучение диффузно отражается от коллагена, присутствующего в остальной части дермы, и снова проходит через слои гемоглобина и меланина, частично поглощаясь. Такое описание процесса прохождения света через кожу используется для расчета коэффициентов пигментации и эритемы.

Авторы С.Т.В. Lahaye, М.Ј.С. van Gemert предлагают несколько иной метод расчета распределения интенсивности излучения внутри сосуда. Здесь с помощью решения задачи дифракции электромагнитного излучения на бесконечном круговом цилиндре (разд. 2.12) определяются компоненты электрического поля внутри цилиндрического сосуда. С помощью полученных результатов рассчитывается распределение функции тепловых источников внутри сосуда, на основе которой решается уравнение теплопроводности.

#### **2.17. МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗА ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРОВИ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ КРОВОТОКА В КАПИЛЛЯРНОМ РУСЛЕ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ЛАЗЕРНЫМ ЛУЧОМ**

В этом разделе мы построим электродинамическую модель, которая позволит варьировать электрофизические параметры исследуемой биологической структуры (реальная и мнимая части показателя преломления крови, эпидермиса, верхнего слоя дермы, нижнего слоя дермы) и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами крови, облученной лазерным пучком, а также определять скорость кровотока в капиллярном русле, что делает возможным диагностику заболеваний, проявление которых связано с уменьшением эффективного диаметра капилляров и изменением биофизических свойств крови [К.Г. Куликов, А.М. Радин].

Биологическая ткань представляется в виде слоев с различными оптическими характеристиками (эпидермис, верхний слой дермы, кровь, нижний слой дермы), облучаемых лазерным пучком. В верхнем слое дермы помещается кровеносный сосуд [Н. Грин, У. Стаут, Тейлор].

Построение данной модели состоит из трех частей. В первой части решается задача об отражении плоской волны от слоя с различными показателями преломления. Построение этой части носит вспомогательный характер. Во второй части решается задача об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением. В третьей части решается задача определения зависимости интенсивности излучения от коэффициента преломления для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы, и скорости кровотока в капиллярном русле. Для построения указанной модели использованы методы, описанные в разделах (2.18)-(2.20) настоящего пособия.

## 2.18. ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ СЛОЯ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЛЩИНОЙ

В данном разделе уточняется коэффициент отражения от слоя с медленно меняющейся толщиной. Рассмотрим оптическую систему, изображенную на рис. 2.12. Система состоит из 4 областей с различными показателями преломления (эпидермис, верхний слой дермы, сосуд крови, нижний слой дермы). С целью достижения наибольшего соответствия структуре реального объекта исследования представим границы раздела слоев модельной среды в виде волнистых поверхностей

$$z_1 = h_1(x, y), z_2 = h_2(x, y), z_3 = h_3(x, y),$$

где

$$h_1(x, y) = c_1 \sin(a_1 x + b_1 y), \quad h_2(x, y) = c_2 \sin(a_2 x + b_2 y),$$

$$h_3(x, y) = c_3 \sin(a_3 x + b_3 y); \quad c_1, a_1, b_1, c_2, a_2, b_2, c_3, a_3, b_3$$

– некоторые произвольно задаваемые константы, причем

$$a_i < 1, b_i < 1, c_i < 1 \quad (i = \overline{1,3}).$$

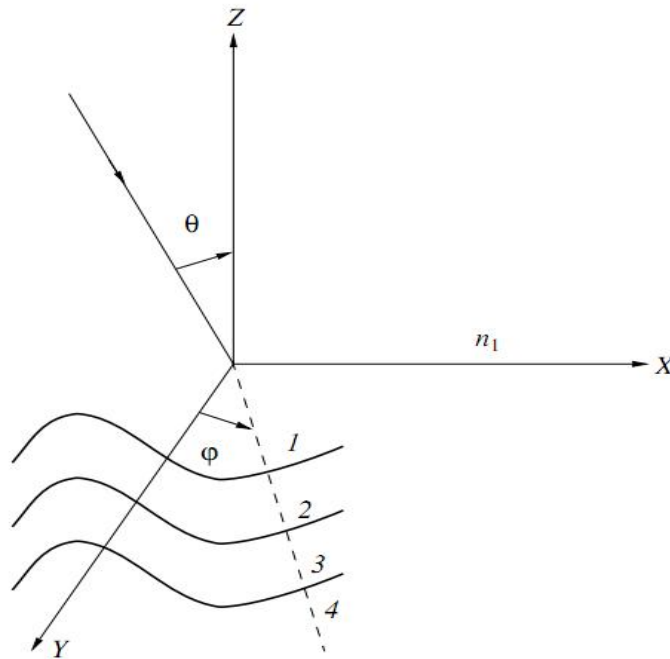


Рис. 2.12. Оптическая система, моделирующая биологическую среду, состоящую из эпидермиса (1), верхнего слоя дермы (2), сосуда крови (3) и нижнего слоя дермы (4)

Пусть на слой падает под углом  $\theta$  плоская  $s$ - или  $p$ -поляризованная волна

$$E_{\text{inc}} = \exp(ik_{1x}x + ik_{1y}y - ik_{1z}z),$$

где  $k_{1x} = kn_1 \sin(\theta) \sin(\varphi)$ ,  $k_{1y} = kn_1 \sin(\theta) \cos(\varphi)$ ,  $k_{1z} = kn_1 \cos(\theta)$ . Требуется найти отраженное поле. Запишем уравнения Максвелла для среды  $j$ -м слоем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega\mu_0\mu_j \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Тогда электромагнитное поле  $(E, H)$  в среде с  $j$ -м слоем будет удовлетворять следующему волновому уравнению:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 n_j^2 \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} + k^2 n_j^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2.147)$$

где  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $n_j$  – комплексный показатель преломления в  $j$ -м слое ( $j = \overline{1, 5}$ ),  $n_j = n_j^0 + i\chi_j$ .

Введем в рассмотрение сжатые координаты

$$\xi_1 = \varepsilon x, \quad \xi_2 = \varepsilon y, \quad \xi_3 = \varepsilon z. \quad (2.148)$$

Будем считать, что толщины слоев  $H_1, H_2, H_3$  являются медленно меняющимися функциями переменных  $x$  и  $y$ . Обозначим отношение характерной толщины слоя к характерному продольному масштабу  $L$  через  $\varepsilon$  [Л.А. Молотков], тогда получим

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= h_1(\xi_1, \xi_2) \Big|_{\xi_1 = \varepsilon x, \xi_2 = \varepsilon y}, \\ H_2(x, y) &= h_2(\xi_1, \xi_2) \Big|_{\xi_1 = \varepsilon x, \xi_2 = \varepsilon y}, \\ H_3(x, y) &= h_3(\xi_1, \xi_2) \Big|_{\xi_1 = \varepsilon x, \xi_2 = \varepsilon y}. \end{aligned}$$

Условия непрерывности касательных компонент  $E$  и  $H$  на границах раздела сред приводит к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} E_1 \Big|_{\xi_3=0} &= E_2 \Big|_{\xi_3=0}, \\ E_2 \Big|_{\xi_3 = \varepsilon h_1(\xi_1, \xi_2)} &= E_3 \Big|_{\xi_3 = \varepsilon h_1(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} E_3 \Big|_{\xi_3 = \varepsilon h_2(\xi_1, \xi_2)} &= E_4 \Big|_{\xi_3 = \varepsilon h_2(\xi_1, \xi_2)}, \\ E_4 \Big|_{\xi_3 = \varepsilon h_3(\xi_1, \xi_2)} &= E_5 \Big|_{\xi_3 = \varepsilon h_3(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \frac{\partial E_1}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0} = \frac{1}{n_2^2} \frac{\partial E_2}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0}, \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_2 \Big|_{\xi_3=\epsilon h_1(\xi_1, \xi_2)} = \\ & = \frac{1}{n_3^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_3 \Big|_{\xi_3=\epsilon h_1(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_3^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_3 \Big|_{\xi_3=\epsilon h_2(\xi_1, \xi_2)} = \\ & = \frac{1}{n_4^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_4 \Big|_{\xi_3=\epsilon h_2(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_4^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_4 \Big|_{\xi_3=\epsilon h_3(\xi_1, \xi_2)} = \\ & = \frac{1}{n_5^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon x \frac{\partial h_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon y \frac{\partial h_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_5 \Big|_{\xi_3=\epsilon h_3(\xi_1, \xi_2)}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Окончательные формулы для  $s$ -поляризованной волны отличаются от формул для  $p$ -поляризации тем, что на месте  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  будут стоять единицы. Поэтому достаточно рассмотреть случай  $p$ -поляризации. Поскольку  $H_1, H_2, H_3$  медленно зависит от  $x, y$ , то естественно искать отраженное поле в виде волн с медленно меняющимися амплитудами и быстро осциллирующими фазами.

$$E_1 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{inc}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) A(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} E_2 = & \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \\ & + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned}
E_3 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\tau_{3\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)C^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \\
+ \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\tau_{4\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)C^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3),
\end{aligned} \tag{2.157}$$

$$\begin{aligned}
E_4 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\tau_{4\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)D^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \\
+ \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\tau_{5\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)D^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3),
\end{aligned} \tag{2.158}$$

$$E_5 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\tau_{5\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right)D(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{2.159}$$

где  $A, B^+, B^-, C^+, C^-, D$  – амплитуды;  $\tau_{1\text{ref}}, \tau_{2\text{elap}}, \tau_{3\text{ref}}, \tau_{3\text{elap}}, \tau_{4\text{ref}}, \tau_{5\text{ref}}, \tau_{5\text{elap}}$  – неизвестные функции своих аргументов. Подставим поля  $E_1, E_2, E_3, E_4$  в уравнение (2.147). В результате получим уравнения для амплитуд и эйкноналов.

$$\epsilon^2 \Delta A + i \in (2\nabla A \nabla \tau_{1\text{ref}} + A \Delta \tau_{1\text{ref}}) + A(k^2 n_2^2 - \nabla \tau_{1\text{ref}}) = 0, \tag{2.160}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \Delta B^+ + i \in (2\nabla B^+ \nabla \tau_{2\text{elap}} + B^+ \Delta \tau_{2\text{elap}}) + B^+(k^2 n_2^2 - \nabla \tau_{2\text{elap}}) + \\
+ \epsilon^2 \Delta B^- + i \in (2\nabla B^- \nabla \tau_{3\text{ref}} + B^- \Delta \tau_{3\text{ref}}) + B^-(k^2 n_3^2 - \nabla \tau_{3\text{ref}}),
\end{aligned} \tag{2.161}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \Delta C^+ + i \in (2\nabla C^+ \nabla \tau_{3\text{elap}} + C^+ \Delta \tau_{3\text{elap}}) + C^+(k^2 n_3^2 - \nabla \tau_{3\text{elap}}) + \\
+ \epsilon^2 \Delta C^- + i \in (2\nabla C^- \nabla \tau_{4\text{ref}} + C^- \Delta \tau_{4\text{ref}}) + C^-(k^2 n_4^2 - \nabla \tau_{4\text{ref}}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.162}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \Delta D^+ + i \in (2\nabla D^+ \nabla \tau_{4\text{elap}} + D^+ \Delta \tau_{4\text{elap}}) + D^+(k^2 n_4^2 - \nabla \tau_{4\text{elap}}) + \\
+ \epsilon^2 \Delta D^- + i \in (2\nabla D^- \nabla \tau_{5\text{ref}} + D^- \Delta \tau_{5\text{ref}}) + D^-(k^2 n_5^2 - \nabla \tau_{5\text{ref}}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.163}$$

$$\epsilon^2 \Delta E + i \in (2\nabla E \nabla \tau_{5\text{elap}} + E \Delta \tau_{5\text{elap}}) + E(k^2 n_5^2 - \nabla \tau_{5\text{elap}}) = 0. \tag{2.164}$$

Амплитуды  $A, B^\pm, C^\pm, D$  ищем в виде рядов по степеням малого параметра  $\in x, \in y$ :

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j), \quad (2.165)$$

$$B(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j), \quad (2.166)$$

$$C(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{ij}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{ij}^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j), \quad (2.167)$$

$$D(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} D_{ij}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{ij}^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j), \quad (2.168)$$

$$E(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(\in x^i \in y^j). \quad (2.169)$$

Решая уравнения (2.160)–(2.164) с учетом (2.165)–(2.169) находим эйконалы для отраженных и прошедших полей и лучевые амплитуды  $A, B, C, D$  (в первом приближении)

$$\begin{aligned} \tau_{1\text{ref}} &= k_{2x}\xi_1 + k_{2y}\xi_2 + k_{2z}\xi_3, \\ k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 &= k^2 n_2^2, \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \tau_{2\text{elap}} &= k_{2x}\xi_1 + k_{2y}\xi_2 - k'_{2z}\xi_3, \\ k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k'_{2z}{}^2 &= k^2 n_2^2, \end{aligned} \quad (2.171)$$

$$k_{2x} = kn_2 \sin(\theta) \sin(\varphi), k_{2y} = kn_2 \sin(\theta) \cos(\varphi), k_{2z} = kn_1 \cos(\theta),$$

$$\begin{aligned} \tau_{3\text{ref}} &= k_{3x}\xi_1 + k_{3y}\xi_2 + k'_{3z}\xi_3, \\ k_{3x}^2 + k_{3y}^2 + k_{3z}'^2 &= k^2 n_3^2, \end{aligned} \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \tau_{3\text{elap}} &= k_{3x}\xi_1 + k_{3y}\xi_2 - k'_{3z}\xi_3, \\ k_{3x}^2 + k_{3y}^2 + k_{3z}'^2 &= k^2 n_3^2, \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$k_{3x} = kn_3 \sin(\theta) \sin(\varphi), k_{3y} = kn_3 \sin(\theta) \cos(\varphi), k_{3z} = kn_3 \cos(\theta),$$

$$\begin{aligned} \tau_{4\text{ref}} &= k_{4x}\xi_1 + k_{4y}\xi_2 + k'_{4z}\xi_3, \\ k_{4x}^2 + k_{4y}^2 + k_{4z}'^2 &= k^2 n_4^2, \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$\begin{aligned} \tau_{4\text{elap}} &= k_{4x}\xi_1 + k_{4y}\xi_2 - k'_{4z}\xi_3, \\ k_{4x}^2 + k_{4y}^2 + k_{4z}'^2 &= k^2 n_4^2, \end{aligned} \quad (2.175)$$

$$k_{4x} = kn_4 \sin(\theta) \sin(\varphi), k_{4y} = kn_4 \sin(\theta) \cos(\varphi), k_{4z} = kn_4 \cos(\theta),$$

$$\begin{aligned} \tau_{5\text{ref}} &= k_{5x}\xi_1 + k_{5y}\xi_2 + k'_{5z}\xi_3, \\ k_{5x}^2 + k_{5y}^2 + k_{5z}'^2 &= k^2 n_5^2, \end{aligned} \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} \tau_{5\text{elap}} &= k_{5x}\xi_1 + k_{5y}\xi_2 - k'_{5z}\xi_3, \\ k_{5x}^2 + k_{5y}^2 + k_{5z}'^2 &= k^2 n_5^2, \end{aligned} \quad (2.177)$$

$$k_{5x} = kn_5 \sin(\theta) \sin(\varphi), k_{5y} = kn_5 \sin(\theta) \cos(\varphi), k_{5z} = kn_5 \cos(\theta),$$

$$\begin{aligned} A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) &= A_{00}^{\wedge}(t_0) + \in x \left[ A_{10}^{\wedge}(t_0) + \xi_3 A_{0000}(t_0) \right] + \\ &+ \in y \left[ A_{01}^{\wedge}(t_0) + \xi_3 A_{0000}(t_0) \right] + \in x \in y \left[ A_{11}^{\wedge}(t_0) + \xi_3 A_{0000}(t_0) \right], \\ t_0 &= \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \frac{k_{2x} k_{2y}}{k_{2z}}, \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$A_{0000}(t_0) = -\frac{1}{2i} \frac{\partial^2 A_{00}^{\wedge}(t_0)}{\partial t_0^2} \frac{k^2 n_2^2}{k_{2z}^3}, \quad (2.179)$$



$$\begin{aligned}
B(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) &= B_{00}^{\wedge+}(t_1) + \in x \left[ B_{10}^{\wedge+}(t_1) + B_{0000}^+(t_1) \xi_3 \right] + \\
&+ \in y \left[ B_{01}^{\wedge+}(t_1) + B_{0000}^+(t_1) \xi_3 \right] + \in x \in y \left[ B_{11}^{\wedge+}(t_1) + B_{0000}^+(t_1) \xi_3 \right] - \\
&+ B_{00}^{\wedge-}(t_2) + \in x \left[ B_{10}^{\wedge-}(t_2) + B_{0000}^-(t_2) \xi_3 \right] + \in y \left[ B_{01}^{\wedge-}(t_2) + B_{0000}^-(t_2) \xi_3 \right] + \\
&\in x \in y \left[ B_{11}^{\wedge-}(t_2) + B_{0000}^-(t_2) \xi_3 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{0000}^+(t_1) &= \frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} B_{00}^{\wedge+}(t_1) \frac{k^2 n_2^2}{k_{2z}'^3}, \\
B_{0000}^-(t_2) &= -\frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} B_{00}^{\wedge-}(t_2) \frac{k^2 n_2^2}{k_{3z}'^3}, \\
t_1 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \frac{k_{2x} k_{2y}}{k_{2z}'}, \\
t_2 &= \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \frac{k_{3x} k_{3y}}{k_{3z}'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) &= C_{00}^{\wedge+}(t_3) + \in x \left[ C_{10}^{\wedge+}(t_3) + C_{0000}^+(t_3) \xi_3 \right] + \\
&+ \in y \left[ C_{01}^{\wedge+}(t_3) + C_{0000}^+(t_3) \xi_3 \right] + \in x \in y \left[ C_{11}^{\wedge+}(t_3) + C_{0000}^+(t_3) \xi_3 \right] + \\
&+ C_{00}^{\wedge-}(t_4) + \in x \left[ C_{10}^{\wedge-}(t_4) + C_{0000}^-(t_4) \xi_3 \right] + \in y \left[ C_{01}^{\wedge-}(t_4) + C_{0000}^-(t_4) \xi_3 \right] + \\
&\in x \in y \left[ C_{11}^{\wedge-}(t_4) + C_{0000}^-(t_4) \xi_3 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{0000}^+(t_3) &= \frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} C_{00}^{\wedge+}(t_3) \frac{k^2 n_2^2}{k_{3z}'^3}, \\
C_{0000}^-(t_4) &= -\frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t_4^2} C_{00}^{\wedge-}(t_4) \frac{k^2 n_2^2}{k_{4z}'^3}, \\
t_3 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \frac{k_{3x} k_{3y}}{k_{3z}'}, \\
t_4 &= \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \frac{k_{4x} k_{4y}}{k_{4z}'},
\end{aligned}$$

(2.180)

$$\begin{aligned}
D(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) &= D_{00}^{\wedge+}(t_5) + \in x \left[ D_{10}^{\wedge+}(t_5) + D_{0000}^+(t_5)\xi_3 \right] \\
&+ \in y \left[ D_{01}^{\wedge+}(t_5) + D_{0000}^+(t_5)\xi_3 \right] + \in x \in y \left[ D_{11}^{\wedge+}(t_5) + D_{0000}^+(t_5)\xi_3 \right] \\
&+ D_{00}^{\wedge-}(t_6) + \in x \left[ D_{10}^{\wedge-}(t_6) + D_{0000}^-(t_6)\xi_3 \right] + \in y \left[ D_{01}^{\wedge-}(t_6) + D_{0000}^-(t_6) \right. \\
&\quad \left. \in x \in y \left[ D_{11}^{\wedge-}(t_6) + D_{0000}^-(t_6)\xi_3 \right] \right], \\
D_{0000}^+(t_5) &= \frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t_5^2} D_{00}^{\wedge+}(t_5) \frac{k^2 n_2^2}{k_{4z}^3}, \\
D_{0000}^-(t_6) &= -\frac{1}{2i} \frac{\partial^2}{\partial t_6^2} D_{00}^{\wedge-}(t_6) \frac{k^2 n_2^2}{k_{5z}^3}, \\
t_5 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \frac{k_{4x} k_{4y}}{k_{4z}'}, \\
t_6 &= \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \frac{k_{5x} k_{5y}}{k_{5z}'},
\end{aligned} \tag{2.181}$$

$$\begin{aligned}
E(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in x, \in y) &= E_{00}^{\wedge+}(t_7) + \in x \left[ E_{10}^{\wedge+}(t_7) + \xi_3 E_{0000}(t_7) \right] + \\
&+ \in y \left[ E_{01}^{\wedge+}(t_7) + \xi_3 E_{0000}(t_7) \right] + \in x \in y \left[ E_{11}^{\wedge+}(t_7) + \xi_3 E_{0000}(t_7) \right], \\
E_{0000}(t_7) &= -\frac{1}{2i} \frac{\partial^2 E_{00}^{\wedge+}(t_7)}{\partial t_7^2} \frac{k^2 n_2^2}{k_{5z}^3}, \\
t_7 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \frac{k_{5x} k_{5y}}{k_{5z}'}.
\end{aligned} \tag{2.182}$$

Подстановка (2.155)–(2.159) с учетом (2.170)–(2.176) и (2.178)–(2.182) в (2.149)–(2.153) порождает рекуррентную систему уравнений для последовательного определения членов ряда (2.165)–(2.169). Из этой системы в главном приближении для отраженного поля получается коэффициент отражения  $A_{00}^{\wedge}$ .

Перейдем теперь к выводу отражательных формул для гауссова пучка. Задача решается путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном сечении.

**2.19. ОТРАЖЕНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА  
ОТ СЛОЯ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЛЩИНОЙ**

Пусть на слой под углом  $\theta$  падает гауссов пучок с произвольным поперечным распределением поля. Свяжем с направлением падения пучка систему координат  $(x', y', z')$ . Отраженное поле будем искать в системе координат  $(x'', y'', z'')$ . Пусть на прямой  $z' = 0$  падающее поле имеет вид

$$E_{\text{inc}} \Big|_{z'=0} = \Phi(\xi'_1, \xi'_2) \Big|_{\xi'_1 = \epsilon x', \xi'_2 = \epsilon y'}.$$

Запишем тождество

$$\begin{aligned} \Phi(\xi'_1, \xi'_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ ik_{1x}^{\wedge} \xi'_1 + ik_{1y}^{\wedge} \xi'_2 \right] dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ -ik_{1x}^{\wedge} \xi'_1 - ik_{1y}^{\wedge} \xi'_2 \right] \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge}) d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge}. \end{aligned}$$

Тогда падающее поле можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\text{inc}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \times \\ &\times \exp\left[ iz' \sqrt{k^2 n_1^2 - \epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge} - \epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}} + ik_{1x}^{\wedge} \xi'_2 + \right. \\ &\left. + ik_{1y}^{\wedge} \xi'_2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge} \exp\left[ -ik_{1x}^{\wedge} \xi_1^{\wedge} - ik_{1y}^{\wedge} \xi_2^{\wedge} \right] \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge}). \end{aligned}$$

Разложим показатель экспоненты по малому параметру. В результате поле примет вид

$$\begin{aligned} E_{\text{inc}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \times \\ &\times \exp\left[ iz' \left( 1 - \frac{0.5 \epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}{n_1^2 k^2} - \frac{0.5 \epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge}}{n_1^2 k^2} - \frac{\epsilon^2 x^2 \epsilon^2 y^2 k_{1x}^{2\wedge} k_{1y}^{2\wedge}}{4n_1^4 k^4} \right) \right] \times \\ &\times \exp\left[ ik_{1x}^{\wedge} \epsilon x' + ik_{1y}^{\wedge} \epsilon y' \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge} \exp\left[ -ik_{1x}^{\wedge} \xi_1^{\wedge} - ik_{1y}^{\wedge} \xi_2^{\wedge} \right] \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge}). \end{aligned}$$

Если  $|k_{1x}^\wedge| \ll k$ ,  $|k_{1y}^\wedge| \ll k$ , то в этом случае выражение в экспоненте  $\sqrt{k^2 n_1^2 - \epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge} - \epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}$  можно разложить в ряд, сохранив лишь квадратные по  $k_{1x}, k_{1y}$  члены. Тогда

$$E_{\text{inc}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^\wedge dk_{1y}^\wedge \times \\ \times \exp \left[ -iz' \left( 1 - \frac{0.5 \epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}{n_1^2 k^2} - \frac{0.5 \epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge}}{n_1^2 k^2} \right) + ik_{1x}^\wedge \in x' + ik_{1y}^\wedge \in y' \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^\wedge d\xi_2^\wedge \exp \left[ -ik_{1x}^\wedge \xi_1^\wedge - ik_{1y}^\wedge \xi_2^\wedge \right] \Phi(\xi_1^\wedge, \xi_2^\wedge).$$

Установим связь между координатами  $(x', y', z')$  и  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} kn_1 x' &= k_{11}x + k_{12}y + k_{13}z, \\ kn_1 y' &= k_{21}x + k_{22}y + k_{23}z, \\ kn_1 z' &= k_{31}x + k_{32}y + k_{33}z, \end{aligned} \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= kn_1 a_{11}, \quad k_{12} = kn_1 a_{12}, \quad k_{13} = kn_1 a_{13}, \\ k_{21} &= kn_1 a_{21}, \quad k_{22} = kn_1 a_{22}, \quad k_{23} = kn_1 a_{23}, \\ k_{31} &= kn_1 a_{31}, \quad k_{32} = kn_1 a_{32}, \quad k_{33} = kn_1 a_{33}, \end{aligned} \quad (2.184)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\phi) \cos \psi - \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi), \\ a_{12} &= -\sin(\phi) \cos \psi - \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\psi), \end{aligned} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \sin(\theta) \sin(\psi), \\ a_{21} &= \cos(\phi) \sin(\psi) + \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi), \end{aligned} \quad (2.186)$$

$$a_{22} = -\sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\psi), \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= -\sin(\theta) \cos(\psi), \quad a_{31} = \sin(\phi) \sin(\theta), \\ a_{32} &= \cos(\phi) \sin(\theta), \quad a_{33} = \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.188)$$

Запишем падающее поле в системе координат  $(x, y, z)$ :

$$E_{\text{inc}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \exp\left[i(xk_{1x} + yk_{1y} - zk_{1z})\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge} \exp\left[-ik_{1x}^{\wedge}\xi_1^{\wedge} - ik_{1y}^{\wedge}\xi_2^{\wedge}\right] \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge}),$$

$$k_{1x} = - \left[ k_{31} \left( 1 - 0.5 \frac{\epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} - 0.5 \frac{\epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} \right) + \epsilon \frac{k_{1x}^{\wedge}}{kn_1} k_{11} - \epsilon \frac{k_{1y}^{\wedge}}{kn_1} k_{21} \right], \quad (2.189)$$

$$k_{1y} = - \left[ k_{32} \left( 1 - 0.5 \frac{\epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} - 0.5 \frac{\epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} \right) + \epsilon \frac{k_{1x}^{\wedge}}{kn_1} k_{12} - \epsilon \frac{k_{1y}^{\wedge}}{kn_1} k_{22} \right], \quad (2.190)$$

$$k_{1z} = k_{33} \left[ \left( 1 - 0.5 \frac{\epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} - 0.5 \frac{\epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} \right) + \epsilon \frac{k_{1x}^{\wedge}}{kn_1} k_{13} - \epsilon \frac{k_{1y}^{\wedge}}{kn_1} k_{23} \right]. \quad (2.191)$$

## 2.20. ЗАПИСЬ ОТРАЖЕННОГО ПОЛЯ

Каждая спектральная составляющая  $\exp\left[ixk_{1x} + iyk_{1y} - izk_{1z}\right]$  порождает после отражения волну  $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, k_{1x}, k_{1y}) \exp\left[ixk_{1x} + iyk_{1y} + izk_{1z}\right]$ , где  $A$  – амплитуда, которая определяется формулой (2.178), а  $k_{1x}, k_{1y}, k_{1z}$  – формулами (2.189)–(2.191). Отраженное поле запишем следующим образом:

$$E_{\text{ref}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \exp\left[ixk_{1x} + iyk_{1y} + izk_{1z}\right] \times \\ \times A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, k_{1x}, k_{1y}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge} \times \exp(-ik_{1x}^{\wedge}\xi_1^{\wedge} - ik_{1y}^{\wedge}\xi_2^{\wedge}) \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge}).$$

Перейдем в систему координат  $(x'', y'', z'')$ , связанную с отраженным полем:

$$\begin{aligned} kn_1 x &= k_{11} x'' + k_{21} y'' + k_{31} z'', \\ kn_1 y &= k_{12} x'' + k_{22} y'' + k_{32} z'', \\ kn_1 z &= k_{13} x'' + k_{23} y'' + k_{33} z'', \end{aligned}$$

где  $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{31}, k_{32}, k_{33}$  определяются соотношениями (2.183) и (2.184).

В этой системе координат отраженное поле имеет вид

$$\begin{aligned}
E_{\text{ref}} = & \exp(-ikz'') \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \times \\
& \times \exp \left[ -z'' i \left( -0.5 \frac{\epsilon^2 y^2 k_{1y}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} - 0.5 \frac{\epsilon^2 x^2 k_{1x}^{2\wedge}}{k^2 n_1^2} \right) \right] \times \\
& \times \exp \left[ ik_{1x}^{\wedge} \xi_1'' (a_{11}^2 + a_{22} a_{12} + a_{13}^2) + ik_{1y}^{\wedge} \xi_1'' (a_{21} a_{11} + a_{22}^2 + a_{23} a_{13}) + \right. \\
& \left. + ik_{1x}^{\wedge} \xi_2'' (a_{11} a_{21} + a_{22}^2 + a_{13} a_{23}) + ik_{1y}^{\wedge} \xi_2'' (a_{21}^2 + a_{12} a_{22} + a_{23}^2) \right] \times \\
& \times A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, k_{1x}, k_{1y}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge} \exp(-ik_{1x}^{\wedge} \xi_1^{\wedge} - ik_{1y}^{\wedge} \xi_2^{\wedge}) \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge}).
\end{aligned} \tag{2.192}$$

Для вычисления отраженного поля пучка необходимо переразложить амплитуду  $A$  по малому параметру, подставить в формулу для отраженного поля и провести интегрирование.

Запишем отраженное поле в сечении  $z'' = 0$  (в отраженной системе координат  $(x'', y'', z'')$ ), связанном с лучом:

$$\begin{aligned}
E_{\text{ref}} = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{1x}^{\wedge} dk_{1y}^{\wedge} \times \\
& \times \exp \left[ ik_{1x}^{\wedge} \xi_1'' (a_{11}^2 + a_{22} a_{12} + a_{13}^2) + ik_{1y}^{\wedge} \xi_1'' (a_{21} a_{11} + a_{22}^2 + a_{23} a_{13}) + \right. \\
& \left. + ik_{1x}^{\wedge} \xi_2'' (a_{11} a_{21} + a_{22}^2 + a_{13} a_{23}) + ik_{1y}^{\wedge} \xi_2'' (a_{21}^2 + a_{12} a_{22} + a_{23}^2) \right] \times \\
& \times A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, k_{1x}, k_{1y}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^{\wedge} d\xi_2^{\wedge} \exp(-ik_{1x}^{\wedge} \xi_1^{\wedge} - ik_{1y}^{\wedge} \xi_2^{\wedge}) \Phi(\xi_1^{\wedge}, \xi_2^{\wedge})
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Разложим  $A$  по малому параметру  $\epsilon$  при  $z'' = 0$ :

$$\begin{aligned}
& A \left( \xi_1'' \frac{k_x^1}{kn_1} + \xi_2'' \frac{k_y^2}{kn_1} - \left( \xi_1'' \frac{k_{13}}{kn_1} \frac{k_{1x}k_{1y}}{k_{1z}} + \xi_2'' \frac{k_{23}}{kn_1} \frac{k_{1x}k_{1y}}{k_{1z}} \right), k_{1y}, k_{1x} \right) = \\
& = A_{00}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) - \\
& - \in x \left[ A_{10}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] \\
& - \in y \left[ A_{01}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{23}}{kn_1} \xi_2'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] \\
& - \in x \in y \left[ A_{11}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{k_{23}}{kn_1} \xi_2'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] - \\
& \quad - \frac{\partial A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} \frac{(k_{1x}^{\wedge} k_{11} - k_{1y}^{\wedge} k_{21})}{kn_1} - \\
& \quad - \frac{\partial A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \frac{(k_{1x}^{\wedge} k_{12} - k_{1y}^{\wedge} k_{22})}{kn_1}. \tag{2.194}
\end{aligned}$$

Подставим (2.194) в (2.193) и проведем интегрирование. В результате получим отраженное поле на линии пучка  $z'' = 0$

$$\begin{aligned}
E_{\text{ref}} &= \frac{A_{00}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\alpha} - \\
& - \frac{\in x}{\alpha} \left[ A_{10}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') - \\
& - \frac{\in y}{\alpha} \left[ A_{01}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{23}}{kn_1} \xi_2'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') - \\
& - \frac{\in x \in y}{\alpha} \left[ A_{11}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{k_{23}}{kn_1} \xi_2'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi_1'', \xi_2'') - \\
& - \left[ \frac{\in x k_x^0 k_{23}}{ikn_1 \alpha} \left[ \frac{\partial A_{00}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} + \frac{\partial A_{00}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \right] \frac{\partial \Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\partial \xi_1''} \right].
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать отраженное поле в главном приближении

$$\begin{aligned}
 E_{\text{ref}} &= \frac{A_{00}^{\wedge}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})\Phi(\xi_1'', \xi_2'')}{\alpha}, \\
 k_x^0 &= k_{11} - k_{21}, & k_y^0 &= k_{12} - k_{22}, \\
 k_x^1 &= k_{11} + k_{12}, & k_y^1 &= k_{21} + k_{22}, \\
 \xi_1'' \sim &= \xi_1'' \left( \frac{k_x^1}{kn_1} - \frac{k_{13}k_{1x}k_{1y}}{k_{1z}kn_1} \right), \\
 \xi_2'' \sim &= \xi_2'' \left( \frac{k_y^1}{kn_1} - \frac{k_{23}k_{1x}k_{1y}}{k_{1z}kn_1} \right), \\
 \alpha &= (a_{11}^2 + a_{22}a_{12} + a_{13}^2)(a_{11}a_{21} + a_{22}^2 + a_{13}a_{23}) + \\
 &+ (a_{21}a_{11} + a_{22}^2 + a_{23}a_{13})(a_{21}^2 + a_{12}a_{22} + a_{23}^2)
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

Выражения  $k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$  определяются формулами (2.183)–(2.184), а  $a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{31}, a_{32}$  – формулами (2.185)–(2.188). Аналогично получаем отраженное поле для  $H$ .

## 2.21. РАСЧЕТ СКОРОСТИ КРОВОТОКА В КАПИЛЛЯРЕ

При вычислении скорости кровотока в капилляре рассмотрим преобразование Галилея. Для определенности будем считать, что кровеносный сосуд ориентирован вдоль оси  $Ox$ . Тогда

$$x = x' + v_x t, \quad y = y', \tag{2.196}$$

Подставим выражение (2.196) в (2.195) и разложим в ряд Тейлора по  $v_x$ , удерживая лишь линейные члены. Подстановка полученного выражения в (2.197) обеспечивает получение зависимости интенсивности от скорости кровотока в капилляре в момент времени  $t$ . Интенсивность излучения определяется как

$$\begin{aligned}
 I &= |E_{\perp}| + |E_{\parallel}|, \\
 E_{\perp} &= \cos(\theta)E_z + \sin(\theta)E_x, \\
 E_{\parallel} &= \sin(\theta)E_z - \cos(\theta)E_x,
 \end{aligned} \tag{2.197}$$



где  $E_x, E_z$  даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu_0\mu_j H_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu_0\mu_j H_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu_0\mu_j H_z,\end{aligned}\tag{2.198}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_z.\end{aligned}\tag{2.199}$$

Выражения (2.198)–(2.199) соответствуют системе уравнений Максвелла (2.146) в проекциях на оси декартовых координат.

Таким образом, на данном этапе мы получили формулы, позволяющие определить явную зависимость интенсивности лазерного излучения от коэффициентов преломления и поглощения для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы, от скорости кровотока в капиллярном русле в момент времени  $t$  и от системы координат. Дальнейшее исследование и анализ приведенных зависимостей будем проводить с помощью численных методов.

## 2.22. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ С МОДЕЛЬНОЙ СРЕДОЙ. ВЫВОДЫ

Рассмотрим модельную среду, изображенную на рис. 2.12, она имеет следующие параметры [В.В. Гучин]:

коэффициенты преломления слоев

$$n_2^0 = 1,5, \quad n_3^0 = 1,4, \quad n_4^0 = 1,35, \quad n_5^0 = 1,4;$$

характерные толщины слоев

$$\begin{aligned}d_2 &= 65 \times 10^{-6} \text{ м}, \quad d_3 = 565 \times 10^{-6} \text{ м}, \quad d_4 = 90 \times 10^{-6} \text{ м}, \quad n_1^0 = 1, \\ \chi_1 &= 0, \quad \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = \chi_5 = 10^{-5}, \quad a_1 = -0,0024, \quad b_1 = 0,02, \quad a_2 = 0,021, \quad a_3 = 0,021, \\ a_4 &= 0,041, \quad b_2 = 0,03, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 10^{-2},\end{aligned}$$

длину волны  $\lambda = 0,63$  мкм (центр линии гелий-неонового лазера).

На рис. 2.13а и 2.13б показана зависимость интенсивности излучения от системы координат для многослойной поглощающей и рассеивающей свет среды, моделирующей кожу человека при различных коэффициентах преломления крови. Следует отметить, что по сравнению с параметром (коэффициент преломления крови), приведенным в работе [В.В. Тучин], наши исследования показывают, что построенная модель достаточно устойчива и чувствительна к изменению этого параметра вплоть до 5-го десятичного знака, что делает возможным более точную диагностику различных патологических процессов, связанных с изменением электрофизических свойств крови.

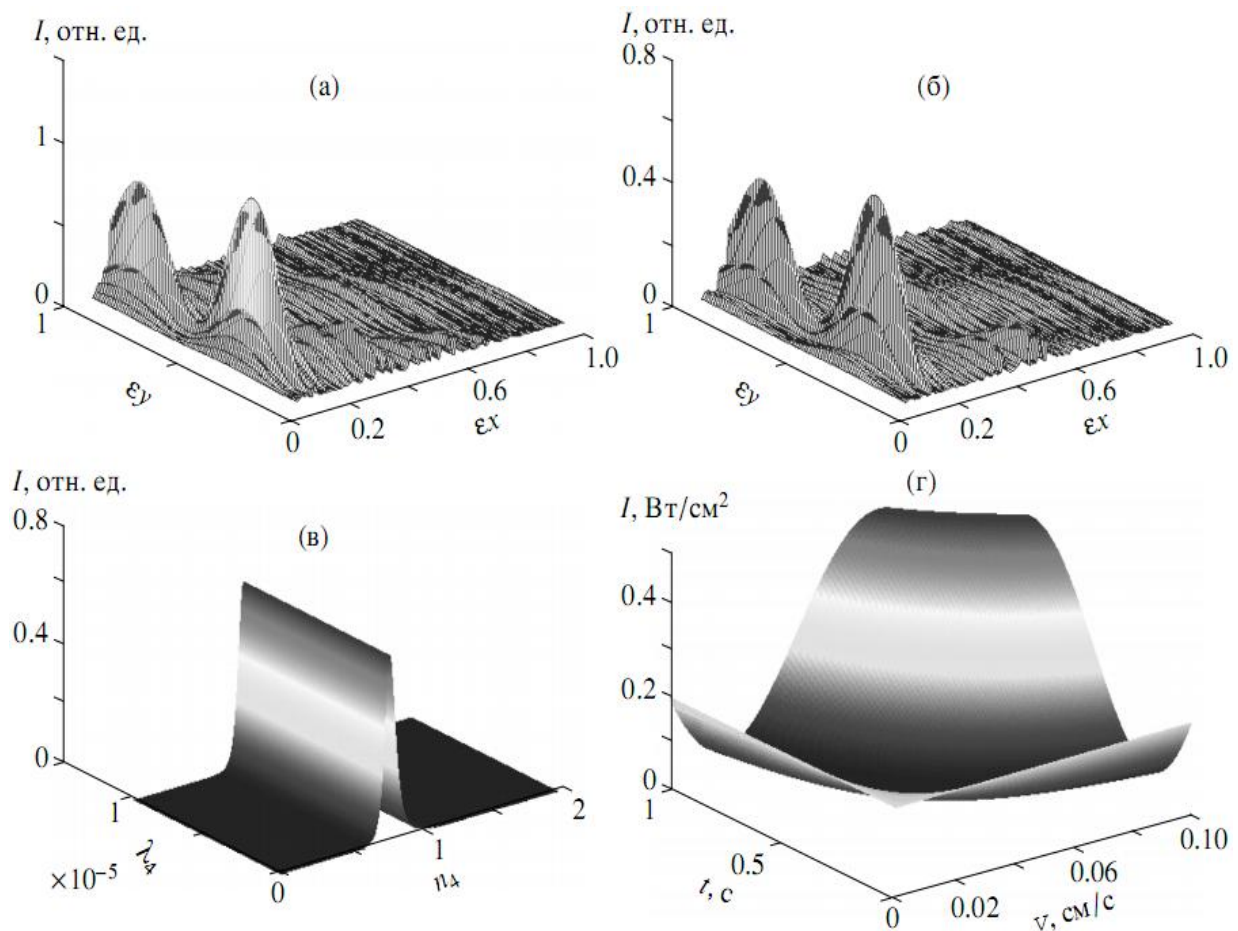


Рис. 2.13. Зависимости интенсивности излучения He-Ne-лазера в окрестности линии 0,63 мкм от системы координат при  $\theta = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,  $\chi_4 = 10^{-5}$  (коэффициент поглощения крови) и различных коэффициентах преломления крови  $n_4 = 1,35$  (а) и  $1,35003$  (б); от коэффициентов преломления и поглощения крови (в); от скорости кровотока в капиллярном русле в момент времени  $t$  в окрестности точки  $x' = 0,0001$

Зависимость интенсивности лазерного излучения от коэффициента преломления и поглощения для системы кровеносных сосудов, находящихся в верхнем слое дермы, представлена на рис. 2.13в.

На рис. 2.13г представлена зависимость интенсивности лазерного излучения от скорости кровотока в капилляре в момент времени  $t$  в окрестности некоторой точки  $x', y'$ . Приведенные количественные оценки позволяют определять изменение скорости кровотока в капиллярном русле в зависимости от оптических свойств крови, что делает возможным изучение физиологических процессов, происходящих в коже.

Приведенные зависимости могут быть использованы для предсказаний изменений оптических свойств крови и скорости кровотока в капиллярном русле, обусловленных в ней различными биофизическими, биохимическими и физиологическими процессами. Аналогичные зависимости могут быть рассчитаны для лазеров с другими параметрами. Полученные количественные оценки могут быть применены для обработки и интерпретации экспериментальных данных.

### **2.23. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОРГАНИЧЕСКИЕ СРЕДЫ**

В этом параграфе будет построена математическая модель расчета гипертермии многослойной биологической структуры под действием лазерного излучения [К.Г. Куликов].

Отметим, что существует ряд работ, в которых рассматривались вопросы математического моделирования распределения лазерного излучения в многослойной биоткани, а также сопровождающих облучение термических процессов. Большинство исследований посвящено расчету температурных полей, возникающих при облучении биоматериала низкоинтенсивным лазерным излучением в различные моменты времени [Ю.Н. Щербаков, А.Н. Якунин, И.В. Ярославский, В.В. Тучин]. Так, например, для нахождения распределения поглощенной энергии по глубине тканей применялись различные численные процедуры, включая метод дискретных координат [M. Motamedi, S. Rastegar, G.L. le Carpentier, A.J. Welch], конечно-разностные схемы [Ю.Н. Щербаков Ю.Н.], метод функции Грина [М.К. Loze, С.Д. Wright] и метод Монте-Карло [И.В. Меглинский]. Последний метод эффективен при сложной геометрии моделируемого биообразца.

Однако анализ термического эффекта лазерного облучения не может быть чисто физическим и должен включать биологические (биофизические) исследования ответной реакции организма. Таким образом, проблема

теплового воздействия лазерного излучения может быть представлена как состоящая из четырех последовательно решаемых задач [С.Д. Плетнев]:

- 1) описание распределения энергии лазерного излучения;
- 2) получение абсорбционных характеристик биологического материала;
- 3) анализ распределения температуры в облученной ткани;
- 4) исследование биологических (биохимических, физиологических) изменений в тканях, развивающихся в результате повышения температуры.

В данном разделе построена математическая модель, которая позволяет варьировать электрофизические параметры исследуемой биологической структуры (реальная и мнимая часть показателя преломления крови и ее форменных элементов, эпидермиса, верхнего слоя дермы, нижнего слоя дермы), характерные размеры форменных элементов крови и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами крови с учетом нагрева биоткани при воздействии лазерного излучения. Это позволяет проанализировать распределение температуры в зависимости от электрофизических характеристик моделируемой биологической структуры для случая *in vivo*.

**Замечание.** В отличие от математической модели, рассмотренной в предыдущем разделе настоящего пособия выражение

$$E_4 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4\text{elap}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{5\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + E_{4s\theta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

отражает условие включения в поле  $E_4$  рассеяния на неоднородностях (несферических частицах, моделирующих клетки крови), а именно:  $E_{4s\theta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  есть рассеянное поле на  $j$ -частице. Покомпонентная запись рассеянного поля имеет вид

$$\mathbf{E}_{4s\theta} \sim \frac{e^{ikz}}{k'_{4z} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [-ia_{mn} \xi'_n \tau_{mn} - b_{mn} \xi_n \pi_{mn}] \exp im\varphi, \quad (2.200)$$

$$\mathbf{E}_{4s\theta} \sim \frac{e^{ikz}}{k'_{4z} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{mn} [-ib_{mn} \xi_n \tau_{mn} - a_{mn} \xi'_n \pi_{mn}] \exp im\varphi, \quad (2.201)$$

$$\tau_{mn} = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos \theta, \quad \pi_{mn} = \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos \theta.$$

При этом оптическая система состоит из четырех областей с различными показателями преломления (эпидермис, верхний слой дермы, кровь, состоящая из форменных элементов и компонентов и нижнего слоя дермы) (рис. 2.14)

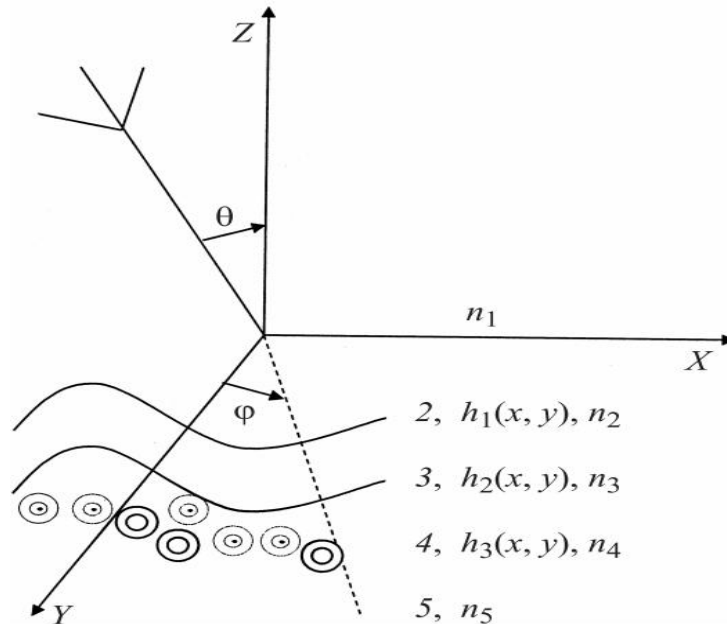


Рис. 2.14. Оптическая система, моделирующая биологическую среду

Рассмотрим математическую модель нагрева кровеносного сосуда под действием лазерного излучения, падающего на наружную поверхность кожи.

В математической модели используются размерные переменные. Рассматриваемая модель биоткани представляет собой многослойную полубесконечную биологическую среду. Лазерное излучение, падающее на поверхность кожи, поглощается слоями моделируемой биоткани (эпидермисом, дермой), а также гемоглобином крови, вызывая рост температуры в подкожных слоях и внутри сосудов. В общем случае моделирование тепловых процессов в биоткани требует решения трехмерного уравнения вида [Ю.Н. Щербаков и др.]

$$(c\rho)^{-1} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(x, y, z, t)) - Q(x, y, m_{\tau}^j, x_{\tau}^j) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.202)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $m_{\tau}^j = N_{\tau}^j / n_0$ ,  $N_{\tau}^j$  – комплексный показатель преломления  $j$ -частицы для  $\tau$  концентрического слоя,  $n_0$  – показатель преломления окружающей среды,  $x_{\tau}^j = ka_{\tau}^j$ ,  $j = \overline{1 \dots N}$ ,  $\tau = \overline{1, 3}$ , где  $a_{\tau}^j$  – радиус  $j$ -частицы с  $\tau$

концентрическим слоем,  $T(x, y, z, t)$  – искомое распределение температуры,  $Q(x, y, m_\tau^j, x_\tau^j)$  – найденное на этапе решения оптической задачи распределение объемной плотности мощности тепловых нагрузок в биоткани, обусловленных поглощением в биоткани. При этом  $Q(x, y, m_\tau^j, x_\tau^j)$  определяется следующим образом:

$$Q(x, y, m_\tau^j, x_\tau^j) = \mu \int_{4\pi} I(x, y, m_\tau^j, x_\tau^j) d\Omega, \quad (2.203)$$

где  $I(x, y, m_\tau^j, x_\tau^j)$  – интенсивность, которая определена выражением (2.197),  $\mu$  – коэффициент поглощения среды,  $d\Omega$  – телесный угол.

Взаимодействие наружной поверхности кожи с окружающей средой (конвекция) в линеаризованном виде может быть описано граничными условиями третьего рода [Ю.Н. Щербаков и др.]:

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - A(T - T_0) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.204)$$

где  $A$  – приведенный коэффициент теплоотдачи,  $T_0$  – начальная температура

$$T|_{t=0, z=0} = 34^\circ, \quad T|_{t=0, z=h_1(x, y)} = 37^\circ. \quad (2.205)$$

Выражение (2.205) означает, что температура изменяется по глубине от 34 до 37° [А.Ю. Сетейкин].

На границе  $z = h_i(x, y)$  сопряжения  $i$ -го слоя с  $(i + 1)$ -м слоем кожи выполняются условия непрерывности теплового потока и температуры

$$\left( \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} - \lambda_{(i+1)} \frac{\partial T_{(i+1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_i(x, y)} = 0, \quad (2.206)$$

$$(T_i - T_{(i+1)}) \Big|_{z=h_i(x, y)} = 0. \quad (2.207)$$

В результате решения системы уравнений (2.202)–(2.207) получим:

а) распределение температуры по слоям вдоль направления распространения лазерного излучения (ось  $z$ );

б) зависимость температуры от оптических характеристик биоткани, что позволит исследовать влияние температурного поля на электрофизиче-

ские параметры моделируемой биологической структуры для случая *in vivo*.

Известно, что решение задачи (2.201) существует и единственно [О.А. Ладыженская].

Дальнейшее исследование и анализ приведенных зависимостей будем проводить численными методами. Для численного решения системы уравнений (2.202)–(2.207) строится неявная итерационная схема на пространственно-временной сетке, а граничные условия для температуры заменяются их конечно-разностными аналогами.

Рассмотрим модельную среду, изображенную на рис. 2.14, она имеет следующие параметры [В.В. Тучин]: характерная толщина слоев  $d_2 = 65 \times 10^{-6}$  м,  $d_3 = 565 \times 10^{-6}$  м,  $d_4 = 90 \cdot 10^{-6}$  м, коэффициент теплопроводности Вт/(м·К), удельная теплоемкость Дж/(кг·К), плотность  $\times 10^{-3}$  (кг/м<sup>3</sup>) соответственно составила [1]: для первого слоя – 0,498; 3,2; 1; для второго слоя – 0,266; 3,3.7; 1,6; для третьего слоя – 0,530; 3,6; 1; для четвертого слоя – 0,266; 3,7; 1,6; коэффициент теплоотдачи  $0.009 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$ . Произвольно задаваемые константы  $a_1 = -0,0024$ ,  $b_1 = 0,02$ ,  $a_2 = 0,021$ ,  $b_2 = 0,030$ ,  $a_3 = 0,041$ ,  $b_3 = 0,051$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = 10^{-2}$ . Значения параметров  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, c_1, c_2, c_3$  подобраны для границы раздела каждого слоя таким образом, чтобы форма поверхности наиболее соответствовала форме границы раздела соответствующего слоя в структуре нормальной кожи человека, длина волны  $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$  (центр линии гелий-неонового лазера). Расчеты проводились для двухслойных частиц, моделирующих эритроциты. Количество частиц в моделируемом слое принималось равным десяти. При этом эритроциты моделировались овалом Кассини.

На рис. 2.15а и 2.15б представлено распределение температуры, зависящей от времени нагрева, в направлении падающего излучения (ось  $z$ ) для многослойной поглощающей и рассеивающей свет среды, моделирующей кожу человека и ее компоненты при различных коэффициентах преломления. При этом для рисунка 2.15а считаем, что в начальный момент времени  $t = 0$  температура среды равна  $34^\circ\text{C}$ . Время воздействия лазера 15 с. Параметры среды: действительное значение коэффициента преломления цитоплазмы биологической частицы 1,35, мнимое значение коэффициента преломления цитоплазмы биологической частицы 0,0001, действительное значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 1,23, мнимое значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 0,0001, ради-

ус цитоплазмы биологической частицы 3 мкм, радиус плазматической мембраны биологической частицы 2 мкм. Соответственно для рисунка 2.15б считаем, что в начальный момент времени  $t = 0$  температура среды равна  $34^{\circ}\text{C}$ . Время воздействия лазера 15 с. Параметры среды: действительное значение коэффициента преломления цитоплазмы биологической частицы 1,45, мнимое значение коэффициента преломления цитоплазмы биологической частицы 0,0001, действительное значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 1,43, мнимое значение коэффициента преломления плазматической мембраны биологической частицы 0,0001, радиус цитоплазмы биологической частицы 3 мкм, радиус плазматической мембраны биологической частицы 2,3 мкм.

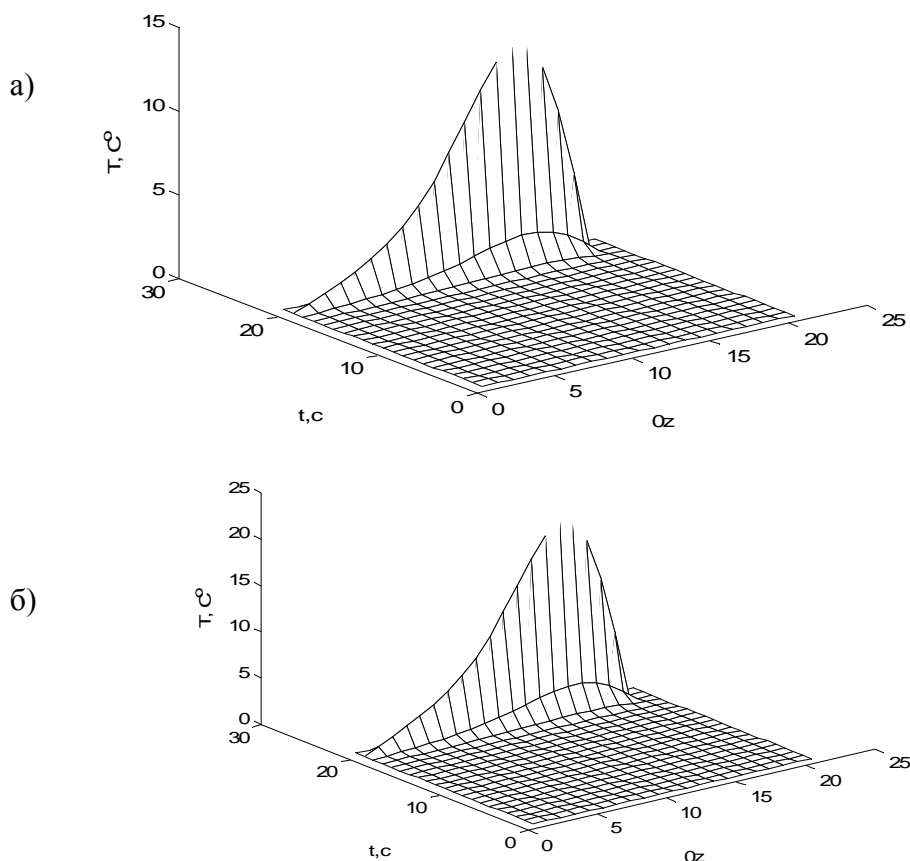


Рис. 2.15. Пространственное распределение температуры в направлении падающего излучения в момент времени  $t$  в окрестности линии 0,63 мкм гелий-неонового лазера



Из рис. 2.15 видно, что верхний слой моделируемой биоткани (эпидермис) заметно нагревается. Это связано, видимо, с тем, что в поверхностном слое свет при заданной длине волны сильно поглощается в основном меланином.

Также можно сделать вывод, что уже на десятой секунде непрерывного воздействия лазера температура на поверхности превышает приблизительно  $45^{\circ}\text{C}$  (рис. 2.15б), и, возможно, наступает некроз тканей или термический ожог. Таким образом, модель позволяет оценить термическое действие на биоткань и выбрать оптимальное время воздействия, чтобы происходило равномерное и длительное нагревание ткани путем исключения негативных реакций, и определить ожидаемые границы зон деструкции и некротизации тканей.

Следует отметить, что построенная математическая модель достаточно устойчива и чувствительна к изменению коэффициентов преломления моделируемой биоткани и ее компонентов при воздействии на нее потока неполяризованного монохроматического излучения.

Интересно отметить эффект, который был получен в результате модельного эксперимента, состоящий в выявлении линейной зависимости между распределением температурного поля падающего излучения от коэффициентов преломления для моделируемой биоткани, что позволяет использовать построенную модель для предсказания изменений электрофизических свойств моделируемой биоструктуры при воздействии на нее лазерного излучения для случая *in vivo*.

Таким образом, модель позволяет варьировать на одной установке состав биологических объектов, их электрофизические параметры, теплофизические характеристики, характерную толщину слоев, а также характерные размеры исследуемой биологической структуры различного строения с целью анализа биофизических процессов, связанных с термическим воздействием лазера на верхние слои кожи.

Моделирование такого рода позволяет не только находить предварительные параметры поля лазерного излучения, но и выявлять и изучать эффекты ответных реакций на лазерное воздействие при различных уровнях организации живой материи.

В целом результаты моделирования тепловых полей лазерного излучения могут быть использованы для обработки методов лазерной термотерапии и биостимуляции, могут служить основой математического обеспечения экспериментального определения оптических и теплофизических параметров.

### ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИКЕ БИОТКАНЕЙ

Наиболее фундаментальный классический способ описания распространения света в диэлектрической среде обеспечивается теорией Максвелла. В этом случае среда характеризуется распределением комплексной диэлектрической постоянной  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  – положение точки внутри среды. Большинство естественных сред, включая биоткани, являются случайными средами. Это означает, что функция  $\varepsilon(\mathbf{r})$  является не детерминированной, а стохастической. Рассмотрение режима многократного рассеяния в реальных средах в рамках строгой теории является сложной, часто неразрешимой задачей. Поэтому используется ряд приближений, чтобы сделать решаемыми практически важные задачи.

Продуктивным и широко признанным подходом является теория переноса. Вместо того чтобы иметь дело непосредственно с электромагнитным полем, эта теория оперирует лучевой интенсивностью  $I(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ , которая представляет собой световую энергию, протекающую за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению  $\mathbf{s}$ , в пространственной точке  $\mathbf{r}$ . Лучевая интенсивность может быть отождествлена с должным образом «структурной» модификацией функции распределения Вигнера, которая описывает когерентность первого порядка электромагнитного поля [J. Sajeev, P. Gendi, Y. Yumin]. Это обстоятельство позволяет связать теорию переноса со строгой электромагнитной теорией. Теория переноса пренебрегает эффектами пространственной когерентности на больших расстояниях. В результате этого в теории переноса теряются различия между излучением лазера и теплового источника. Существуют экспериментальные подтверждения того, что для большинства интересных явлений различие между когерентным и некогерентным излучением стирается на расстоянии в несколько десятков длин свободного пробега фотона. Для мягких тканей в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах это составляет 1 мм и менее. Интересным исключением является эффект усиленного рассеяния назад. Нужно не забывать также и то, что сильно структурированные ткани, такие как мышцы, могут требовать специального рассмотрения. Хотя уравнение переноса может, в принципе, учитывать анизотропию мутной среды, расчеты при этом непомерно усложняются. В настоящей главе мы предполагаем, что среда изотропна. К счастью, большинство биотканей удовлетворяет этому требованию.

Основное уравнение теории переноса может быть выведено из исходных принципов с помощью соответствующих упрощающих предположений. В общем случае результатом такого вывода является тензор луче-

вой интенсивности, отражающий поляризационные свойства света. Если пренебречь поляризационными эффектами, указанное уравнение сводится к скалярному уравнению относительно лучевой интенсивности  $I(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ .

Теория переноса, называемая также теорией переноса излучения, берет свое начало с работы Шустера 1903 г. [А. Исимару] Теория оперирует непосредственно переносом энергии в среде, содержащей частицы. Сама по себе она не включает дифракционных эффектов. Предполагается, что при суммировании полей отсутствует корреляция между ними так, что складываются интенсивности, а не сами поля. В теории переноса можно учесть поляризационные эффекты. Однако в большинстве случаев из соображений математического удобства поляризацией пренебрегают.

Классическая феноменологическая теория переноса излучения использует наглядные понятия лучевой оптики, дополненные статистическим предположением о полной взаимной некогерентности полей для лучей, имеющих разные направления. Это предположение позволяет суммировать средние интенсивности лучей, приходящих с различных направлений, игнорируя фазовые соотношения. Даже если эффекты дифракции и интерференции и учитываются при описании характеристик рассеяния и поглощения одиночной частицы, теория переноса сама по себе не включает дифракционных эффектов. Такая формулировка широко применяется в различных задачах атмосферной оптики, оптики фотографических слоев и биологической оптики. В классической теории переноса излучения, рассматривающей волновое поле как совокупность некогерентных лучевых пучков, основным понятием является лучевая интенсивность (или яркость)  $I(r, s)$ , которая определяет средний поток энергии  $dP$  через площадку  $da$ , сосредоточенный в телесном угле  $d\Omega$  вблизи направления  $s$  в интервале частот  $(\nu, \nu + d\nu)$ :

$$dP = I(r, s) \cos \theta da d\Omega d\nu. \quad (3.1)$$

Эта теория успешно применяется для решения различных прикладных задач оптики биотканей. Основное дифференциальное уравнение этой теории называется уравнением переноса и эквивалентно уравнению Больцмана, используемому в кинетической теории газов и в теории переноса нейтронов. Стационарное уравнение ТПИ для монохроматического света имеет вид [А. Исимару ]:

$$\frac{\partial I(\bar{r}, \bar{s})}{\partial \bar{s}} = -\mu_t I(\bar{r}, \bar{s}) + \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\bar{r}, \bar{s}') p(\bar{s}, \bar{s}') d\Omega', \quad (3.2)$$

где  $I(\bar{r}, \bar{s})$  – лучевая интенсивность в точке  $\bar{r}$  в направлении  $\bar{s}$ ,  $p(\bar{s}, \bar{s}')$  – так называемая фазовая функция рассеяния, определяющая угловое распределение интенсивности рассеяния на отдельной частице ансамбля,  $d\Omega'$  – единичный телесный угол в направлении  $\bar{s}'$ ,  $\mu_s$  является коэффициентом рассеяния,  $\mu_t = \mu_s + \mu_a$  – коэффициент полного взаимодействия,  $\mu_a$  – коэффициент поглощения, т. е. среднее число актов поглощения на единицу пройденного пути. В данном случае предполагается, что внутри среды источников излучения нет. Уравнение (3.2) определяет поведение лучевой интенсивности, оно выражает баланс энергии в бесконечно малом объеме среды: скорость изменения лучевой интенсивности вдоль луча определяется рассеянием в данном направлении  $s$  со всех других направлений  $\bar{s}$  (интегральный член) и ослаблением из-за рассеяния и поглощения (член  $-\mu_t I(r, s)$ ).

Уравнение (3.2) дополняется граничными условиями на поверхности  $\partial\Gamma$ :

$$I(\mathbf{r}, \bar{s})|_{(\bar{s}\mathbf{n}) < 0} = I_Q(\mathbf{r}, \bar{s}) + \Re I(\mathbf{r}, \bar{s})|_{(\bar{s}\mathbf{n}) > 0}, \mathbf{r} \in \partial\Gamma,$$

где  $I_Q(\mathbf{r}, \bar{s})$  – граничное распределение лучевой интенсивности, создаваемое внешними источниками;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Gamma$  в точке  $\mathbf{r}$ ;  $\Re$  – оператор отражения.

Фазовая функция  $p(\bar{s}, \bar{s}')$  описывает рассеивающие свойства среды и фактически является функцией плотности вероятности рассеяния в направлении  $\bar{s}'$  фотонов, двигавшихся в направлении  $\bar{s}$ ; т. е. эта функция характеризует элементарный акт рассеяния. Если рассеяние симметрично относительно направления падающей волны, то фазовая функция зависит только от угла  $\theta$  между направлениями  $\bar{s}$  и  $\bar{s}'$ . Индикатриса рассеяния  $p(\bar{s}, \bar{s}')$  может быть либо задана в виде таблицы, полученной путем измерений или расчетов, либо представлена аналитическим выражением. Во многих практических случаях фазовая функция хорошо аппроксимируется с помощью эмпирической функции Хени–Гринштейна:

$$p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}},$$

где  $g$  – фактор анизотропии рассеяния. Та часть лучевой интенсивности, которая при прохождении излучения через объем  $V$ , содержащий рассеи-

вающие частицы, уменьшается из-за рассеяния и поглощения, называется ослабленной падающей интенсивностью и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial I_{ri}(\bar{r}, \bar{s})}{\partial \bar{s}} = -\mu_t I_{ri}(\bar{r}, \bar{s}). \quad (3.3)$$

Другая часть, которая порождается в среде в результате рассеяния, называется диффузной интенсивностью. Поскольку полная интенсивность

$$I(\bar{r}, \bar{s}) = I_{ri}(\bar{r}, \bar{s}) + I_d(\bar{r}, \bar{s}) \quad (3.4)$$

удовлетворяет уравнению (3.2), диффузная интенсивность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial I_d(\bar{r}, \bar{s})}{\partial \bar{s}} = -\mu_t I_d(\bar{r}, \bar{s}) + \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{4\pi} I_d(\bar{r}, \bar{s}') p(\bar{s}, \bar{s}') d\Omega' + \varepsilon_{ri}(\mathbf{r}, \mathbf{s}), \quad (3.5)$$

где  $\varepsilon_{ri}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  – функция эквивалентного источника, порожденная ослабленной падающей интенсивностью. Выражение (3.3) совпадает с законом Бугера для рассеивающей среды. Это означает, что для ослабленной падающей интенсивности в рамках теории переноса закон Бугера справедлив для любых оптических толщин. Отклонения от закона Бугера, например явления просветления и затемнения, обусловленные плотной упаковкой, теорией переноса не учитываются.

При учете векторного характера электромагнитного поля лучевую интенсивность нужно заменить на матрицу, которая описывает не только интенсивность, но и поляризационные свойства излучения, причем  $\mu_t$  и  $\mu_s$  также становятся матричными величинами. Необходимо учитывать, в каком порядке входят матрицы в уравнения. Скалярное уравнение (3.2) используют в оптике для описания светового излучения в тех случаях, когда можно пренебречь поляризационными эффектами.

Решение интегро-дифференциального уравнения (3.2) для описания распространения света в рассеивающей среде является весьма трудоемким с вычислительной точки зрения. Существует большое количество методов его решения, однако ни один из них не может считаться достаточно универсальным и пригодным на все случаи жизни.

Возможны два подхода к рассматриваемой задаче. При одном из них исходят из интегро-дифференциального уравнения (3.2), получают общее решение с неизвестными коэффициентами, а затем с помощью соответст-

вующих граничных условий находят эти коэффициенты. В рамках данного подхода используются методы сферических гармоник,  $P_L$ -моментов, дискретных ординат. Другой подход состоит в переходе от дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями к интегральным уравнениям для некоторых неизвестных функций. В случае задач с простой геометрией широко используется подход на основе интегродифференциальных уравнений. Для задач с более сложной геометрией часто удобнее исходить из интегральных уравнений и получать их приближенные решения. Точные решения уравнения переноса и интегрального уравнения для лучевой интенсивности получены лишь для небольшого числа частных случаев. Примерами такого рода, для которых решения найдены и записываются в приемлемой для расчетов форме, являются плоскопараллельные задачи и задачи с изотропным рассеянием. В большинстве практических случаев возникает необходимость обратиться к приближенным решениям. Рассмотрим несколько приближений, часто используемых в оптике биосистем и имеющих прозрачный физический смысл.

### 3.1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

**Приближение первого порядка ТПИ.** В случае слабого рассеяния, когда рассеивающая среда является разреженной, а рассеивающий объем не слишком велик, решение УПИ можно получить итерационным путем. В первом приближении итерационное решение УПИ дает результат, известный под названием приближения первого порядка ТПИ [А.Исимару]. В этом приближении предполагается, что полная интенсивность, падающая на частицы, приближенно равна ослабленной падающей интенсивности, которая известна. Следовательно, решение в приближении первого порядка имеет вид [F.A. Duck]

$$I(\bar{r}, \bar{s}) = I_{ri}(\bar{r}, \bar{s}) + I_d(\bar{r}, \bar{s}), \quad (3.6)$$

$$I_d(\bar{r}, \bar{s}) = \int_0^s \exp[-(\tau - \tau_1)] \left[ \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\bar{s}, \bar{s}') I_{ri}(\bar{r}_1, \bar{s}') d\bar{\omega}' \right] d\bar{s}', \quad (3.7)$$

где  $I_{ri}$  – ослабленная падающая интенсивность,  $I_d$  – диффузная интенсивность,  $\tau, \tau_1$  – оптические пути,

$$\tau = \int_0^s \rho \sigma_t ds, \quad \tau_1 = \int_0^{s_1} \rho \sigma_t ds.$$

Так называемое решение в приближении первого порядка справедливо для оптически тонких и слабо рассеивающих сред ( $\tau < 1, \Lambda < 0,5$ ), когда интенсивность прошедшей волны (когерентной составляющей), описывается законом Бугера. В случае очень узкого падающего пучка (как, например, лазерный луч) приближение первого порядка справедливо и для более плотных тканей ( $\tau > 1, \Lambda < 0,9$ ), где  $\Lambda = \mu_s / \mu_t$  – альbedo однократного рассеяния;  $\mu_t = \mu_s + \mu_a$  – коэффициент полного взаимодействия.

**Диффузионное приближение.** Данное приближение предполагает, что диффузная интенсивность встречает много частиц и рассеивается на них почти равномерно во всех направлениях, поэтому его угловое распределение почти изотропно [Исимару А.]. Но угловая зависимость не может сводиться к константе, так как поток при этом обращается в нуль и распространение мощности отсутствует. Поэтому диффузная компонента интенсивности для направления полного потока должна быть немного больше, чем для обратного направления.

Согласно [М.Н. Niemi], диффузная компонента освещенности может быть представлена в виде сферических гармоник полинома Лежандра. Рассматривая только первые два члена разложения в ряд, мы получим диффузное приближение, которое записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} L_s(\vec{r}, \vec{s}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L_s(\vec{r}, \vec{s}) d\omega + \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} L_s(\vec{r}, \vec{s}') \vec{s}' \cdot \vec{s} d\omega = \\ &= L_0(\vec{r}) + \frac{3}{4\pi} F(\vec{r}) \cdot \vec{s}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $L_0(\vec{r})$  – средняя диффузная интенсивность,  $F(\vec{r})$  – вектор диффузного потока, ориентированный вдоль направления единичного вектора  $\vec{s}$ ,  $\left[ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right]$ .

Для получения точного диффузного уравнения для стационарного случая необходимо выполнение условия соответствия этого уравнения баланскому уравнению для диффузного потока и уравнению, выражающему суть закона сохранения энергии [А.Исимару].

Первое из этих уравнений выражает закон Фика (плотность потока мощности пропорциональна градиенту освещенности), который описывает уменьшение или увеличение плотности потока мощности за счет поглощения и рассеяния коллимированной и диффузной компонент:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{3\mu_\sigma} \nabla \varphi_s(\vec{r}) + \frac{\mu_s g}{\mu_\sigma} E(\vec{r}, \vec{s}_0) \vec{s}_0, \quad (3.9)$$

где  $\mu_\sigma = \mu_a + (1-g)\mu_s$  – транспортный коэффициент затухания. Второе уравнение может быть представлено следующим выражением:

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\mu_a \varphi_s(\vec{r}) + \mu_s E(\vec{r}, \vec{s}_0). \quad (3.10)$$

Физически это уравнение означает, что выходящий из единичного объема поток  $\vec{F}$  равен мощности, излучаемой единицей объема, минус мощность, поглощаемая единицей объема.

Таким образом, в стационарном случае уравнение переноса в диффузионном приближении может быть записано следующим образом [W.M. Star]:

$$\nabla^2 \varphi_s(\vec{r}) - 3\mu_a \mu_\sigma \varphi_s(\vec{r}) + 3\mu_s \mu_\sigma E(\vec{r}, \vec{s}_0) - 3\mu_s g \nabla \cdot (E(\vec{r}, \vec{s}_0) \vec{s}_0) = 0. \quad (3.11)$$

Биоткани рассеивают свет преимущественно в направлении вперед. В результате диффузионное приближение не всегда является хорошей аппроксимацией теории переноса излучения вблизи источников или границ. Улучшением ситуации является включение дельта-функции в определение фазовой функции [W.M. Star]:

$$p(\vec{s}, \vec{s}') = (1-f)p'(\vec{s}, \vec{s}') + f\delta(1-\vec{s} \cdot \vec{s}') \frac{1}{2\pi}. \quad (3.12)$$

Это представление названо приближением Дельта–Эддингтона. Диффузионное уравнение при этом записывается с помощью новых переменных:  $\mu'_t = \mu_a + \mu'_s$ ,  $\mu'_s = \mu_s(1-f)$ ,  $p'(\vec{s}, \vec{s}')$ ,  $f = g^2$ ,  $g' = \frac{g}{g+1}$ .

Указанные коэффициенты соответствуют представлению фазовой функции в приближении Хени–Гринштейна.

Преобразование  $p \rightarrow p'$  ( $p'$  – новая фазовая функция) является только математическим преобразованием. Изменения происходят в области источников и границ, что особенно важно для случая сильного рассеяния



вперед. В этой ситуации интенсивность характеризуется сильной анизотропией вблизи границ и источников, а это не соответствует описанию интенсивности в диффузионном приближении.

Приближение Дельта–Эддингтона уменьшает степень направленности рассеяния ( $g' < g$ ). Интенсивность становится менее анизотропной, что приводит к улучшению ситуации вблизи границ и источников.

Граничное условие для решения уравнения переноса можно записать следующим образом:

$$\int_{2\pi} L_s(\vec{r}, \xi)(\xi \cdot n) d\omega = 0, \quad (3.13)$$

где  $n$  – единичный вектор нормали к поверхности, направленный внутрь среды. Данное условие означает, что полный диффузный поток, направленный внутрь, должен быть равен нулю.

Граничное условие для решения уравнения переноса в диффузионном приближении на границах с воздухом может быть записано следующим образом [W.M. Star]:

$$\frac{1 - r_{21}}{1 + r_{21}} \cdot \frac{\varphi_s(\vec{r})}{2} + \frac{\mu_s g}{\mu_\sigma} E(\vec{r}, \xi_0) n - \frac{1}{3\mu_\sigma} \nabla \varphi_s(\vec{r}) \zeta = 0, \quad (3.14)$$

где  $r_{21}$  – коэффициент отражения на границе воздух–биоткань. Необходимо различать три вида границ с воздухом – верхняя граница, на которую падает излучение, боковые границы и нижняя граница образца. Для этих видов границ коэффициенты отражения должен быть различными. В соответствии с [24] для верхней границы, через которую излучение из воздуха входит в рассеивающую среду, данный коэффициент –

$$r_{21} = 1 - \left( \frac{1}{n_2} \right)^2, \quad (3.15)$$

для нижней и боковых границ, через которые излучение из среды выходит в воздух, –

$$r_{21} = \frac{\cos^2(\theta_c) + \cos^3(\theta_c)}{2 - \cos^2(\theta_c) + \cos^3(\theta_c)},$$

где  $\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right)$ . На внутренних границах задается условие равенства потоков.

Диффузионная теория является хорошим приближением в тех случаях, когда анизотропия рассеяния невелика ( $g \leq 0,1$ ), а альbedo рассеяния большое  $\Lambda \rightarrow 1$ . Для многих биотканей фактор анизотропии рассеяния  $g \approx 0,6-0,9$ , а в некоторых случаях, например для крови, может даже достигать величины  $0,990-0,999$  [V.V. Tuchin]. Это существенно ограничивает применимость диффузионного приближения. Доказано, что это приближение может использоваться вплоть до значений  $g < 0,9$ , если оптическая толщина объекта  $\tau$  составляет примерно 10–20:

$$\tau = \int_0^s \mu_t ds.$$

Однако диффузионное приближение неприменимо в областях, близких к поверхности объекта, на которую падает пучок излучения, так как в этих областях преобладает однократное рассеяние.

Приближение первого порядка справедливо только тогда, когда объемная плотность, равная отношению объема, занятого частицами, к полному объему среды, значительно меньше 1%. Если же объемная плотность много больше 1%, то относительно простые и хорошие результаты даются диффузионным приближением. При объемной плотности порядка 1% ни приближение первого порядка, ни диффузионное приближение не могут быть справедливы, и нужно решать полное уравнение переноса.

**Двух- и многопотоковые приближения.** Часто интерес представляет не сама лучевая интенсивность  $I$ , а лишь интегралы от  $I$ , дающие энергетические характеристики поля излучения. Если освещение диффузно и среда достаточно замутнена, так что свет рассеивается диффузно, экспериментальные результаты хорошо описывает двухпотоковая теория Кубелки и Мунка. Эта теория основана на модели двух световых потоков, распространяющихся в прямом и обратном направлениях.

Главным допущением данной теории является то, что лучевая интенсивность является диффузной. Внутри ткани диффузный поток разделен на два: поток  $L_1$  в направлении падающего излучения и поток, рассеянный назад,  $L_2$  (соответственно в обратном направлении). Для поглощения и рассеяния диффузного излучения вводятся два коэффициента Кубелки–Мунка, соответственно  $A_{KM}$  и  $S_{KM}$ . С использованием указанных обозначений можно записать два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dL_1}{dz} = -S_{KM}L_1 - A_{KM}L_1 + S_{KM}L_2,$$

$$\frac{dL_2}{dz} = -S_{KM}L_2 - A_{KM}L_2 + S_{KM}L_1,$$

где  $z$  определяет среднее направление падающего излучения. Эти уравнения утверждают, что лучевая интенсивность в каждом направлении два раза испытывает потери вследствие поглощения и рассеяния и один раз усиливается вследствие рассеяния фотонов с противоположного направления.

Коэффициенты  $A_{KM}$  и  $S_{KM}$  в величинах  $\mu_a$  и  $\mu_s$  записываются следующим образом [А. Исимару]:  $A_{KM} = 2\mu_a$ ,  $S_{KM} = \mu_s$ .

Теория Кубелки–Мунка – это частный случай так называемой многопоточковой теории, где уравнение переноса превращается в матричное дифференциальное уравнение, учитывающее лучевую интенсивность в направлении многих отдельных телесных углов. Однако данная теория имеет дело только с диффузной компонентой лучевой интенсивности и ограничена случаями, когда рассеяние во много раз превышает поглощение. Другим неудобством теории Кубелки–Мунка является то, что она может быть применена только для одномерной геометрии системы. Двухпоточковая теория неприменима для описания падающего на среду коллимированного пучка. В этом случае следует использовать четырехпоточковую теорию. Четырехпоточковая теория [А. Исимару] в действительности учитывает два встречных диффузных потока, как и теория Кубелки–Мунка, а также два коллимированных лазерных пучка, внешний падающий и отраженный от задней поверхности образца. Семипоточковая теория является простейшим трехмерным представлением падающего лазерного пучка и рассеяния излучения в полубесконечной среде [G. Yoon]. Безусловно, при упрощении расчетов и сокращении машинного времени точность вычислений должна быть достаточной для определения радиационной дозы и быстрого определения оптических параметров биоткани (решения обратной задачи рассеяния). Более строгое решение уравнения переноса возможно с помощью метода дискретных ординат (многопоточковая теория), согласно которому уравнение переноса преобразуется в матричное дифференциальное уравнение для освещенности вдоль многих дискретных направлений (углов) [А. Исимару]. Точность приближенных решений возрастает по мере увеличения числа рассматриваемых направлений. Уравнение переноса может быть решено различными численными методами, и существует большое

число готовых компьютерных программ для его решения в различных условиях [P. Flatau].

**Метод Монте-Карло.** Численное приближение уравнения переноса основывается на методе Монте-Карло. Вообще метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач (систем алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений) и прямое статистическое моделирование (физических, химических, биологических, экономических, социальных процессов) при помощи получения и преобразования случайных чисел. Первая работа по использованию метода Монте-Карло была опубликована Холлом [A. Hall] в 1873 г. именно при организации стохастического процесса экспериментального определения числа  $\pi$  путем бросания иглы на лист линованной бумаги. Яркий пример использования методов Монте-Карло – использование идеи Дж. фон Неймана при моделировании траекторий нейтронов в лаборатории Лос Аламоса в сороковых годах прошлого столетия. Хотя методы Монте-Карло связаны с большим количеством вычислений, отсутствие электронной вычислительной техники ни в том ни в другом случае не смутило исследователей при применении этих методов, поскольку и в том и другом случае речь шла о моделировании случайных процессов. Свое название они получили по имени столицы княжества Монако, знаменитой своими игорными домами, основу которых составляет рулетка – совершенный инструмент для получения случайных чисел. А первая работа, где этот вопрос излагался систематически, опубликована в 1949 г. [N. Metropolis], где метод Монте-Карло применялся для решения линейных интегральных уравнений, в котором явно угадывалась задача о прохождении нейтронов через вещество. В нашей стране работы по методам Монте-Карло стали активно публиковаться после Международной Женевской конференции по применению атомной энергии в мирных целях.

Общая схема метода Монте-Карло основана на центральной предельной теореме теории вероятности, утверждающей, что случайная величина  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ , равная сумме большого количества  $N$  произвольных случайных величин  $X$  с одинаковыми математическими ожиданиями  $m$  и дисперсиями  $\sigma^2$ , всегда распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $N \cdot m$  и дисперсией  $N \cdot \sigma^2$ .

Общие свойства методов Монте-Карло:

- абсолютная сходимость к решению такая же, как  $\frac{1}{N}$ ;

- зависимость погрешности от числа испытаний такая же, как  $\approx \frac{1}{\sqrt{N}}$

(для уменьшения погрешности на порядок необходимо увеличить количество испытаний на два порядка);

- основным методом уменьшения погрешности является максимальное уменьшение дисперсии;

- погрешность не влияет на размерность задачи (в конечно-разностных методах при переходе от одномерной задачи к трехмерной количество вычислений увеличивается на два порядка, в то время как в методах Монте-Карло количество вычислений остается того же порядка);

- простая структура вычислительного алгоритма ( $N$  раз повторяющиеся однотипные вычисления реализаций случайной величины);

- конструкция случайной величины может основываться на физической природе процесса и не требовать обязательной, как в регулярных методах, формулировки уравнения, что для современных проблем становится все более актуальным.

С точки зрения решения уравнения переноса излучения метод Монте-Карло заключается в компьютерном моделировании случайного блуждания  $N$  числа фотонов [М.Н. Niemi]. Для получения приемлемой аппроксимации необходимо рассматривать большое количество фотонов, поскольку точность результатов пропорциональна  $\sqrt{N}$ .

Главной идеей метода является учет явлений поглощения и рассеяния на всем оптическом пути фотона через непрозрачную среду. Расстояние между двумя столкновениями выбирается из логарифмического распределения, используя случайное число, генерируемое компьютером. Для учета поглощения каждому фотону присваивается вес, и при распространении через среду этот вес постоянно уменьшается. Если имеет место рассеяние, выбирается новое направление распространения в соответствии с фазовой функцией и другим случайным числом. Эта процедура продолжается до тех пор, пока фотон не выйдет из рассматриваемого объема или его вес не достигнет определенной величины. Метод Монте-Карло включает в себя пять основных шагов: генерация источника фотона, генерация траектории, поглощение, ликвидация, регистрация [М.Н. Niemi]. Рассмотрим кратко каждый из них.

1. Генерация источника фотона. Фотоны генерируются на поверхности рассматриваемой среды. Их пространственное и угловое распределение соответствует распределению падающего излучения (например, гауссов пучок).

2. Генерация траектории. После генерации фотона определяется расстояние до первого столкновения. Предполагается, что поглощающие и

рассеивающие частицы случайно распределены в непрозрачной среде. Следовательно, величина свободного пробега равна  $1/\rho\sigma_x$ , где  $\rho$  – плотность частиц и  $\sigma_x$  – их сечение рассеяния. Случайное число  $0 < \xi_1 < 1$  генерируется компьютером, и расстояние  $L(\xi_1)$  до следующего столкновения рассчитывается из выражения:

$$L(\xi_1) = -\frac{\ln \xi_1}{\rho\sigma_x}.$$

Поскольку  $\int_0^1 \ln \xi_1 d\xi_1 = -1$ , средняя величина  $L(\xi_1)$  действительно равна  $1/\rho\sigma_x$ . Отсюда получают рассеивающую точку. Угол рассеяния определяется вторым случайным числом  $\xi_2$  в соответствии с некой фазовой функцией, например функцией Хени–Гринштейна. Соответствующий полярный угол  $\Phi$  определяется выражением  $\Phi = 2\pi\xi_3$ , где  $\xi_3$  – третье случайное число между 0 и 1.

3. Поглощение. Для учета поглощения каждому фотону присваивается собственный вес. На входе в непрозрачную среду вес фотона равен 1. Вследствие поглощения (в более точных программах также вследствие отражения) вес уменьшается в соответствии с выражением  $\exp[-\mu_a L(\xi_1)]$ . Как альтернатива присвоению веса может быть введено четвертое случайное число  $\xi_4$ , между 0 и 1. Затем предполагается, что рассеяние имеет место, только если  $\xi_4 < a$ , где  $a$  – оптическое альбедо, которое определяется в соответствии с выражением  $a = \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s}$ . Для  $\xi_4 > a$  фотон поглощается, что является аналогом шага 4.

4. Ликвидация. Этот шаг используется только в случае присвоения веса каждому фотону в шаге 3. Когда этот вес достигает определенной величины отсечки, фотон ликвидируется. Затем запускается новый фотон, и программа продолжается с шага 1.

5. Регистрация. После повторения шагов 1–4 для достаточного количества фотонов, карта траекторий рассчитывается и накапливается в компьютере. Таким образом, может быть получен статистический отчет о порции падающих фотонов, поглощенных средой, а также пространственное и угловое распределение фотонов, вышедших из нее.

Рассмотрим один из вариантов реализации построения алгоритма метода Монте-Карло.

Моделируемая среда задается следующими параметрами: толщиной  $L_{cp}$ , коэффициентами рассеяния  $\mu_s$  и поглощения  $\mu_a$ , средним косинусом угла рассеяния  $g$ , относительным показателем преломления  $n$ . Среда пред-

ставляется совокупностью рассеивающих и поглощающих фотоны центров.

Проследим в деталях одну итерацию алгоритма. Падающий импульс состоит из одного миллиона фотонов, входящих в среду вдоль оси  $z$  перпендикулярно ее поверхности  $(x, y)$  в точке с координатами  $(0, 0, 0)$ . Все расчеты производятся в трехмерной декартовой системе координат. После входа фотона в образец определяются длина свободного пробега фотона в среде и углы рассеяния  $\theta$  и  $\varphi$ . Угол рассеяния  $\theta$  задается фазовой функцией рассеяния. В общем случае

$$p(s, s') = p(\theta)p(\varphi),$$

где  $s$  – направление падения,  $s'$  – направление рассеяния фотона.

Считаем, что частицы среды, на которых происходит рассеяние и поглощение, являются сферически симметричными. Такое приближение часто используется в аналогичных случаях и основано на том, что в процессе прохождения через среду с сильным рассеянием фотон взаимодействует с частицами под разными углами. Поэтому можно применять усредненную индикатрису рассеяния. Использование данной модели и сравнение численных расчетов с экспериментальными результатами показали, что данное приближение удовлетворительно описывает свойства большинства биологических тканей.

Таким образом, если используется данное приближение, то в нем

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}.$$

В случае ткани с сильным рассеянием в качестве фазовой функции рассеяния  $p(\theta)$  можно применить фазовую функцию Хени–Гринштейна, откуда получаем выражение для угла  $\theta$ :

$$\theta = \cos^{-1} \left[ \frac{1 + g^2 - \left( \frac{1 - g^2}{1 + g^2 - 2gRandom} \right)^2}{2g} \right],$$

где *Random* – случайное равномерно распределенное число из диапазона  $(0,1)$ . На каждом шаге угол  $\theta$  определяется относительно «старого» направления распространения, угол  $\varphi$  – в плоскости, перпендикулярной «новому» направлению движения.

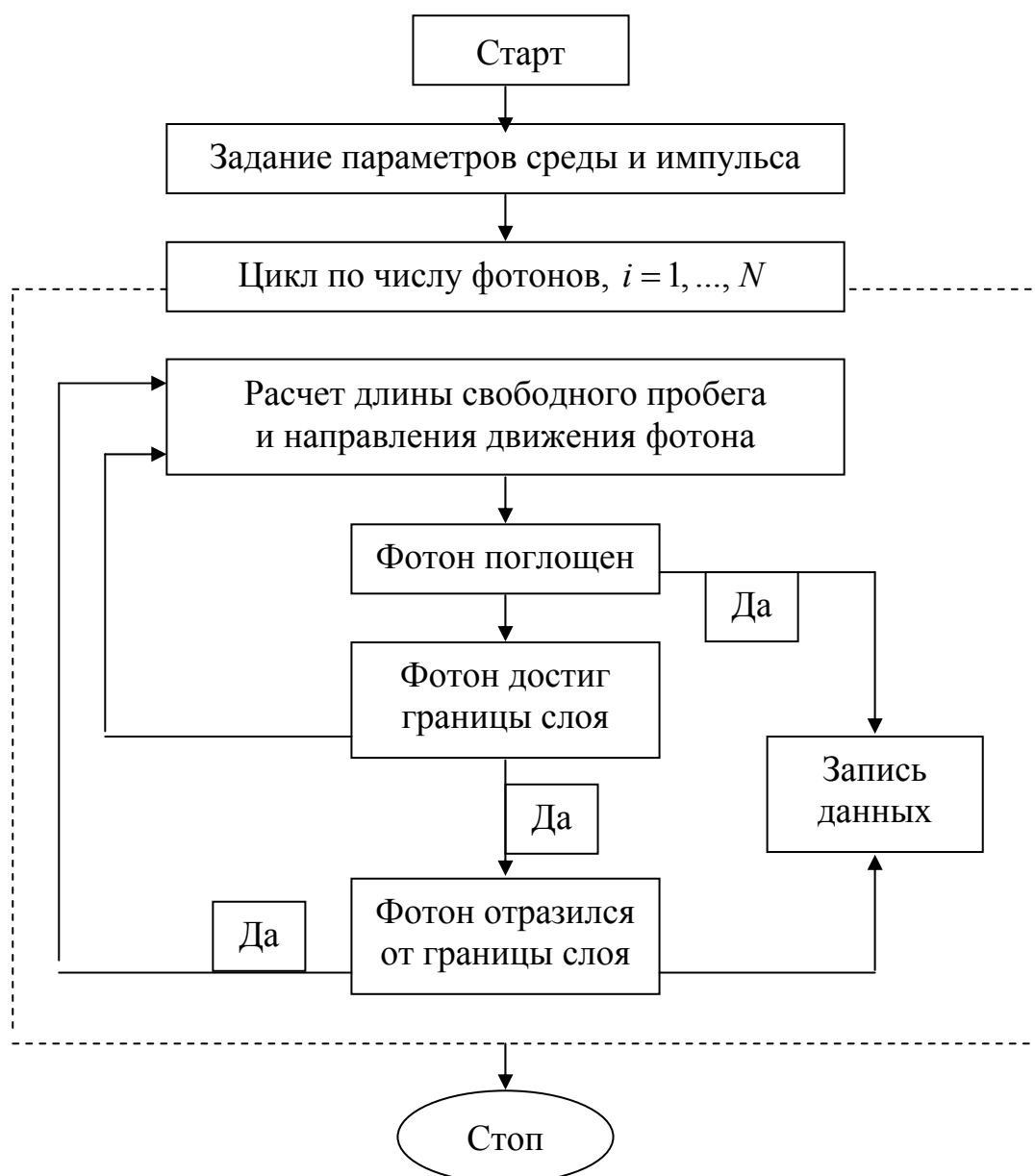


Рис. 3.1. Схема алгоритма метода Монте-Карло

Длина свободного пробега фотона определяется функцией плотности вероятности:

$$p(L) = \left( \frac{1}{l_{ph}} \right) e^{-\frac{L}{l_{ph}}},$$

где средняя длина свободного пробега фотона определяется как



$$l_{ph} = \frac{1}{\mu_a + \mu_s}.$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} p(L)dL = 1,$$

для расчета длины свободного пробега берется случайное число  $\xi \in (0,1)$ :

$$\xi = \int_0^L p(l)dl.$$

Число  $\xi$ , равномерно распределенное в интервале  $(0,1)$ , выдается компьютерным генератором случайных чисел. Таким образом, длина свободного пробега фотона определяется выражением:

$$L = -l_{ph} \ln(1 - \xi).$$

После этого моделируется взаимодействие фотона с частицей среды, которая может быть либо поглощающим, либо рассеивающим центром. Вероятность рассеяния фотона на частице определяется как

$$p_s = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_a},$$

аналогичным образом и вероятность поглощения:

$$p_a = \frac{\mu_a}{\mu_s + \mu_a} = 1 - p_s.$$

Если генератор выдает случайное число в диапазоне  $(0, p)$ , то считается, что фотон рассеян, в противном случае – поглощен. Весь слой среды вдоль оси  $z$  виртуально поделен на некоторое количество более тонких слоев одинаковой толщины, которым соответствуют массивы данных. В каждый из них записывается число поглощенных или рассеянных фотонов. Таким образом, пространственное разрешение по глубине образца состав-

ляет  $\frac{1}{L_{cp}}$ . Если фотон рассеян, то рассчитываются его новое направление движения и координаты по формулам:

$$x = x_0 + L \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = y_0 + L \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = z_0 + L \cos \theta.$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  – «старые» координаты фотона. Если фотон поглощен, то запускается следующий. Потом все координаты пересчитываются в первоначальную систему координат (оси  $x, y$  – на поверхности среды, ось  $z$  перпендикулярна им и направлена внутрь среды).

Расчет продолжается до тех пор, пока фотон либо в конце концов не будет поглощен, либо не выйдет за границы детектора, либо не попадет на него ( $z = 0$  или  $z = L_{cp}$ ). На границах среда–воздух полное внутреннее отражение учитывается при помощи соотношения:

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{1}{n} \right),$$

где  $n$  – показатель преломления среды.

На рис. 3.2 приводятся зависимости относительной диффузной освещенности, полученные для случая изотропного рассеяния при помощи различных приближений, от оптической глубины, определяемой в соответ-

ствии с выражением  $\tau = \int_0^s \mu_t ds$ .

Рассмотрены результаты, полученные при помощи метода Монте-Карло, теории Кубелки–Мунка, диффузионного приближения и аналитического решения уравнения переноса излучения, которое возможно, поскольку рассматривается случай изотропного рассеяния. Видно, что результаты, полученные с помощью диффузионного приближения, практически всегда совпадают с методом Монте-Карло и достаточно близки с аналитическим решением уравнения переноса, особенно для альбедо, равного 0,9.

$\Phi_s$ , Отн. ед.

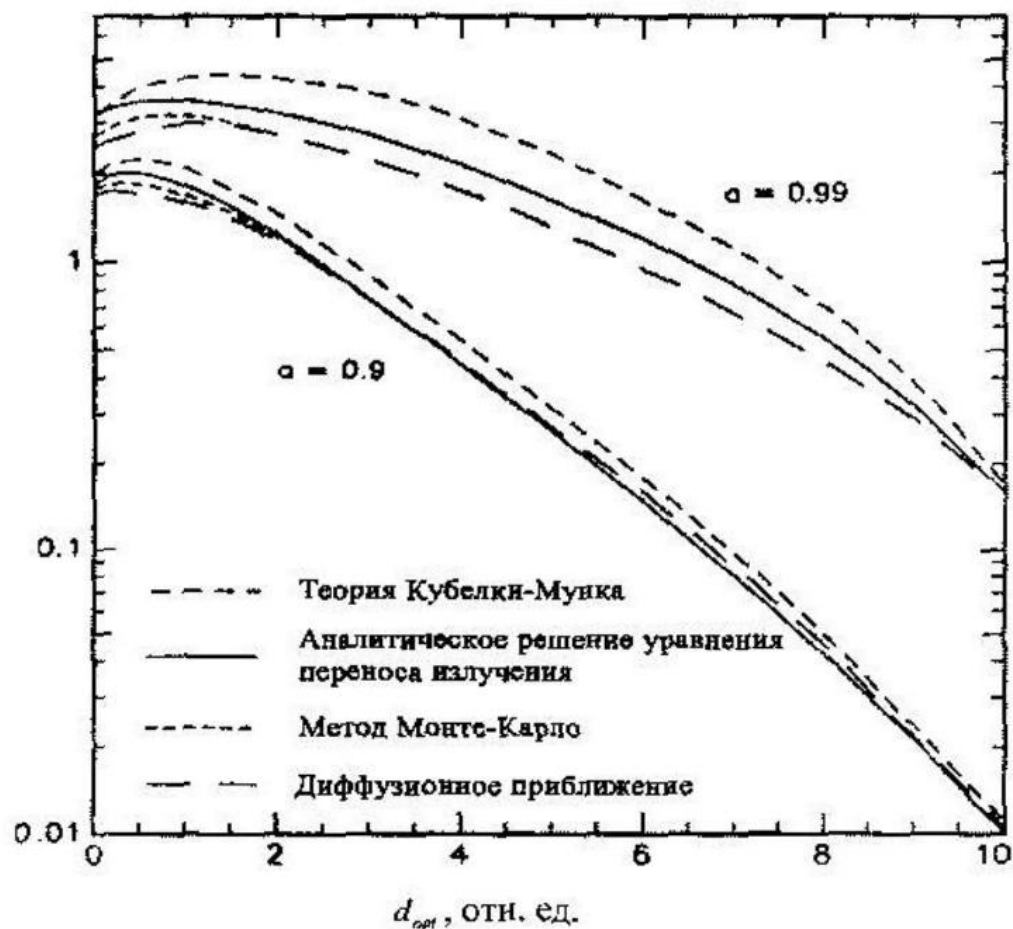


Рис. 3.2 Зависимость относительной диффузной освещенности от оптической глубины для различных методов решения уравнения переноса излучения при двух значениях оптического альбедо, соответствующих биологическим мутным средам [J.Sajeev, P. Gendi, Y. Yumin]. Случай изотропного рассеяния.

**Метод добавления-удвоения.** Метод добавления-удвоения представляет собой численный метод, основанный на одномерной теории переноса излучения. Он был использован [A.M.K. Nilsson, G.W. Lucassen, W. Verkruysse, S. Andersson-Engels, M.J.C. van Gemert] в качестве прямой модели в решении обратной задачи при исследовании изменений оптических свойств цельной крови человека, вызванных изменением температуры.

Метод добавления-удвоения является численным методом решения одномерного транспортного уравнения для плоскопараллельного слоя. В дополнении к плоской геометрии метода предполагается, что освещение пространственно однородно; таким образом, не могут быть учтены конечный размер пучка и боковые потери света. Этот метод может быть использован для сред с произвольной фазовой функцией и произвольным угловым распределением падающего излучения [S.A. Prahl].

### 3.2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА (НТП). УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА БОЛЬЦМАНА

Уравнение переноса Больцмана (УПБ) описывает поток частиц в рассеивающей и поглощающей среде. Распространение света в оптически мутной среде можно смоделировать с помощью уравнения переноса, где фотоны рассматриваются как переносимые частицы. Если мы обозначим через  $u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  угловую плотность фотонов, которая определяется числом фотонов в единице объема и в единице телесного угла, движущихся в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  в направлении  $\hat{\Omega}$ , то можно записать УПБ следующим образом [J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)}{\partial t} = & -v\hat{\Omega}\nabla u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) - v(\mu_a + \mu_s)u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \\ & + v\mu_s \int_{4\pi} u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) f(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) d\hat{\Omega}' + q(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $v$  – скорость света в среде,  $\mu_a$  – коэффициент поглощения,  $\mu_s$  – коэффициент рассеяния,  $f(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$  – фазовая функция или плотность вероятности рассеяния в направлении  $\hat{\Omega}'$  фотона, который движется в направлении  $\hat{\Omega}$ ,  $q(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  – член, описывающий функцию источника;  $q(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  задает число фотонов, испущенных источником света в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  в единицу объема за единицу времени в единичный телесный угол в направлении  $\hat{\Omega}$ . Левая часть уравнения (3.16) представляет собой изменение во времени угловой плотности фотонов. Каждый из членов в правой части вносит определенный вклад в это изменение. Первый член – это общее увеличение числа фотонов в точке  $\mathbf{r}$  и направлении  $\hat{\Omega}$  из-за потока фотонов. Вторым членом – это потери фотонов в точке  $\mathbf{r}$  и направлении  $\hat{\Omega}$  как результат взаимодействия (поглощения и рассеяния). Третий член – это прирост количества фотонов в точке  $\mathbf{r}$  и направлении  $\hat{\Omega}$  из-за рассеяния. Наконец, четвертый член – это прирост числа фотонов из-за наличия источников света. Теперь определим некоторые величины, которые используются в описании транспорта фотонов.

*Угловая фотонная плотность*  $u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  определена таким образом, что,  $u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) dr d\hat{\Omega}$  – число фотонов в элементарном объеме  $dr$ , движущихся в пределах телесного угла в направлении .

*Фотонная яркость*  $L(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \nu u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  – это число фотонов, проходящих в единицу времени через единичную поверхность (перпендикулярную  $\hat{\Omega}$ ) в направлениях, лежащих в пределах телесного угла  $d\hat{\Omega}$ , описанного вокруг  $\hat{\Omega}$ .

*Плотность фотонов*  $U(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega}$  – это число фотонов в единице объема.

*Фотонная интенсивность*  $E_0(\mathbf{r}, t) = \nu U(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} L(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega}$  определяется как число фотонов, проходящих в единицу времени через единичную поверхность (перпендикулярную направлению распространения) по всем направлениям.

*Плотность фотонного потока*  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} L(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega}$  – это вектор, который описывает чистый поток фотонов. Его направление совпадает с направлением потока, в то время как амплитуда дает общее число фотонов, проходящих в этом направлении в единицу времени через единичную поверхность.

Определения, данные выше, могут быть расширены на описание лучистой энергии (вместо числа фотонов) путем замены слова «фотон» термином «энергия» и введением множителя  $h\nu$  во все определения ( $h\nu$  – это энергия одного фотона, где  $h$  – постоянная Планка и  $\nu$  – частота света).

### 3.3. РАЗЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

Чтобы моделировать распространение света в сильно рассеивающих средах (каковыми являются большинство биологических тканей), можно разложить угловую фотонную плотность  $u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  функцию источника  $q(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  и фазовую функцию  $f(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$  по сферическим гармоникам  $Y_l^m(\hat{\Omega})$  [J.-M. Kaltenbach, M. Kaschke]. На таком разложении основана так называемая  $P_N$ -аппроксимация уравнения Больцмана. В силу полноты набора сферических гармоник, любая функция  $h(\theta, \varphi)$  (с достаточной непрерывностью) может быть разложена в ряд Лапласа:

$$h(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_{lm} Y_l^m(\hat{\Omega}), \quad (3.17)$$

где  $h_{lm}$  – коэффициенты, не зависящие, от  $\theta$  и  $\varphi$ , а связь между  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\hat{\Omega}$  дается выражением  $\hat{\Omega} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ . Соответственно мы раскладываем  $u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$  и  $q(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$ :

$$u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l u_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_l^m(\hat{\Omega}), \quad (3.18)$$

$$q(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l q_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_l^m(\hat{\Omega}). \quad (3.19)$$

Предполагается, что фазовая функция  $f(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$  зависит только от  $\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}$  (т.е. от косинуса угла рассеяния  $\gamma$ ).

В результате можно разложить  $f(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$  по полиномам Лежандра, учитывая, что любая функция  $H(x)$ , которая кусочно-непрерывна вместе со своей производной в интервале  $[-1, 1]$ , имеет общее представление в виде ряда Лежандра [Н.В. Wyld]:

$$H(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} H_l P_l(x), \quad (3.20)$$

где  $P_l(x)$  – полином Лежандра порядка  $l$  и  $H_l = \int_{-1}^1 H(x') P_l(x') dx'$ . Тогда мы можем записать:

$$f(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l f_l Y_l^{m*}(\hat{\Omega}') Y_l^m(\hat{\Omega}), \quad (3.21)$$

где последнее выражение следует из теоремы сложения для сферических гармоник [Н.В. Wyld], а именно:

$$P_l(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = 4\pi/(2l+1) \sum_{m=-1}^l Y_l^{m*}(\hat{\Omega}') Y_l^m(\hat{\Omega}).$$

Здесь  $f_l = 2\pi \int_{-1}^1 f(\cos \gamma) P_l(\cos \gamma) d(\cos \gamma)$ . Подставляя это выражение в соотношение (3.16), мы получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v\hat{\Omega} \cdot \nabla + v(\mu_a + \mu_s) \right] u_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_l^m(\hat{\Omega}) - q_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_l^m(\hat{\Omega}) - v\mu_s \int_{4\pi} u_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_l^m(\hat{\Omega}') \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} f_{l'} Y_{l'}^{m'*}(\hat{\Omega}')(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega}' \right\} = 0. \quad (3.22)$$

Интеграл по  $d\hat{\Omega}'$  можно рассчитать, используя свойства ортогональности сферических гармоник:  $\int_{4\pi} Y_l^{m*}(\hat{\Omega}) Y_{l'}^{m'}(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ . Тогда УПБ принимает вид

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l \left( \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v\hat{\Omega} \cdot \nabla + v[\mu_s(1-f_l) + \mu_a] \right\} u_{lm}(\mathbf{r}, t) - q_{lm}(\mathbf{r}, t) \right) \times Y_l^m(\hat{\Omega}) = 0. \quad (3.23)$$

Умножим это соотношение на  $Y_L^{M*}(\hat{\Omega})$  и проинтегрируем по  $\hat{\Omega}$ , чтобы получить соотношение между отдельными коэффициентами  $u_{LM}$  и  $q_{LM}$  и всеми коэффициентами разложения  $u$  и  $u_{lm}$  по сферическим гармоникам:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_{LM}(\mathbf{r}, t) + v[\mu_s(1-f_l) + \mu_a] u_{LM}(\mathbf{r}, t) + \\ & + v \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l \int_{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \nabla u_{lm}(\mathbf{r}, t) Y_l^m(\hat{\Omega}) Y_L^{M*}(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = q_{LM}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Интеграл по  $\hat{\Omega}$  можно оценить, выразив декартовы компоненты вектора  $Y_L^M(\hat{\Omega})\hat{\Omega}$  через сферические гармоники. Это может быть сделано с помощью рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра  $P_l^m(x)$ . Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_L^M(\hat{\Omega})\Omega_x &= Y_L^M(\hat{\Omega}) \sin \theta \cos \varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^{M+1}(\hat{\Omega}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^{M+1}(\hat{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^{M-1}(\hat{\Omega}) - \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^{M-1}(\hat{\Omega}),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& Y_L^M(\hat{\Omega})\Omega_y = Y_L^M(\hat{\Omega})\sin\theta\sin\varphi = \\
& = -\frac{1}{2i} \left[ \frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^{M+1}(\hat{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{2i} \left[ \frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^{M+1}(\hat{\Omega}) - \\
& - \frac{1}{2i} \left[ \frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^{M-1}(\hat{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{2i} \left[ \frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^{M-1}(\hat{\Omega}),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
& Y_L^M(\hat{\Omega})\Omega_z = Y_L^M(\hat{\Omega})\cos\theta = \\
& = \left[ \frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^M(\hat{\Omega}) + \\
& + \left[ \frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^M(\hat{\Omega}).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Используя эти соотношения для  $x$ ,  $y$ ,  $z$  компонент  $Y_L^M(\hat{\Omega})\hat{\Omega}$ , а также соотношения ортогональности для сферических гармоник, можно рассчитать интеграл. Считается, что зависимость между коэффициентами  $u_{LM}$  и  $q_{LM}$  не включает всех коэффициентов разложения  $u$  и  $u_{lm}$  по сферическим гармоникам и содержит только  $u_{lm}$  с индексами  $l$  и  $m$ , меняющимися в диапазоне от  $L-1$  до  $L+1$  и от  $M-1$  до  $M+1$  соответственно:



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} u_{LM}(\mathbf{r}, t) + v[\mu_s(1 - f_L) + \mu_a] u_{LM}(\mathbf{r}, t) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{(L - M + 1)(L - M + 2)}{(2L + 1)(2L + 3)} \right]^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{L+1}^{M-1}(\mathbf{r}, t) - \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{(L + M)(L + M - 1)}{(2L + 1)(2L - 1)} \right]^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{L-1}^{M-1}(\mathbf{r}, t) - \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{(L + M + 2)(L + M + 1)}{(2L + 1)(2L + 3)} \right]^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{L+1}^{M+1}(\mathbf{r}, t) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{(L - M - 1)(L - M)}{(2L + 1)(2L - 1)} \right]^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{L-1}^{M+1}(\mathbf{r}, t) + \\
& + \left[ \frac{(L + M + 1)(L - M + 1)}{(2L + 1)(2L + 3)} \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} v u_{L+1}^M(\mathbf{r}, t) + \\
& + \left[ \frac{(L - M)(L + M)}{(2L - 1)(2L + 1)} \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} v u_{L-1}^M(\mathbf{r}, t) = q_{LM}(\mathbf{r}, t).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.4. $P_N$ -ПРИБЛИЖЕНИЕ

Разложение УПБ по сферическим гармоникам привело к бесконечной системе уравнений с индексами  $L$  (в пределах от 0 до  $\infty$ ) и (в пределах от  $-L$  до  $L$ ). Обрыв ряда Лапласа при  $L = N$  ведет к так называемому  $P_N$ -приближению. Причиной для такого названия служит то, что последний член в сокращенном ряде Лапласа содержит элемент  $Y_N^M(\hat{\Omega})$ , который может быть выражен через присоединенные функции Лежандра  $P_N^M(x)$ . Последние, в свою очередь, можно выразить через полиномы Лежандра  $P_N(x)$ . Эти выражения имеют вид

$$Y_N^M(\hat{\Omega}) = (-1)^M \left[ \frac{(2N + 1)(N - M)!}{4\pi(N + M)!} \right]^{1/2} P_N^M(\cos\theta) e^{iM\varphi}, \tag{3.29}$$

$$P_N^M(x) = (1 - x^2)^{M/2} \frac{d^M}{dx^M} P_N(x). \tag{3.30}$$

### 3.5. $P_1$ -ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим  $P_1$ -приближение, которое часто используется для описания миграции фотонов в тканях. В  $P_1$ -приближении  $u_{LM}(\mathbf{r}, t)$  принимается равным 0 для  $L > 1$ , тогда (3.28) – система четырех уравнений. Первое, для  $L = 0, M = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_{0,0}(\mathbf{r}, t) + v[\mu_s(1 - f_0) + \mu_a] u_{0,0}(\mathbf{r}, t) + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{1,-1}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{1,1}(\mathbf{r}, t) + \\ & + \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial z} v u_{1,0}(\mathbf{r}, t) = q_{0,0}(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (3.31)$$

второе, для  $L = 1$  и  $M = -1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_{1,-1}(\mathbf{r}, t) + v[\mu_s(1 - f_1) + \mu_a] u_{1,-1}(\mathbf{r}, t) + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{0,0}(\mathbf{r}, t) = q_{1,-1}(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (3.32)$$

третье для  $L = 1, M = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1,0}(\mathbf{r}, t) + v[\mu_s(1 - f_1) + \mu_a] u_{1,0}(\mathbf{r}, t) + \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial z} v u_{0,0}(\mathbf{r}, t) = q_{1,0}(\mathbf{r}, t), \quad (3.33)$$

и четвертое для  $L = 1, M = 1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_{1,1}(\mathbf{r}, t) + v[\mu_s(1 - f_1) + \mu_a] u_{1,1}(\mathbf{r}, t) - \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) v u_{0,0}(\mathbf{r}, t) = q_{1,1}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Коэффициенты  $u_{0,0}(\mathbf{r}, t)$  и  $u_{1,M}(\mathbf{r}, t)$  относятся к плотности фотонов  $U(\mathbf{r}, t)$  и плотности потока фотонов  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  соответственно. Действительно,

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{r}, t) &= \int_{4\pi} u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l u_{lm}(\mathbf{r}, t) \int_{4\pi} Y_l^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \sqrt{4\pi} u_{0,0}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

(так как  $\int_{4\pi} Y_l^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = 0$  для  $m \neq 0$  и  $Y_0^0(\hat{\Omega}) = 1/\sqrt{4\pi}$ ) и

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \int_{4\pi} v u(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l v u_{lm}(\mathbf{r}, t) \int_{4\pi} (\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \\
&\quad + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) Y_l^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^l v u_{lm}(\mathbf{r}, t) \int_{4\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ -Y_1^{1*}(\hat{\Omega}) + Y_1^{-1*}(\hat{\Omega}) \right] \hat{\mathbf{x}} + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{i} \left[ -Y_1^{1*}(\hat{\Omega}) + Y_1^{-1*}(\hat{\Omega}) \right] \hat{\mathbf{y}} + Y_1^0(\hat{\Omega}) \hat{\mathbf{z}} \right\} Y_l^m(\hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} v \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} (-u_{1,1}(\mathbf{r}, t) + u_{1,-1}(\mathbf{r}, t)) \hat{\mathbf{x}} - \right. \\
&\quad \left. -i \sqrt{\frac{1}{2}} (u_{1,1}(\mathbf{r}, t) + u_{1,-1}(\mathbf{r}, t)) \hat{\mathbf{y}} + u_{1,0}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{z}} \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Система четырех уравнений (3.31)–(3.34)  $P_1$ -приближения, таким образом, эквивалентна следующим двум уравнениям (одному скалярному и одному векторному):

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) + v [\mu_s (1 - f_0) + \mu_a] U(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{4\pi} q_{0,0}(\mathbf{r}, t), \tag{3.37}$$

$$\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + [\mu_s (1 - f_1) + \mu_a] \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{3} v \nabla U(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \times \\
&\times \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} (q_{1,-1}(\mathbf{r}, t) - q_{1,1}(\mathbf{r}, t)) \hat{\mathbf{x}} - i \sqrt{\frac{1}{2}} (q_{1,-1}(\mathbf{r}, t) + q_{1,1}(\mathbf{r}, t)) \hat{\mathbf{y}} + q_{1,0}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{z}} \right].
\end{aligned}
} \tag{3.38}$$

Векторное соотношение получается при комбинировании выражений (3.32)–(3.34) в соответствии со следующим формальным соотношением:

$$\sqrt{2\pi/3}[(2.17)-(2.19)]\hat{\mathbf{x}} - i\sqrt{2\pi/3}[(2.17)+(2.19)]\hat{\mathbf{y}} + \sqrt{4\pi/3}[(2.18)]\hat{\mathbf{z}}.$$

Из общего определения коэффициента  $f_l$  мы находим, что  $f_0$  и  $f_1$  даются соотношениями

$$f_0 = 2\pi \int_{-1}^1 f(\cos\gamma) P_0(\cos\gamma) d(\cos\gamma) = 2\pi \int_{-1}^1 f(\cos\gamma) d(\cos\gamma) = 1, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\pi \int_{-1}^1 f(\cos\gamma) P_1(\cos\gamma) d(\cos\gamma) = 2\pi \int_{-1}^1 f(\cos\gamma) \cos\gamma d(\cos\gamma) = \\ &= \langle \cos\gamma \rangle, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где в выражении (3.39) мы использовали тот факт, что вероятность рассеяния нормирована в соответствии с условием  $\int_{4\pi} f(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) d\hat{\Omega}' = 1$ , которое

эквивалентно выражению  $2\pi \int_{-1}^1 f(\cos\gamma) d(\cos\gamma) = 1$ . Поэтому  $f_0$  равно 1, то

гда как  $f_1$  – средний косинус угла рассеяния  $\gamma$  ( $\langle \cos\gamma \rangle$ ). Члены, описывающие функцию источника, в выражениях (3.37) и (3.38) формально являются монопольным (сферически-симметричным) и дипольным членами соответственно. Обозначим их символами  $S_0(\mathbf{r}, t)$  и  $S_1(\mathbf{r}, t)$ . Окончательный вид уравнений  $P_1$ -приближения таков:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) + v\mu_a U(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r}, t), \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + [\mu_s(1 - \langle \cos\gamma \rangle) + \mu_a] \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{3} v \nabla U(\mathbf{r}, t) = S_1(\mathbf{r}, t). \quad (3.42)$$

### 3.6. ПРИВЕДЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕЯНИЯ

Уравнения (3.41) и (3.42) показывают, что в  $P_1$ -приближении  $\mu_s$  и  $\cos \gamma$  появляются только в слагаемом  $\mu_s(1 - \langle \cos \gamma \rangle)$ . В этом разделе мы придадим этому слагаемому физический смысл на основе анализа, проведенного [G. Zaccanti, E. Battistelli, P. Brusaglioni, Q. Wei]. Предположим, что фотон испускается в точке  $P_0 \equiv (0, 0, 0)$  в направлении  $\hat{z}$ . Первый раз этот фотон будет рассеян в точке  $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ , после того как пройдет расстояние  $r_1$ . Потом он будет рассеян в точке  $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ , после того как преодолеет расстояние  $r_2$  и т. д. В общем случае мы рассматриваем рассеяние в точке  $P_n$  как рассеяние  $n$ -го порядка. Мы хотим определить приведенный коэффициент рассеяния  $\mu'_s$  как величину, обратную проекции на ось  $z$  среднего расстояния, которое фотон должен пройти, чтобы «забыть» о первоначальном направлении распространения. Другими словами, величина  $1/\mu'$  – это среднее расстояние между эффективно изотропными актами рассеяния. При выводе величины  $\mu'_s$  пренебрегаем поглощением среды, поскольку нас интересуют только ее рассеивающие свойства. Плотность вероятности  $g(r)$  прохождения фотоном расстояния  $r$  без рассеяния определяется как  $g(r) = \mu_s \exp(-\mu_s r)$ . Рассеяние первого порядка происходит в точке  $P_1 = (0, 0, r_1)$ , средние координаты которой равны:

$$\langle x_1 \rangle = \langle y_1 \rangle = 0, \quad \langle z_1 \rangle = \int_0^{\infty} r_1 g(r_1) dr_1 = \mu_s^{-1}. \quad (3.43)$$

Рассеяние второго порядка происходит в точке

$$P_2 \equiv (r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2, r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2, z_1 + r_2 \cos \theta_2).$$

Поскольку  $r_1, r_2, \theta_2, \varphi_2$  статистически некоррелированы, средние значения координат  $P_2$  будут следующими:

$$\begin{aligned} \langle x_2 \rangle &= \langle r_2 \rangle \langle \sin \theta_2 \rangle \langle \cos \varphi_2 \rangle = 0, \\ \langle y_2 \rangle &= \langle r_2 \rangle \langle \sin \theta_2 \rangle \langle \sin \varphi_2 \rangle = 0, \\ \langle z_2 \rangle &= \langle r_1 \rangle + \langle r_2 \rangle \langle \cos \theta_2 \rangle = \mu_s^{-1} (1 + \langle \cos \gamma \rangle). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Рассеяние третьего порядка происходит в точке  $P_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$ , где

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_2 + r_3(\sin \theta_3 \cos \varphi_3 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 - \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 + \\
&\quad + \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \varphi_2), \\
y_3 &= y_2 + r_3(\sin \theta_3 \cos \varphi_3 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \\
&\quad + \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \varphi_2), \\
z_3 &= z_2 + r_3(-\sin \theta_3 \cos \varphi_3 \sin \theta_2 + \cos \theta_3 \cos \theta_2).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Средние значения координат точки  $P_3$ :

$$\langle x_3 \rangle = \langle y_3 \rangle = 0, \quad \langle z_3 \rangle = \mu_s^{-1}(1 + \langle \cos \theta \rangle + \langle \cos \theta \rangle^2). \tag{3.46}$$

При рассеянии  $n$ -го порядка средние значения координат точки, в которой происходит рассеяние, равны:

$$\langle x_n \rangle = \langle y_n \rangle = 0, \quad \langle z_n \rangle = \mu_s^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \cos \gamma \rangle^k = \frac{1 - \langle \cos \gamma \rangle^n}{\mu_s(1 - \langle \cos \gamma \rangle)}, \tag{3.47}$$

где мы использовали формулу суммы геометрической прогрессии  $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$ , при  $a < 1$ . В пределе большого числа рассеивающих событий ( $n \rightarrow \infty$ ),  $\langle x_\infty \rangle = \langle y_\infty \rangle = 0$  и  $\langle z_\infty \rangle = 1/[\mu_s(1 - \langle \cos \gamma \rangle)]$  дают координаты центра симметрии статистического распределения фотонов. В частности, координата  $\langle z_\infty \rangle$  может быть интерпретирована как среднее расстояние между последовательными эффективно изотропными актами рассеяния, а ее обратная величина определяется как приведенный коэффициент рассеяния  $\mu'_s$ :

$$\mu'_s = \mu_s(1 - \langle \cos \gamma \rangle). \tag{3.48}$$

В случае изотропного рассеяния  $\langle \cos \gamma \rangle = 0$  и  $\mu'_s = \mu_s$ . В случае рассеяния вперед  $\langle \cos \gamma \rangle = 1$  и  $\mu'_s = 0$ .

### 3.7. УРАВНЕНИЕ $P_1$ И СТАНДАРТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Сведем уравнения  $P_1$ -приближения к уравнению для плотности фотонов  $U(\mathbf{r}, t)$ . Из уравнения (3.42) получаем  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{v(\mu'_s + \mu_a)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \frac{v}{3(\mu'_s + \mu_a)} \nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{(\mu'_s + \mu_a)} s_1(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{3D}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - D \nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{3D}{v} s_1(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (3.49)$$

где мы определили коэффициент диффузии как  $D = \frac{v}{3(\mu'_s + \mu_a)}$ . Подставляя выражение для  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  в уравнение (3.41), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) + v\mu_a U(\mathbf{r}, t) - \frac{3D}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - D \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) + \\ + \frac{3D}{v} \nabla \cdot s_1(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (3.50)$$

Из уравнения (3.41) следует, что

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r}, t) - \partial/\partial t(U(\mathbf{r}, t)) - v\mu_a U(\mathbf{r}, t).$$

Подставляя это выражение и перегруппировывая члены, в итоге получаем уравнение  $P_1$ -приближения для плотности фотонов:

$$\begin{aligned}\nabla^2 U(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{v^2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \left( 1 + \frac{3D}{v} \mu_a \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{v\mu_a}{D} U(\mathbf{r}, t) - \\ - \frac{3}{v^2} \frac{\partial S_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{D} S_0(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{v} \nabla \cdot s_1(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (3.51)$$

Делая некоторые допущения, которые часто справедливы в случае распространения света в биологической ткани, можно свести уравнение (3.51) к стандартному уравнению диффузии (СУД). Перечислим эти допущения.

1. Условие сильного рассеяния, или  $\mu_a \ll \mu'_s$ . Это условие означает, что в среднем фотон подвергнется большому числу эффективно изотропных актов рассеяния, перед тем как поглотиться. В этом случае

$$\frac{3D\mu_a}{v} + \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu'_s} \ll 1,$$

и второй член в правой части уравнения (3.51) сводится к следующему:

$$(1/D) \partial(U(\mathbf{r}, t))/\partial t.$$

2. Характерное время изменений  $U(\mathbf{r}, t)$  и  $S_0(\mathbf{r}, t)$  намного больше, чем среднее время между столкновениями  $\frac{1}{v(\mu_a + \mu'_s)}$ . Это условие может быть выражено формальным неравенством:  $\partial/\partial t \ll v(\mu_a + \mu'_s) = v^2/(3D)$ . Следовательно,

$$\frac{3}{v^2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \ll \frac{1}{D} \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.52)$$

$$\frac{3}{v^2} \frac{\partial S_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \ll \frac{1}{D} S_0(\mathbf{r}, t). \quad (3.53)$$

В частотном подходе, когда гармоническая временная зависимость определяется множителем  $\exp(-i\omega t)$ , оператор временной производной превращается в множитель  $-i\omega$ . Здесь  $\omega$  – угловая частота модуляции интенсивности (которую не следует путать с частотой света). В результате рассматриваемое условие устанавливает верхний предел частоты модуляции  $\omega \gg v^2/(3D)$ . Для биологических тканей СУД обычно становится неприменимым при частотах модуляции порядка 1 ГГц [J.B. Fishkin, S. Fantini].

3. Член, описывающий функцию источника изотропен, т. е.  $s_1(\mathbf{r}, t)$ .

С этими допущениями  $P_1$ -уравнение (3.51) приводится к стандартному уравнению диффузии:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 U(\mathbf{r}, t) - v\mu_a U(\mathbf{r}, t) + S_0(\mathbf{r}, t), \quad (3.54)$$

а зависимость потока фотонов  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  от плотности фотонов  $U(\mathbf{r}, t)$  определяется законом Фика:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D\nabla U(\mathbf{r}, t). \quad (3.55)$$

При фазовой модуляции  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ , и уравнение диффузии принимает форму уравнения Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = -\frac{S_0(\mathbf{r})}{D}, \quad (3.56)$$

где  $k^2 = (i\omega - v\mu_a)/D$ .



### 3.8. РЕШЕНИЕ СТАНДАРТНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПРИ МОДУЛЯЦИОННОМ ПОДХОДЕ

Решение диффузионного уравнения для гомогенной бесконечной среды, содержащей гармонически модулированный точечный источник мощности  $P(\omega)$ , расположенный в точке  $\mathbf{r} = 0$ , дается следующим соотношением [D.A. Voas, M.A. O'Leary, B. Chance, A.G. Yodh]:

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \frac{P(\omega) e^{ikr}}{4\pi D r}. \quad (3.57)$$

Явные выражения для средней плотности фотонов ( $U_{DC}$ ), амплитуды ( $U_{AC}$ ) и фазы ( $\Phi$ ) волны плотности фотонов выглядят следующим образом:

$$U_{DC}(r) = \frac{P_{DC}}{4\pi D} \frac{e^{-r(v\mu_a/D)^{1/2}}}{r}, \quad (3.58)$$

$$U_{AC}(r, \omega) = \frac{P(\omega)}{4\pi D} \frac{e^{-r(v\mu_a/2D)^{1/2}} \left[ \left( 1 + \frac{\omega^2}{v^2 \mu_a^2} \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2}}{r}, \quad (3.59)$$

$$\Phi(r, \omega) = r(v\mu_a/2D)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\omega^2}{v^2 \mu_a^2} \right)^{1/2} - 1 \right] + \Phi_s, \quad (3.60)$$

где  $\Phi_s$  – фаза источника в радианах.

### 3.9. МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Для предсказания и коррекции эффектов, связанных с указанными свойствами биотканей, необходимы достоверные математические модели переноса излучения. Перенос нейтральных частиц через рассеивающую среду довольно точно описывается уравнением Больцмана. Таким образом, это уравнение дает основу для изучения распространения фотонов при условии, что их волновые свойства игнорируются. Уравнение Больцмана является сложным интегро-дифференциальным уравнением, которое не может быть решено аналитически, кроме некоторых частных случаев. Поэтому для спектроскопии биотканей были разработаны и применены альтернативные методы.

**Двухслойная диффузионная модель.** Многие исследователи разрабатывали различные аналитические модели для случая простейшей модели неоднородной среды, а именно бесконечного слоя с оптическими свойствами  $\mu_{a,1}$  и  $\mu'_{s,1}$  и толщиной  $d$  над полубесконечным полупространством с оптическими свойствами  $\mu_{a,2}$  и  $\mu'_{s,2}$ , как схематически показано на рис. 3.3.

В конце 1980-х гг., были разработаны различные аналитические и численные модели, основанные на диффузионной теории и теории случайных блужданий [S.Takatani, M.D. Graham]. Модель Такатани и Грэхема получила дальнейшее развитие в работах Шмитта и его сотрудников [J.M. Schmitt, G.X. Zhou, E.C. Walker, R.T. Wall], где было учтено отражение на границе и в результате получено довольно громоздкое выражение для радиального потока, отраженного назад от трехслойной среды, причем верхний слой рассматривался просто как поглотитель, зависимый от длины волны. Не так давно была предложена частотно-модуляционная модель, основанная на пространственном преобразовании Фурье [I. Dayan, S. Havlin, G.H. Weiss]. Эта модель была усовершенствована Кинле и сотрудниками [A. Kienle, M.S. Patterson], которые учли эффекты отражения на границе. Рассмотрим временную форму пространственно-однородного уравнения диффузии:

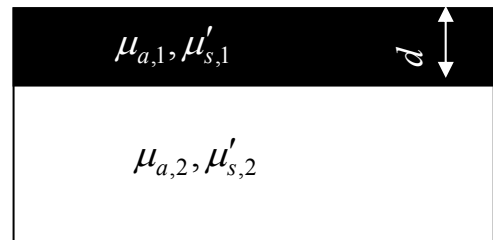


Рис. 3.3. Схема простейшей неоднородной геометрии: бесконечный слой толщиной  $d$  поверх полубесконечного полупространства

$$\left( D\nabla^2 - \mu_a c - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi(\mathbf{r}, t) = -q(\mathbf{r}, t).$$

При рассмотрении источника, гармонически колеблющегося на частоте  $\omega$ , удобно произвести временное преобразование Фурье, приводящее к дифференциальному уравнению для амплитуд гармоник:

$$\left(D\nabla^2 - (\mu_a c + i\omega)\right)\Phi(\mathbf{r}, \omega) = -q(\mathbf{r}, \omega).$$

Теперь рассмотрим двуслойную модель, описанную выше. Полученное уравнение применимо в обоих слоях, но с различными транспортными характеристиками  $D_1, \mu_{a,1}$  и  $D_2, \mu_{a,2}$  соответственно в первом и втором слое. Рассмотрим член уравнения, описывающий источник. Когда многократно рассеивающая среда освещается тонким коллимированным пучком, стандартным подходом является замена последнего на эквивалентный изотропный источник, помещенный на глубине  $z_0$  в среде. В этом случае необходимо решить следующую пару уравнений с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \left(D_1\nabla^2 - (\mu_{a,1}c + i\omega)\right)\Phi_1(\mathbf{r}) &= -q_0\delta(x, y, z - z_0), & 0 \leq z < d, \\ \left(D_2\nabla^2 - (\mu_{a,2}c + i\omega)\right)\Phi_2(\mathbf{r}) &= 0, & d \leq z. \end{aligned}$$

Удобно использовать преобразование Фурье для перехода от этих уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно  $z$ . Для этого рассмотрим двумерное преобразование Фурье  $\Phi$  по отношению к координатам  $x$  и  $y$ :

$$\phi(z, s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z) \exp[i(s_1x + s_2y)] dx dy.$$

Вычисляя этот двумерный фурье-образ и используя азимутальную симметрию задачи, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_1(z, s) - \alpha_1^2\phi_1(z, s) = -\frac{q_0}{D_1}\delta(z - z_0), \quad 0 \leq z < d,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_2(z, s) - \alpha_2^2\phi_2(z, s) = 0, \quad d \leq z,$$

где  $\alpha_1^2 = (D_1s^2 + \mu_{a,1}c + i\omega)/D_1$  и  $s^2 = s_1^2 + s_2^2$ .

Граничные условия, которым должны удовлетворять  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , выбираются из следующих соображений.

1. Наличие разности показателей преломления на верхней границе среды сможет быть точно учтено, если положить  $\phi_1 = 0$  на экстраполированной границе при  $z = -z_b$ , а не на физической границе  $z = 0$ . Положение экстраполированной границы задается соотношением

$$z_b = 2D_1 \frac{1 + R_{\text{eff}}}{1 - R_{\text{eff}}},$$

где  $R_{\text{eff}}$  зависит от отношения показателей преломления [J.V. Fishkin, E. Gratton] и равно 0,493 для отношения 1,4:1, типичного для границы воздух–ткань. Тогда решение уравнений, приведенных выше, должно удовлетворять условию

$$\phi(-z_b, s) = 0.$$

2. Условие непрерывности плотности потока фотонов и самого потока на границе раздела сред (при условии согласования показателей преломления) требует, чтобы

$$\frac{\phi_1(d, s)}{\phi_2(d, s)} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = 1, \quad D_1 \frac{\partial \phi_1(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=d} = D_2 \frac{\partial \phi_2(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=d}.$$

3. Требование ограниченности решения на бесконечности в нижнем полупространстве дает условие

$$\phi_2(\infty, s) = 0.$$

Накладывая эти условия на общее решение уравнений:

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi_1(z, s) - \alpha_1^2 \phi_1(z, s) = -\frac{q_0}{D_1} \delta(z - z_0), \quad 0 \leq z < d,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi_2(z, s) - \alpha_2^2 \phi_2(z, s) = 0, \quad d \leq z,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi_1(z, s) - \alpha_1^2 \phi_1(z, s) = -\frac{1}{D_1} \delta(z - z_0), \quad 0 \leq z < l,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi_2(z, s) - \alpha_2^2 \phi_2(z, s) = 0, \quad l \leq z,$$

получаем частное решение

$$\begin{aligned}
\phi_1(z, s) &= \frac{\sinh[\alpha_1(z_b + z_0)]}{D_1\alpha_1} \times \\
&\times \\
&\times \frac{D_1\alpha_1 \cosh[\alpha_1(d - z)] + D_2\alpha_2 \sinh[\alpha_1(d - z)]}{D_1\alpha_1 \cosh[\alpha_1(d + z_b)] + D_2\alpha_2 \sinh[\alpha_1(d + z_b)]} - \\
&\frac{\sinh[\alpha_1(z_0 - z)]}{D_1\alpha_1}, \quad 0 \leq z < z_0, \\
\phi_1(z, s) &= \frac{\sinh[\alpha_1(z_b + z_0)]}{D_1\alpha_1} \times \\
&\times \frac{D_1\alpha_1 \cosh[\alpha_1(d - z)] + D_2\alpha_2 \sinh[\alpha_1(d - z)]}{D_1\alpha_1 \cosh[\alpha_1(d + z_b)] + D_2\alpha_2 \sinh[\alpha_1(d + z_b)]}, \quad z_0 \leq z < d, \\
\phi_2(z, s) &= \frac{\sinh[\alpha_1(z_b + z_0)] \exp[\alpha_2(d - z)]}{D_1\alpha_1 \cosh[\alpha_1(d + z_b)] + D_2\alpha_2 \sinh[\alpha_1(d + z_b)]},
\end{aligned}$$

из которого плотность фотонов как функция расстояния источник–детектор  $r_{sd}$  и глубины  $z$  может быть найдена с помощью обратного преобразования Ханкеля:

$$\begin{aligned}
\Phi(r_{sd}, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z, s) \exp[-i(s_1x + s_2y)] ds_1 ds_2 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z, s) s J_0(sr) ds.
\end{aligned}$$

В итоге может быть получен переизлученный поток  $J$  с использованием обычного соотношения  $J = -\left. \frac{D_1 \partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Борен, К.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами : пер. с англ. / К. Борен, Д. Хафмен. – М. : Мир, 1986.
2. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1973.
3. *Ван де Хюлст, Г.* Рассеяние света малыми частицами / Г. Ван де Хюлст. – М., 1961.
4. *Владимиров, В.С.* Расчет наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте-Карло / В.С. Владимиров, И.М. Соболев // Вычислительная математика. – 1958. – № 3.
5. *Гельфанд, И. М.* Представления группы вращений и группы Лоренца и их применение / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М., 1958.
6. *Грин, Н.* Биология : пер. с англ. / Н. Грин, У. Стаут, Д. Тейлор. – М. : Мир, 1996. – Т. 3. – 376 с.
7. *Куликов, К.Г.* Электродинамическая модель исследования оптических характеристик крови и скорости кровотока в капиллярном русле / К.Г. Куликов, А.М. Радин // Оптика и спектроскопия. – 2004. – Т. 96, № 3. – С. 522–534.
8. *Куликов, К. Г.* Моделирование тепловых процессов, вызываемых воздействием лазерного излучения на органические среды / К. Г. Куликов // ЖТФ. – 2009. – Т. 79, вып. 2. – С. 96–103.
9. *Ладыженская, О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973.
10. *Молотков, Л. А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей био- и слоистых сред / Л. А. Молотков. – СПб. : Наука, 2001. – 348 с.
11. *Ньютон, Р.* Теория рассеяния волн и частиц : пер. с англ. / Р. Ньютон. – М. : Мир, 1969.
12. *Плетнев, С. Д.* Лазеры в клинической медицине / С. Д. Плетнев. – М. : Медицина, 1996. – 427 с.
13. *Тучин, В. В.* Исследование биотканей методами светорассеяния / В. В. Тучин // УФН. – 1997. – Т. 167. – С. 517–539.
14. *Ishimaru, A.* Wave Propagation and Scattering in Random Media / A. Ishimaru. – San-Diego : Academic Press, 1978.
15. *Chylek, P.* Effective medium approximations for heterogeneous particles / P. Chylek, G. Videen, D. J. W. Geldart et al. // Light Scattering by Nonspherical Particles : Theory, Measurements and Applications / Ed. by M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier, L. D. Travis. – San-Diego : Academic Press, 2000. – Ch. 9. – P. 273–308.

16. *Cruzan, O.R.* Translational addition theorems for spherical vector wave functions / O.R. Cruzan // *Quart. Appl. Math.* – 1962 – V. 20, N. 1. – P. 33–40.
17. *Flatau, P.* SCATTERLIB: Light scattering codes library / P. Flatau // URL: [atol.ucsd.edu/~pflatau/scatlib/](http://atol.ucsd.edu/~pflatau/scatlib/).
18. *Kerker, M.* The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation / M. Kerker. – San-Diego : Academic Press, 1969.
19. *Mishchenko, M.I.* Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements and Applications / M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, L.D. Travis. – San-Diego: Academic Press, 2000.
20. *Kattawar, G.W.* Electromagnetic scattering from absorbing spheres / G.W. Kattawar, G.N. Plass // *Appl. Optics.* – 1967. – V. 6, № 8/ – 1377-1382
21. *Kulikov, K.G.* The modeling of the temperature field, formed inside multilayer biological tissue under the affect of the laser emission // *Proceedings of SPIE* – 2009. – V. 6597. – P. 11–21.
22. *Mishchenko, M.I.* Overview of scattering by nonspherical particles / M. I. Mishchenko, W. J. Wiscombe, L. D. Travis // *Light Scattering by Nonspherical Particles : Theory, Measurements and Applications* / Ed. by M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier, L. D. Travis. – San-Diego : Academic Press, 2000. – Ch. 2. – P. 29–60.
23. *Niemz, M.H.* Laser – Tissue Interactions : Fundamentals and Applications / M. H. Niemz. – Berlin, 1996. – 305 p.
24. *Tsang, L.* Theory of Microwave Remote Sensing / L. Tsang, J. A. Kong, R. T. Shin. – N.Y. : Wiley, 1985.
25. *Prahl, S.A.* Light Transport in Tissue: PhD dissertation / S. A. Prahl. – Austin, Texas : The University of Texas at Austin, 1988.
26. *Tuchin, V.V.* Tissue Optics: Light Scattering Methods and Instruments for Medical Diagnosis / V. V. Tuchin // *SPIE Tutorial Texts in Optical Engineering.* – 2000. – V. TT38.
27. *Waterman, P.C.* Symmetry, unitarity and geometry in electromagnetic scattering / P. C. Waterman // *Phys. Rev. D.* – 1971. – V. 3, № 4. – P. 825–839.

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Решение многих задач теоретической и математической физики, связанных, например, с изучением процессов теплопроводности и взаимодействия излучения с веществом, распространения электромагнитных и звуковых волн, с разработкой теории ядерных реакторов и внутреннего строения звезд, приводит к использованию различных специальных функций, как например, цилиндрическим, сферическим и др.

Характерная особенность этих функций состоит в том, что многие из них являются решениями уравнений с особыми точками вида:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y = 0,$$

где коэффициент  $p(x)$  обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной  $x$ . Решение таких уравнений имеют ряд специфических свойств. В этой главе мы рассмотрим основные свойства цилиндрических и сферических функций, а точнее, простейшего их класса – полином Лежандра. Приведем примеры специальных функций:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt - \text{гамма-функция};$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt - \text{интеграл вероятности};$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt - \text{интегральный синус};$$

$$Ci(x) = -\int_0^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \text{интегральный косинус};$$

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}} - \text{эллиптический интеграл первого рода};$$

$$E(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x^2t^2)}{(1-t^2)}} dt - \text{эллиптический интеграл второго рода}.$$

Цилиндрическими функциями называются решения уравнения Бесселя

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) u = 0$$



Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе как функции Бесселя.

Сферическими функциями называются решения уравнения

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \nu(\nu + 1)u = 0$$

$u(x) = P_\nu(x)$  – сферическая функция Лежандра первого рода.

### П1.1. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

**Эйлеров интеграл первого рода.** Так называется (по предложению Лежандра) интеграл вида

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (\text{П1.1})$$

$x > 0, y > 0$ . Он представляет собой функцию от двух переменных параметров  $x$  и  $y$ : функцию В – бета-функцию.

Заметим, что если одновременно  $x \geq 1, y \geq 1$ , то  $B(x, y)$  – интеграл собственный.

Если же хотя бы одно из этих двух неравенств нарушается, то  $B(x, y)$  – несобственный интеграл. Покажем, что  $B(x, y)$  сходится, если одновременно  $x > 0, y > 0$ . Имеем

$$B(x, y) = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Рассмотрим интеграл  $J_1 = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ . Точка  $t = 0$  – особая точка, если  $x < 1$ :

$$f(t) = t^{x-1} (1-t)^{y-1} \approx \frac{1}{t^{1-x}}, \quad \forall y \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Известно, что интеграл вида  $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-x}}$  сходится, если  $1-x < 1 \Rightarrow x > 0$ .

Итак,  $J_1$  сходится при  $x > 0$  и  $\forall y$ .

Рассмотрим интеграл  $J_2 = \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ . Точка  $t = 1$  – особая точка, если  $y < 1$ :

$$f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} \approx \frac{1}{(1-t)^{1-y}}, \forall x \text{ при } t \rightarrow 1.$$

Известно, что интеграл вида  $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-y}}$  сходится, если  $1-y < 1 \Rightarrow y > 0$ . Итак,  $J_2$  сходится при  $y > 0$  и  $\forall x$ .

Отсюда заключаем, что  $B(x, y)$  сходится, если одновременно  $x > 0, y > 0$ .

Отметим некоторые свойства бета-функции.

1. Свойство симметрии:

$$B(x, y) = B(y, x).$$

*Доказательство.* Сделаем замену  $t = 1 - \tau \Rightarrow -dt = d\tau$ :

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{y-1} (1-\tau)^{x-1} d\tau = B(y, x).$$

2. Пусть  $y > 1$ ,

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \underbrace{(1-t)^{y-1} \frac{t^x}{x}}_{=0} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-2} dt.$$

Запишем  $t^x = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$ , тогда

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} \left[ \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-2} dt - \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \right] = \frac{y-1}{x} [B(x, y-1) - B(x, y)].$$

Таким образом,

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} [B(x, y-1) - B(x, y)]$$

или

$$B(x, y) = \frac{(y-1)B(x, y-1)}{x+y-1}. \quad (\text{П1.2})$$

По свойству симметрии можно записать

$$B(x, y) = \frac{(x-1)B(x-1, y)}{x+y-1}, \quad x > 1.$$

Пусть теперь  $y = n$  ( $n$ -натуральное), тогда

$$B(x, y) = \frac{n-1}{x+n-1} \cdot \frac{n-2}{x+n-2} \cdot \frac{n-3}{x+n-3} \cdots \frac{1}{x+1} \cdot B(x, 1),$$

но  $B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$ , откуда  $B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$ .

Пусть  $x = m$  ( $m$  – натуральное), тогда

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Другое выражение для бета-функции. Сделаем в интеграле

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

замену, приняв  $t = \frac{\xi}{1+\xi} \Rightarrow \xi = \frac{t}{1-t} \Rightarrow dt = \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}$ .

Тогда

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{\xi^{x-1}}{(1+\xi)^{x-1}} \frac{1}{(1+\xi)^{y-1}} \frac{d\xi}{(1+\xi)^2} = \int_0^\infty \frac{\xi^{x-1} d\xi}{(1+\xi)^{x+y}}.$$

4. Отметим без доказательства еще одно свойство

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

**Эйлеров интеграл второго рода.** Это название было присвоено Лежандром следующему интегралу вида

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

который сходится при любом  $x > 0$  и определяет функцию  $\Gamma(x)$  – гамма-функцию. Покажем, что  $\Gamma(x)$  сходится при  $x > 0$ . В самом деле

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Пусть  $J_1 = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ ,  $J_2 = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ . Рассмотрим интеграл  $J_1$ . Точка

$t = 0$  – особая точка, если  $x < 1$ ,  $f(t) = e^{-t} t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \approx \frac{1}{t^{1-x}}$  при  $t \rightarrow 0$ , инте-

грал  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$  сходится, если  $1-x < 1 \Rightarrow x > 0$ . Итак,  $J_1$  сходится при  $x > 0$ .

Рассмотрим интеграл  $J_2$ . Для любого  $x$   $f(t) = e^{-t}t^{x-1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ . Это значит, что существует число  $b$  такое, что для  $t \geq b$  будет, например,  $\frac{t^{x-1}}{e^t} < 1$ . Можно считать, что это справедливо для  $b > 1$ , а тогда для  $t \geq b$   $\frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \frac{1}{t^2}$ . Известно, что  $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$  ( $b > 1$ ) сходится, следовательно,  $J_2$  сходится для любого  $x$ , а тогда  $\Gamma(x)$  сходится при  $x > 0$ . Рассмотрим выражение  $x\Gamma(x)$ :

$$x\Gamma(x) = x \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} dt = x \int_0^\infty e^{-t} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \int_0^\infty e^{-t} d(t^x) = \underbrace{e^{-t}t^x}_{=0} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = \Gamma(x+1).$$

Итак,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad (\text{П1.3})$$

Применяя (П1.3) повторно, получим

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= \Gamma((x+n-1)+1) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x), \end{aligned}$$

В частности, при  $x=1$ , будем иметь  $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$ ,

но  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ , следовательно,

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (\text{П1.4})$$

Отметим следующее соотношение, связывающее между собой функции  $\Gamma$  и  $B$ :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{П1.5})$$

На рис. П1.1 приведен график гамма-функции, построенный в системе Maple 10.

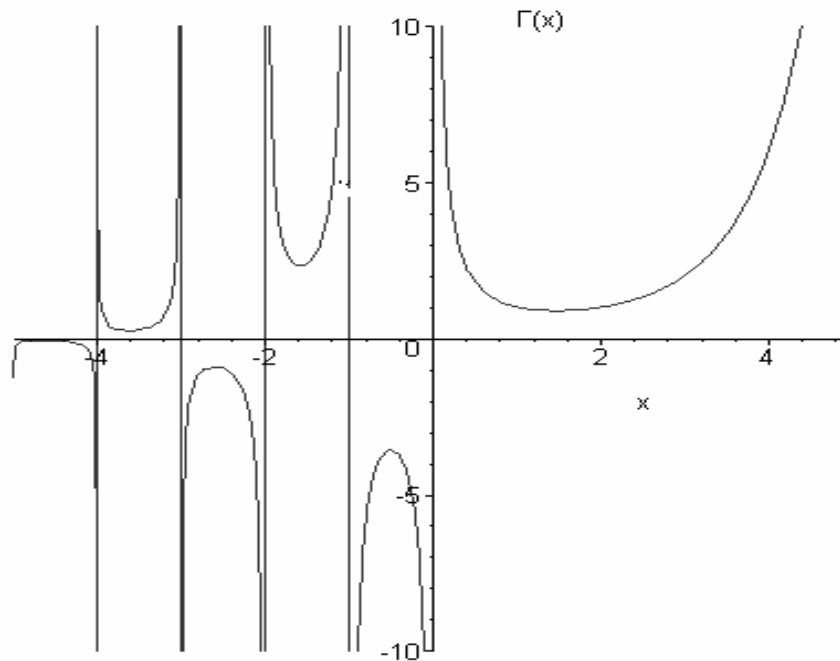


Рис. П1.1. График гамма-функции

Отметим, что Эйлеровы интегралы первого и второго рода определяются и для комплексных значений аргументов. В случае комплексных  $x$  и  $y$  интеграл  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  сходится, когда  $\operatorname{Re}(x) > 0$  и  $\operatorname{Re}(y) > 0$ . Гамма-функция – одна из важнейших трансцендентных функций математического анализа, распространяющая понятие факториала на случай комплексных значений  $z$ . Под гамма-функцией понимается значение интеграла  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  для всех комплексных значений  $z$ , для которых  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Аналитическое продолжение гамма-функции на всю комплексную плоскость можно получить с помощью соотношения

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}, \quad (\text{П1.6})$$

вытекающего из формулы  $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ . Из формулы (П1.6) следует, что функция  $\Gamma(z)$  будет аналитической всюду, кроме точек  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), в которых  $\Gamma(z)$  имеет полюсы первого порядка с

вычетами  $\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) \frac{(-1)^n}{n!}$ . Кроме перечисленных свойств гамма-функции отметим следующие:

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \quad (\text{П1.7})$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{П1.8})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-n) = \infty, \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \quad (\text{П1.9})$$

С гамма-функцией тесно связана еще одна специальная функция – пси-функция или логарифмическая производная гамма-функции:

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z)], \quad \Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma = 0,5772\dots,$$

где  $\gamma$  – постоянная Эйлера–Маскерони.

## П1.2. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ

Интеграл вероятности встречается в различных разделах прикладной математики, в частности в теории вероятностей и теории ошибок, в математической теории теплопроводности и в других разделах математической физики.

Интегралом вероятности  $\Phi(z)$  называется функция, которая для любых комплексных  $z$  определяется равенством

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (\text{П1.10})$$

где интегрирование производится по произвольному пути, соединяющему начало координат с точкой  $t = z$ . Так как подынтегральное выражение является целой функцией комплексной переменной  $t$ , вид пути интегрирования не играет роли и можно считать, что интегрирование производится вдоль отрезка прямой, соединяющей точки  $t = 0$  и  $t = z$ . Заметим, что ин-

теграл  $\varphi(z) = \int_0^z f(t) dt$ , взятый по произвольному пути, принадлежащему односвязной области, в которой  $f(t)$  регулярна, есть регулярная функция в этой области. Следовательно,  $\Phi(z)$  представляет собой целую функцию, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся при любых значениях переменной  $z$ . Для того чтобы получить это разложение, доста-

точно подставить в  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  соответствующий ряд для экспоненты и проинтегрировать его почленно. Тогда

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad |z| < \infty.$$

Отметим, что при вещественных значениях аргумента  $z = x$  функция  $\Phi(x)$  представляет собой вещественную монотонно возрастающую функцию, так как  $\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Значение функции при нуле  $\Phi(0) = 0$ , а при возрастании  $x$  быстро приближается к предельному значению  $\Phi(\infty) = 1$ , так как  $\int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Разница между  $\Phi(x)$  и этим предельным значением может быть представлена в форме

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad x > 0.$$

Получим асимптотическую формулу (более подробно об асимптотических оценках см. **прил. 2** настоящего пособия). Для этого воспользуемся формулой  $1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$  и преобразуем входящий в нее интеграл с помощью интегрирования по частям, т. е.

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} d(e^{-t^2}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{e^{-t^2}}{t} \Big|_{t=x}^{t=\infty} + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} [1 + r(x)], \quad x > 0,$$

$$\text{где } r(x) = -xe^{-x^2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Оценим  $r(x)$ :

$$|r(x)| \leq -xe^{-x^2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{t^2} dt \quad (t \geq x) \leq \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2}}{x^2} dt = -\frac{e^{x^2}}{x^2} \frac{e^{-t^2}}{2} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2x^2}$$

Следовательно, имеем

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], x \rightarrow +\infty. \quad (\text{П1.11})$$

На рис. П1.2 приведен график функции  $\Phi(x)$ , построенный в системе Maple 10.

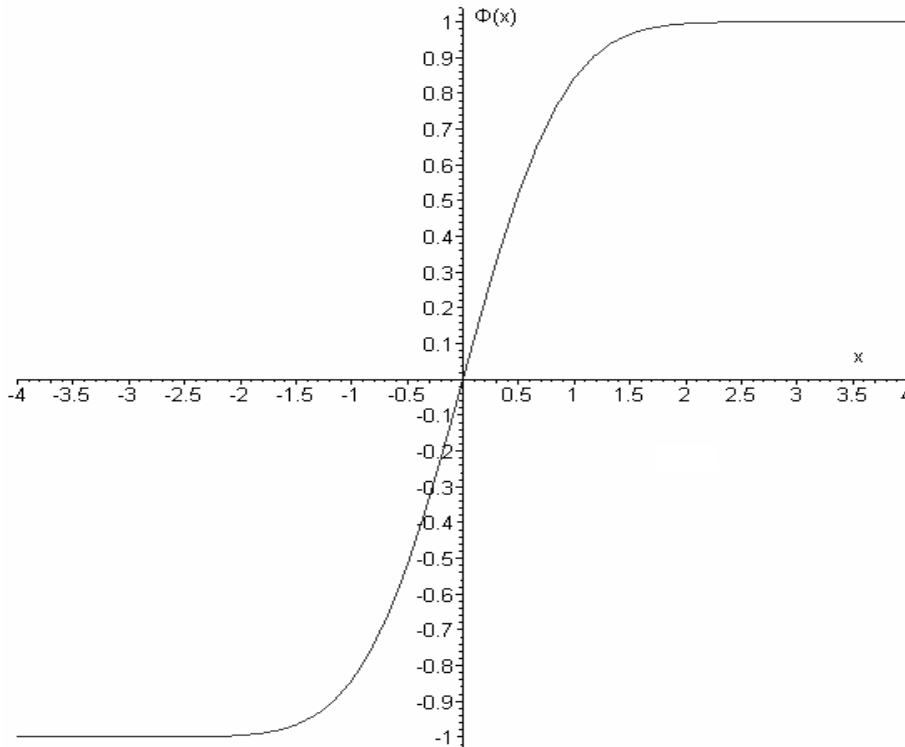


Рис. П1.2. График функции  $\Phi(x)$

### П1.3. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Многие задачи приводят к необходимости решать уравнение вида

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u = 0. \quad (\text{П1.12})$$

К такому уравнению мы придем, например, при решении задач методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами (задача о колебании круглой мембраны, об остывании круглого цилиндра и др.). Уравнение (П1.12) называется уравнением Бесселя. Решения этого уравнения, не равные тождественно нулю, называются цилиндрическими (или бесселевыми) функциями. Здесь  $z$  – комплексная переменная,  $\nu$  – некоторый параметр, вообще говоря, комплексный.



Один класс цилиндрических функций мы построим следующим образом. Будем искать решение уравнения (П1.12) в виде обобщенного степенного ряда

$$u = z^\sigma (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots), \quad (\text{П1.13})$$

где  $a_0 \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} zu' &= z^\sigma [a_0 \sigma + a_1 (\sigma + 1)z + a_2 (\sigma + 2)z^2 + \dots], \\ z^2 u'' &= z^\sigma [a_0 \sigma (\sigma - 1) + a_1 (\sigma + 1) \sigma z + a_2 (\sigma + 1) (\sigma + 2) z^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (П1.12) в виде

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - v^2)u = 0; \quad (\text{П1.14})$$

подставим значения  $u$ ,  $zu'$ , и  $z^2 u''$  в уравнение (П1.14) и соберем члены с одинаковыми степенями  $z$ :

$$\begin{aligned} z^\sigma [a_0 \sigma^2 - a_0 v^2] + z^{\sigma+1} [a_1 (\sigma + 1)^2 - a_1 v^2] + z^{\sigma+2} [a_2 (\sigma + 2)^2 - a_2 v^2 + a_0] \dots \\ \dots + z^{\sigma+n} [a_n (\sigma + n)^2 - a_n v^2 + a_{n-2}] + \dots \equiv 0. \end{aligned}$$

Чтобы ряд (П1.13) был решением уравнения (П1.14), необходимо выполнение равенств

$$\begin{aligned} a_0 [\sigma^2 - v^2] &= 0; \\ a_1 [(\sigma + 1)^2 - v^2] &= 0; \\ a_2 [(\sigma + 2)^2 - v^2] + a_0 &= 0; \\ \vdots & \\ a_n [(\sigma + n)^2 - v^2] + a_{n-2} &= 0; \\ \vdots & \end{aligned}$$

Из первого равенства находим  $\sigma = \pm v$ , так как  $a_0 \neq 0$ . Возьмем  $\sigma = v$ . Тогда из второго равенства находим  $a_1 = 0$ . Далее

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma + n)^2 - v^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2v + n)n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Очевидно  $a_{2k+1} = 0$  для всех целых неотрицательных  $k$ , а

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2 (v + k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} (v + k)(v + k - 1) \dots (v + 1)k!}$$

Полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v + 1)}$$

и используя формулы (П1.3) и (П1.4), получим

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} \Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}.$$

Таким образом, мы построили одно формальное решение уравнения (П1.12) в виде обобщенного степенного ряда:

$$u = u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \quad (\text{П1.15})$$

где  $z$  – комплексная переменная, принадлежащая плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ :  $|z| < \infty, |\arg z| < \pi$ ;  $v$  – параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Ограничение, наложенное на  $z$ , необходимо для однозначности функции  $z^v$  и может быть отброшено, если  $v$  – целое число. Докажем, что ряд (П1.15) сходится. Обозначим общий член этого ряда

$$u_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}.$$

Будем иметь

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2+v} k! \Gamma(k+v+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v} (k+1)! \Gamma(k+v+2)} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right|, \quad (\text{П1.16})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right| = 0, |z| < \infty.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд (П1.15) сходится при любых конечных  $z$ . В плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  каждый член ряда (П1.15) – однозначная и регулярная функция комплексной переменной  $z$ . Данный ряд сходится при любых  $z$  и  $v$ , причем в области  $|z| < R$  и  $|v| < N$  ( $R, N$  – произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных. Действительно, начиная с достаточно большого  $k$ , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему, равное на основании (П1.16) величине

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \right| \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби  $q$ , не зависящей от  $z$  и  $\nu$ . Отсюда, согласно известному признаку сходимости, следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области.

**Замечание.** Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  сходится равномерно в некоторой области, если для всякого  $z$ , принадлежащего этой области и  $k \geq m$ , выполняется неравенство  $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q \leq 1$ , где  $q$  не зависит от  $z$ .

Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , то сумма ряда определяет некоторую функцию комплексной переменной  $z$ , регулярную в рассматриваемой области. Эта функция называется функцией Бесселя первого рода с индексом  $\nu$  и обозначается символом  $J_\nu(z)$ . Таким образом,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi, \quad (\text{П1.17})$$

Покажем, что этот ряд в его области сходимости является фактическим решением уравнения (П1.12). Равномерно сходящийся ряд регулярных функций можно дифференцировать почленно. Имеем

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad u' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$u'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(2k+\nu-1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-2}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

умножаем функцию  $u$  на  $\left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)$ , функцию  $u'$  — на  $\frac{1}{z}$ , функцию  $u''$  — на 1

и складываем, получим

$$\begin{aligned}
L(u) &= u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)u = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ (2k+v)(2k+v-1) + (2k+v) - v^2 \right] z^{2k+v-2}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)}.
\end{aligned}$$

Далее имеем  $\left[ (2k+v)(2k+v-1) + (2k+v) - v^2 \right] = 2^2 k(k+v)$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
L(u) &= \sum_{\substack{k=0 \\ (k=1)}}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k+v) z^{2k+v-2}}{2^{2k+v-2} k! \Gamma(k+v+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ (k-1) \rightarrow k}}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v-2}}{2^{2k+v-2} (k-1)! \Gamma(k+v)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} \equiv 0.
\end{aligned}$$

#### П1.4. ФУНКЦИИ ВЕБЕРА

По определению, цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка (П1.12), поэтому общее ее выражение содержится в формуле  $u = Z_\nu(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z)$ , где  $u_1$  и  $u_2$  – какие-нибудь линейно независимые решения уравнения (П1.12),  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра  $\nu$ . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда  $\nu$  отлично от целого числа. Действительно, для того чтобы записать общий интеграл уравнения (П1.12), необходимо получить второе линейно независимое решение. Поскольку уравнение (П1.12) не меняется при замене  $\nu$  на  $-\nu$ , то функция  $J_{-\nu}(z)$  также является решением уравнения (П1.12), т. е. второе решение может быть записано так:

$$u_2 = J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \quad (\text{П1.18})$$

Рассмотрим поведение функций (П1.17) и (П1.18) в окрестности начала координат. Если  $\nu$  не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при  $z \rightarrow 0$  будет

$$J_\nu(z) \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, |z| \rightarrow 0. \quad (\text{П1.19})$$

$$J_{-\nu}(z) \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}, |z| \rightarrow 0. \quad (\text{П1.20})$$

Эти формулы верны для всех  $\nu$  за исключением тех значений  $\nu$ , когда знаменатель обращается в бесконечность, т. е.  $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$  для (П1.19) и  $\nu \neq 1, 2, 3, \dots$  для (П1.20). Таким образом, при  $\nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  справедливы обе формулы. Далее,

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \neq \text{const}, \nu \neq \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, функции (П1.17) и (П1.18) будут линейно независимы, если  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , т. е. общее выражение цилиндрической функции при условии, что  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , будет таким:

$$u = A_\nu J_\nu(z) + B_\nu J_{-\nu}(z). \quad (\text{П1.21})$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). В этом случае

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}, |z| < \infty, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П1.22})$$

Функция (П1.22) регулярна на всей плоскости без разреза. Это целая функция. Далее,

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)},$$

поскольку  $\Gamma(k-n+1) = \infty$  для всех  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . В последней сумме произведем замену переменной суммирования  $k = s + n$ . Получим

$$J_{-n}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}}{s!(s+n)!} = (-1)^n J_n(z).$$

Таким образом, бесселевы функции, с целым индексом линейно зависимы:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поэтому выражение (П1.21) не является общим интегралом уравнения (П1.12) в этом случае. Следовательно, для целых  $n$  надо построить еще одно решение уравнения (П1.12). Будем предполагать, что  $\nu$  не является целым. Введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода  $Y_\nu(z)$ , которую для произвольных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , определим выражением

$$u = u_3 = Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad |z| < \infty, |\arg z| < \pi. \quad (\text{П1.23})$$

Это выражение для  $\nu$  не целого – цилиндрическая функция, линейно независимая с функцией Бесселя (П1.17). Функция (П1.23) – цилиндрическая функция второго рода или функция Вебера. В некоторых работах, посвященных теории функций Бесселя, для обозначения этой функции вместо  $Y_\nu(z)$  используется символ  $N_\nu(z)$ , а сама функция называется функцией Неймана. При  $\nu$ , равном целому числу, правая часть рассматриваемого выражения (П1.23) приобретает неопределенный вид, и мы условимся понимать под значением функции в этом случае предел  $Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z)$ . Так как числитель и знаменатель в (П1.23) – целые функции  $\nu$ , то рассматриваемый предел существует и может быть вычислен по правилу Лопиталья, применение которого дает

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}. \quad (\text{П1.24})$$

Из определения функции  $Y_\nu(z)$  следует, что эта функция регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , а при фиксированном  $z$  представляет собой целую функцию параметра  $\nu$ . Выражение (П1.23) удовлетворяет уравнению Бесселя. Докажем, что функция  $Y_n(z)$  удовлетворяет уравнению Бесселя. Имеем

$$L(J_\nu) \equiv J_\nu'' + \frac{1}{z} J_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu \equiv 0, \quad L(J_{-\nu}) \equiv J_{-\nu}'' + \frac{1}{z} J_{-\nu}' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_{-\nu} \equiv 0.$$

Продифференцируем каждое из этих тождеств по  $\nu$ . Получим

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} J_\nu \equiv 0, \quad L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} J_{-\nu} \equiv 0.$$

Умножим теперь первое соотношение на 1, а второе – на  $(-1)^n$  и вычтем одно из другого. Получим

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - (-1)^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} [J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}] \equiv 0.$$

Разделим последнее соотношение на  $\pi$  и перейдем к пределу при  $\nu \rightarrow n$ . Получим  $L(Y_n) \equiv 0$ , это и доказывает, что функция  $Y_n(z)$  – решение уравнения (П1.12). Решения  $u_1 = J_\nu(z)$  и  $u_3 = Y_\nu(z)$  линейно независимы между собой. Для  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  этот результат является следствием линейной независимости решений  $J_\nu(z)$  и  $J_{-\nu}(z)$ . Линейная независимость для  $\nu = n (n = 0, 1, 2, \dots)$  вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при  $z \rightarrow 0$ . Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любых значениях  $\nu$ , будет  $u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$ . Введем в рассмотрение еще две новые функции

$$u_4 = H_\nu^{(1)} = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad u_5 = H_\nu^{(2)} = J_\nu(z) - iY_\nu(z).$$

Это – цилиндрические функции третьего рода (функции Ханкеля). Очевидно, эти функции линейно независимы с функцией первого рода и между собой. Они определены для  $|z| < \infty, |\arg z| < \pi$ . Все цилиндрические функции при фиксированном  $z$  есть целые функции параметра  $\nu$ .

### П1.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ВЕБЕРА В ВИДЕ РЯДА

Ряд для функции Вебера  $Y_\nu(z)$ , где  $\nu$  – не целое, получается непосредственно из формул (П1.17), (П1.18) и (П1.23). Для того чтобы получить разложение в ряд функции  $Y_n(z)$ , достаточно воспользоваться формулой (П1.24) и вычислить производные по значку  $\nu$ , исходя из разложения (П1.17), причем ввиду соотношения  $Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , являющегося следствием (П1.24), можно ограничиться рассмотрением случая целых положительных  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Так как ряд (П1.17) сходится равномерно по отношению к  $\nu$ , мы можем дифференцировать его почленно (переход к пределу при  $\nu \rightarrow n$  под знаком суммы законен, так как ряд, полученный почленным дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно), получая

$$\left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right],$$

где  $\psi(z)$  – логарифмическая производная гамма - функции. Аналогично имеем

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-\nu}}{k! \Gamma(k-\nu+1)!} \left[ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right].$$

При  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  и  $\nu \rightarrow n$   $\Gamma(k-\nu+1) \rightarrow \infty$ ,  $\psi(k-\nu+1) \rightarrow \infty$ , поэтому первые  $n$  членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись формулами (П1.4), (П1.6), получим для таких  $k$

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(k-\nu+1)} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, n-1; \\ \frac{1}{(k-n)!}, & k = n, n+1, \dots, \infty. \end{cases}$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{p}{\sin(pz)} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(z)\sin(pz)}{p} \Rightarrow \\ \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma^2(1-z)} &= \frac{1}{p} [\Gamma'(z)\sin(pz) + \pi \cos(pz)\Gamma(z)] \Rightarrow \\ \frac{\psi(1-z)}{\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{\pi} [\Gamma'(z)\sin(\pi z) + \pi \cos(\pi z)\Gamma(z)]. \end{aligned}$$

Будем здесь предполагать, что  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $z = n-k$ . Тогда из последней формулы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} &= \frac{1}{\pi} \left[ \Gamma'(n-k) \underbrace{\sin(\pi(n-k))}_{=0} + \pi \cos(\pi(n-k)) \Gamma((n-k)) \right] = \\ &= (-1)^{n-k} (n-k-1)! \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} = \frac{1}{\pi} \begin{cases} (-1)^{n-k} (n-k-1)!, & k = 0, 1, 2, \dots, n-1; \\ \frac{\psi(k-n+1)}{\Gamma(k-n+1)}, & k = n, n+1, \dots, \infty. \end{cases}$$

Тогда



$$\left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} (n-k-1)! (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} -$$

$$- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k-n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(k-n+1) \right]$$

ИЛИ

$$\left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} -$$

$$- (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) \right].$$

Таким образом, можно записать (согласно (П1.24))

$$Y_n(z) = -\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ 2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) - \psi(k-1) \right], \quad (\text{П1.25})$$

причем  $|z| < \infty, |\arg z| < \pi, n = 0, 1, 2, \dots$ . Если принять во внимание, что

$\sum_{k=0}^{-1} \equiv 0$ , то окончательный результат верен и для  $n = 0$ . Можно также записать

сать

$$Y_n(z) = -\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!} + \frac{2}{p} J_n(z) \ln \frac{z}{2} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ \psi(k+n+1) + \psi(k+1) \right],$$

полученный результат показывает, что функция Вебера есть регулярная функция в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Далее,  $Y_n(z)$  есть решение, линейно не зависимое от решения  $J_n(z)$ .

Из (П1.25) вытекает, что при  $z \rightarrow 0$  справедливы асимптотические формулы

$$Y_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{p} \ln \frac{z}{2}, \quad Y_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{(n-1)!}{p} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

показывающие, что  $Y_n(z) \rightarrow \infty$ , когда  $z \rightarrow 0$ . Отметим также формулы

$$J_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} 1, \quad J_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, функция  $J_n(z)$  ограничена, когда  $z \rightarrow 0$ . Асимптотическое поведение функций Ханкеля при  $z \rightarrow 0$  имеет вид

$$H_n^{(1)}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} iY_n(z), \quad H_n^{(2)}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -iY_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, ограниченной при  $z \rightarrow 0$  остается только функция Бесселя первого рода.

### П1.6. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Будем исходить из представления (П1.17)

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < p.$$

Умножим это равенство на  $z^\nu$  и продифференцируем по  $z$ , получим

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+\nu) z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu-1} (k+\nu)}{k! 2^{2k+\nu-1} \Gamma(k+\nu+1)} = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu)} = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z). \quad (\text{П1.26})$$

Аналогично получаем

$$\frac{d}{dz} z^{-\nu} J_\nu(z) = z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (\text{П1.27})$$

Продифференцировав в левых частях (П1.26) и (П1.27), получим

$$z^\nu \frac{d}{dz} J_\nu(z) + \nu z^{-\nu} J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad (\text{П1.28})$$

$$z^{-\nu} \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) - \nu z^{-\nu-1} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (\text{П1.29})$$

Откуда

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) + \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z), \quad (\text{П1.30})$$

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = -J_{\nu+1}(z), \quad (\text{П1.31})$$

Складывая и вычитая равенства (П1.30) и (П1.31), получим

$$2 \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \quad (\text{П1.32})$$

$$\frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \quad (\text{П1.33})$$

Функции Бесселя второго и третьего рода удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, т. е. соотношениям (П1.26)–(П1.33). При  $\nu$ , отличном от целого числа, справедливость этих формул для функций Бесселя второго рода (функций Вебера) вытекает из определения функции Вебера и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого  $\nu$  требуемый результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к индексу  $\nu$ , что позволяет осуществить в соотношениях (П1.26)–(П1.33) предельный переход при  $\nu \rightarrow n$ . Отметим еще формулы

$$\left( \frac{d}{z dz} \right)^m z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z), \quad (\text{П1.34})$$

$$\left( \frac{d}{z dz} \right)^m z^{-\nu} J_{\nu}(z) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z). \quad (\text{П1.35})$$

Формулы (П1.34) и (П1.35) получаются путем повторного применения равенств (П1.26) и (П1.27). Приняв  $\nu = 0$ , из (П1.32) и (П1.33) получим

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = J_{-1}(z); J_{-1}(z) = -J_1(z).$$

### П1.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цилиндрические функции допускают простые интегральные представления, которые бывают двух типов: интегралы по некоторому отрезку (определенные интегралы) и контурные интегралы. Контурные интегралы удобнее, требуют меньше ограничений, но они более сложны. Определен-

ные интегралы наиболее часто встречаются в приложениях, поэтому мы ограничимся рассмотрением формул этого типа. Одно из наиболее простых интегральных представлений для функций Бесселя принадлежит Пуассону. Будем исходить из формул (П1.1) и (П1.5)

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Возьмем в этих формулах  $x = k + 1/2, y = \nu + 1/2$ . Тогда

$$\int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}} (1-s)^{\nu-\frac{1}{2}} ds = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k=0,1,2,\dots,\infty; \quad \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Делаем замену  $s = t^2 \Rightarrow 2tdt$ , тогда

$$2 \int_0^1 t^{2k-1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Откуда

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{2}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$$

Теперь можно записать

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{2}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Меняем порядок суммирования и интегрирования, тогда

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{k! \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) 2^{2k}}. \quad (\text{П1.36})$$

Воспользуемся формулой (П1.8), в которой примем  $z = k + 1/2$ . Тогда

$$2^{2k} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1) = \sqrt{\pi} \Gamma(k+1) \quad \text{или} \quad 2^{2k} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)k! = \sqrt{\pi} (2k)!.$$

Из (П1.36) находим

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{p}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos(zt)}.$$

Окончательно получаем

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{p}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, |\arg z| < p, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (\text{П1.37})$$

Так как подынтегральная функция четная, формулу (П1.37) можно переписать в виде

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{p}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-1}} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, |\arg z| < p, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (\text{П1.38})$$

Применяя к формуле (П1.38) подстановку  $t = \cos(\varphi), dt = -\sin(\varphi) d\varphi$ , при которой  $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sin^{2\nu}(\varphi)/\sin(\varphi)$  и  $\varphi = p$  при  $t = -1$ ;  $\varphi = 0$  при  $t = 1$ , получаем

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{p}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^p \sin^{2\nu}(\varphi) \cos(z \cos \varphi) dt, |\arg z| < p, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2} \quad (\text{П1.39})$$

Формула (П1.38) или равносильная ей формула (П1.39) – интегральное представление Пуассона.

Отметим еще основные интегральные представления для функций Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izch(t)-\nu t} dt, \operatorname{Im} z > 0, \quad (\text{П1.40})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izch(t)-\nu t} dt, \operatorname{Im} z < 0,$$

$\nu$  – любое.

**П1.8. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПУАССОНА**

Примем в (П1.37)  $\nu = 0, z = x$  – вещественное число. Тогда

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (\text{П1.41})$$

Отсюда, в частности, следует

$$|J_0(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin t \Big|_0^1 = 1.$$

Таким образом, для вещественных значений  $x$   $|J_0(x)| \leq 1$ . Примем теперь  $\nu = n + 1/2, n = 0, 1, 2, \dots$  Тогда

$$J_\nu(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad |\arg z| < \pi, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что функции Бесселя с положительным половинным индексом выражаются через элементарные функции. Но зная функции Бесселя с положительным половинным индексом, с помощью рекуррентных соотношений легко получить и функции с отрицательным половинным индексом. Например,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos(zt) dt = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z).$$

Таким образом,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z).$$

Лиувиллем доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

В качестве еще одного примера применения интегрального представления для цилиндрических функций рассмотрим вычисление интеграла

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a > 0, b \geq 0. \quad (\text{П1.42})$$

Для этого воспользуемся формулой (П1.41) и в интеграле сделаем замену  $t = \sin \varphi$ . Будем иметь

$$J_0(x) = \frac{2}{\rho} \int_0^{\rho/2} \cos(x \sin(\varphi)) d\varphi.$$

Тогда интеграл (П1.42) примет вид

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \frac{2}{\rho} \int_0^{\rho/2} \cos(bx \sin(\varphi)) d\varphi = \frac{2}{\rho} \int_0^{\rho/2} d\varphi \frac{2}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin(\varphi)) dx.$$

Воспользуемся известной формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0, b \geq 0.$$

Тогда

$$I = \frac{2a}{\rho} \int_0^{\rho/2} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2(\varphi)} = \frac{2a}{\rho} \int_0^{\rho/2} \frac{1}{\frac{a^2}{\sin^2(\varphi)} + b^2} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi)} =$$

(делаем замену  $\operatorname{ctg} \varphi = t$ )

$$= \frac{2a}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + b^2 + a^2 t^2} = \frac{2a}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{d(at)}{a^2 + b^2 + (at)^2} =$$

$$= \frac{2}{\rho} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Итак,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### П1.9. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА

Цилиндрические функции обладают простыми асимптотическими представлениями, удобными для аппроксимации этих функций при больших по модулю значениях  $z$  и фиксированном значении индекса  $\nu$ . Главные члены этих формул можно получить, исходя из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. Более точные выражения можно получить исходя из интегральных представлений. В данном подразделе мы не будем рассматривать строгий вывод асимптоти-

ческих представлений (более подробно об асимптотических оценках см. **прил. 2** настоящего пособия), а ограничимся следующими интуитивными соображениями.

Рассмотрим уравнение Бесселя (П1.12)

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)u = 0.$$

Сделаем подстановку:

$$u = \frac{w}{\sqrt{z}} \Rightarrow u' = \frac{w'}{\sqrt{z}} - \frac{w}{2\sqrt{z^3}} \Rightarrow u'' = \frac{w''}{\sqrt{z}} - \frac{w'}{\sqrt{z^3}} + \frac{3w}{4\sqrt{z^5}}.$$

Уравнение Бесселя примет вид

$$w'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - v^2}{z^2}\right]w = 0. \quad (\text{П1.43})$$

Если  $v$  ограничено,  $|z| \rightarrow \infty$ , то вместо уравнения (П1.43) можно рассматривать уравнение  $w'' + w \cong 0$ . Откуда

$$w \cong A \cos(z) + B \sin(z) = C e^{iz} + D e^{-iz} \Rightarrow$$

$$u \cong \frac{A \cos(z) + B \sin(z)}{\sqrt{z}} = \frac{C e^{iz} + D e^{-iz}}{\sqrt{z}}, |z| \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты  $A, B, C, D$  зависят от индекса  $\nu$ , а также от вида рассматриваемой цилиндрической функции.

Можно получить следующие асимптотические формулы:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{pz}} e^{i(z - (2\nu+1)\frac{p}{4})} + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \quad H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{pz}} e^{-i(z - (2\nu+1)\frac{p}{4})} + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right),$$

при этом  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq p - \delta$ ,  $\nu$  ограничено. Из определения функций Ханкеля следует

$$J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2}, \quad Y_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2}.$$

Тогда

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{pz}} \cos\left(z - (2\nu+1)\frac{p}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \quad (\text{П1.44})$$



$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{pz}} \sin\left(z - (2\nu + 1)\frac{p}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \quad (\text{П1.45})$$

Таким образом, если функции Ханкеля на бесконечности имеют экспоненциальный характер, то функции  $J_\nu(z)$  и  $Y_\nu(z)$  на бесконечности описываются формулами (П1.44) и (П1.45). В частности, для вещественных  $z = x$  и  $\nu = 0$

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{pz}} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Далее,  $J_1(x) = -J'_0(x)$ , следовательно, нули функции  $J_1(x)$  совпадают с экстремумами функции  $J_0(x)$ . Отсюда, в частности, вытекает, что уравнение  $J_0(x) = 0$  имеет бесчисленное множество корней. На рис. П1.3 представлены графики бесселевых функций, полученные в Maple 10.

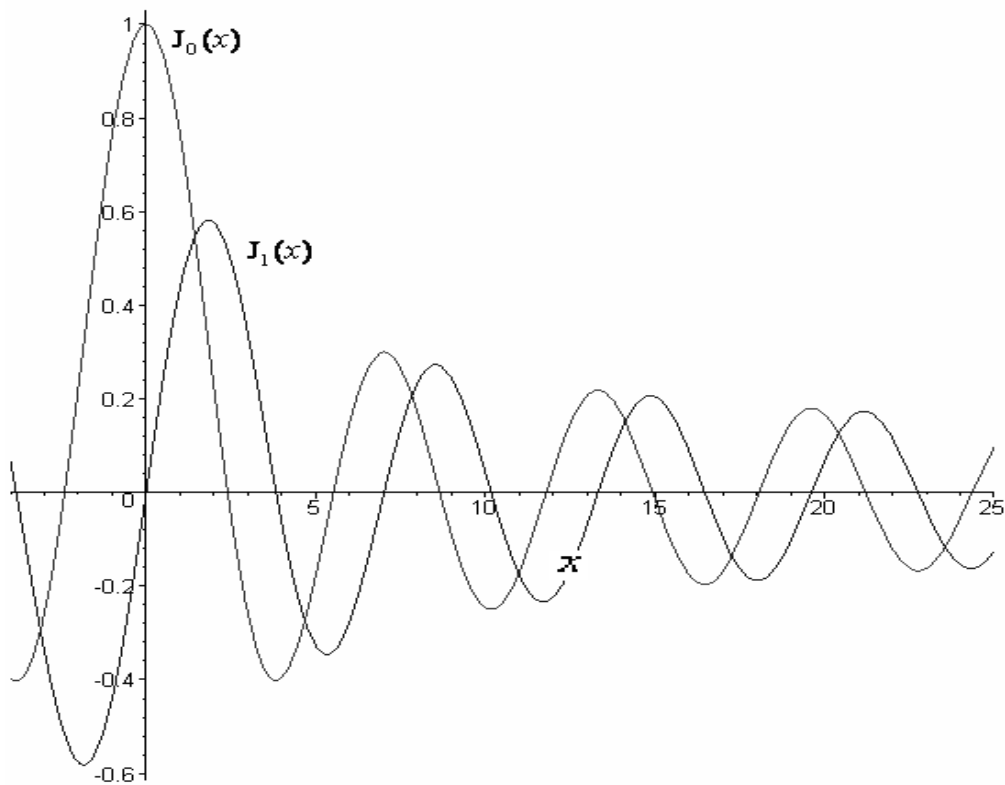


Рис. П1.3. Графики бесселевых функций

На рис. П1.4 представлена поверхность  $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$ , которая показывает, как изменяются функции  $J_\nu(x)$ , если непрерывно изменять переменные  $x$ ,  $\nu$ .

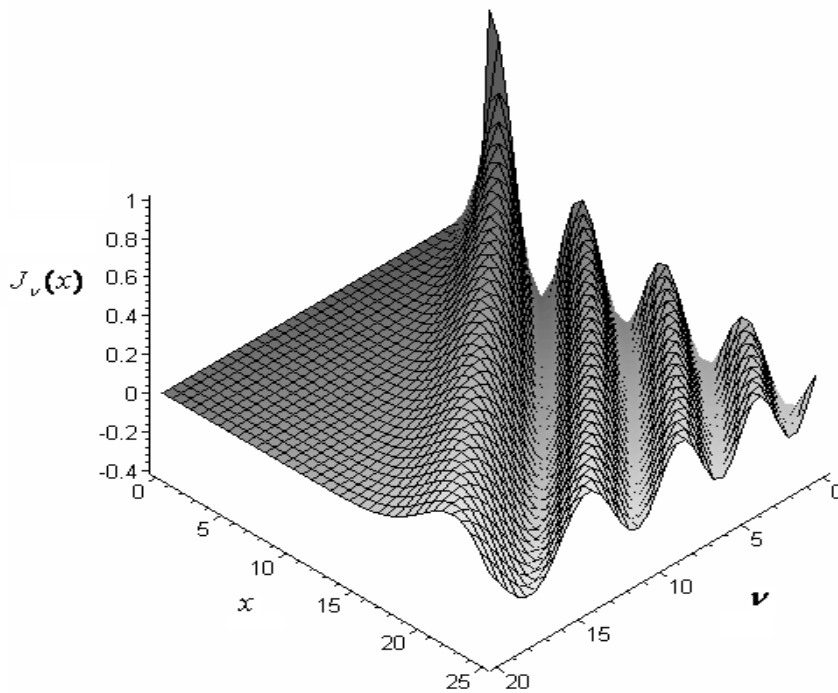


Рис. П1.4. Поверхность  $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$

### П1.10. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим уравнение

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (\text{П1.46})$$

Сделаем замену переменной  $z = ix$ , тогда  $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}i$ ,  $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dz^2}i^2$ , и уравнение (П1.46) примет вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}i, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dz^2}i^2,$$

таким образом, мы пришли к уравнению Бесселя. Откуда

$$u = AJ_\nu(z) + BH_\nu^{(1)}(z) = AJ_\nu\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right) + BH_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right). \quad (\text{П1.47})$$

Таким образом, уравнение (П1.46) интегрируется через цилиндрические функции мнимого аргумента. Однако пользоваться решением в форме (П1.47) неудобно, так как при вещественном  $\nu$  функция (П1.47) является комплексной. Вводятся в рассмотрение функции,

$$I_\nu(x) = e^{-i\frac{p\nu}{2}} J_\nu\left(xe^{i\frac{p}{2}}\right), \quad (\text{П1.48})$$

$$K_\nu(x) = \frac{i p}{2} e^{i\frac{p\nu}{2}} H_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{p}{2}}\right), \quad (\text{П1.49})$$

которые называются модифицированными цилиндрическими функциями; функция (П1.49) называется функцией Макдональда. Общее решение уравнения (П1.46) теперь может быть записано в виде

$$u(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x).$$

Рассмотрим вкратце теорию этих функций. Из (П1.17) и (П1.48) следует

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}; \quad 0 < x < \infty.$$

Таким образом,  $I_\nu(x)$  вещественно, когда  $x > 0$ ,  $\nu$  вещественно. Получим вспомогательную формулу (будем пока считать, что  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) = J_\nu(z) + i \frac{J_\nu(z) \cos(\nu p) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu p)} = \\ &= ie^{-\frac{i\nu p}{2}} \frac{e^{-\frac{i\nu p}{2}} J_\nu(z) - e^{\frac{i\nu p}{2}} J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu p)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K_\nu(z) = \frac{i p}{2} e^{\frac{i\nu p}{2}} ie^{\frac{i\nu p}{2}} \frac{e^{-\frac{i\nu p}{2}} J_\nu(ix) - e^{\frac{i\nu p}{2}} J_{-\nu}(ix)}{\sin(\nu p)} = \frac{-p[I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)]}{2 \sin(\nu p)}.$$

Итак,

$$K_\nu(z) = \frac{p[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin(\nu p)}, \quad (\text{П1.50})$$

причем  $0 < x < \infty$ ,  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отсюда следует, что  $K_\nu(x)$  вещественно, если  $\nu$  вещественно. Покажем, что (П1.50) приобретает неопределенный вид, если  $\nu$  стремится к целому числу. Действительно, имеем

$$J_{-n}\left(xe^{i\frac{p}{2}}\right) = (-1)^n J_n\left(xe^{i\frac{p}{2}}\right) \Rightarrow \underbrace{e^{\frac{ipn}{2}} J_{-n}\left(xe^{i\frac{p}{2}}\right)}_{=I_{-n}(x)} = \underbrace{e^{-\frac{ipn}{2}} J_n\left(xe^{i\frac{p}{2}}\right)}_{=I_n(x)}.$$

Таким образом,  $I_{-n}(x) = I_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и следовательно, формула (П1.50) обращается в неопределенность при целом индексе  $\nu$ . Доопределим функцию Макдональда для целых индексов по формуле

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[ \frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - \left[ \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из (П1.50) следует  $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$ . Таким образом, функция Макдональда есть четная функция индекса  $\nu$ . Для модифицированных цилиндрических функций существуют интегральные представления, аналогичные представлениям цилиндрических функций. Так, например, исходя из (П1.37)

$$J_\nu(z) = \frac{2 \left( \frac{z}{2} \right)^\nu}{\sqrt{p} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad |\arg z| < p, \quad \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2},$$

находим

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{i\nu p}{2}} 2 \left( \frac{x}{2} \right)^\nu e^{\frac{i\nu p}{2}}}{\sqrt{p} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(ixt) dt, \quad \text{или}$$

$$I_\nu(x) = \frac{2 \left( \frac{x}{2} \right)^\nu}{\sqrt{p} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt.$$

Из (П1.40)  $H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{i\nu p}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ , находим

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\nu p}{2}} \frac{e^{-\frac{i\nu p}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(t) dt, \quad x > 0,$$

так как  $e^{-\nu t} = \operatorname{ch}(\nu t) - \operatorname{sh}(\nu t)$ . Таким образом,

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(\nu t) dt, \quad x > 0, \quad \nu - \text{любое.}$$

Отметим рекуррентные формулы, которые легко получаются из формул (П1.32) и (П1.33),

$$2 \frac{dI_\nu(x)}{dx} = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x), \quad \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x).$$

Аналогично

$$-2 \frac{dK_\nu(x)}{dx} = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x), \quad -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) = K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x).$$

Отметим также асимптотические формулы

$$I_\nu(x) \cong \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, \quad x \rightarrow 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_\nu(x) = \infty,$$

Поэтому функция  $I_\nu(x)$  ограничена при  $\nu \geq 0$ ;

$$I_\nu(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2px}}, \quad K_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{p}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

### П1.11. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Сферическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения

$$\left[ (1-z^2)u' \right]' + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] u = 0, \quad (\text{П1.78})$$

где  $z$  – комплексная переменная,  $m$  и  $\nu$  – параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения. Уравнение (П1.78) встречается в математической физике в связи с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат – сферических, сфероидальных, тороидальных и др., которые применяются при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида. Простейшими среди них являются краевые задачи для сферической области, что служит основанием для того, чтобы называть рассматриваемый класс функций сферическими или шаровыми функциями. В этом случае переменная  $z$  принимает вещественные значения из промежутка  $(-1, 1)$ , а параметры  $m$  и  $\nu$  имеют целые положительные значения. Простейший класс сферических функций составляют полиномы Лежандра, которые являются решениями уравнения (П1.78) при  $m=0$  и целых положительных  $\nu=n(n=0, 1, 2, 3, \dots)$ . Следующий по степени сложности класс сферических функций образуют сферические функции Лежандра, которые

представляют собой решения уравнения (П1.78) при  $m=0$  и произвольном вещественном или комплексном  $\nu$ .

Рассмотрим уравнение (П1.78) в предположении, что  $z = x \in [-1, 1]$ ;  $m=0$ ,  $\nu = n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , т. е. уравнение

$$\left[ (1-x^2)u' \right] + n(n+1)u = 0. \quad (\text{П1.79})$$

Построим интегралы уравнения (П1.79). Покажем, что одним из интегралов уравнения (П1.79) является функция

$$u = u_1 = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П1.80})$$

Функции (П1.80) называются полиномами Лежандра, а формула (П1.80) – формулой Родрига для полиномов Лежандра.

Обозначим  $W = (x^2 - 1)^n$ . Тогда

$$W = n(x^2 - 1)^{n-1} 2x = \frac{2nx}{x^2 - 1} W,$$

или

$$(1-x^2)W' + 2nxW \equiv 0. \quad (\text{П1.81})$$

Продифференцируем равенство (П1.81)  $(n+1)$  раз. Получим

$$\left[ (1-x^2)W' \right]^{(n+1)} + 2n(xW)^{(n+1)} = 0.$$

Дифференцирование можно выполнить по формуле Лейбница

$$(UV)^{(m)} = U^{(m)}V + \frac{m}{1!} U^{(m-1)}V' + \frac{m(m-1)}{2!} U^{(m-2)}V'' + \dots + UV^{(m)}. \quad (\text{П1.82})$$

Примем в (П1.82) для первого слагаемого

$$U = W', V = (1-x^2), m = n+1,$$

для второго слагаемого

$$U = W, V = x, m = n+1.$$

Получим

$$\begin{aligned} (1-x^2)W^{(n+2)} + \frac{(n+1)}{1!} W^{(n+1)}(-2x) + \frac{(n+1)}{2!} W^{(n)}(-2) + \\ 2nW^{(n+1)}x + 2n \frac{(n+1)}{1!} W^{(n)} \equiv 0, \end{aligned}$$

или

$$(1-x^2)W^{(n+2)} - 2xW^{(n+1)} + n(n+1)W^{(n)} \equiv 0. \quad (\text{П1.83})$$

Умножим (П1.83) на  $\frac{1}{2^n n!}$ , получим

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) \equiv 0,$$

или, что то же самое,  $\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) \equiv 0$ .

Итак, мы показали, что полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению (П1.79). Найдем второе решение уравнения (П1.79), которое было бы линейно независимо от решения  $u_1 = P_n(x)$ . Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – решения уравнения (П1.79). Тогда

$$\left[(1-x^2)u_1'\right]' + n(n+1)u_1 \equiv 0, \quad \left[(1-x^2)u_2'\right]' + n(n+1)u_2 \equiv 0.$$

Умножим первое уравнение на  $u_2$ , второе – на  $u_1$ , и вычтем одно из другого. Получим

$$u_2 \left[(1-x^2)u_1'\right]' - u_1 \left[(1-x^2)u_2'\right]' \equiv 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)(u_1u_2' - u_2u_1') \right] \equiv 0.$$

Проинтегрируем полученное тождество:

$$(1-x^2)(u_1u_2' - u_2u_1') = C = \text{const} \Rightarrow \frac{(u_1u_2' - u_2u_1')}{u_1^2} = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{u_2}{u_1} = C \int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + D, \quad D = \text{const} \Rightarrow$$

$$u_2 = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + Du_1. \quad (\text{П1.84})$$

Таким образом, если  $u_1$  и  $u_2$  – решения уравнения (П1.79), то они связаны соотношением (П1.84), в котором  $C$  и  $D$  могут быть любыми. Если  $C \neq 0$ , то  $u_1$  и  $u_2$  линейно независимы. Возьмем в качестве  $u_1$  полиномы Лежандра:  $u_1 = P_n(x)$ . Тогда на основании (П1.84) будем иметь

$$u_2 = C_n P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)} + D_n P_n(x) = Q_n(x).$$

Здесь  $Q_n(x)$  – линейно независимая функция с  $P_n(x)$ . Функция  $Q_n(x)$  называется функцией Лежандра второго рода ( $C_n \neq 0$ ).

Пусть  $n = 0$ . Тогда  $P_0(x) = 1$ ,

$$Q_0(x) = C_0 \int \frac{dx}{1-x^2} + D_0 = \frac{C_0}{2} \int \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx + D_0 =$$

$$\frac{C_0}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + D_0.$$

Возьмем  $C_0 = 1, D_0 = 0$ . Тогда

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Пусть  $n = 1$ . Тогда

$$P_1(x) = x, \quad Q_1(x) = C_1 x \int \frac{dx}{(1-x^2)x^2} + D_1 x = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$$

Здесь константы  $C_1$  и  $D_1$  выбраны надлежащим образом. И вообще,

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} f_{n-1}(x),$$

где  $f_{-1}(x) \equiv 0, f_0(x) = 0, f_{n-1}(x)$  – полином степени  $(n-1)$ .

Выпишем первые несколько функций  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$ :

$$P_0(x) = 1, \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$P_1(x) = x, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x,$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), \quad Q_3(x) = \frac{5x^2 - 3x}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Так как функции  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  линейно независимы, общее решение уравнения (П1.79) может быть записано в виде

$$u(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы.

**Примечание.** Уравнение (П1.79) называется уравнением Лежандра; оно имеет особые точки  $x = -1$  и  $x = 1$ . Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  являются собственными функциями для уравнения (П1.79) в промежутке  $[-1, 1]$ , ограниченными в особых точках  $x = \pm 1$ , т. е.  $P_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1}$  ограничены. Очевидно,  $Q_n(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm 1$ .



## П1.12. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Функция

$$W(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \quad (\text{П1.85})$$

является производящей для полиномов Лежандра, т. е. биномы Лежандра – коэффициенты разложения этой функции в ряд по положительным степеням  $z$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \quad (\text{П1.86})$$

Здесь  $z$  – комплексная переменная,  $x \in [-1, +1]$ ,  $x$  – параметр.

Докажем (П1.86). Имеем  $W(x, 0) = 1$ . Особые точки (критические точки или точки разветвления) функции (П1.85) – корни уравнения  $z^2 - 2xz + 1 = 0$ , т. е.  $z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}$ ,  $|z_{1,2}| = 1$ .

Следовательно, особые точки лежат на круге радиуса 1;  $z_1$  и  $z_2$  – особые точки функции  $W(x, z)$  (рис. П1.5).

Внутри круга  $|z| < 1$  особых точек нет. Функция  $W(x, z)$  – регулярная функция переменного  $z$ ,  $|z| < 1$ . Следовательно, внутри круга  $|z| < 1$  функция  $W(x, z)$  допускает разложение в ряд Тейлора.

Таким образом, можно записать:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad |z| < 1, \quad x \in [-1, 1].$$

Коэффициенты разложения  $C_n$  определяются равенством

$$C_n = \frac{W^{(n)}(x, 0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

или, в силу интеграла типа Коши,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (\text{П1.87})$$

Напомним, что коэффициенты разложения функций  $f(z)$  в ряд Тейлора

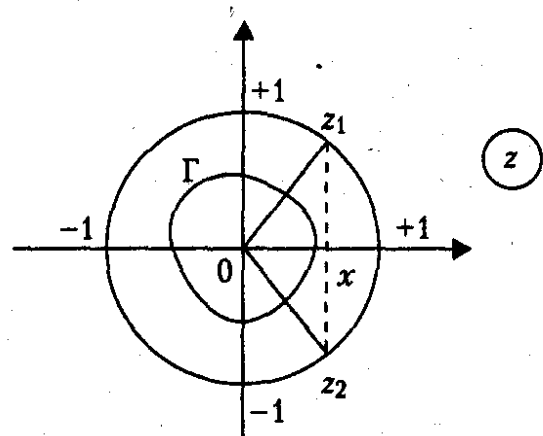


Рис. П1.5. Круг радиуса 1:  
 $z_1$  и  $z_2$  – особые точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

вычисляются по формуле  $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ , а в силу интеграла типа Коши будем иметь

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(o)do}{(o-a)^{n+1}}. \quad (\text{П1.88})$$

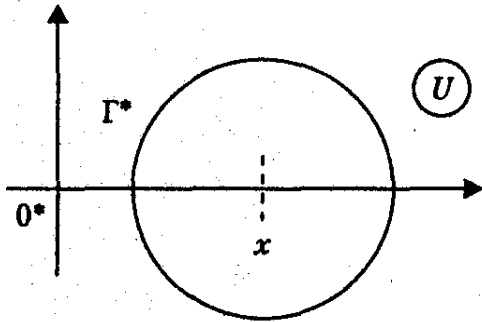


Рис. П1.6. Замкнутый контур  $\Gamma$  вокруг точки  $x$  в плоскости  $U$

В качестве контура  $\Gamma$  в формуле (П1.87) можно взять любой замкнутый контур, лежащий целиком в пределах круга  $|z| < 1$  и охватывающий точку  $(0, 0)$ . Вычислим интеграл (П1.87) с помощью подстановки Эйлера. Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2xz+z^2} &= 1-zu \Rightarrow \\ 1-2xz+z^2 &= 1-2zu+zu^2 \Rightarrow \\ z(u^2-1) &= 2(u-x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$z = 2 \frac{u-x}{u^2-1}.$$

$$\text{Таким образом, } \sqrt{1-2xz+z^2} = 1-2u \frac{u-x}{u^2-1} = -\frac{u^2-2ux+1}{u^2-1},$$

$$dz = \frac{(u^2-1)-(u-x)2u}{(u^2-1)^2} du = -2 \frac{u^2-2ux+1}{(u^2-1)^2} du.$$

Откуда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(u^2-1)2(u^2-2ux+1)(u^2-1)^{n+1}}{(u^2-2ux+1)(u^2-1)^2 2^{n+1}(u-x)^{n+1}} du = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(u^2-1)^n}{(u-x)^{n+1}} du.$$

Здесь  $\Gamma$  – замкнутый контур вокруг точки  $x$  в плоскости  $U$ , соответствующий замкнутому контуру  $\Gamma$  вокруг точки  $O(0,0)$  в плоскости  $z$  (рис. П1.6).

Можно записать в соответствии с формулой (П1.88)

$$C_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2-1)^n \Big|_{u=x} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = P_n(x).$$

Окончательно будем иметь

$$W(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Рассмотрим некоторые примеры применения производящей функции:

$$W(1, z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1,$$

откуда находим  $P_n(1) = 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ;

$$W(-1, z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1,$$

Отсюда следует  $P_n(-1) = (-1)^n$ , из которого получаем

$$W(-x, -z) = W(x, z) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n,$$

Из последней формулы, в частности, следует, что  $P_{2n+1}(0) = 0$ .

### П1.13. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Исходя из производящей функции, легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n. \quad (\text{П1.89})$$

Продифференцируем (П1.85) по  $z$ , получим

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{1-2xz+z^2} \frac{-2x+2z}{2\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{x-z}{1-2xz+z^2} W$$

или  $(1-2xz+z^2)\frac{\partial W}{\partial z} + (z-x)W = 0$ . Откуда

$$(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} + (z-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n+1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)z^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ (n=1) \\ (n-1 \rightarrow n)}}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{\substack{n=0 \\ (n-1 \rightarrow n)}}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n = 0.$$

Объединим в одну сумму в последнем соотношении слева, получим

$$\begin{aligned} & [P_1(x) - xP_0(x)]z^0 + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]z^n = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.90})$$

Равенство (П1.90) возможно лишь тогда, когда коэффициенты при степенях  $z$  равны нулю. Откуда  $P_1(x) - xP_0(x) = 0$ , так как  $P_1(x) = x, P_0(x) = 1$ ,  
 $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, n = 1, 2, 3, \dots$  (П1.91)

Формула (П1.91) – требуемое рекуррентное соотношение. Получим второе рекуррентное соотношение. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial}{\partial z} [(z-x)W] = (z-x) \frac{\partial W}{\partial z} + W = W \left[ 1 - \frac{(x-z)^2}{1-2xz+z^2} \right] = \frac{(1-x^2)W}{1-2xz+z^2}. \quad (\text{П1.92})$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)} W. \quad (\text{П1.93})$$

Сравнивая (П1.92) и (П1.93), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{1}{(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial z} [(z-x)W] \Rightarrow \\ (1-x^2) \frac{\partial W}{\partial z} &= z \frac{\partial}{\partial z} [(z-x)W] \Rightarrow \\ (1-x^2) \frac{\partial W}{\partial z} &= z(z-x) \frac{\partial W}{\partial z} + zW. \end{aligned} \quad (\text{П1.94})$$

Подставим (П1.89) в (П1.94), получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^n &= z(z-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1} + z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)nz^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ (n+1 \rightarrow n)}}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} nxP_n(x)z^n = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n - \sum_{\substack{n=0 \\ (n=1)}}^{\infty} nxP_n(x)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]z^n.$$

Откуда получаем второе рекуррентное соотношение

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

#### П1.14. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Воспользуемся рекуррентным соотношением (П1.91) и заменим в этом соотношении  $n$  на  $(n-1)$ . Будем иметь

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (\text{П1.100})$$

Умножим соотношение (П1.91) на  $(2n-1)P_{n-1}$ , а соотношение (П1.100) – на  $(2n+1)P_n$  и затем вычтем одно из другого. Получим

$$\begin{aligned} & (2n-1)(n+1)P_{n-1}P_{n+1} + (2n-1)nP_{n-1}^2 - \\ & - (2n+1)nP_n^2 - (2n+1)(n-1)P_nP_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{П1.101})$$

Проинтегрируем (П1.101) на отрезке  $[-1, 1]$ . Учитывая ортогональность полиномов, получим

$$(2n-1)n \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2 dx - (2n+1)n \int_{-1}^{+1} P_n^2 dx = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Отсюда находим

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2 dx, \quad n = 2, 3, \dots \quad (\text{П1.102})$$

Имеем

$$\int_{-1}^{+1} P_0^2 dx = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot dx = 2,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_1^2 dx = \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

далее по (П1.102) получим

$$\int_{-1}^{+1} P_2^2 dx = \frac{3}{5} \int_{-1}^{+1} P_1^2 dx = \frac{2}{5}, \quad \int_{-1}^{+1} P_3^2 dx = \frac{5}{7} \int_{-1}^{+1} P_2^2 dx = \frac{2}{7}, \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом,

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство завершается переходом по индукции. Итак, можно записать

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вопрос о разложении произвольной функции в ряд по полиномам Лежандра. Пусть задана функция  $f(x), x \in (-1, 1)$ . Можно формально предположить, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \quad -1 < x < +1 \quad (\text{П1.103})$$

Тогда

$$C_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x) dx}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x) dx.$$

Справедлива следующая теорема разложения.

*Теорема.* Пусть  $f(x), x \in (-1, 1)$ , такая, что:

1)  $f(x)$  кусочно-непрерывна на  $(-1, 1)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$ ;

2) интеграл  $\int_{-1}^{+1} \frac{|f(x)|}{(1-x^2)^{1/4}} dx$  ограничен.

Тогда ряд (1.103) сходится к функции  $f(x)$  во всех точках, где  $f(x)$  непрерывна. В точках разрыва ряд сходится к полусумме значений функции справа и слева от разрыва, т. е. к числу

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Условия теоремы 1 и 2 являются достаточными.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Многие задачи, с которыми сталкиваются специалисты, применяющие методы прикладной математики, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейность уравнений движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач исследователи вынуждены пользоваться различного рода приближениями, комбинируя аналитические и численные методы. Среди аналитических методов весьма мощными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты.

В приложении внимание в большей степени уделено выявлению основополагающих идей теории возмущений, чем вопросам математической строгости, при этом использованы самые разнообразные средства. Например, часто приходится обращаться к физическим рассуждениям. Они обычно помогают правильно поставить задачи и найти нужные приближения. Часто при решении задач основным математическим инструментом служат асимптотические разложения по параметру (аппроксимация решения разложением, состоящим из конечного числа членов) с ошибкой, которая мала при достаточно малых значениях параметра. Чтобы выявить все существенные черты задачи и дать хорошее приближение к точному решению, математику-прикладнику нужно лишь несколько членов асимптотического приближения. Часто дело обстоит именно так. Всем используемым асимптотическим разложениям желательно давать обоснование с помощью подходящих предельных процессов.

### П2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Рассмотрим поведение функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  в терминах известной функции  $\varphi(x)$ , где считается  $x$  действительной переменной. На бесконечности  $\varphi(x)$  может стремиться к нулю, к бесконечности или иметь какое-либо другое поведение.

*Определение 2.1.* Функция  $f(x)$  асимптотически приближается к  $\varphi(x)$  (или  $\varphi(x)$  является асимптотическим приближением функции  $f(x)$ ), если выполнено соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

В этом случае вводят обозначение  $f(x) \sim \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

*Определение 2.2.* Говорят, что порядок функции  $f(x)$  меньше, чем порядок функции  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Соответственно обозначают  $f = o(\varphi)$ ,  $(x \rightarrow \infty)$ .

*Определение 2.3.* Функция  $f(x)$  имеет порядок, не превосходящий порядка  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если отношение  $f(x) / \varphi(x)$  ограничено. В этом случае вводят обозначение

$$f(x) = O\{\varphi(x)\} \quad (x \rightarrow \infty) \text{ или } f = O(\varphi),$$

В частности, соотношение  $f = o(\varphi)$  при  $(x \rightarrow \infty)$  означает, что функция  $f(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Соотношение  $f(x) = O(1)$   $(x \rightarrow \infty)$  означает, что функция  $f$  ограничена при  $x \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим случай, когда функция зависит от малого параметра  $\varepsilon$ , т. е.  $f = f(\varepsilon)$ . Существует несколько возможных описаний поведения функции, обладающих различной степенью точности.

Во-первых, можно просто установить, существует ли предел. Например,  $\sin 2\varepsilon$  имеет предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в то время как  $\sin(2/\varepsilon)$  предела не имеет.

Во-вторых, можно описать предельное поведение *качественно*. Имеются три возможности: функция в пределе может:

а) обращаться в нуль

$$f(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0);$$

б) быть ограниченной

$$f(\varepsilon) < \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0);$$

в) бесконечно возрастать

$$f(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Особенность этого способа состоит в том, что случай «а» заключается в случае «б». Однако естественно, где это возможно, использовать описание «а», так как оно более точно.



В-третьих, можно описать предельное значение *количественно*. Опять имеются три возможности, из которых только вторая является уточнением качественного описания

$$\text{а) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0; \quad \text{б) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = c = \text{const}; \quad \text{в) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = \infty.$$

В-четвертых, можно качественно описать скорость приближения к пределу. Только случаи «а» и «б», указанные выше, могут быть уточнены таким образом. Это делается путем сопоставления с некоторым набором функций сравнения (или калибровочных функций). Последние являются функциями столь простыми, что их предельное поведение можно считать интуитивно известным. Сравнения осуществляются использованием символов порядка  $O$  (« $O$ » большое) и  $o$  (« $o$ » малое).

Полагаем, что  $f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)]$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A$ ,  $0 < |A| < \infty$ . Если это отношение стремится к нулю, то применяем символ  $O$  взамен  $o$ . Итак,

$$f(\varepsilon) = o[g(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ если } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0.$$

### Примеры 2.1

$$\begin{aligned} \sin 2\varepsilon &= O(\varepsilon), & 1 - \cos \varepsilon &= O(\varepsilon^2) = o(\varepsilon), \\ \exp(-1/\varepsilon) &= o(\varepsilon^m) \text{ для любого } m > 0. \end{aligned}$$

Символы порядка не обязательно описывают действительную скорость приближения к пределу, они дают лишь верхнюю границу.

Математический порядок величины, выраженный символами, теоретически не совпадает с физическим порядком величины, поскольку не принимаются во внимание множители пропорциональности. В физических задачах имеется, однако, по меньшей мере некоторая надежда, почти неизменно оправдывающаяся, что эти две оценки достаточно близки. Так, если ошибка в физической теории составляет  $O(\varepsilon)$  и  $\varepsilon$  выбрано разумно, то можно ожидать, что численная ошибка не будет превосходить некоторого умеренного кратного  $\varepsilon$ . Возможно, она будет  $2\varepsilon$  или  $2\pi\varepsilon$ , но почти определенно не достигает  $10\varepsilon$ .

Пятая схема описывает количественно скорость, с которой функция приближается к своему пределу. Она представляет собой уточнение четвертой схемы (применение символов порядка). Восстановим множитель пропорциональности и запишем  $f(\varepsilon) \sim c\delta(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = c,$$

т. е. если  $f(\varepsilon) = c\delta(\varepsilon) + o[\delta(\varepsilon)]$ .

Это есть асимптотическая форма или асимптотическое представление функции, которое составляет первый член в асимптотическом разложении.

### Примеры 2.2

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon, \sqrt{1-\varepsilon^2} \sim 1, \operatorname{ctg} \varepsilon \sim 1/\varepsilon.$$

В шестой схеме предыдущее описание уточняется путем добавления дальнейших членов. Будем считать разность между данной функцией и ее асимптотической формой некоторой новой функцией и определим ее асимптотический вид. Результат запишем следующим образом:

$$f(\varepsilon) \sim c_1 \delta_1(\varepsilon) + c_2 \delta_2(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где вторая функция сравнения  $\delta_2(\varepsilon)$  должна быть величиной более высокого порядка малости, чем первая:

$$\delta_2(\varepsilon) = o[\delta_1(\varepsilon)] \text{ или } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = 0,$$

а ошибка – величиной еще более высокого порядка малости:

$$f(\varepsilon) = c_1 \delta_1(\varepsilon) + c_2 \delta_2(\varepsilon) + o[\delta_2(\varepsilon)].$$

Следующие члены могут быть добавлены повторением этого процесса.

*Определение 2.4.* Последовательность функций  $\{\delta_n(\varepsilon)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  называется асимптотической последовательностью (или шкалой), если для любого  $n$  выполнено соотношение

$$\delta_{n+1}(\varepsilon) = o\{\delta_n(\varepsilon)\} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{П2.1})$$

Примеры асимптотических последовательностей

$$\varepsilon^n, \varepsilon^{n/3}, (\ln \varepsilon)^{-n}, (\sin \varepsilon)^n, (\operatorname{ctg} \varepsilon)^{-n}.$$

*Определение 2.5.* Сумма вида

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (\text{П2.2})$$

где  $a_n$  не зависит от  $\varepsilon$ , а  $\delta_n(\varepsilon)$  – асимптотическая последовательность, называется асимптотическим разложением функции  $f(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если для любого натурального  $n$  выполнено соотношение

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_N(\varepsilon)), \quad (\text{П2.3})$$

или, что то же самое,

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta_n(\varepsilon) + O(\delta_N(\varepsilon)). \quad (\text{П2.4})$$

Приведем определение асимптотической последовательности и асимптотического разложения для функции, зависящей от координаты  $z = x + iy$  (случай комплексных переменных).

*Определение 2.6.* Последовательность функций

$$\{\varphi_n(z)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

определенных на множестве  $\mathbf{R}$ , имеющих точку  $z = c$  в качестве конечной или бесконечной предельной точки, называется асимптотической последовательностью (или шкалой), если для любого натурального  $n$  выполнено соотношение  $\varphi_{n+1}(z) = o\{\varphi_n(z)\}$  ( $z \rightarrow c$  в  $\mathbf{R}$ ).

*Определение 2.7.* Выражение

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s \varphi_s(z)$$

называется асимптотическим разложением (или асимптотическим рядом) если для каждого целого неотрицательного  $n$  выполнено соотношение

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \varphi_s(z) + O\{\varphi_n(z)\} \quad (z \rightarrow c \text{ в } \mathbf{R}).$$

Здесь использовано следующее определение  $O\{\varphi(z)\}$ . Функция  $\varphi(z)$  называется асимптотическим приближением к  $f(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ , если для некоторого  $\mathbf{R}$  существует такое число  $k$ , не зависящее от  $\arg z$ , что

$$|f(z)| \leq k \cdot |\varphi(z)| \quad \text{при } z \in S(\mathbf{R})$$

и обозначают  $f(z) = O\{\varphi(z)\}$  в  $S(\mathbf{R})$ , где через  $S(\mathbf{R})$  обозначен бесконечный сектор  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ . Аналогично вводится « $O$ » – малое. Это определение распространяется на любую область, имеющую бесконечно удаленную точку, или точку  $z = c$  в качестве предельной.

## П2.2. СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

### П2.2.1. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Асимптотические разложения, как правило, можно интегрировать при условии, что справедливы некоторые очевидные ограничения, касающиеся сходимости интегралов. Рассмотрим случай действительных переменных.

*Теорема 2.1.* Пусть  $f(x) \in L$  интегрируемая функция действительной переменной  $x$  и  $f(x) \sim x^\nu$  при  $x \rightarrow \infty$ , где  $\nu$  – вещественная или комплексная постоянная. Пусть  $a$  – любое конечное вещественное число. Тогда при  $x \rightarrow \infty$  имеем

$$\int_x^\infty f(t) dt \sim -x^{\nu+1}/(\nu+1) \text{ при } (\operatorname{Re} \nu < -1),$$

$$\int_a^x f(t) dt \sim \begin{cases} c & (\operatorname{Re} \nu < -1); \\ \ln x & (\nu = -1); \\ x^{\nu+1}/(\nu+1) & (\operatorname{Re} \nu > -1), \end{cases}$$

где  $c = \text{const}$ .

Докажем третье соотношение последней формулы. Имеем  $f(x) = x^\nu(1 + \eta(x))$ , где  $|\eta(x)| < \varepsilon$ , если  $x > X > 0$ , причем  $X$  выбирается по произвольно заданному положительному числу  $\varepsilon$ . Следовательно, если  $x > X$ , то

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^X f(t) dt + \frac{1}{\nu+1}(x^{\nu+1} - X^{\nu+1}) + \int_X^x t^\nu \eta(t) dt$$

и поэтому

$$\frac{\nu+1}{x^{\nu+1}} \int_a^x f(t) dt - 1 = \frac{\nu+1}{x^{\nu+1}} \int_a^X f(t) dt - \left(\frac{X}{x}\right)^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x^{\nu+1}} \int_X^x t^\nu \eta(t) dt$$

Первые два члена в правой части последнего равенства стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , а третий член ограничен числом  $\frac{|\nu+1| \cdot \varepsilon}{1 + \operatorname{Re} \nu}$ . Отсюда следует искомое соотношение.

## П2.2.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Дифференцировать асимптотические соотношения не всегда возможно. Например, если  $f(x) = x + \cos x$ , то  $f(x) \sim x$  при  $x \rightarrow \infty$ , и утверждение, что  $f'(x) \sim 1$ , несправедливо. Для того чтобы дифференцирование было возможным, необходимы дополнительные условия. Для действительной переменной эти условия можно сформировать в терминах монотонности производной.

*Теорема 2.2.* Пусть  $f(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция и  $f(x) \sim x^p$  при  $x \rightarrow \infty$ , где  $p \geq 1$ . Тогда если производная  $f'(x)$  – не-

убывающая функция при всех достаточно больших значениях  $x$ , то  $f'(x) \sim p x^{p-1}$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

Доказательство. Имеем  $f(x) = x^p [1 + \eta(x)]$ , где  $|\eta(x)| \leq \varepsilon$  при  $x > X$ ,  $X$  – некоторое положительное число,  $\varepsilon$  – произвольное число из интервала  $(0,1)$ . Если  $h > 0$ , то

$$h f'(x) \leq \int_x^{x+h} f'(t) dt = f(x+h) - f(x) = \\ = \int_x^{x+h} p t^{p-1} dt + (x+h)^p \eta(x+h) - x^p \eta(x) \leq h p (x+h)^{p-1} + 2\varepsilon (x+h)^p.$$

Положим  $h = x\sqrt{\varepsilon}$ . Тогда

$$f'(x) \leq p x^{p-1} \left\{ \left(1 + \varepsilon^{1/2}\right)^{p-1} + 2 p^{-1} \varepsilon^{1/2} \left(1 + \varepsilon^{1/2}\right)^p \right\} \quad (\text{при } x > X).$$

Аналогично получим

$$f'(x) \geq p x^{p-1} \left\{ \left(1 - \varepsilon^{1/2}\right)^{p-1} - 2 p^{-1} \varepsilon^{1/2} \right\} \quad \text{при } x > \frac{X}{1 - \sqrt{\varepsilon}}.$$

Отсюда следует, что  $f'(x) \sim p x^{p-1}$  при достаточно больших значениях  $x$ . Теорема доказана.

Отметим, что условие монотонности производной  $f'(x)$  часто трудно проверить, поскольку  $f'(x)$  и является той функцией, свойства которой требуется установить.

В комплексной плоскости дифференцирование асимптотических отношений и отношений порядка допустимо в подобластях области, где они справедливы. Важным частным случаем является следующая теорема.

*Теорема 2.3.* Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области, содержащей замкнутый сектор  $S$  и

$$f(z) = O(z^p) \quad (\text{или } f(z) = o(z^p))$$

при  $z \rightarrow \infty$  в  $S$ , где  $p$  – любое фиксированное действительное число.

Тогда

$$f^{(m)}(z) = O(z^{p-m}) \quad (\text{или } f^{(m)}(z) = o(z^{p-m}))$$

при  $z \rightarrow \infty$  в любом замкнутом секторе  $S$ , лежащем строго внутри  $S$  и имеющем ту же вершину.

П2.2.3. РАВНОМЕРНЫЕ И НЕРАВНОМЕРНЫЕ  
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

При построении приближенных решений алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений предполагается, что асимптотические разложения можно подставлять в уравнения и выполнять над ними простейшие действия: возведение в степень, интегрирование и дифференцирование. Иногда применение этих операций оказывается необоснованным. В этом случае они приводят к неравномерностям. Например, равенство

$$\sqrt{x+\varepsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \dots\right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

не обосновано при  $\varepsilon x = O(1)$ , поскольку при этом второй, третий и последующие члены разложения становятся сравнимыми по порядку с первым его членом. Следовательно, ошибка, совершенная в результате усечения ряда после  $N$  членов при  $x = O(\varepsilon)$ , уже не будет иметь порядок  $O(\varepsilon^N)$ , т. е. не будет порядка первого отброшенного члена, и здесь говорят о неравномерном разложении. Аналогично, равенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^3 + \dots \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

не обосновано при  $\varepsilon x = O(1)$ , поскольку по той же причине правая часть его будет неравномерна при больших  $x$ . Таким образом, необходимо всегда проверять, являются ли полученные разложения равномерными или нет – в этом, собственно говоря, и заключается одна из главных целей методов возмущений.

Приведем определение равномерности асимптотических разложений в комплексной области.

*Определение 2.8.* Пусть функция  $f(z, u)$  разлагается в асимптотический ряд

$$f(z, u) \sim \sum_{s=0}^{n-1} a_s \varphi_s(z, u) + O\{\varphi_n(z, u)\}, \quad (\text{П2.5})$$

где  $\varphi_n(z, u)$  асимптотическая последовательность, причем  $f$  и  $\varphi_n$  зависят от параметра  $u$ . Допустим, что член  $O\{\varphi_n(z, n)\}$  равномерен по параметру  $u$  в некотором множестве  $D$ , тогда асимптотическое разложение справедливо равномерно относительно параметра  $u$  в  $D$ .

Для определения области неравномерности ряда (П2.5) иногда достаточно приравнять порядки  $n$ -го и  $(n+1)$ -го членов ряда, т. е.

$\varphi_n(z, n) = O(\varphi_{n+1}(z, u))$  и из полученного соотношения провести оценку области неравномерности.

#### П2.2.4. ПРИМЕР РАСХОДЯЩЕГОСЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА

Асимптотические разложения могут расходиться, но давать значения, близкие к истинным. Найдем асимптотическое разложение интеграла

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt.$$

Одним из способов построения асимптотического разложения для функции  $G(x)$  является метод, состоящий в разложении множителя  $1/(1+t)$  в ряд по степеням  $t$  и последующем почленном интегрировании полученного ряда. Действительно,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Этот ряд сходится при  $|t| < 1$ . Теперь вычислим интеграл

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Этот ряд расходится при всех конечных  $x$  (согласно признаку сходимости Даламбера). Однако, полученный ряд является асимптотическим. Чтобы это доказать сделаем оценку остаточного члена. Представим функцию  $G(x)$  в виде  $G(x) = g_n(x) + \varepsilon_n(x)$ , где

$$g_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Для остаточного члена  $\varepsilon_n(x)$  выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= G(x) - g_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt - \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt - \int_0^{\infty} e^{-xt} (1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}) dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{t+1} dt. \end{aligned}$$

Сделаем оценку

$$|\varepsilon_n(x)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{t+1} dt \right| \leq \int_0^{\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Итак, получаем

$$\varepsilon_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad (\text{при } x \rightarrow \infty).$$

Согласно определениям ряд  $G(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots$  является асимптотическим. Однако этот ряд расходится. Приведем численные значения при  $\alpha = 10$ .  $G(10) = 0,09156$  – точное значение. Четыре члена ряда дают значение  $G(10) = 0,0914$ . Итак, асимптотическое значение при  $x = 10$  очень близко к точному.

#### П2.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Пусть  $f(z)$  – функция действительной или комплексной переменной  $z$ ,  $\sum a_s z^s$  – формальный степенной ряд (сходящийся или расходящийся), а  $R_n(z)$  – разность между  $f(z)$  и  $n$ -й частичной суммой этой ряда. Итак,

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + R_n(z) \quad (\text{П2.6})$$

Предположим, что для каждого фиксированного значения  $n$

$$R_n(z) = O(z^{-n}) \quad (\text{П2.7})$$

при  $z \rightarrow \infty$  в некоторой неограниченной области  $D$ . Очевидно ряд  $\sum a_s z^{-s}$  является асимптотическим разложением функции  $f(z)$  и записывается в виде

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } D). \quad (\text{П2.8})$$

Можно показать, что если ряд  $\sum a_s z^{-s}$  сходится при всех достаточно больших  $|z|$ , то он является асимптотическим разложением его суммы, определенной обычным образом, без всяких ограничений на  $\arg z$ . Естественно, однако, что наибольший интерес представляют асимптотические разложения, которые расходятся.

*Теорема 2.4.* Для того чтобы функция  $f(z)$  обладала асимптотическим разложением вида (П2.8) необходимо и достаточно, чтобы для каждого неотрицательного целого числа  $n$

$$z^n \left\{ f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} \right\} \rightarrow a_n \quad (\text{П2.9})$$

при  $z \rightarrow \infty$  в  $D$  равномерно относительно  $\arg z$ .



*Свойство единственности.* Для заданной функции  $f(z)$  и области  $D$  существует самое большое одно разложение вида (П2.8).

Следствие – обратное утверждение неверно.

**Пример 2.3.** Рассмотрим асимптотическое разложение функции  $e^{-z}$  в секторе  $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Так как для любого  $n$  имеем  $z^n e^{-z} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  в этой области, соотношение (П2.9) дает  $a_n = 0$  при  $n = 0, 1, \dots$ . Таким образом,

$$e^{-z} \sim 0 + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \dots \quad \left( |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right).$$

Пусть теперь  $a_0, a_1, a_2, \dots$  означает заданную последовательность постоянных. Если существует хотя бы одна такая функция  $f(z)$ , что

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad \left( z \rightarrow \infty \text{ при } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right),$$

то существует и бесконечное число таких функций, так как соотношение  $z^n e^{-z} \rightarrow \infty$  снова показывает, что к функции  $f(x)$  можно добавить функцию  $e^{-z}$ , умноженную на произвольную постоянную, не меняя при этом коэффициентов разложения. Отсутствие единственности для функции, представленной асимптотическим разложением, находится в резком контрасте со свойством единственности суммы сходящегося ряда.

Рассмотрим операции над асимптотическими разложениями. Сформулируем их в виде нескольких свойств.

*Свойство 2.1.* Из асимптотических разложений со шкалой

$$\varphi_n(z) = 1/z^n$$

можно составлять линейные комбинации.

Предположим, что

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^{-s}, \quad g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} g_s z^{-s}$$

Первое соотношение справедливо при  $z \rightarrow \infty$  в области определения  $F$  функции  $f(z)$ , а второе – соответственно в области  $G$ . Тогда, если  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные, то

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha f_s + \beta g_s) z^{-s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F \cap G).$$

Это вытекает непосредственно из определения.

*Свойство 2.2.* Асимптотические разложения со шкалой  $\{z^{-n}\}$  можно перемножать. Это означает, что

$$f(z)g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} h_s z^{-s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F \cap G),$$

где

$$h_s = f_0 g_s + f_1 g_{s-1} + \dots + f_s g_0.$$

Действительно, если  $F_n(z), G_n(z)$  и  $H_n(z)$  означают остаточные члены, относящиеся к  $n$ -м частичным суммам разложений  $f(z), g(z)$  и  $f(z) \cdot g(z)$  соответственно, то

$$H_n(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f_s}{z^s} G_{n-s}(z) + g(z) F_n(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

**Замечание.** Умножение асимптотического разложения со шкалой  $\{\varphi_n(z)\}$  не всегда возможно, так как множество функций  $\varphi_r(z)\varphi_s(z)$  с двумя индексами не всегда можно упорядочить, чтобы оно образовало шкалу.

*Свойство 2.3.* Асимптотическое разложение со шкалой  $\{z^{-n}\}$  можно делить друг на друга.

Пусть  $f_0 \neq 0$  и значение  $|z|$  достаточно велико. Тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f_0 + F_1(z)} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{f_0^{s+1}} \left\{ \frac{f_1}{z} + \dots + \frac{f_{n-1}}{z^{n-1}} + F_n(z) \right\}^s + \frac{(-1)^n \{F_1(z)\}^n}{f_0^n (f_0 + F_1(z))}.$$

Поскольку  $F_1(z) = O(z^{-1})$  и  $F_n(z) = O(z^{-n})$ , то отсюда следует

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{k_s}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F),$$

где  $k_s$  — многочлен относительно  $f_0, f_1, \dots, f_s$ . Так как  $n$  произвольно, это означает, что асимптотическое разложение  $1/f(z)$  существует.

Коэффициенты  $k_s$  можно найти указанным способом, однако в случае сходящегося степенного ряда их удобнее вычислить из рекуррентных соотношений

$$f_0 k_s = -(f_1 k_{s-1} + f_2 k_{s-2} + \dots + f_s k_0) \quad (s = 1, 2, \dots),$$

полученных с помощью тождества  $f(z) \{1/f(z)\} = 1$ . Первые несколько коэффициентов имеют вид

$$k_0 = 1/f_0, \quad k_1 = -f_1/f_0^2, \quad k_2 = (f_1^2 - f_0 f_2)/f_0^3, \\ k_3 = (-f_1^3 + 2f_0 f_1 f_2 - f_0^2 f_3)/f_0^4.$$

Необходимые изменения в случае  $f_0 = 0$  не представляют трудности.

*Свойство 2.4.* Асимптотические разложения можно интегрировать.

Предположим, что для всех достаточно больших значений положительной действительной переменной  $x$  функция  $f(x)$  действительная или комплексная, непрерывна и имеет асимптотическое разложение вида

$$f(x) = f_0 + \frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x^2} + \dots$$

Если не выполняется условие  $f_0 = f_1 = 0$ , то мы не можем интегрировать  $f(t)$  в интервале  $x \leq t < \infty$ , поскольку получающиеся интегралы расходятся. Однако выражение  $f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t}$  имеет порядок  $O(t^{-2})$  при больших  $t$  и поэтому интегрируемо. Интегрируя остаточный член и используя теорему об интегрируемости асимптотического выражения, находим, что

$$\int_x^\infty \left( f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right) dt \sim \frac{f_2}{x} + \frac{f_3}{2x^2} + \frac{f_4}{3x^3} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Если  $a$  – произвольно выбранное положительное число, то

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \left( \int_a^\infty - \int_x^\infty \right) \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt + f_0(x-a) + f_1 \ln \frac{x}{a} \sim \\ &\sim A + f_0 x + f_1 \ln x - \frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{2x^2} - \frac{f_4}{3x^3} + \dots \end{aligned}$$

при  $x \rightarrow \infty$ , где  $A = \int_a^\infty \left( f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right) dt - f_0 a - f_1 \ln a$ .

Эти результаты можно обобщить на аналитические функции комплексной переменной, голоморфные, например в секторе.

**Замечание.** Дифференцировать асимптотические разложения возможно не всегда. Дифференцирование допустимо, если известно, что  $f(x)$  – непрерывная функция действительного аргумента и ее асимптотическое разложение существует. Это утверждение можно доказать, интегрируя разложения для  $f'(x)$  и используя свойство единственности.

*Свойство 2.5.* Операция обращения возможна для действительных и комплексных переменных.

Рассмотрим случай действительных переменных. Пусть функция  $\xi(x)$  разлагается в асимптотический ряд

$$\xi(x) \sim x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Применяя теорему об асимптотике решении трансцендентных уравнений, находим

$$x = \xi [1 + O(1)] \quad (\xi \rightarrow \infty).$$

Начиная с этого приближения и повторно подставляя следующие приближения в правую часть соотношения

$$x = \xi - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + O\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

где  $n$  – произвольное целое число, видим, что существует представление вида

$$x = \xi - b_0 - \frac{b_1}{\xi} - \frac{b_2}{\xi^2} - \dots - \frac{b_{n-1}}{\xi^{n-1}} + O\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где коэффициенты  $b_s$  являются многочленами от  $a_s$  и не зависят от количества сделанных приближений.

#### П2.2.6. МЕТОД ЛАПЛАСА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛА

Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  определены на отрезке  $[a; b] \subset R$ , причем  $f(x) \neq 0$ , а  $S(x) \neq const$ . При больших значениях параметра  $\lambda > 0$ , (т. е. при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (\text{П2.10})$$

называются интегралами Лапласа.

*Лемма 2.1.* Пусть функция  $S(x)$  ограничена сверху на  $[a; b] \subset R$ , т. е.  $S(x) \leq M$ ,  $x \in [a; b]$ . Пусть также интеграл (П2.10) сходится абсолютно при некотором  $\lambda_0$ . Тогда при  $\lambda \geq \lambda_0$  имеет место оценка

$$|F(\lambda)| \leq C e^{M\lambda}, \quad (\text{П2.11})$$

где  $C$  – постоянная.

*Доказательство.* Так как  $S(x)$  ограничена сверху, то

$$e^{(\lambda - \lambda_0)S(x)} \leq C_0 e^{M\lambda}, \quad x \in [a; b],$$

где  $e^{(\lambda - \lambda_0)S(x)} \leq C_0 = e^{-\lambda_0 M}$ . Следовательно,

$$F(\lambda) = \left| \int_a^b f(x) e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda - \lambda_0)S(x)} dx \right| \leq C_0 e^{M\lambda} \int_a^b |f(x)| e^{\lambda_0 S(x)} dx.$$

По условию последний интеграл сходится и оценка (П2.11) доказана.

*Теорема 2.5.* Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  ограничены и непрерывны на отрезке  $[a; b]$ , дважды непрерывно – дифференцируемы в окрестности точки  $x = 0$ , причем функция  $S(x)$  также удовлетворяет условиям:  $S(x) < S(a)$  при  $x \neq a$  и  $S'(a) \neq 0$ . Тогда

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)} dx = \frac{e^{\lambda S(x)}}{-\lambda S'(a)} \left( f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (\text{П2.12})$$

Доказательство. Так как  $S'(a) \neq 0$ , то можно выбрать  $\delta > 0$  такое, что  $S'(a) \neq 0$  при  $a \leq x \leq a + \delta$ . Разобьем интеграл (П2.10) на два:

$$F(\lambda) = \int_a^{a+\delta} f(x)e^{\lambda S(x)} dx + \int_{a+\delta}^b f(x)e^{\lambda S(x)} dx = F_1(\lambda) + F_2(\lambda). \quad (\text{П2.13})$$

Оценим интеграл  $F_2(\lambda)$ . Так как  $S(x)$  достигает на  $[a; b]$  наибольшего значения только в точке  $a$ , то  $S(x) < S(a) - c$  при  $a + \delta \leq x \leq b$ , где  $c > 0$  – постоянная. По лемме 2.1 при достаточно большом  $\lambda$  имеем  $|F_2(\lambda)| \leq c_0 e^{\lambda(S(a)-c)}$ , поэтому интеграл  $F_2(\lambda)$  экспоненциально мал по сравнению с  $e^{\lambda S(a)}$ . Интеграл  $F_1(\lambda)$  и проинтегрируем по частям:

$$F_1(\lambda) = \int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} d\left(e^{\lambda S(x)}\right) = \frac{f(x)e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} \Big|_a^{a+\delta} - \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\delta} e^{\lambda S(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) dx \quad (\text{П2.14})$$

Внеинтегральная подстановка при  $x = a + \delta$  экспоненциально мала по сравнению с  $e^{\lambda S(a)}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так как  $S(a + \delta) - S(a) < 0$ .

Оценим последний интеграл. На отрезке  $[a; a + \delta]$  имеем  $S'(x) < 0$  и потому существует постоянная  $S_1 > 0$ , такая, что  $S'(x) \leq -S_1$  при  $x \in [a; a + \delta]$ . По формуле Лагранжа

$$S(a + \delta) - S(a) = (x - a)S'(\xi),$$

где  $\xi \in (a; a + \delta)$ , и

$$S(a + \delta) - S(a) \leq -S_1(x - a) \text{ при } x \in [a; a + \delta].$$

В силу непрерывности функции  $f_1(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right)$  имеем:

$|f_1(x)| \leq M_1$  при  $x \in [a; a + \delta]$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+\delta} e^{\lambda S(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) dx \right| e^{-\lambda S(a)} &\leq \int_a^{a+\delta} |f_1(x)| e^{\lambda(S(x)-S(a))} dx \leq \\ &\leq M_1 \int_a^{a+\delta} e^{-S_1(x-a)\lambda} dx < \frac{M_1}{S_1\lambda} = \frac{c_1}{\lambda} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty \end{aligned}$$

С учетом этой оценки соотношение (П2.14) можно записать в виде

$$F_1(\lambda) = e^{\lambda S(a)} \left[ \frac{f(a)}{-\lambda S'(a)} + O(\lambda^{-2}) \right] \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Из оценки для  $F_2(\lambda)$  и тождества (П2.13) следует формула (П2.12).

**Пример 2.4.** Рассмотрим преобразование Лапласа

$$p \rightarrow +\infty, \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx,$$

где  $f(x)$  ограничена, кусочно-непрерывна на  $[0; +\infty]$  и непрерывно-дифференцируема в окрестности точки  $x = 0$  и найдем для него асимптотическую оценку.

Здесь  $S(x) = -x$ , соответственно  $S(0) = 0, S'(x) = -1$ . Учитывая, что интегрирование ведется по отрезку  $[0; 1]$ , из (П2.1) получим:

$$\int_0^1 f(x) e^{-px} dx = \frac{1}{-p(-1)} \left( f(0) + O\left(\frac{1}{p}\right) \right) = \frac{f(0)}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Так как  $f(x)$  ограничена,  $\exists B > 0: |f(x)| \leq B$ , при  $x \in [0; +\infty]$ . Оценим

$$\left| \int_1^{\infty} f(x) e^{-px} dx \right| \leq \int_1^{\infty} |f(x)| e^{-px} dx \leq B \int_1^{\infty} e^{-px} dx = B \left( \frac{e^{-px}}{p} \Big|_1^{\infty} \right) = \frac{Be^{-p}}{p} = O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

$$\text{Таким образом, } F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = \frac{f(0)}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Следующую теорему приведем без доказательства.

*Теорема 2.6.* Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема, а  $S(x)$  – дважды дифференцируема и монотонна на отрезке  $[a, b]$ . Пусть также  $S(x)$  достигает своего наибольшего значения в точке  $x = a, (S'(x) \leq 0)$ . Тогда, если  $S'(a) = 0$ , а  $S''(a) < 0$ , то имеет место асимптотическая оценка

$$\int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx = \frac{e^{\lambda S(a)}}{2} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}} \left( f(a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

**Пример 2.5.** Рассмотрим гамма-функцию  $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$  и найдем

ее асимптотическое поведение при  $x \rightarrow +\infty$ . Подынтегральная функция не имеет конечного максимума по  $t$ , сделаем замену переменной  $t = xy$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (xy)^x e^{-xy} d(xy) = x^x \cdot x \int_0^{\infty} y^x e^{-xy} dy = x^x \cdot x \int_0^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy.$$

Исследуем функцию

$$S(y) = \ln y - y, S'(y) = 1/y - 1, S'(1) = 0; S(1) = 0, S''(y) = -1/y^2, S''(1) = -1.$$

Таким образом, функция  $S(y) \leq 0$  при  $y > 0$  и убывает при  $y > 1$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy = \int_0^2 e^{-x(\ln y - y)} dy + \int_2^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy. \quad (\text{П2.15})$$

При  $y \geq 2$  функция  $\ln y < y/2$ , соответственно  $\ln y - y/2 \leq 0$ .

$$\int_2^{\infty} e^{-x(\ln y - y)} dy \leq \int_2^{\infty} e^{-xy/2} dy = \frac{e^{-xy/2}}{-x/2} \Big|_2^{\infty} = 2e^{-x}.$$

Первый интеграл в правой части из (П2.15) представим в виде:

$$\int_0^2 e^{-x(\ln y - y)} dy = \int_0^1 e^{-x(\ln y - y)} dy + \int_1^2 e^{-x(\ln y - y)} dy.$$

Воспользуемся теоремой П2.6:

$$\int_1^2 e^{-x(\ln y - y)} dy = \frac{1}{2} e^{-x} \sqrt{-\frac{2\pi}{x(-1)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right). \quad (\text{П2.16})$$

Такая же формула имеет место для первого слагаемого из (П2.16). Окончательно получим формулу Стирлинга.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right).$$

#### П2.2.7. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  определены на отрезке  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , причем  $f(x)$  отлична от тождественного нуля, а  $S(x)$  – от тождественной константы. При больших значениях параметра  $\lambda$ , (т. е. при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ) интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx \quad (\text{П2.17})$$

называются интегралами Фурье. Функцию  $S(x)$  обычно называют фазовой функцией.

*Лемма 2.2* (Римана–Лебега). Если функция  $f(x)$  непрерывна и ограничена на действительной оси, то  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

### Фазовая функция без стационарных точек

В случае, когда функции  $f(x)$  и  $S(x)$  являются гладкими, а фазовая функция не имеет стационарных точек, асимптотика интеграла легко вычисляется с помощью интегрирования по частям.

*Теорема 2.7.* Пусть  $f(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке  $[a; b]$ , а  $S(x)$  – дважды непрерывно дифференцируема на  $[a; b]$  и  $S'(x) \neq 0$  при  $x \in [a; b]$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx = (i\lambda)^{-1} \left[ e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{S'(x)} \Big|_a^b + O(\lambda^{-1}) \right].$$

*Доказательство.* Интегрируя по частям, получим:

$$F(\lambda) = \int_a^b \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} d(e^{i\lambda S(x)}) = (i\lambda)^{-1} \left[ e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{S'(x)} \Big|_a^b + (i\lambda)^{-1} \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) e^{i\lambda S(x)} dx \right].$$

Поскольку  $S'(x) \neq 0$ , то функция  $S(x)$  монотонна на отрезке  $[a; b]$ . Делая в последнем интеграле замену переменной  $y = S(x)$ , получим интеграл вида  $\int_a^\beta h(y)e^{i\lambda y} dy$ , который, согласно лемме Римана–Лебега стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , что и дает нужную оценку для остаточного члена.

### Вклад невырожденной стационарной точки

В условиях теоремы 2.1 содержится важное ограничение:  $S'(x) \neq 0$  при  $x \in [a; b]$ , т. е. фазовая функция не имеет стационарных точек на отрезке интегрирования. При наличии у фазовой функции стационарных точек асимптотика интеграла  $F(\lambda)$  изменяется.



Для упрощения формулировок будем далее полагать, что функции являются бесконечно дифференцируемыми.

*Лемма 2.3* (Лемма Эрдейи). Пусть функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на отрезке  $[0; d]$  и  $\alpha > 0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^d f(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}} f(0) e^{\frac{i\pi}{4}} + O(\lambda^{-1}).$$

Доказательство. Предположим вначале, что  $f(x) \equiv 1$ . Делая замену переменной  $\sqrt{\alpha\lambda}x = t$ , получаем

$$\Phi(\lambda) = \int_0^d f(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \int_0^{d\sqrt{\alpha\lambda}} e^{\frac{it^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \left( \int_0^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} dt - \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} dt \right).$$

Первый из интегралов, стоящих в скобках, это интеграл Френеля, равный  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}$ . Второй интеграл легко оценить, интегрируя по частям:

$$\left| \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} dt \right| = \left| -\frac{e^{\frac{it^2}{2}}}{it} \Big|_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} + \frac{1}{i} \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{\frac{it^2}{2}} \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{d\sqrt{\alpha\lambda}} + \int_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{d\sqrt{\alpha\lambda}}.$$

Таким образом,  $\frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \int_0^{d\sqrt{\alpha\lambda}} e^{\frac{it^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} + O(\lambda^{-1})$ .

Представим функцию  $f(x)$  в виде

$$f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)] = f(0) + xg(x),$$

где функция  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0; d]$ . Таким образом,

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}} f(0) e^{\frac{i\pi}{4}} + O(\lambda^{-1}) + \int_0^d xg(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx. \quad (\text{П2.18})$$

Оценим оставшийся интеграл при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^d xg(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx \right| &= \left| \frac{1}{i\alpha\lambda} \int_0^d g(x) d \left( e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha\lambda} \left| g(d) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda d^2} - g(0) - \int_0^d g'(x) e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2} dx \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha\lambda} \left| |g(d)| + |g(0)| + \int_0^d |g'(x)| dx \right| = O(\lambda^{-1}).$$

Подстановка этой оценки в равенство (П2.18) завершает доказательство леммы.

Теперь можно найти главный член асимптотики интеграла Фурье при наличии невырожденной стационарной точки.

*Теорема 2.8.* Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  бесконечно дифференцируемы на отрезке  $[a; b]$ , функция  $S(x)$  имеет единственную стационарную точку  $x_0 \in [a; b]$  и  $S''(x_0) > 0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = f(x_0) e^{i\lambda S(x_0)} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}).$$

Доказательство. Поскольку  $S'(x)$  обращается в нуль лишь в точке  $x_0$  и  $S''(x_0) > 0$ , то при  $a \leq x < x_0$  производная  $S'(x) < 0$  и функция  $S(x)$  монотонно убывает, а при  $x_0 < x \leq b$  производная  $S'(x) > 0$  и  $S(x)$  монотонно возрастает. Существует непрерывно дифференцируемое отображение  $\varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ , такое, что  $0 \in [\alpha; \beta]$ ,  $\varphi(0) = x_0$  и  $S(\varphi(y)) = S(x_0) + y^2$ . По лемме Морса

$$\varphi'(0) = \sqrt{\frac{2}{S''(x_0)}}.$$

Делая замену переменной в интеграле, получаем

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(y)) \varphi'(y) e^{i\lambda y^2} dy.$$

Применим лемму Эрдейи:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(y)) \varphi'(y) e^{i\lambda y^2} dy &= \frac{1}{2} f(\varphi(0)) \varphi'(0) e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-1}) = \\ &= \frac{1}{2} f(x_0) e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \end{aligned} \tag{П2.19}$$

Делая замену переменной  $y = -u$ , для интеграла по отрезку  $[\alpha; 0]$  получаем такую же оценку

$$\int_{\alpha}^0 f(\varphi(y)) \varphi'(y) e^{i\lambda y^2} dy = \int_0^{-\alpha} f(\varphi(-u)) \varphi'(-u) e^{i\lambda u^2} du =$$

$$\frac{1}{2} f(x_0) e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \quad (\text{П2.20})$$

Сложение равенств (П2.19) и (П2.20) завершает доказательство теоремы.

**Замечание.** Если  $S''(x_0) < 0$ , то, используя сопряжение, получаем

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = \overline{\int_a^b f(x) e^{i\lambda(-S(x))} dx} = \\ &= \overline{f(x_0) e^{-i\lambda S(x_0)} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1})} = \\ &= f(x_0) e^{i\lambda S(x_0)} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

**Пример 2.6.** Найдем асимптотику функции Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

В этом примере  $f(\varphi) = e^{-n\varphi}$ , а фазовая функция  $S(\varphi) = \sin \varphi$  имеет две стационарные точки  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ . Соответственно асимптотика функции Бесселя определяется суммой вкладов обеих стационарных точек. Поскольку  $S(\varphi_1) = 1, S''(\varphi_1) = -1, S(\varphi_2) = -1, S''(\varphi_2) = 1$ , то получаем

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

#### П2.2.8. МЕТОД ПЕРЕВАЛА

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz, \quad (\text{П2.21})$$

где  $\gamma$  — кусочно-

гладкая кривая в комплексной плоскости  $C$ , а функции  $f(z)$  и  $S(z)$  являются аналитическими в некоторой области  $D$ , содержащей кривую  $\gamma$ . Будем рассматривать асимптотическое поведение функции  $F(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Идея метода** основана на том, что согласно интегральной теореме Коши в односвязной области интеграл аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки.

Предположим, что существует контур  $\gamma^* \neq \gamma$  такой, что:

$$1) F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z)e^{\lambda S(z)} dz = \int_{\gamma^*} f(z)e^{\lambda S(z)} dz;$$

2) существует единственная точка  $z_0 \in \gamma^*$ , в которой функция  $\operatorname{Re} S(z)$  имеет строгий максимум и  $f(z_0) \neq 0$ ;

3)  $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$  при  $z \in \gamma^*$  в окрестности точки  $z_0$ .

Пусть  $\gamma_0^*$  – малая дуга контура  $\gamma^*$ , содержащая точку  $z_0$ . Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0) - \delta$  при  $z \in \gamma^* \setminus \gamma_0^*$ . Пусть  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  – регулярная параметризация контура  $\gamma^*$  такая, что  $z(0) = z_0, z: [\alpha; \beta] \rightarrow \gamma_0^*$ .

Используя принцип локализации, получим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma_0^*} f(z)e^{\lambda S(z)} dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)e^{\lambda S(z(t))} dt = \\ &= e^{\lambda S \operatorname{Im} S(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t)e^{\lambda S_*(t)} dt (1 + O(\lambda^{-\infty})), \end{aligned} \quad (\text{П2.22})$$

где  $f_*(t) = f(z(t))z'(t)$ ,  $S_*(t) = \operatorname{Re} S(z(t))$ . Поскольку функция  $S_*(t)$  принимает только действительные значения, асимптотику последнего интеграла можно найти с помощью метода Лапласа. Контур, удовлетворяющий условиям 1, 2, 3 называют перевальным контуром.

### Принципы нахождения перевального контура

Пусть  $S(z) = U(z) + iV(z)$  и  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  регулярная параметризация ( $|z'(t)| \neq 0$ ) контура  $\gamma^*$  такая, что  $z(0) = z_0$ . Поскольку  $t = 0$  – точка максимума функции  $\operatorname{Re} S(z(t))$ , то

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{Re} S(z(t)) \right|_{t=0} = U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0.$$

А так как  $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$  на  $\gamma^*$ , то

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{Im} S(z(t)) \right|_{t=0} = V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0, \\ V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0. \end{cases}$$

С учетом условий Коши–Римана ( $U'_x = V'_y, U'_y = -V'_x$ ) получаем

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0, \\ U'_x y'_t - U'_y x'_t = 0. \end{cases}$$

Так как определитель системы  $\Delta = -(x'^2_t + y'^2_t) = -|z'_t|^2 \neq 0$ , система имеет единственное решение

$$U'_x(z_0) = U'_y(z_0) = V'_x(z_0) = V'_y(z_0) = 0.$$

Таким образом, контур  $\gamma^*$  обязательно должен проходить через точку  $z_0$ , в которой  $S'(z_0) = 0$ .

Для изучения метода перевала нам понадобятся три леммы, которые мы приводим без доказательства.

*Лемма 2.4.* (Принцип максимума для гармонической функции.) Пусть функция  $U(z)$  является гармонической в ограниченной односвязной области  $D$  и непрерывной в  $\bar{D}$ . Если  $U(z)$  не является постоянной, то она не принимает своего максимального значения во внутренних точках области.

*Лемма 2.5.* Пусть  $z_0$  – простая точка перевала функции  $S(z)$ , т. е.  $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$ . Тогда в малой окрестности  $U$  точки  $z_0$  линия уровня  $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$  состоит из двух гладких кривых, которые ортогональны в точке  $z_0$  и разбивают окрестность  $U$  на четыре сектора. Знаки функции  $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$  в соседних секторах различны, и через секторы, в которых  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$  проходит гладкая кривая  $\gamma^*$ , являющаяся перевальным контуром, т. е.  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$  и  $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$  для всех  $z \in \gamma^*$ .

**Лемма 2.6** (О линии наискорейшего спуска.) Пусть функция  $W = U(x; y) + iV(x; y)$  аналитическая в области  $D \subset \mathbb{C}$ . Тогда линия наискорейшего спуска функции  $U(x; y)$  задается уравнением  $V(x; y) \equiv \text{const}$ .

### Нахождение главного члена асимптотики

Выведем формулу главного члена асимптотики интеграла (П2.21) в предположении существования перевального контура.

**Теорема 2.8.** Пусть функции  $f(z)$  и  $S(z)$  являются аналитическими в некоторой области  $D$ , содержащей кривую  $\gamma$ ,  $z_0$  – простая точка перевала ( $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$ ),  $f(z_0) \neq 0$  и  $z = z(t)$  – такая параметризация перевального контура, что  $z(0) = z_0$ . Тогда

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{-\varphi_0} (1 + O(\lambda^{-2})),$$

где  $z(0) = z_0, \theta_0 = \arg z'(0)$

**Доказательство.** Применяя к последнему интегралу (П2.21) метод Лапласа, получим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = e^{\lambda S \text{Im} S(z_0)} \int_{\alpha}^{\beta} f_*(t) e^{\lambda S_*(t)} dt (1 + O(\lambda^{-\infty})) = \\ &= e^{i\lambda S \text{Im} S(z_0)} e^{\lambda S_*(0)} f_*(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(0)|}} \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right), \end{aligned}$$

Поскольку на перевальном контуре  $\text{Im} S(z(t)) \equiv \text{const}$  и  $S'(z_0) = 0$ ,

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} S_*(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2}{dt^2} S(z(t)) \right|_{t=0} = S''(z_0) [z'(0)]^2.$$

Учитывая, что  $S_*(0) = \text{Re} S(z_0), f_*(0) = f(z_0) z'(0)$ , находим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \\ &= f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} z'(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(0)| |z'(0)|^2}} \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right) = \\ &= f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(0)|}} \left( 1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right). \end{aligned}$$

**Пример 2.10.** Асимптотику функции Бесселя

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi \text{ при } \lambda \rightarrow \infty$$

мы уже находили при изучении метода стационарной фазы. Теперь найдем асимптотику методом перевала.

Стандартной заменой переменной  $z = e^{i\varphi}$  функция Бесселя приводится к виду

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Найдем производные для функции  $S(z)$

$$S(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right), S'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{z^2} \right), S''(z) = -\frac{1}{z^3}.$$

Линия уровня  $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_k) x / 2(1 - 1/|z|^2) = 0$ , проходящая через точки перевала  $z_{1,2} = \pm i$ , состоит из окружности  $|z| = 1$  и прямой  $x = 0$ . Согласно лемме 2, перевальный контур должен быть касательным к биссектрисам соответствующих углов. Учитывая распределение знаков функции  $\operatorname{Re} S(z)$ ,  $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ . Таким образом, асимптотика функции Бесселя имеет вид

$$J_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\right).$$

**Замечание.** Основные сложности при использовании метода перевала обычно бывают связаны с доказательством возможности деформации исходного контура в перевальный (с сохранением значения интеграла) и нахождением направления входа перевального контура в точку перевала. В примере при нахождении асимптотики функции Бесселя удается в явном виде найти линии уровня, проходящие через точки перевала, соответственно направления перевального контура в точках перевала легко находятся. В более общей ситуации для нахождения соответствующего угла могут быть использованы иные соображения.

## БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Возникающие в задачах взаимодействия двух или нескольких рассеивающих тел бесконечные системы линейных уравнений относятся к системам нормального вида

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} x_m = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{ПЗ.1})$$

с комплексными коэффициентами  $c_{nm}$  и комплексными правыми частями (свободными членами)  $b_n$ .

Система типа (ПЗ.1) называется регулярной, если сумма модулей ее коэффициентов в каждой строке меньше единицы

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

и называется вполне регулярной, если коэффициенты  $c_{nm}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| \leq 1 - \alpha < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

где  $\alpha$  – некоторая постоянная ( $\alpha > 0$ ). Регулярная система уравнений (ПЗ.1), правые части которой удовлетворяют условию

$$|b_n| \leq C \rho_n,$$

где  $C = \text{const} > 0$ , а  $\rho_n = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , всегда имеет ограниченное решение  $|x_n| < C$ , которое может быть найдено методом последовательных приближений. Решение вполне регулярной системы существует при любых ограниченных правых частях  $b_n$ , причем оно всегда единственное. Регулярная система уравнений может иметь и несколько ограниченных решений.

Решение системы (ПЗ.1), найденное методом последовательных приближений при нулевом начальном значении, называется главным решением.

Решение системы (ПЗ.1), найденное методом последовательных приближений при нулевом начальном значении, называется главным решением.



ем системы. Главное решение регулярной системы (ПЗ.1) со свободными членами, удовлетворяющими условию  $|b_n| \leq C\rho_n$ , может быть найдено и методом усечения (редукции), т. е. если  $x_n^N$  есть решение конечной системы

$$x_n + \sum_{m=1}^N c_{nm} x_m = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

то

$$\bar{x}_n = \lim_{N \rightarrow \infty} x_n^*,$$

где  $\bar{x}_n$  – главное решение системы (ПЗ.1).

Система, для которой условие регулярности выполняется не во всех строчках, а лишь начиная с некоторой, т. е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| < 1, \quad n = N+1, N+2, \dots$$

и для которой, кроме того,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$|b_n| \leq C\rho_n = C \left( 1 - \sum_{m=N-1}^{\infty} |c_{nm}| \right), \quad n = N+1, \dots$$

называется квазирегулярной. Для таких систем вопрос о существовании решения сводится к вопросу о существовании решения конечной системы  $N$  уравнений с  $N$  первыми неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Система уравнений

$$X_n + \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} X_m = B_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{ПЗ.2})$$

называется мажорантной для системы (ПЗ.1), если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |c_{nm}| &\leq C_{nm}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \\ |b_n| &\leq B_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если коэффициенты системы (ПЗ.1) таковы, что составленный из них ряд  $\sum_{n,m=1}^{\infty} |c_{nm}|^2$  сходится:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |c_{nm}|^2 < +\infty, \quad (\text{ПЗ.3})$$

то говорят, что система (ПЗ.1) обладает вполне непрерывной формой (вполне непрерывным линейным оператором в гильбертовом координатном пространстве  $l^2$ ). Для систем (ПЗ.1) с вполне непрерывной формой справедливо следующее утверждение (альтернатива Гильберта): при сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \quad (\text{ПЗ.4})$$

данная система (ПЗ.1) имеет либо единственное определенное решение  $|x_n|$ , удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \quad (\text{ПЗ.5})$$

либо решение, отличное от нуля, однородная система, соответствующая неоднородной системе (ПЗ.1).

Отметим, что если

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |c_{nm}|^2 < 1 \quad (\text{ПЗ.6})$$

и выполняется условие (ПЗ.4), то система (ПЗ.1) имеет единственное решение  $|x_n|$ , удовлетворяющее условию (ПЗ.5).

Одним из распространенных методов решения неоднородной системы (ПЗ.1) с вполне непрерывной формой является метод усечения, состоящий, как указывалось выше, в замене бесконечной системы (ПЗ.1) конечной системой

$$x_n + \sum_{m=1}^N c_{nm} x_m = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{ПЗ.7})$$

из  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными, решение которой (обозначим его через  $x_n^N$ ) рассматривается как приближенное решение исходной бесконечной

системы (ПЗ.1). Если система (ПЗ.1) с вполне непрерывной формой однозначно разрешима, то при достаточно большом  $N$  система (ПЗ.7) будет также разрешимой и будет иметь место сходимость приближенных решений к точному:  $\lim x_n^N = x_n, N \rightarrow \infty$ . Сопоставлением последовательных приближений решения системы для различных возрастающих значений  $N$  порядка усечения можно получить приближения с заданной наперед степенью точности.

Заметим, что в ряде случаев система, не являющаяся регулярной (квазирегулярной) или не обладающая вполне непрерывной формой, может быть при помощи некоторых преобразований (например, путем замены неизвестных  $x_n$  другими неизвестными  $z_n$  по формуле  $x_n = \alpha_n z_n$ ) приведена к регулярной (квазирегулярной) системе или к системе с вполне непрерывной формой относительно неизвестных  $z_n$ .

Все сказанное переносится и на бесконечные системы, образующие совокупность двух систем

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} x_m = b_n,$$

$$y_n + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm} y_m = c_n, n = 1, 2, \dots,$$

с двумя рядами неизвестных  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , и  $y_1, y_2, \dots$ , которые после введения новых обозначений могут быть приведены к одной системе нормального вида, и на бесконечные системы уравнений вида

$$x_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} x_m = b_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ БИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для корректного построения моделей при описании взаимодействия лазерного излучения с биологическими тканями необходимо кроме определения математического аппарата также определить и оптические и физические параметры модели. Рассмотрим на примере кожи человека.

### Оптические характеристики биотканей на примере кожной ткани

Кожа человека является ярким примером многокомпонентной мутной биологической среды и весьма сложна для описания при построении моделей. Оптические характеристики такой сложной среды в целом зависят от множества факторов. Для корректного построения модели кожи и описания ее оптических свойств необходимо иметь некоторое представление о биологических особенностях строения кожи (рис. П4.1).

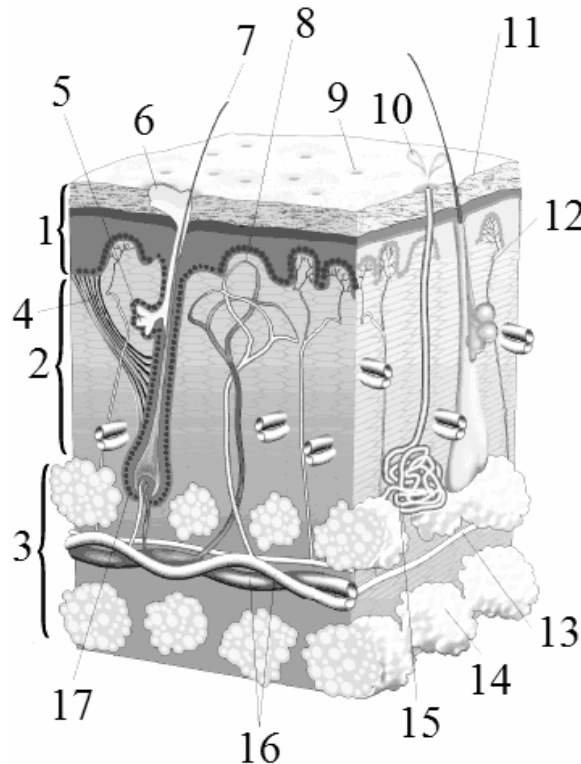


Рис. П4.1. Биологическое строение кожи человека:

- 1 – эпидермис; 2 – дерма; 3 – подкожная жировая клетчатка;  
 4 – мышца; поднимающая волос; 5 – сальная железа; 6 – жировой секрет;  
 7 – волос; 8 – капилляры; 9 – пора; 10 – пот; 11 – кератин (роговой слой);  
 12 – нервное окончание; 13 – нерв; 14 – жировая долька; 15 – потовая железа;  
 16 – кровеносные сосуды; 17 – волосяной мешочек

Толщина кожного покрова зависит от части тела, изменяясь от 1 до 4 мм. В коже выделяют три части (рис. П4.1). Верхняя часть – эпидермис – представляет собой многослойный эпителий, наружный слой которого – роговой слой – постоянно слущивается. Толщина эпидермиса различна – от 0,02–0,05 мм на шее и лице до 0,5–2,4 мм на ладонях и подошвах. Нижний слой эпидермиса – базальный, лежит на базальной мембране, разделяющей эпидермис и дерму. В базальном слое находятся клетки – меланоциты, производящие пигмент меланин. Независимо от типа расы в коже каждого человека находится одинаковое количество меланоцитов, но количество меланина, которое эти клетки производят, различно. Функция меланина – защита кожи от вредного воздействия солнечных лучей: чем темнее кожа, тем лучше она защищена от солнечного ожога.

Истинная или внутренняя кожа – дерма – состоит из богатой волокнами и относительно бедной клетками соединительной ткани, являющейся опорой для придатков кожи (волос, ногтей, потовых и сальных желез) сосудов и нервов. Волосы и протоки от желез проходят через эпидермис к поверхности кожи. Толщина дермы варьируется от 0,5 до 5 мм. На предплечье она не превышает 1 мм (у женщин) и 1,5 мм (у мужчин), а в некоторых местах достигает 2,5 мм (кожа спины у мужчин). В дерме выделяют два слоя: прилежащий к эпидермису сосочковый и сетчатый (ретикулярный). В сосочковом слое содержатся различные волокна, придающие коже прочность и упругость, а также многочисленные кровеносные и лимфатические сосуды, нервные сплетения и окончания нервных волокон. Сетчатый слой располагается под сосочковым слоем. В нем залегают потовые и сальные железы, волосяные сумки. Протоки сальных желез открываются в волосяные сумки. Волокнистые структуры дермы состоят из коллагеновых, эластических и ретикулярных волокон. Промежутки между волокнами, придатками кожи и другими структурными образованиями занимает так называемое основное вещество – аморфная субстанция.

Подкожная жировая клетчатка (гиподерма) состоит из рыхлой сети коллагеновых, эластических и ретикулярных волокон, в петлях которых расположены дольки жировой ткани – скопления крупных жировых клеток. Подкожный слой пронизан сетью нервов и кровеносных сосудов, которые поддерживают и питают дерму и эпидермис. Толщина этого слоя различна и зависит от образа жизни человека, питания, обмена веществ. От количества меланина, производимого меланоцитами, зависит цвет кожи и ее чувствительность к воздействию света. Чем больше вырабатывается меланина, тем интенсивнее и темнее окраска кожи. У людей, живущих в жарких странах, меланина в коже вырабатывается очень много, поэтому кожа у них смуглая; наоборот, у людей, живущих на севере, меланина мало, поэтому кожа северян светлее. Цвет и чувствительность к световому воздей-

ствию определяют тип кожи человека. Различают 6 типов, согласно классификации Томаса Фицпатрика:

**Тип I:** восточно-европейский. Очень светлая кожа, мало меланина, светлые волосы, голубые или зеленые глаза. Никогда не загорает, всегда обгорает.

**Тип II:** восточно-европейский или скандинавский. Кожа светлая, волосы от светло-рыжих до светло-русых, зеленые или карие глаза. Редко загорает, обычно обгорает.

**Тип III:** средиземноморский. Кожа не белая, но и не смуглая, волосы каштановые, глаза карие. Часто загорает, иногда обгорает.

**Тип IV:** азиатский. Более сильная пигментация, хорошая переносимость солнечного облучения. Кожа смуглая, волосы черные, глаза черные.

**Тип V:** небелый. Светло-черный цвет кожи, черные волосы, черные глаза. Никогда не обгорает.

**Тип VI:** черный. Очень темный цвет кожи, черные волосы, черные глаза. Никогда не обгорает.

На цвет кожи также влияют такие факторы, как кровь в кровеносных сосудах кожи и естественный желтоватый оттенок ткани кожи. Состояние кровеносных сосудов в коже может сильно менять цвет кожи. Так, человек бледнеет от страха, когда малые сосуды закрываются, краснеет от гнева, когда увеличивается приток крови, и синееет от холода, когда большая часть кислорода в крови отходит к тканям по мере того, как приток крови замедляется.

Снабжение кожи кровью в норме осуществляется следующим образом. Все вены в организме человека локализуются либо поверхностно, в подкожной клетчатке, либо в глубине анатомических областей по ходу артерий, сопровождаемых обычно парами вен. Поверхностные вены благодаря множественным соустьям образуют венозные сплетения, которые в норме содержат основную часть объема располагающейся в коже крови. Артерии, вступив в дерму из подкожной клетчатки, все более разветвляясь, образуют глубокую и поверхностную (подсосочковую) параллельные сети. От подсосочковой сети отходят терминальные артериолы, по одной на несколько сосочков. В каждом сосочке есть капилляр в виде шпилькообразной петли, поднимающийся к вершине сосочка артериальным коленом и переходящий в более толстое венозное колено. Из капиллярных петель кровь собирается в поверхностную венозную сеть и далее в расположенные друг за другом все более укрупняющиеся три венозные сети. Наиболее глубокая из них лежит в подкожной клетчатке.

Биологические ткани, такие как кожа, являются оптически неоднородными поглощающими средами со средним показателем преломления, большим, чем у воздуха, поэтому на границе раздела биообъект–воздух

часть излучения отражается (френелевское отражение), а остальная часть проникает в биоткань.

Помимо поглощения, кожа характеризуется значительным светорассеянием, т. е. является сильно рассеивающей мутной средой, так как состоит из большого числа случайно распределенных в объеме рассеивающих центров. Степень рассеяния зависит от длины волны излучения и оптических свойств биоткани. Рассеяние света средами, состоящими из большого числа частиц, существенно отличается от рассеяния света отдельными частицами. Это связано, во-первых, с интерференцией волн, рассеянных отдельными частицами между собой и с падающей волной; во-вторых, во многих случаях важны эффекты многократного рассеяния (переизлучения), когда свет, рассеянный одной частицей, вновь рассеивается другими; в-третьих, взаимодействие частиц между собой не позволяет считать их движения независимыми. За счет многократного рассеяния и поглощения лазерный пучок уширяется и затухает при распространении в коже.

Объемное рассеяние является причиной распространения значительной доли излучения в обратном направлении (обратное рассеяние). Клеточные мембраны, ядра и органеллы являются основными рассеивателями для многих биологических тканей. Поглощенный свет преобразуется в тепло, переизлучается в виде флуоресценции или фосфоресценции, а также тратится на фотобиохимические реакции. Спектр поглощения определяется типом доминирующих поглощающих центров и содержанием воды в биоткани. Характер фотовоздействия лазерного излучения на биологическую ткань определяется ее составом и коэффициентом поглощения на длинах волн облучения. В УФ и ИК ( $\lambda > 2$  мкм) областях спектра превалирует поглощение, поэтому вклад рассеяния сравнительно мал, и свет неглубоко проникает в биоткань, всего на один или несколько клеточных слоев (рис. П4.2а).

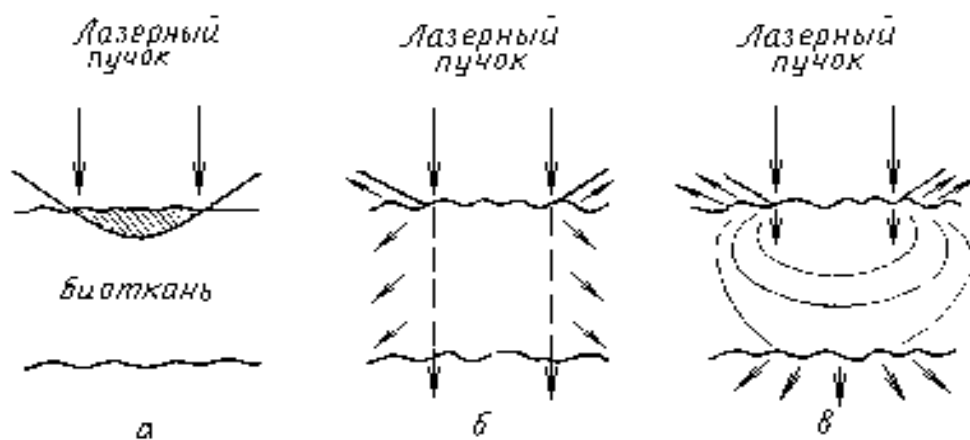


Рис. П4.2. Поглощение и рассеяние света биологическими тканями

В коротковолновой видимой области спектра глубина проникновения света для типичной биоткани составляет 0,5–2,5 мм. В этом случае существенную роль играют как поглощение, так и рассеяние, которое преобладает в отраженном от кожи излучении (отражается примерно от 15 до 50% падающего пучка) (рис. П4.2б). На длинах волн от 600 до 1500 нм рассеяние превалирует над поглощением и глубина проникновения увеличивается до 8–10 мм (рис. П4.2в).

Сильное рассеяние обусловлено соизмеримостью длины волны излучения с размерами клеток и отдельных их элементов. По мере того как свет проникает через кожу, коллимированная структура пучка полностью заменяется на диффузную, обратное рассеяние возрастает, и интенсивность отраженного от кожи света достигает 35–70% от интенсивности падающего пучка. В зависимости от типа биологической ткани и длины волны, коэффициент отражения может изменяться в очень широких пределах. Таким образом, оптические свойства биологической ткани определяются ее структурой и состоянием: физиологическим состоянием, уровнем гидратации, гомогенностью, видовой вариантностью, характером измерений *in vivo* – *in vitro* и др.

Ослабление лазерного пучка в биологической ткани проходит по экспоненциальному закону. Интенсивность коллимированного излучения оценивается по закону Бугера–Бера. Еще одним из важных оптических параметров ткани является оптическая глубина проникновения  $\delta$  (в метрах). Она означает глубину ткани, на которой интенсивность диффузно рассеянного света уменьшается по сравнению со значением интенсивности падающего излучения в  $e$  раз. Существенное значение величины анизотропии рассеяния биологических тканей и многократное рассеяние приводят к отклонению от закона Бугера–Бера.

В описании эффектов, происходящих в тканях под воздействием излучения, поглощение воды играет важную роль, так как она является главной составляющей большинства тканей. Человеческий организм на 55–65% состоит из воды. В организме взрослого человека с массой тела 65 кг содержится в среднем 40 л воды, из них около 25 л находится внутри клеток, а 15 л – в составе внеклеточных жидкостей организма. Вода является основной средой, в которой протекают многочисленные химические реакции и физико-химические процессы (ассимиляция, диссимиляция, осмос, диффузия, транспорт и другие), лежащие в основе жизни. Организм строго регулирует содержание воды в каждом органе и каждой ткани. Постоянство внутренней среды организма, в том числе и определенное содержание воды, является одним из главных условий нормальной жизнедеятельности.

В УФ, видимом и БИК-диапазонах длин волн коэффициент поглощения воды очень мал. В этих областях поглощение ткани определяется



спектрами поглощения пигментов, в частности для кожи – спектрами поглощения меланина и крови (гемоглобина и оксигемоглобина). Поглощение меланина является наиболее важным составляющим полного поглощения эпидермиса и рогового слоя. Спектр поглощения меланина, содержащегося в эпидермисе кожи человека, представлен на рис. П4.3.

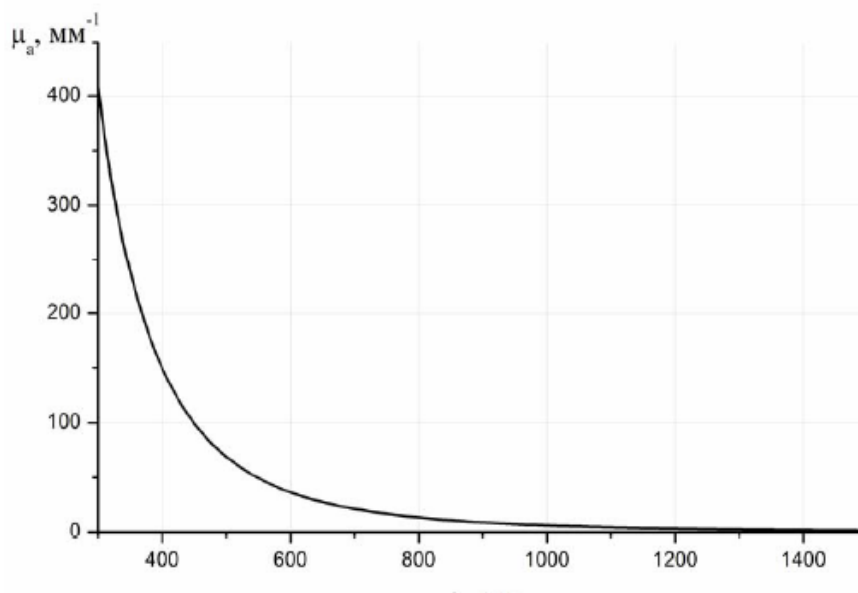


Рис. П4.3. Спектр поглощения меланина

Для расчетов интерес представляет величина оптической плотности (OD) эпидермиса, которая является результатом следующего произведения:  $OD = m_{\text{меланин}} \cdot h$ , где  $m_{\text{меланин}}$  – коэффициент поглощения меланина,  $h$  – толщина слоя эпидермиса.

Оптическая плотность зависит от количества меланина в базальном слое, что в свою очередь, зависит от многих факторов, основным из которых является тип кожи. В зависимости от него процентное содержание меланина в базальном слое эпидермиса кожи человека может изменяться от 1,5 до 43%. Поэтому оптическая плотность эпидермиса имеет сильную зависимость от типа кожи человека. Например, для второго типа кожи оптическая плотность эпидермиса на длине волны  $\lambda = 700$  нм равна 0,035, а для шестого типа кожи для данной длины волны оптическая плотность эпидермиса равна 0,33.

Дерма существенно отличается от эпидермиса и по составу и по структуре. Коэффициент рассеяния дермы сильнее в более коротких длинах волн. Рассеяние играет главную роль в определении глубины проникновения излучения различных длин волн в дерме. Поэтому более длинные волны проникают глубже, чем короткие. Это связано с наличием меланина,

который больше поглощает короткие длины волн, чем длинные. По данным [W.-F. Cheong, S.A. Prahl, A.J. Welch] для образца, состоящего из эпидермиса и дермиса, глубина проникновения составляет 0,15–0,2 мм (для длины волны 632,8 нм), 0,21–0,4 мм (для длины волны 675 нм).

На рис. П4.4 представлен спектр отражения человеческой кожи *in vivo*, получен на молодом белом мужчине [S.L. Jacques]. Стрелочками обозначены главные полосы поглощения. При длинах волн больше чем 320 мкм минимум ожидается вследствие поглощения гемоглобина и воды. Виден слабый признак полосы поглощения в области 340–350 мкм. Предположительно это полоса поглощения гемоглобина.

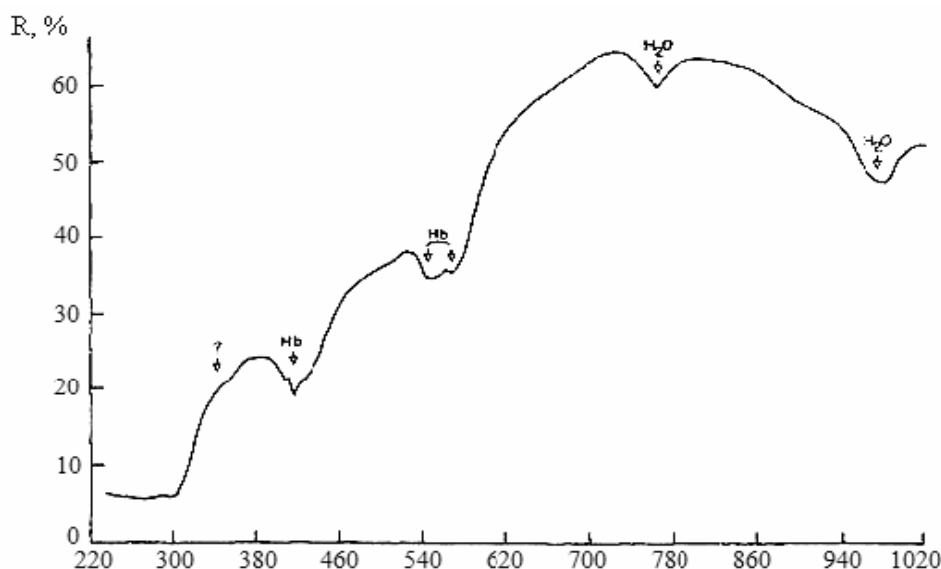


Рис. П4.4. Коэффициент отражения кожи предплечья светлого молодого белого мужчины

Биологические ткани являются сильно рассеивающими объектами, распространение света через которые может считаться диффузным процессом [А. Исимару]. Важное свойство рассеивающей ткани – анизотропия, которая определяется величиной, называемой фактором анизотропии  $g$  – средний косинус угла рассеяния.

Для большинства непрозрачных биологических тканей значение фактора анизотропии находится в диапазоне (0,7–0,95).

На рис. П4.5 приведены коэффициенты рассеяния и поглощения кожи человека. Видно, что рассеяние кожи заметно возрастает для более коротких длин волн. Коэффициент поглощения значительно меньше коэффициента рассеяния в области коротких длин волн, но имеет пики в области полос поглощения воды. Рассеяние играет главную роль в определении глубины проникновения излучения с длинами волн из диапазона 300–

1200 нм в кожу, для излучения с большей длиной волны глубину проникновения определяет поглощение. В табл. П4.1 приведены некоторые оптические коэффициенты рогового слоя, эпидермиса и дермы для человека *in vitro* на различных длинах волн [W.-F. Cheong, S.A. Prahl, A.J. Welch].

Таблица П4.1

Оптические свойства человеческой кожи *in vitro*

Ткань	$\lambda$ , нм	$\mu_t$ , см <sup>-1</sup>	$\mu_a$ , см <sup>-1</sup>	$\mu_s$ , см <sup>-1</sup>	$\mu_s(1-g)$ , см <sup>-1</sup>	g
Роговой слой	193	-	6000	-	-	-
	250	-	1150	2600	260	0,9
	308	-	600	2400	240	0,9
	337	-	330	2300	230	0,9
	351	-	300	2200	220	0,9
	400	-	230	2000	200	0,9
Эпидермис	250	-	1000	2000	313	0,69
	308	-	300	1400	407	0,71
	337	-	120	1200	338	0,72
	351	-	100	1100	306	0,72
	415	-	66	800	206	0,74
	488	-	50	600	143	0,76
	514	-	44	600	139	0,77
	585	-	36	470	99	0,79
	633	-	35	450	88	0,80
	800	-	40	420	62	0,85
Дерма	250	-	26	833	257	0,69
	308	-	8,7	583	170	0,71
	337	-	6,1	500	141	0,72
	351	-	5,2	458	127	0,72
	415	-	3,5	320	82	0,74
	488	-	2,6	250	60	0,76
	514	-	2,2	250	58	0,77
	585	-	2,2	196	41	0,79
	633	-	2,0	187,5	37	0,80
	800	-	1,7	175	30	0,85
	630	243	1,8	-	-	-
	633	190	2,7	187	35,5	0,81
	635	-	1,8	244	-	-

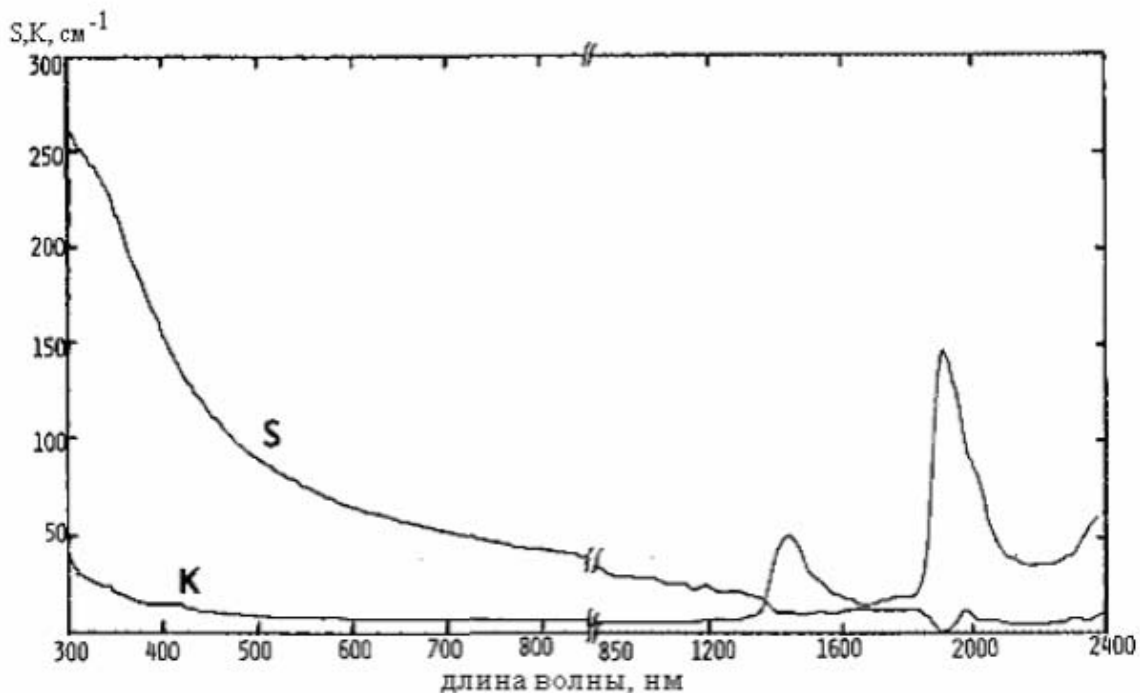


Рис. П4.5. Коэффициенты рассеяния (S) и поглощения (K) для человеческой кожи в искусственных условиях

**Кровь** – одна из наиболее важных биологических жидкостей. На ее долю приходится примерно 6–8% общего веса тела, что соответствует у взрослого человека 4–6 л. Кровь состоит из жидкой части – плазмы (составляет 57% всего объема крови) и взвешенных в ней клеточных (ферментных) элементов (47%). Плазма состоит на 90–91% из воды, 6,5–8,0% составляют белковые молекулы, остальные 2% приходятся на низкомолекулярные вещества. Различают красные и белые кровяные тельца (клетки) – эритроциты и лейкоциты. Кроме того, в крови содержатся кровяные пластинки – тромбоциты. 99% кровяных телец составляют эритроциты, и 1% – лейкоциты и тромбоциты. Эритроциты имеют форму двояковогнутого диска диаметром около 7 мкм и толщиной, изменяющейся от 1 мкм в центре до 2 мкм по краям. Клетка содержит молекулы гемоглобина (Hb), которые, легко присоединяя кислород, превращаются в молекулы оксигемоглобина (HbO<sub>2</sub>). Соответственно различают венозную и артериальную кровь. Объемный процент эритроцитов в цельной крови носит название гематокрит. В норме у взрослого мужчины гематокрит равен 44–46 об.%, а у женщины – 41–43 об.%. Важнейшим параметром является также насыщение крови кислородом (OS), определяемое как отношение оксигемогло-

бина к общему гемоглобину. Вследствие вышесказанного, поглощение крови определяется в основном поглощением воды, гемоглобина и оксигемоглобина. Спектры поглощения данных пигментов представлены на рис. П4.6 [К.Джонсон, А. Гай]. Наблюдаются сильная полоса поглощения с центром в области около 414,5 нм и более слабые пики поглощения в области 550 нм. По сравнению с гемоглобином оксигемоглобин меньше поглощает в красной области спектра. При длинах волн 548, 568, 587 и 805 нм величины поглощения Hb и HbO<sub>2</sub> равны. Эти длины волн называются изобестическими точками.

Отмечено, что цельная кровь, в которой гемоглобин находится в эритроцитах, в общем поглощает больше, чем гемолизованная кровь. Возрастание поглощения связано с эффектом рассеяния на эритроцитах.

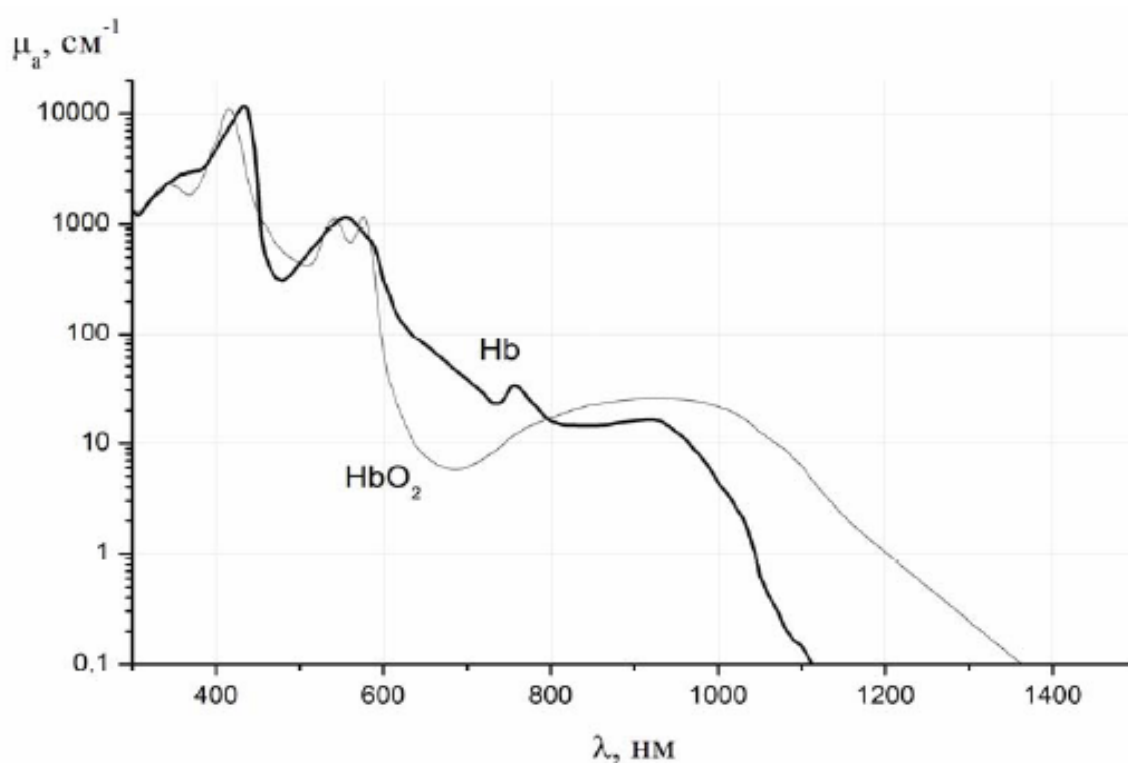


Рис. П4.6 Спектры поглощения гемоглобина (Hb) и оксигемоглобина (HbO<sub>2</sub>)

Отмечено, что цельная кровь, в которой гемоглобин находится в эритроцитах в общем, поглощает больше, чем гемолизованная кровь. Возрастание поглощения связано с эффектом рассеяния на эритроцитах. На рис. П4.7а показана полученная в экспериментах зависимость от угла рассеяния  $\theta$  относительной интенсивности света, рассеянного вперед изолированными эритроцитами. Выступ на кривой около  $8^\circ$  принадлежит вто-

ричному дифракционному максимуму. Получены также данные по рассеянию цельной крови (рис. П4.7б).

При низком гематокрите  $H$  (объемный процент эритроцитов в цельной крови) пропущенный свет представляет собой очень узкий пучок, это указывает на слабое рассеяние. При возрастании гематокрита пучок пропущенного света расширяется, т. е. растет рассеяние. При  $\theta = 0^\circ$  интенсивность уменьшается с ростом  $H$  из-за возрастания поглощения и рассеяния.

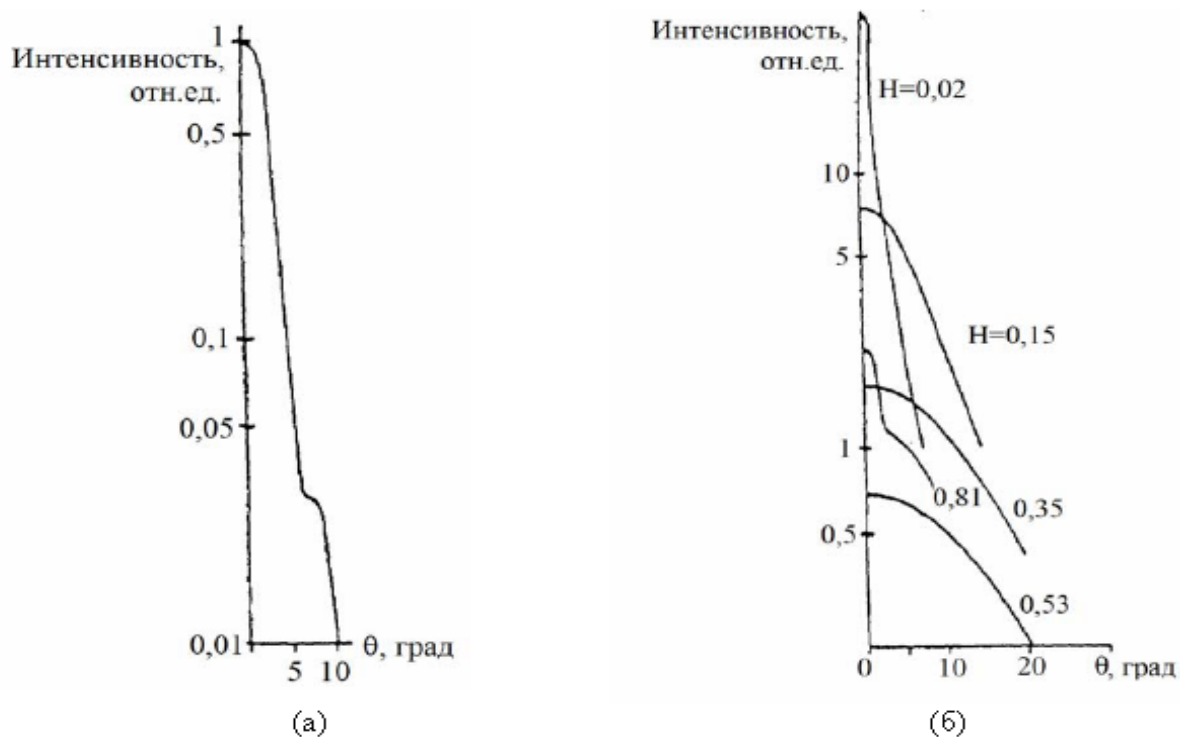


Рис. П4.7. Зависимость от угла рассеяния  $\theta$  относительной интенсивности света, рассеянного вперед изолированными эритроцитами

На кривой при высоком гематокрите  $H=0,81$  четко проявляется нерассеянный узкий пучок на вершине более широкого рассеянного пучка, обусловленный возрастающим пропусканием. Этот рост пропускания связан со снижением рассеяния, так как поглощение должно обязательно возрастать. Рассеяние при низких значениях гематокрита происходит в основном на эритроцитах. Повышение гематокрита означает возрастание количества эритроцитов и возрастание рассеяния. При более высоких значениях гематокрита  $H > 0,5$  эритроциты слипаются вместе, образуя гомогенную массу поглощающего гемоглобина, и рассеяние происходит на плазмменных полостях, расположенных между массами красных кровяных телец. С ростом гематокрита уменьшаются плазмменные полости, что приводит к наблюдаемому уменьшению рассеяния при больших  $H$ .

Для кожи в целом поглощение излучения кровью играет огромную роль. В коже проходят сосуды, наполненные кровью. Процентное содержание крови различно для разных людей. Это обусловлено и количеством сосудов и их размерами. Обычно считается, что среднее объемное содержание крови в коже равно 0,2%. Однако большая часть крови сосредоточена в поверхностном сплетении сосудов на глубине 100-300 мкм, где объемное содержание крови в ткани составляет примерно 2-5% [Jacques S.L.]. Чем больше содержание крови в дерме, тем больше поглощение ею излучения на длинах волн, соответствующих поглощению крови. Поэтому при расчете оптимальных параметров излучения следует учитывать и содержание крови в дерме, и диаметр сосудов.

Жировая ткань, с точки зрения оптических свойств, представляет собой неоднородную среду, способную поглощать и рассеивать свет. Рассеивающими объектами в жире могут быть клеточные мембраны, ядра, митохондрии, кристаллические клетки и др. Некоторые из этих структур, например мембраны и ядра, встречаются и в жидкой фазе. При освещении жировой ткани светом видимого диапазона рассеивающие свет частицы постепенно уменьшают его направленность (коллимированность). Распространение света через сильно рассеивающую биологическую ткань, к которой можно отнести жировую ткань, может считаться диффузным процессом.

Поскольку данных по оптическим параметрам жировой ткани кожи человека крайне мало, рассмотрим здесь жировую ткань также кролика и свиньи для сравнения и полноты картины. Из всех сильно рассеивающих биологических тканей жировая клетчатка имеет наибольшее значение среднего показателя преломления 1,455 (на длине волны 633 нм) [F.P. Volin, L.E. Preuss, R.C. Taylor, R.J. Ference]. В диапазоне длин волн от 456 до 1064 нм показатель преломления жировой ткани кожи человека составляет величину порядка 1,44, а брюшины человека – 1,46. Значения показателя преломления жировой ткани человека [U. Muller, C. Fishbacher, K. Danzer, V. Mertes], измеренные на отдельных длинах волн, представлены в табл. П4.2.

Таблица П4.2

Жировая ткань	$\lambda$ , нм	n
кожи человека	456 – 1064	1,44
брюшины человека	456 — 1064	1,46

В данном разделе приведены оптические параметры биологических структур без указания их температурных зависимостей. Безусловно, при повышении температуры оптические характеристики тканей и их компонентов могут изменяться.

### Теплофизические характеристики элементов кожной ткани

В отличие от оптических, теплофизические свойства многих биологических объектов в литературе рассмотрены достаточно широко, однако это в основном касается различных съедобных продуктов, таких как мясо, печень и т. п. Для таких биотканей, как, например, кожа человека, теплофизические характеристики в литературе представлены крайне скудно. Во многих случаях их считают примерно равными свойствам воды, поскольку многие биоткани содержат большое ее количество. Действительно, с точки зрения теплофизики именно вода будет являться определяющим фактором для нахождения параметров тканей. Все теплофизические коэффициенты для воды хорошо известны, широко рассмотрены в литературе и приведены в справочных изданиях. Нам будут интересовать в первую очередь плотность  $\rho$ ,  $\left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$ , удельная теплоемкость  $c$ ,  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$ , и коэффициент теплопроводности  $\kappa$ ,  $\left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$ .

В пределах температур 30–80 °С (наиболее актуальные температуры для описания взаимодействия лазерного излучения с биотканями) плотность воды изменяется примерно на 2,5%, удельная теплоемкость – на 0,5%. Наибольшую зависимость от температуры показывает коэффициент теплопроводности, он изменяется примерно на 8,5% для указанных температур. Наиболее важным параметром является удельная теплоемкость, и здесь вода имеет некоторые особенности. Во-первых, вода – единственное вещество на Земле (кроме ртути), для которого зависимость удельной теплоемкости от температуры имеет минимум в районе 37 °С. Поэтому нормальная температура человеческого тела, состоящего на две трети из воды, находится в диапазоне температур 36–38 °С (внутренние органы имеют более высокую температуру, чем наружные). Во-вторых, теплоемкость воды аномально высока. Чтобы нагреть определенное ее количество на один градус, необходимо затратить больше энергии, чем при нагреве других жидкостей, по крайней мере вдвое по отношению к простым веществам. Из этого вытекает уникальная способность воды сохранять тепло. Эта исключительная особенность воды способствует тому, что у человека нормальная температура тела поддерживается на одном уровне и жарким днем, и



прохладной ночью. Таким образом, вода играет главенствующую роль в процессах регулирования теплообмена человека и позволяет ему поддерживать комфортное состояние при минимуме энергетических затрат. Рассмотрим теплофизические характеристики кожи человека, как представителя сложной многокомпонентной биологической среды.

Считается, что теплофизические свойства эпидермиса и базального слоя практически одинаковы, поскольку содержание воды в этих тканях близко по значению – около 50%. Для дермы содержание воды составляет около 70–75%. В табл. П4.3 приведены теплофизические параметры биологических тканей, используемые в различных работах для моделирования температурных полей, возникающих при воздействии излучения на кожу [Л.Г. Астафьева, Г.И. Желтов]. При изменении температуры вследствие различных процессов, происходящих в биотканях (например, денатурация белка, испарение воды и т. п.), изменяются также теплофизические характеристики ткани.

Таблица П4.3

Ткань	$\rho, \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$	$c, \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$	$\kappa, \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$	$a, \left[ \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right]$
Эпидермис	1200	3600	0,21	-
	1600	3700	0,266	-
Дерма	1200	3800	0,53	-
	1000	3200	0,498	-
Кожа	-	-	-	0.0008
	-	-	0.5	0.011
Кровь	1100	3600	0.55	-
	1000	3600	0.53	-
	1058	3840	-	-
Жировая ткань	850-916 [53]	2250-2300 [52]	0.19-0.2 [52]	-

**СЛОВАРЬ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ,  
УПОТРЕБЛЯЕМЫХ В ТЕКСТЕ**

**Биоткань** – объект биологической природы.

**Вероятность поглощения** – отношение коэффициента поглощения к коэффициенту экстинкции.

**Вероятность рассеяния** – отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту экстинкции.

**Диффузная компонента интенсивности** – определяет компоненту интенсивности, появившуюся в результате рассеяния.

**Интенсивность поля** – лучевая интенсивность излучения, падающего на поверхность.

**Коагуляция** – процесс нарушения нормальных свойств белков, их свертывания под действием различных факторов, при котором нарушается гомеостаз и вследствие этого биоткань теряет свои свойства.

**Коллимированная компонента интенсивности** – описывает ни разу не поглотившийся и не рассеявшийся свет от внешнего или внутреннего источника.

**Коэффициент отражения** – отношение отраженной и падающей интенсивностей электромагнитного излучения.

**Коэффициент поглощения вещества** – величина, обратная расстоянию, на котором падающая на вещество интенсивность электромагнитного излучения уменьшится в  $e$  раз от ее начальной величины вследствие поглощения.

**Коэффициент рассеяния вещества** – величина, обратная расстоянию, на котором падающая на вещество интенсивность электромагнитного излучения уменьшится в  $e$  раз от ее начальной величины вследствие рассеяния.

**Коэффициент экстинкции** – сумма коэффициентов поглощения и рассеяния.

**Лучевая интенсивность** – средняя плотность потока энергии для данного направления, заключенная в единичном интервале частот и в единичном телесном угле.

**Метод Монте-Карло** – численный метод решения математических задач (систем алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений) и прямое статистическое моделирование (физических, химических, биологических, экономических, социальных процессов) при помощи получения и преобразования случайных чисел.

**Мутные среды** – среды, в которых одновременно проявляются как поглощение, так и рассеяние.

**Мягкая биоткань** – биологическая ткань, содержащая большое количество воды ( $\approx 60\text{--}80\%$ ).

**Неупругое рассеяние** – процесс, при котором частота рассеянного излучения не совпадает с частотой падающего излучения.

**Объемная плотность источников тепла в среде** – величина, равная произведению плотности мощности падающего на среду излучения на освещенность в среде и на коэффициент поглощения.

**Оптическая глубина** – величина, равная произведению оптической длины пути на коэффициент экстинкции.

**Оптическое альbedo** – отношение коэффициентов рассеяния и экстинкции.

**Освещенность** – интеграл лучевой интенсивности по телесному углу  $4\pi$ .

**Отражательная способность поверхности** – отношение отраженной и падающей амплитуд электрического поля.

**Отражение** – процесс возвращения электромагнитного излучения поверхностью, на которую оно падает.

**Плотность вещества** – отношение массы вещества к занимаемому им объему.

**Поверхностная интенсивность** – лучевая интенсивность излучения, испускаемого поверхностью.

**Поглощательная способность среды** – отношение поглощенной и падающей интенсивностей.

**Поглощение** – процесс, состоящий в возбуждении среды электромагнитным излучением с последующим преобразованием световой энергии в тепловое движение или колебания молекул поглощающего вещества.

**Показатель преломления вещества** – величина, равная отношению фазовых скоростей электромагнитных волн в вакууме и в данной среде.

**Прозрачность среды** – отношение прошедшей и падающей на образец интенсивностей электромагнитного излучения.

**Рассеяние** – процесс, состоящий в возбуждении среды электромагнитным излучением с последующим переизлучением в электромагнитную энергию.

**Теплопроводность** – величина, равная количеству теплоты, переносимой через единицу площади за единицу времени при температурном градиенте, равном единице.

**Удельная теплоемкость** – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К.

**Упругое рассеяние** – процесс, при котором частота рассеянного излучения совпадает с частотой падающего излучения.

**Фактор анизотропии рассеяния** – средний косинус угла рассеяния излучения в среде.

*Куликов Кирилл Геннадьевич*

**Математическое моделирование медико-биологических систем**

Учебное пособие

Дизайн обложки

Оригинал-макет подготовлен автором

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Редактор И.И. Щенсяк

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т.2;  
95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать Формат 60x90/16.  
15,0 усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж . Заказ

---

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.  
Издательство Политехнического университета.  
Член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.  
Адрес университета и издательства:

195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29