Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. И. МАДУНЦ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2013

УДК 517.21
ББК

Линейная алгебра. Матрицы, определители и системы линейных уравнений: учеб. пособие / А. И. Мадунц – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 70 с.

Пособие содержит теоретическое изложение материала в соответствии с действующей программой по теме «Линейная алгебра. Матрицы, определители и системы линейных уравнений», а также большое количество разобранных примеров и варианты расчетного задания.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области технической физики, электроники и наноэлектроники при изучении дисциплины «Линейная алгебра».

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 978-5-7422-1845-6

1 ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ

Определение 1.1. *Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов. Числа m и n называются порядками матрицы. Числа, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами.*

Для записи матрицы обычно применяют круглые скобки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При кратком обозначении матрицы часто используют либо одну большую латинскую букву (например, A), либо символ (a_{ij}), а иногда с разъяснением:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

(здесь описывается матрица порядков m и n).

Если элементы матрицы A принадлежат множеству $\mathbb{R}$ вещественных чисел и она содержит m строчек и n столбцов, то принято писать

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Примеры.

1.1. Таблица

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & \\ 9 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

не является матрицей, так как не прямоугольна.

1.2. Таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

является матрицей, состоящей из двух строк и трех столбцов. Для нее

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 9,\ a_{23} = \frac{1}{3}.$$

Определение 1.2. *Две матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{k\times s}$ *называются равными, если* $m = k, n = s$ *и* $a_{ij} = b_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Определение 1.3. *Матрица, число строк которой совпадает с числом столбцов, называется квадратной. Матрица, состоящая из одной строки, называется строкой, из одного столбца — столбцом.*

Квадратную матрицу порядков n и n часто называют квадратной матрицей порядка n, строку порядков 1 и n — строкой длины n, а столбец порядков n и 1 — столбцом высоты n.

Для квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

вводится понятие главной диагонали.

Определение 1.4. *Диагональ* $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ *квадратной матрицы* A *порядка* n, *идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний угол, называется главной диагональю.*

Определение 1.5. *Матрица* B *называется транспонированной к матрице* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *если* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и для всех* $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$ *выполнено соотношение* $b_{ij} = a_{ji}$.

Матрицу, транспонированную к A, обозначают A^T. Она получается из A заменой строчек на столбцы с сохранением порядка их следования.

Примеры.

1.3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ является квадратной матрицей порядка 3. Для нее $a_{11} = 2$, $a_{22} = 9$ и $a_{33} = 1$ — элементы главной диагонали. Транспонированная к ней матрица –

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ является строкой длины 3. Транспонированная к ней матрица — столбец высоты 3 вида $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Определение 1.6. *Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю, нулевые, называется треугольной. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, называется диагональной.*

Примеры.

1.5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — треугольная матрица.

1.6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — диагональная матрица.

Определение 1.7. *Элементарными преобразованиями матрицы называются*

1. *перемена местами двух строк матрицы,*
2. *умножение какой-либо строки матрицы на произвольное ненулевое число,*
3. *прибавление к элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на произвольное число,*
4. *перемена местами двух столбцов матрицы.*

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то матрицы A и B называются эквивалентными и этот факт обозначается $A \sim B$.

Пример 1.7.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & -12 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к первой строке удвоенную третью, вторую поделим на 3, после чего поменяем вторую и третью строки местами. Получим

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 11 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

По определению $A \sim B$.

Теперь поменяем местами первый и последний столбцы матрицы B:

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $A \sim B$ и $A \sim C$.

2 ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Для матриц заданы три стандартные операции — умножение матрицы на число, сложение матриц и перемножение матриц.

Определение 2.1. *Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на вещественное число α называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой $c_{ij}(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ равны $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.*

Произведение матрицы A на число α обозначается αA.

Пример 2.1.

$$-3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -21 & -27 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

Определение 2.2. *Суммой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и матрицы $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой $c_{ij}(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Сумма матриц A и B обозначается $A + B$.

Пример 2.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при сложении двух матриц одинаковых порядков их соответствующие элементы складываются. Для матриц несовпадающих порядков сумма не определена.

Определение 2.3. *Произведением строки* $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ *на столбец* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *называется число* $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Таким образом, произведение строки A длины n на столбец B высоты n вычисляется как сумма попарных произведений соответствующих элементов строки и столбца. Напомним, что по аналогичной формуле в векторной алгебре вычисляется скалярное произведение двух векторов, заданных через координаты.

Когда длина строки не совпадает с высотой столбца, их произведение не определено.

Пример 2.3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 5 + 7 \cdot (-3) + 9 \cdot 6 = 13.$$

Определение 2.4. *Произведением матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *на матрицу* $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *называется такая матрица* $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$, *что* $c_{ij} (1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k)$ *равняется произведению* i*-й строки* A *на* j*-й столбец* B.

Произведение C матрицы A на матрицу B обозначается AB. Заметим, что по определению $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$.

Пример 2.4.

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) + 5 \cdot 6 & 6 \cdot 7 + (-3) \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ -1 \cdot 5 + 0 \cdot (-3) + 6 \cdot 6 & -1 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 47 \\ 31 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B, для которых число столбцов первой не совпадает с числом строк второй, не определено.

Далее будем считать, что если требуется выполнение некоторой операции над матрицами, то их порядки таковы, что эта операция определена. Большими латинскими буквами будем обозначать матрицы, а маленькими греческими — вещественные числа. Символом $\mathbb{O}$ обозначим нулевую матрицу, то есть матрицу, состоящую из одних нулей.

Сформулируем основные свойства сложения матриц и умножения матрицы на число:

1. *$\forall A, B$ имеем $A + B = B + A$ — коммутативность,*
2. *$\forall A, B, C$ имеем $A + (B + C) = (A + B) + C$ — ассоциативность,*
3. *$\forall A$ имеем $A + \mathbb{O} = A$ — существование среди матриц нулевого элемента,*
4. *$\forall A \exists B : A + B = \mathbb{O}$ — существование для любой матрицы противоположного ей элемента,*
5. *$\forall \alpha, \beta, A$ имеем $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ — ассоциативность умножения на число,*
6. *$\forall A$ имеем $1A = A$ — поглощение единицы,*
7. *$\forall \alpha, \beta, A$ имеем $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — дистрибутивность,*
8. *$\forall \alpha, A, B$ имеем $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ — дистрибутивность.*

Все эти свойства доказываются одинаково, а именно переходом к поэлементным равенствам. Докажем, например, коммутативность и существование противоположной матрицы.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда по определению $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}, B + A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, причем

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A.$$

Коммутативность доказана.

Теперь пусть имеется $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и требуется найти B такое, что $A + B = \mathbb{O}$. Таким образом, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $a_{ij} + b_{ij} = 0$, то есть $b_{ij} = -a_{ij}$. Итак, матрица, противоположная A, состоит из элементов, противоположных элементам матрицы A. Она обозначается $-A$. $\square$

Легко видеть, что 8 выписанных свойств аналогичны известным из курса векторной алгебры свойствам сложения векторов и умножения вектора на число.

Основные свойства умножения матриц:

1. *$\forall A, B, C$ имеем $A(BC) = (AB)C$ — ассоциативность,*

2. *$\forall A, B, C$ имеем $(A+B)C = AC + BC$ — дистрибутивность,*

3. *$\forall A, B, C$ имеем $A(B+C) = AB + AC$ — дистрибутивность,*

4. *$\forall \alpha, A, B$ имеем $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ — ассоциативность.*

5. *$(AB)^T = B^T A^T$ — формула для транспонирования произведения.*

Все эти свойства также доказываются переходом к поэлементным равенствам. Докажем наиболее сложные из них – первое и пятое.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Тогда $D = AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$, следовательно, $C \in \mathbb{R}^{k\times p}$ и $F = (AB)C \in \mathbb{R}^{m\times p}$. В этом случае $A(BC) \in \mathbb{R}^{m\times p}$, поэтому порядки левой и правой частей равенства совпадают.

Теперь рассмотрим сами элементы. По определению

$$d_{is} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{ls}, \qquad f_{ij} = \sum_{s=1}^{k} d_{is} c_{sj} = \sum_{s=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{ls} c_{sj}.$$

Если обозначить $BC = G$ и $A(BC) = V$, то

$$g_{lj} = \sum_{s=1}^{k} b_{ls} c_{sj}, \qquad v_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} a_{il} b_{ls} c_{sj}.$$

Поскольку операции суммирования можно менять местами, ассоциативность умножения матриц доказана.

Перейдем к транспонированию произведения. Пусть

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}, C = (AB)^T.$$

Тогда $C \in \mathbb{R}^{k\times m}$, причем $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{li}$. Матрица $D = B^T A^T$ имеет те же порядки, а ее элементы высчитываются по формуле $d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{li} a_{jl}$. Равенство доказано.

Заметим, что умножение матриц некоммутативно, то есть, вообще говоря, неверна привычная формула $AB = BA$.

Пример 2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)$, но $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение 2.5. *Квадратная матрица*

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной матрицей.

Основным свойством единичной матрицы $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является следующее: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ верно, что $AE = EA = A$.

Действительно, $e_{ij} = 0$ при $i \neq j, e_{ii} = 1$. Поэтому элементы матрицы AE имеют вид

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}e_{lj} = a_{ij}.$$

Аналогично с матрицей EA.

3 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

Определение 3.1. *Система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

называется системой m линейных уравнений с n неизвестными, или, более кратко, линейной системой. При этом через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначаются неизвестные, подлежащие определению, а величины $a_{11}, a_{12}, \dots,$ a_{mn}, называемые коэффициентами системы, и величины $b_1, b_2, \dots, b_m$, называемые свободными членами, предполагаются известными. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, причем первый из них i указывает номер уравнения, а второй j — номер неизвестного, при котором стоит коэффициент.

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется (основной) матрицей системы, столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *— столбцом неизвестных, столбец* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *— столбцом свободных членов, матрица* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *— расширенной матрицей системы.*

Используя формулу умножения матрицы на столбец и понятие равенства матриц, можно заменить линейную систему (1) матричным уравнением $AX = B$. В некоторых случаях такая запись оказывается более удобной.

Определение 3.2. *Решением (частным решением) линейной системы* (1) *называется такая упорядоченная совокупность* n *чисел* $c_1, c_2, \dots, c_n$, *которая при подстановке в систему на место неизвестных* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *соответственно обращает все уравнения этой системы в тождества. Общим решением системы называется множество всех ее частных решений.*

Для упорядоченных совокупностей чисел можно ввести операции сложения и умножения на вещественное число аналогично тому, как это делается для строк, то есть покомпонентно. В частности, легко вычислить сумму двух решений некоторой СЛУ или произведение решения СЛУ на число. Однако в общем случае сумма решений СЛУ или произведение решения СЛУ на число, вообще говоря, не является решением той же СЛУ.

Иногда бывает удобно вместо понятия решения использовать понятие столбца решений. Столбец решений СЛУ — это столбец

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — решение. Часто, допуская некоторую вольность речи, не делают разницы между решением и столбцом решений.

Определение 3.3. *Система называется совместной, если она имеет хоть одно решение. В противном случае она называется несовместной.*

Определение 3.4. *Решить СЛУ — найти ее общее решение или доказать, что она несовместна.*

Определение 3.5. *Две СЛУ называются равносильными, если они имеют одинаковое множество решений или обе несовместны.*

Равносильность двух линейных систем СЛУ1 и СЛУ2 будем обозначать символом $\sim$: СЛУ1 $\sim$ СЛУ2.

Заметим, что решение совместной системы не всегда единственно.

Очевидно, что решение СЛУ не зависит от названий неизвестных, а зависит лишь от коэффициентов и свободных членов. Исходя из этого, названия неизвестных принято опускать и систему записывать только с помощью ее расширенной матрицы. Вместо (1) пишем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2}$$

Вертикальная черта здесь по традиции заменяет знак равенства.

По (2) можно полностью восстановить (1), за исключением названий неизвестных. Поэтому обычно говорят, что (2) — это СЛУ, при необходимости уточняя, что запись произведена с помощью расширенной матрицы. Такая запись предпочтительнее, поскольку короче.

Пример 3.1.

Вместо системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ \quad y - 9z = 0 \end{cases}$$

с помощью расширенной матрицы записывается $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right)$.

Задачи. Решить системы линейных уравнений.

3.1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

СЛУ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Вычтя первое уравнение из второго и третьего, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Подставив полученные значения неизвестных в первое уравнение, имеем единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

С помощью расширенной матрицы результат записывается как

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Основная матрица итоговой системы единичная.

3.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

СЛУ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Вычтя первое уравнение из второго и удвоенное первое из третьего, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}.$$

Очевидно, что эта система несовместна (третье уравнение не имеет решений).

С помощью расширенной матрицы результат записывается как

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Теперь вычтем из первого уравнения второе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Основная матрица итоговой системы не является единичной, однако в левом верхнем углу этой матрицы располагается единичная матрица порядка 2, а ниже находится строка из нулей.

3.3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

СЛУ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Вычтя первое уравнение из второго и удвоенное первое из третьего, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Третье уравнение превратилось в тождество, и при дальнейшем решении его можно не учитывать. Теперь вычтем второе уравнение из первого и выразим неизвестные с меньшими индексами через неизвестные с большими:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Легко видеть, что данная СЛУ имеет бесконечное множество решений, а именно наборы чисел $x_1 = -c$, $x_2 = 1$, $x_3 = c$, где c может принимать любые вещественные значения.

С помощью расширенной матрицы результат записывается следующим образом:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Аналогично предыдущей задаче, основная матрица итоговой системы не является единичной, однако в левом верхнем углу этой матрицы располагается единичная матрица порядка 2, а ниже находится строка из нулей.

4 МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СЛУ

Определение 4.1. *Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются*

1. *перемена местами двух уравнений системы,*
2. *умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на произвольное ненулевое число,*
3. *прибавление к обеим частям какого-либо уравнения системы обеих частей другого уравнения, умноженных на произвольное число,*
4. *перенумерация неизвестных.*

Легко видеть, что при записи СЛУ в матричной форме элементарные преобразования над системой сводятся к элементарным преобразованиям расширенной матрицы этой системы (см. определение 1.7). Перемена местами двух уравнений системы соответствует перемене местами двух строк расширенной матрицы, умножение уравнения на число — умножению матрицы на это число, прибавление к уравнению другого уравнения, умноженного на число — аналогичной процедуре со строками матрицы, перенумерация неизвестных — перемене местами столбцов. Отличие лишь в том, что при элементарных преобразованиях над системой невозможна перемена местами последнего столбца расширенной матрицы с каким-либо другим столбцом.

Элементарные преобразования над СЛУ обладают тем свойством, что преобразуют СЛУ в равносильную, то есть не меняют ее решений. Заметим, что такая привычная операция, как выражение из одного уравнения некоторой неизвестной через оставшиеся и подстановка результата в другое уравнение, тоже сводится к элементарным преобразованиям. Выражение неизвестной через оставшиеся соответствует делению уравнения на коэффициент при этой неизвестной, а подстановка во второе уравнение — умножению первого на подходящее число и сложению со вторым уравнением так, чтобы в результате коэффициент при выбранной неизвестной оказался равным нулю.

Поскольку элементарные преобразования над системой не меняют ее решений, с их помощью можно попытаться свести систему к равносильной, но такой, решение которой очевидно. Для итоговой системы возможны два различных варианта.

а) При единственном решении получится числовой ответ, то есть система вида

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

(см. задачу 3.1).

Матрица этой СЛУ единичная, в столбце свободных членов располагается решение, то есть с помощью расширенной матрицы результат записывается как

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_n \end{array}\right).$$

б) Если СЛУ несовместна или имеет несколько решений, то привести ее матрицу элементарными преобразованиями к единичной невозможно, однако естественно попытаться приблизиться к этому, хотя бы часть матрицы приведя к единичной (см. задачи 3.2 и 3.3). Результат удобнее записать с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2r+1} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} & c_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_m \end{array}\right), \tag{3}$$

что соответствует системе

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \\ \qquad\qquad 0 = c_{r+1} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 = c_m \end{array}\right. .$$

Здесь в левом верхнем углу матрицы системы находится единичная матрица порядка r.

Если хоть одно из значений $c_{r+1}, \ldots, c_m$ ненулевое, то система очевидным образом несовместна. Если же все они нулевые, то последние $m - r$ уравнений являются тождествами $0 = 0$ и их можно отбросить, оставив лишь первые r, из которых неизвестные с меньшими индексами выражаются через неизвестные с большими индексами. Подставляя вместо последних конкретные числовые значения и высчитывая соответствующие значения первых, получим различные решения исходной системы. Общее решение состоит из таких всевозможных наборов; при этом неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называют **базисными**, а x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n — **свободными**. Таким образом, базисные неизвестные мы оставили в левых частях уравнений, а свободные перенесли вправо и выразили базисные неизвестные через свободные. Подставляя вместо последних числовые значения, получаем общее решение. $\square$

Итак, наша цель — решить СЛУ, а конкретнее: с помощью элементарных преобразований привести ее матрицу (и параллельно саму систему) к тому виду, который был описан выше. Самым естественным способом является метод последовательного исключения неизвестных, носящий также название метода Гаусса, или метода Жордана. Заключается он в следующем (поскольку метод довольно длинный, мы распишем его поэтапно).

Э т а п 1. Если матрица системы состоит из одних нулей, то решение очевидно (его не существует, если в столбце свободных членов есть ненулевые элементы, в противном же случае решениями являются любые наборы значений неизвестных). Поэтому в случае нулевой матрицы никаких преобразований проводить не будем.

Э т а п 2. Пусть теперь матрица состоит не только из нулей, например, коэффициент $a_{ij} \neq 0$. Поменяем местами строки 1 и i, а после этого столбцы 1 и j (это соответствует перемене местами уравнений с номерами 1 и i и перенумерации неизвестных — первая теперь имеет номер j, а j-я — номер 1). У преобразованной системы коэффициент $a_{11} \neq 0$.

Э т а п 3. Итак, пусть $a_{11} \neq 0$. Поделим первую строку расширенной матрицы системы на этот коэффициент. Мы добились того, что в левом верхнем углу матрицы стоит единица. Будем последовательно умножать получившуюся первую строку на a_{21} и вычитать из второй строки, умножать на a_{31} и вычитать из третьей и так далее, пока все элементы под этой единицей не превратятся в нули. Матрица приобретет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Э т а п 4. На этом этапе первая строка и первый столбец изменяться не будут. Поэтому каждый раз будем переписывать их без изменений, а все рассуждения и процедуры проводить с матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right). \tag{4}$$

Ее порядки на единицу меньше, чем у исходной. С нею снова проделаем процедуру этапов $1 - 3$. Таким образом, сперва следует проверить, не состоит ли матрица (4) из одних нулей. Если да, то никаких преобразований дальше проводить не будем, если же в ней имеется ненулевой элемент, перейдем к этапам 2 и 3. В итоге получим матрицу вида

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

У нее не будут изменяться две первые строки и два первых столбца. Поэтому, возвращаясь к началу этапа 4, будем действовать по описанной там схеме с матрицей, порядки которой на 2 меньше, чем у исходной. Продолжаем процесс до тех пор, пока он не прервется, что обязательно произойдет за конечное число шагов (либо в случае, когда строки или столбцы исчерпаются, либо при возникновении матрицы, состоящей только из нулей). В каждом из этих случаев итоговая матрица имеет вид (3), однако для нее возможны несколько вариантов.

Вариант 1. Пусть $r = m$.

Далее следует совершить так называемый обратный ход метода Гаусса. Он заключается в том, чтобы получать нули не под единицами, а над ними, поэтому двигаться следует не слева направо и сверху вниз, а наоборот, справа налево и снизу вверх. Будем последовательно умножать последнюю строку на a_{1m} и вычитать из первой, умножать на a_{2m} и вычитать из второй и так далее, пока все элементы над единицей в m-м столбце не превратятся в нули. У возникшей матрицы

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1m-1} & 0 & a_{1m+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2m-1} & 0 & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{m-1m+1} & \dots & a_{m-1n} & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{mm+1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

последняя строка в дальнейшем изменяться не будет. Теперь последовательно умножаем предпоследнюю строку на a_{1m-1} и вычитаем из первой, умножаем на a_{2m-1} и вычитаем из второй и так далее, пока все элементы над единицей в $(m-1)$-м столбце не превратятся в нули. Продолжаем процесс, пока не доберемся до первой строки и первого столбца. В результате получим систему

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1m+1} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{mm+1} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right).$$

Таким образом, вся основная матрица системы (при $m = n$) или часть этой матрицы (при $m < n$) превратилась в единичную и мы легко получим решение методом, описанным в начале данного раздела (вариант а) или б)).

В а р и а н т 2. Пусть $r < m$.

В такой ситуации нижние уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 0 = b_{r+1} \\ \quad \dots\dots \\ 0 = b_m \end{cases}.$$

Если в правой части хоть одного из них стоит ненулевое число, то система несовместна. Если же все эти числа нулевые, то соответствующие уравнения являются тождествами $0 = 0$ и не несут никакой информации о неизвестных, поэтому их можно отбросить, перейдя таким образом к варианту 1.

Итак, метод Гаусса позволяет решить любую СЛУ. □

Заметим, что матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называется **трапециевидной**.

5 ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАУССА РЕШЕНИЯ СЛУ

Задачи. Решить методом Гаусса СЛУ.

5.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}.$$

Решение. В матричном виде СЛУ записывается как

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Теперь из второго уравнения (строки) вычтем первое, умноженное на 3, из третьего — первое, умноженное на 2, а из четвертого — первое. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

с (расширенной) матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right).$$

Далее поменяем местами второе и третье уравнения, придя к системе с матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right),$$

после чего учетверенное второе уравнение прибавим к третьему, а из четвертого вычтем второе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -8 \\ -27x_3 - 39x_4 = -39 \\ 6x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases},$$

то есть

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь четвертое уравнение поделим на 6 и поменяем местами с третьим, которое поделим на -3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \end{array}\right).$$

Для завершения прямого хода метода Гаусса остается вычесть из четвертого уравнения первое, умноженное на 9, после чего разделить последнее уравнение на $\frac{17}{2}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

При проведении обратного хода надо из третьего уравнения вычесть четвертое, умноженное на $\frac{1}{2}$, ко второму прибавить четвертое, умноженное на 7, а из первого вычесть четвертое, умноженное на 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

В следующем шаге обратного хода прибавляем ко второму уравнению третье, умноженное на 5, и вычитаем из первого третье, умноженное на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

И, наконец, последний этап — из первого уравнения вычитаем второе:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, исходная СЛУ равносильна следующей:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array}\right.,$$

что и является ответом.

Для проверки результат можно подставить в исходную СЛУ, получив верные тождества.

5.2.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{array}\right..$$

Решение. В матричном виде СЛУ выглядит как

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

В дальнейшем будем действовать с СЛУ только в матричном виде, не приводя, как в задаче 5.1, параллельную запись, содержащую названия неизвестных.

Решение можно начать с деления первого уравнения на 2. Но чтобы не иметь дело с дробями, лучше вычтем из первой строки вторую и результат умножим на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Теперь вычтем из второй строки утроенную первую, из третьей — первую, умноженную на 5, а из четвертой строки — первую, умноженную на 4. Получившаяся система имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Далее поделим последнюю строку на 5 и поставим на место второй:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \end{array}\right).$$

Вычтя из третьей строки вторую, умноженную на 7, а из четвертой строки — вторую, умноженную на 16, приходим к системе

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -\frac{64}{5} \end{array}\right),$$

которая после вычитания из последней строки утроенной предпоследней принимает вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{91}{5} \end{array}\right).$$

Выпишем четвертое уравнение:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -\frac{91}{5}.$$

Очевидно, что это не может быть выполнено ни при каких значениях неизвестных. Таким образом, система несовместна и решений у нее нет.

5.3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 5 & -8 \end{array}\right).$$

Решение. В этом примере система сразу записана в матричном виде. Стандартный процесс исключения неизвестных проведем без комментариев о выполняемых действиях. Напомним, что $(A|B) \sim (C|D)$ означает, что системы $(A|B)$ и $(C|D)$ равносильны.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Итак, методом Гаусса мы свели исходную СЛУ к равносильной, имеющей вид

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}.$$

Перенося свободные неизвестные x_3, x_4 вправо, получим

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 - 5 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 + 3 \end{cases}.$$

Придавая x_3, x_4 произвольные числовые значения, имеем всевозможные решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3c_1 - 4c_2 - 5 \\ x_2 = -2c_1 + c_2 + 3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Для проверки результат можно подставить в исходную СЛУ, получив верные тождества.

6 ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение 6.1. *Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор n первых натуральных чисел.*

Пример 6.1. $(3, 4, 1, 2)$ — перестановка из четырех элементов. Набор $(3, 4, 1)$ не является перестановкой, поскольку в нем отсутствует 2.

Определение 6.2. *Пара элементов перестановки образует инверсию, если последующий меньше предыдущего.*

Пример 6.2. В перестановке $(3, 4, 1, 2)$ имеется ровно 4 пары, образующих инверсию — 3 и 1, 3 и 2, 4 и 1, 4 и 2.

Определение 6.3. *Числом инверсий в перестановке называется число пар перестановки, образующих инверсию. Если это число четно, то перестановку называют четной, в противном случае — нечетной.*

Пример 6.3. Число инверсий в перестановке $(3, 4, 1, 2)$ равно четырем. Данная перестановка четная.

Определение 6.4. *Перемена местами двух элементов перестановки называется транспозицией.*

Пример 6.4. Произведем транспозицию в перестановке $(3, 4, 1, 2)$, поменяв местами первый и третий элементы. Получим новую перестановку $(1, 4, 3, 2)$. □

Множество всех перестановок из n элементов назовем S_n, а фиксированную перестановку из n элементов будем обозначать $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — различные натуральные числа, не превосходящие n). Число инверсий в данной перестановке обозначим символом

$$I(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Теорема 6.1. *При транспозиции перестановка меняет четность.*

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда местами поменяли соседние элементы, то есть из перестановки

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

получили перестановку

$$\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots, \alpha_n).$$

Заметим, что если пара α_i, α_{i+1} образовывала инверсию, то пара α_{i+1}, α_i ее не образует, и наоборот. Положение остальных элементов осталось прежним. Таким образом, число инверсий изменилось на единицу, перестановка сменила четность.

Теперь перейдем к произвольному случаю. Пусть в перестановке

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{i+j}, \ldots, \alpha_n)$$

произвели транспозицию пары элементов α_i и α_{i+j}, создав перестановку

$$\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+j}, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n).$$

Совершим несколько транспозиций соседних элементов так, чтобы в результате из α получить β. Будем менять местами α_i со следующим за ним элементом, пока α_i не займет место с номером $i+j$ (а α_{i+j} при этом окажется на месте $i+j-1$.) Таких транспозиций понадобится произвести j штук. Далее будем менять местами α_{i+j} с предшествующим ему элементом, пока α_{i+j} не займет место с номером i (подобную транспозицию понадобится произвести $j-1$ раз). Итак, из α получили β, ровно $2j-1$ раз поменяв местами соседние элементы, то есть $2j-1$ раз изменив четность. Следовательно, четность изменилась.

7 ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Рассмотрим СЛУ с квадратной матрицей, то есть такую, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Как узнать по виду системы, будет ли она иметь единственное решение? Непосредственным вычислением можно проверить, что для системы порядка 1, то есть для уравнения $a_{11}x_1 = b_1$, существует единственное решение тогда и только тогда, когда $a_{11} \neq 0$. Назовем число a_{11}, определяющее ситуацию, определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$. Аналогично для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

порядка 2 единственное решение существует тогда и только тогда, когда не равна нулю величина $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Назовем ее определителем матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

и в дальнейшем будет показано, что у системы с этой матрицей единственное решение существует тогда и только тогда, когда данное число отлично от нуля.

Определитель матрицы A будем обозначать $|A|$ или $\det A$.

Примеры.

7.1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8-6=2.$

7.2. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0+16+0-0-120+21=-83.$ □

Перейдем теперь к определителю любого порядка $n \geq 1$. По виду формул, получившихся в случае $n=2$ и $n=3$, нетрудно заметить, что в определитель порядка n входят всевозможные произведения элементов матрицы, взятых ровно по одному из каждой строки и каждого столбца, причем перед некоторыми из этих произведений ставится знак минус.

Определение 7.1. *Определителем матрицы n-го порядка называется число, равное сумме всевозможных произведений элементов матрицы, взятых ровно по одному из каждой строки и каждого столбца, причем перед некоторыми из этих слагаемых ставится знак минус по следующему правилу: если расположить сомножители произведения так, чтобы номера строк шли по порядку, то номера столбцов образуют некоторую перестановку. В случае ее нечетности произведение суммируется со знаком минус, в случае четности — со знаком плюс.*

Запишем данное определение с помощью формулы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\dots a_{n\alpha_n}.$$

Напомним, что определитель существует только у квадратных матриц.

Определение 7.2. *Квадратная матрица с ненулевым определителем называется невырожденной.*

Примеры.

С помощью общей формулы выведем те, которые имелись ранее для случаев $n = 2$ и $n = 3$ (заметим, что аналогичным образом теперь можно вывести явные формулы для определителей порядка четыре и выше, однако они будут весьма громоздкими).

7.3. При $n = 2$ имеем

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{I(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

7.4. При $n = 3$ имеем

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{I(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{I(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{I(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ (-1)^{I(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{I(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{I(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

7.5. Докажем, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, то есть

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Действительно, в определитель входят всевозможные произведения элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. В первом столбце все элементы, кроме a_{11}, нулевые, поэтому достаточно рассматривать лишь те произведения, которые содержат a_{11}. Следовательно, мы не должны включать в эти произведения никакой другой элемент первой строки (ведь из каждой строки берется лишь по одному числу).

Во втором столбце ненулевых элемента может быть два, однако один из них находится в первой строке и потому нам не годится. Исходя из этого, получаем единственный вариант для второго множителя — это a_{22}. Теперь мы использовали первые две строки и не имеем права брать из них элементы в дальнейшем. Повторяя то же рассуждение, приходим к выводу, что в определитель включается всего одно слагаемое $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, причем со знаком плюс, поскольку в перестановке $(1,\dots,n)$ ноль инверсий.

8 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Теорема 8.1.

1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.*
2. *При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель сохраняет модуль, но меняет знак.*
3. *Если некоторую строку (столбец) определителя умножить на число, то определитель умножится на это число.*
4. *Если некоторая строка (столбец) определителя представлена в виде суммы двух строк (столбцов), то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, отличающихся от исходного лишь данной строкой (столбцом): у первого на месте этой строки (столбца) стоит первое слагаемое, а у второго — второе.*
5. *Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.*
6. *Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.*
7. *Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число, определитель не изменится.*

Заметим, что сложение строк (столбцов) и умножение строки (столбца) на число здесь производятся покомпанентно. Две строки (столбца) называются пропорциональными, если отношения всех их соответствующих элементов равны.

Доказательство.

1. Применив понятие определителя к транспонированной матрице, имеем

$$|A^T| = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} a^T_{1\alpha_1}\dots a^T_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{\alpha_1 1}\ldots a_{\alpha_n n}.$$

Теперь в числовом произведении $a_{\alpha_1 1}\ldots a_{\alpha_n n}$ поменяем местами сомножители так, чтобы номера строк располагались по порядку (а номера столбцов тогда дадут некую перестановку $\beta \in S_n$). Докажем, что

$$(-1)^{I(\alpha)} = (-1)^{I(\beta)}.$$

Действительно, при нашем действии с помощью одинаковых транспозиций номера строк вместо перестановки $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ стали образовывать перестановку $(1,\ldots,n)$, а номера столбцов вместо $(1,\ldots,n)$ стали образовывать $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Перестановка $(1,\ldots,n)$ четная. Если α была тоже четной, значит, произведено четное число транспозиций, то есть и β четная. Аналогично если α нечетная, то и β является нечетной. Итак, можно записать, что

$$|A^T| = \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in S_n} (-1)^{I(\beta_1,\ldots,\beta_n)} a_{1\beta_1}\ldots a_{n\beta_n} = |A|.$$

2. Заметим, что доказательство свойств 2—7 можно провести только для строк. Чтобы получить аналогичное свойство для столбцов, достаточно произвести транспонирование, а оно не меняет определителя.

Итак, пусть у матрицы A поменяли местами строки k и l, получив матрицу B. Тогда

$$|A| = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_l,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots a_{k\alpha_k}\ldots a_{l\alpha_l}\ldots a_{n\alpha_n} =$$

$$= -\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots a_{l\alpha_l}\ldots a_{k\alpha_k}\ldots a_{n\alpha_n} =$$

$$= -\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_n)} b_{1\alpha_1}\ldots b_{k\alpha_l}\ldots b_{l\alpha_k}\ldots b_{n\alpha_n} = -|B|$$

(мы сделали транспозицию перестановки номеров строк, поменяв при этом ее четность, и воспользовались тем, что $b_{ij} = a_{ij}$ при $i \neq k, l$ и $b_{kj} = a_{lj}, b_{lj} = a_{kj}$).

3. Пусть строку k матрицы A умножили на число λ, получив матрицу B. Тогда

$$|B| = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} b_{1\alpha_1}\ldots b_{k\alpha_k}\ldots b_{l\alpha_l}\ldots b_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\ldots\lambda a_{k\alpha_k}\ldots a_{l\alpha_l}\ldots a_{n\alpha_n} = \lambda|A|.$$

4. Доказательство проводится аналогично доказательству свойства 3.

5. Пусть сперва матрица имеет две равные строки. При перемене их местами определитель по свойству 2 меняет знак, однако реально остается без изменения. Следовательно, он равен нулю.

Если же в матрице есть две пропорциональные строки, то одна из них отличается от другой только множителем, который по свойству 3 можно вынести за знак определителя, получив определитель матрицы с двумя равными строками.

6. Нулевую строку можно считать пропорциональной любой другой строке, взяв в качестве коэффициента пропорциональности 0.

7. Пусть к строке матрицы A прибавили другую строку, умноженную на число, получив матрицу B. Тогда по свойству 4 определитель матрицы B равен сумме двух определителей — определителя матрицы A и определителя матрицы с двумя пропорциональными строками. Последний равен нулю.

9 РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ)

На практике вычисление определителей порядка, большего трех, редко производят с помощью определения, предпочитая использовать так называемые формулы разложения по строке или столбцу. Прежде, чем выписать их, введем некоторые необходимые понятия.

Определение 9.1. *Для квадратной матрицы дополнительным минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из исходной с помощью вычеркивания строки i и столбца j.*

Определение 9.2. *Для квадратной матрицы алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Пример 9.1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеем $M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -29$ и $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -29$.

Теорема 9.1. *Для квадратной матрицы A порядка n при любом фиксированном $i, 1 \le i \le n$ имеем*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Доказательство. Сперва вычислим определитель матрицы следующего вида: все элементы последней строки у нее нулевые, кроме последнего, который равен единице. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n) \in S_n} (-1)^{I(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots a_{n-1\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \in S_{n-1}} (-1)^{I(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} \dots a_{n-1\alpha_{n-1}} 1 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

(мы воспользовались тем, что в последней строке всего один ненулевой элемент $a_{nn} = 1$, причем $\alpha_n = n$ не влияет на число инверсий).

Теперь перейдем к общему случаю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и фиксируем i — номер строки. Представим эту строку в виде суммы n строк

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{i2} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Тогда по свойствам 3 и 4 определителя имеем

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

где

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(здесь $1 \le j \le n$). Преобразуем каждый из получившихся определителей: строку i меняем местами со следущей за ней, пока она не окажется последней, и после этого то же самое проделаем со столбцом j. По свойству 2 определитель сменит знак ровно $n - i + n - j$ раз, поэтому

$$C_{ij} = (-1)^{2n-(i+j)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}M_{ij} = A_{ij}.$$

Теорема доказана.

Формулу из теоремы 9.1 называют формулой разложения определителя по i-ой строке. Заметим, что в некоторой учебной литературе именно формулу разложения по первой строке принимают за определение определителя.

Следствие 1. *Для квадратной матрицы порядка n при любом фиксированном $j, 1 \le j \le n$ имеем*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

В качестве доказательства достаточно напомнить, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной. □

Формулу из следствия 1 называют формулой разложения определителя по j-му столбцу.

Следствие 2. *Для квадратной матрицы A порядка n при любых фиксированных $i \ne j, 1 \le i, j \le n$ имеем*

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,$$

то есть сумма произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения к элементам другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Составим матрицу B с двумя одинаковыми строками: в матрице A вместо строки j поставим строку i. Тогда $|B| = 0$, а формула его разложения по строке j имеет вид

$$|B| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

Пример 9.2. $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 & -2 \\ 9 & -1 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \\ 9 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 9 & -1 & 5 \\ 9 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 9 & -1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 696.$

Мы воспользовались формулой разложения по третьему столбцу, поскольку он содержит наименьшее число ненулевых элементов. □

Определители порядка, превышающего 3, обычно удобнее считать, не раскладывая сразу же по строке или столбцу, а сперва (пользуясь свойством 7) преобразуя так, чтобы в некоторой строке или столбце остался всего один ненулевой элемент.

Задачи. Вычислить определители.

9.1.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решение. По свойству 7 можно из второй и четвертой строк вычесть удвоенную первую, из третьей — утроенную первую, из последней строки — первую. Таким образом,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по первому столбцу (при этом мы будем иметь всего одно ненулевое слагаемое):

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Далее вычитаем из второй и третьей строк первую, а к четвертой прибавляем удвоенную первую:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

Вновь раскладывая по первому столбцу, имеем

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -23 & -41 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 52.$$

9.2.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

Здесь n означает порядок определителя.

Решение. Вычитая последний столбец из всех предудущих, получим определитель треугольной матрицы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

Он равен $\Delta_n = (1-n)(2-n)(3-n)\dots(-1)n = (-1)^n n!$ (см. пример 8.5).

9.3.

$$\Delta_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Данный определитель называется определителем Вандермонда, а n здесь означает порядок определителя.

Решение. Вычтем из каждой строки предыдущую, умноженную на x_1, а получившийся определитель разложим по первому столбцу:

$$\Delta_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Теперь вынесем из каждого столбца множитель — из первого $x_2 - x_1$, из второго $x_3 - x_1$ и так далее до последнего столбца, из которого выносим $x_n - x_1$:

$$\Delta_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель имеет такой же вид, как исходный, но имеет на единицу меньший порядок (в нем отсутствует переменная x_1). Итак,

$$\Delta_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\Delta_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Подобные формулы называются рекуррентными. Однако требуется получить ответ не в рекуррентной форме.

С помощью вычислений, аналогичных приведенным выше, легко убедиться, что $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = x_2 - x_1, \Delta_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$. Поэтому естественно предположить, что

$$\Delta_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i).$$

Чтобы доказать верность этого предположения, воспользуемся рекуррентным соотношением и методом математической индукции.

База индукции имеется. Теперь проведем индукционный переход. Пусть для $n < k$ известно, что формула верна. Следует проверить, что она верна и для $n = k$. Действительно,

$$\Delta_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_k - x_1)\Delta_{k-1}(x_2, x_3, \dots, x_k) =$$
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_k - x_1) \prod_{2 \le i \le j \le k} (x_j - x_i) = \prod_{1 \le i \le j \le k} (x_j - x_i),$$

что и требовалось доказать.

10 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Несмотря на достаточно сложную формулу, задающую определитель, он обладает удобным свойством: определитель произведения матриц равен произведению определителей. Прежде, чем доказать это, потребуется проверить еще одно полезное утверждение.

Теорема 10.1. *(об определителе ступенчатой матрицы). Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{O} \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *и* $D = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & B \end{pmatrix}$. *Тогда*

$$|D| = |A||B|.$$

Доказательство. Доказывать будем индукцией по m. При $m = 1$ формула получается с помощью разложения определителя D по первой строке, поэтому база индукции имеется. Совершим индукционный переход.

Пусть при некотором k формула определителя ступенчатой матрицы верна. Возьмем $m = k + 1$ и разложим определитель D по первой строке:

$$|D| = a_{11}(-1)^2 M_{11}^D + \dots + a_{1k+1}(-1)^{1+k+1} M_{1k+1}^D$$

(здесь фигурируют миноры матрицы D). Но

$$M_{11}^D = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2k+1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & \dots & a_{3k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+12} & \dots & a_{k+1k+1} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & \dots & c_{1k+1} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n2} & \dots & c_{nk+1} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

поэтому, применив к этому определителю индукционное предположение, имеем $M_{11}^D = M_{11}^A|B|$. Поступив аналогично с остальными минорами, получаем

$$|D| = (a_{11}(-1)^2 M_{11}^A + \dots + a_{1k+1}(-1)^{1+k+1} M_{1k+1}^A)|B| = |A||B|.$$

Теорема 10.2. *Пусть* $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Тогда* $|AB| = |A||B|$.

Доказательство. Составим матрицу $D = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ -E & B \end{pmatrix}$ (здесь E — единичная матрица порядка n, а $\mathbb{O}$ — нулевая матрица того же порядка). По предыдущей теореме

$$|D| = |A||B|.$$

Теперь докажем, что $|D| = |AB|$ (это и даст требуемую формулу).

Определитель $|D|$ не изменится, если к одному из его столбцов прибавить другой, умноженный на число. Проделаем это так, чтобы в правом нижнем углу на месте матрицы B получить нулевую матрицу, то есть прибавим к $(n+1)$-му столбцу D первый, умноженный на b_{11}, второй, умноженный на b_{21}, и так далее до n-го, умноженного на b_{n1}. Аналогично преобразуем столбцы $n+2, \dots, 2n$. В итоге возникнет матрица $\begin{pmatrix} A & C \\ -E & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, причем легко видеть, что $C = AB$.

Приведем эту матрицу к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} -E & \mathbb{O} \\ A & AB \end{pmatrix}$), поменяв местами строки 1 и $n+1$, 2 и $n+2$ и так далее до n и $2n$. При этом определитель n раз сменит знак. Итак, $|D| = (-1)^n |-E||AB| = |AB|$.

11 ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 11.1. *Пусть A — квадратная матрица. Матрица B называется обратной к A, если $AB = BA = E$. В этом случае A называется обратимой.*

Заметим, что для матрицы, не являющейся квадратной, это понятие не вводится. Обратная к A матрица обычно обозначается A^{-1}.

Теорема 11.1. *Обратная к $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрица существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. Если $B = A^{-1}$, то $b_{ij} = A_{ji}/|A|$.*

Доказательство. Пусть у матрицы имеется обратная матрица B. Тогда $AB = E$ и потому $|A||B| = 1$. Из этого следует, что $|A| \neq 0$. Итак, если A обратима, то она невырождена.

Теперь пусть $|A| \neq 0$. Проверим, что $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = A_{ji}/|A|$, является обратной к A (напомним, что A_{ji} — алгебраические дополнения к элементам a_{ji} матрицы A). Для этого вычислим произведение $AB = C$. По определению

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Но по теореме 9.1 и ее следствию 2 имеем $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$ при $j \neq i$ и $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = |A|$, поэтому $C = E$.

Аналогично проверяется, что $BA = E$. Итак, существование обратной матрицы в нашем случае доказано и даже известна формула для ее вычисления. Кроме того, если предположить, что у матрицы A существует еще одна обратная, например, B_1, то

$$BAB_1 = (BA)B_1 = EB_1 = B_1$$

и

$$BAB_1 = B(AB_1) = BE = B,$$

следовательно, $B_1 = B$.

Пример 11.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $|A| = 35$, $A_{11} = 13$, $A_{12} = -11$,

$A_{13} = -7$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 7$, $A_{31} = -8$, $A_{32} = -4$, $A_{33} = 7$. Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ -11 & 1 & -4 \\ -7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. □

Хотя теорема дает формулу для прямого вычисления элементов обратной матрицы, реально обычно ее находят другим путем, а именно с помощью решения матричного уравнения.

Определение 11.2. *Матричным уравнением называется уравнение вида $AX = B$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ — заданные матрицы, а $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ — неизвестная матрица. При этом A называется матрицей коэффициентов, B — матрицей свободных членов, а X — матрицей неизвестных.*

Легко видеть, что матричное уравнение равносильно k системам линейных уравнений: каждая из них в качестве основной матрицы имеет A, в качестве неизвестных — столбец матрицы X, а в качестве свободных членов — соответствующий столбец матрицы B. Любую из этих систем можно решить методом Гаусса. Однако все они имеют одну и ту же основную матрицу, поэтому решать их удобнее всего параллельно, то есть вместо систем $(A|B_1), \ldots, (A|B_k)$, где B_i — i-й столбец матрицы B, записать одну вида $(A|B)$. Проведя требуемые элементарные преобразования (см. п. 4), в правой части получим ответ.

Задача 11.1. Решить матричное уравнение $XA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку в изученных нами матричных уравнениях неизвестная матрица стоит справа, данное уравнение удобно транспонировать: $A^T X^T = B^T$, то есть

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавляя все строки к первой, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$X^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результат можно проверить перемножением:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

В частности, обратная матрица к матрице A есть решение матричного уравнения $AX = E$. Таким образом, выписав после черты единичную матрицу и приведя матрицу A к единичной, справа получим обратную.

Задача 11.2. Найти обратную матрицу для матрицы A из задачи 11.1.

Решение. Приписываем к матрице единичную:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавляя все строки к первой и умножая затем все, кроме первой, на 4, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -4 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -4 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Итак,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Если матрица в матричном уравнении обратима (то есть имеет обратную), уравнение можно решить с помощью домножения на обратную. Действительно, домножив $AX = B$ слева на A^{-1}, получим $X = A^{-1}B$.

Задача 11.3. Решить матричное уравнение из задачи 11.1 с помощью обратной матрицы.

Решение. Домножим уравнение $XA = B$ на A^{-1} справа:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12 ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ

Определение 12.1. *Минором порядка k матрицы A называется определитель матрицы, составленной из элементов A, расположенных на пересечении фиксированных k строк и k столбцов.*

Пример 12.1. У матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ миноров первого порядка 6 — это все ее элементы; миноров второго порядка 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 = 0, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 = -12.$$

Миноры третьего порядка не существуют.

Определение 12.2. *Говорят, что ранг матрицы A равен r, если у нее существует минор порядка r, не равный нулю, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю или не существуют. В таком случае обычно записывают* $\operatorname{rang} A = r$.

В качестве упражнения предоставим читателю доказать, что если $\operatorname{rang} A = r$, то все миноры порядка больше r равны нулю или не существуют.

Примеры.

12.2. Ранг матрицы из примера 12.1 равен 2.

12.3. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ равен 3.

Действительно, минор четвертого порядка у данной матрицы всего один — это ее определитель. Он равен 0. Следовательно, ранг меньше четырех. В то же время существует минор третьего порядка (например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2$), отличный от нуля. Таким образом, $\operatorname{rang} A = 3$.

Теорема 12.1. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.*

Доказательство. Легко заметить, что при перемене местами двух строк (столбцов) матрицы некоторые миноры сменят знак, а при умножении строки на ненулевое число умножатся на это число. В результате нулевые миноры останутся нулевыми, а ненулевые — ненулевыми, то есть ранг не изменится.

Осталось проверить, что ранг не изменится, если к строке i матрицы A прибавить строку j, получив матрицу B. Пусть $\operatorname{rang} A = r$.

Очевидно, что миноры, не содержащие измененной строки, останутся прежними, равно как и те, которые содержат обе строки — i-ю и j-ю. Требуется исследовать лишь такие, которые содержат строку j и не содержат строки i. Для подобного минора матрицы B, представляя строку j в виде суммы двух строк, имеем $M^B = M_1^A + M_2^A$ или $M^B = M_1^A - M_2^A$. Таким образом, раз все миноры порядка $r+1$ матрицы A равны нулю, то же самое можно сказать и про миноры матрицы B, то есть $\operatorname{rang} B \le r$. Однако матрицу A можно получить из матрицы B, вычтя из строки j строку i. Применяя то же рассуждение, приходим к неравенству $\operatorname{rang} B \ge r$. Итак, $\operatorname{rang} B = r$. $\square$

Исходя из данной теоремы, на практике редко вычисляют ранг по определению, то есть считая все миноры. Вместо этого исходную матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к трапециевидной форме (см. конец п. 4). Допуская некоторую вольность речи, будем называть элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ трапециевидной матрицы элементами на главной диагонали.

В качестве несложного упражнения читателю рекомендуется проверить, что ранг трапециевидной матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

Задачи. Вычислить ранги основных и расширенных матриц СЛУ задач 5.1 — 5.3.

12.1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Решение. Приведя расширенную матрицу системы к трапециевидной форме, получили матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен числу единиц на ее главной диагонали — 4.

Основная матрица системы получается из расширенной отбрасыванием последнего столбца, и ее ранг тоже равен 4.

12.2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Решение. Чтобы привести расширенную матрицу системы к трапециевидной форме, придется дополнительно к произведенным при решении задачи 5.2 преобразованиям поделить третью строку на 2 и поменять местами третий и четвертый столбцы. Получим расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен числу единиц на ее главной диагонали — 4, ранг же основной матрицы равен 3.

12.3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 5 & -8 \end{array}\right).$$

Решение. Приведя расширенную матрицу системы к трапециевидной форме, получили расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеющую ранг 2. Основная матрица системы тоже имеет ранг 2. □

Подобно тому, как определитель показывает, имеет ли единственное решение СЛУ с квадратной матрицей, ранг отвечает на вопросы, связанные с решением прямоугольной системы.

Теорема 12.2. *(Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы совпадает с рангом ее расширенной матрицы. В этом случае число базисных неизвестных совпадает с рангом матрицы. В частности, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг равен числу неизвестных.*

Доказательство. Вспомним метод Гаусса решения линейных систем. Он заключался в том, что с помощью элементарных преобразований (а они не меняют ранга) матрица системы приводилась к трапециевидной форме. Ситуации, когда решение отсутствовало, соответствовала расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & {}_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & c_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & c_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m
\end{array}\right),$$

где среди $c_{r+1}, \dots, c_m$ имеется ненулевое. В этом случае ранг основной матрицы системы равен r, а ранг расширенной матрицы больше. Итак, система несовместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы больше ранга основной. Следовательно, она совместна тогда и только тогда, когда эти ранги совпадают (заметим, что ранг расширенной матрицы не может оказаться меньше ранга основной).

Теперь пусть система совместна, то есть $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$. Продолжая действовать методом Гаусса, убеждаемся, что число базисных неизвестных равно r.

Задачи. С помощью теоремы Кронекера — Капелли сделать вывод о совместности СЛУ задач 5.1 — 5.3.

12.4. Решение.

При решении задачи 12.1 получили, что $\operatorname{rang} A = 4$, $\operatorname{rang}(A|B) = 4$. Следовательно, система совместна. Более того, число неизвестных тоже 4, поэтому свободных неизвестных нет, то есть решение единственно.

12.5. Решение.

При решении задачи 12.2 получили, что $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang}(A|B) = 4$. Поэтому система несовместна.

12.6. Решение.

При решении задачи 12.3 получили, что $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang}(A|B) = 2$. Следовательно, система совместна. Число неизвестных равно 4, поэтому имеется две свободные неизвестные, через которые выражаются остальные две. Решение не единственно.

13 МЕТОД КРАМЕРА РЕШЕНИЯ СЛУ

Метод Гаусса решения СЛУ хорош тем, что применим для любой системы. Однако в некоторых конкретных ситуациях удобнее использовать другие методы. В частности, подобно тому, как для матрицы с ненулевым определителем можно выписать явные формулы для нахождения элементов обратной матрицы, для СЛУ с квадратной матрицей, имеющей ненулевой определитель, существуют явные формулы для нахождения решения. Эти формулы называются формулами Крамера.

Теорема 13.1. *(Крамера). Система линейных уравнений* $AX = B$, *где* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta = |A| \neq 0$. *В этом случае решение находится по формуле*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta_i (1 \leq i \leq n)$ *— определитель матрицы, которая получена из матрицы* A *заменой* i*-го столбца столбцом свободных членов* B.

Доказательство. По теореме Кронекера-Капелли система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных. В данном случае получается, что ранг квадратной матрицы порядка n должен равняться n, что и дает условие $|A| \neq 0$.

Итак, пусть $\Delta = |A| \neq 0$. Следовательно, матрица A имеет обратную. Чтобы найти столбец неизвестных X, домножим матричное уравнение $AX = B$ слева на A^{-1}. Имеем $X = A^{-1}B$. Таким образом, например,

$$x_1 = a_{11}^{-1}b_1 + \dots + a_{1n}^{-1}b_n = \frac{b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}}{\Delta}$$

(здесь под a_{1j}^{-1} подразумеваем элемент матрицы A^{-1}). Числитель данной дроби совпадает с результатом разложения определителя Δ_1 по первому столбцу. Аналогично с остальными компонентами решения.

Задача 13.1. Решить методом Крамера любую из СЛУ задач 5.1 — 5.3, допускающую этот метод.

Решение. Вычисление рангов этих систем (см. п. 12) показывает, что лишь у первой ранг равен 4. Значит, для остальных систем минор четвертого порядка, то есть определитель, нулевой, и они не допускают применения метода Крамера. Итак, решать будем систему

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153,$$

а фигурирующие в формуле величины есть

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 153.$$

Следовательно, $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$.

14 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение 14.1. *Система линейных уравнений с нулевым столбцом свободных членов называется однородной (системой линейных однородных уравнений, сокращенно СЛОУ).*

Переформулируем теорему Кронекера — Капелли для однородного случая, учитывая тот факт, что наличие хотя бы одного решения (тривиального, то есть состоящего из одних нулей) гарантировано.

Теорема 14.1. *Однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных. Число базисных неизвестных совпадает с рангом матрицы. В частности, СЛОУ с квадратной матрицей имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Для однородной системы ранги основной и расширенной матриц всегда совпадают. Кроме того, поскольку нулевое решение у такой системы есть обязательно, наличие ненулевого равносильно неединственности решения, а по теореме Кронекера-Капелли это, в свою очередь, равносильно тому, что ранг матрицы системы меньше числа неизвестных. Осталось заметить, что для квадратной матрицы последнее условие означает, что ее определитель равен нулю. □

Следует обратить внимание на то, что при решении однородной системы методом Гаусса нулевой столбец свободных членов меняться не будет. Исходя из этого, его обычно не записывают, то есть вместо расширенной матрицы действуют с основной матрицей системы.

Определение 14.2. *Линейной комбинацией столбцов* $X_1, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$ *называется столбец* $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_m X_m$, *где* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *— произвольные вещественные числа. Эти числа называются коэффициентами линейной комбинации.*

Определение 14.3. *Столбцы называются линейно независимыми, если из равенства нулевому столбцу их линейной комбинации следует равенство нулю всех ее коэффициентов. В противном случае столбцы называются линейно зависимыми.*

Аналогично дается определение линейной комбинации упорядоченных совокупностей чисел и их линейной независимости.

Теорема 14.2. *Если* $C_1, \dots, C_m$ *— решения системы линейных однородных уравнений с матрицей* A, *то любая их линейная комбинация является решением той же системы. Аналогичное утверждение справедливо также для столбцов решений СЛОУ.*

Доказательство. Очевидно, что утверждение теоремы для решений и для столбцов решений — это две формы записи одного и того же факта. В данном случае удобнее провести доказательство для столбцов.

Итак, пусть $X_1, \dots, X_m$ — столбцы решений нашей системы, то есть

$$AX_1 = \mathbb{O}, \dots, AX_m = \mathbb{O}.$$

Тогда $A(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_m X_m) = \mathbb{O}$, поэтому $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_m X_m$ является решением той же системы. □

Итак, любая линейная комбинация решений однородной системы является решением той же системы. Верное ли обратное: любое решение однородной системы является линейной комбинацией некоторого фиксированного набора решений? Ответ на данный вопрос положителен.

Определение 14.4. *Набор линейно независимых решений СЛОУ, обладающий тем свойством, что любое решение этой СЛОУ представляется в виде его линейной комбинации, называется фундаментальной системой решений СЛОУ (сокращенно ФСР).*

Реально ФСР часто представляют не в виде решений, а в виде соответствующих им столбцов решений.

Теорема 14.3. *Для любой СЛОУ существут фундаментальная система решений, содержащая ровно $n-r$ элементов, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы системы.*

Доказательство. С помощью метода Гаусса СЛОУ всегда можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} x_1 = -a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n \\ x_2 = -a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - a_{rr+2}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}.$$

Будем придавать одной свободной неизвестной значение 1, а остальным — 0. Таким образом получается ровно $n-r$ решений (по числу свободных неизвестных):

$$C_1 = \begin{pmatrix} -a_{1r+1} & -a_{2r+1} & \ldots & -a_{rr+1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -a_{1r+2} & -a_{2r+2} & \ldots & -a_{rr+2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{n-r} = \begin{pmatrix} -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & -a_{rn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

причем из вида формулы ясно, что любое решение является их линейной комбинацией. Осталось проверить линейную независимость данного набора.

Составим линейную комбинацию этих элементов и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_{n-r} C_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходя к поэлементным равенствам для последних $n-r$ компонент, получаем $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{n-r} = 0$, что и требовалось доказать.

Задачи. Решить соответствующие однородные системы для СЛУ задач 5.1 — 5.3 (то есть системы с той же основной матрицей, но нулевым столбцом свободных членов). Найти для каждой фундаментальную систему решений.

Поскольку с матрицей однородной системы придется выполнять те же процедуры, что и в случае неоднородной системы, вычисления заново производить не будем, а выпишем только конечный результат. Отличие состоит лишь в том, что опустим столбец свободных членов, подразумевая, что он нулевой.

14.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Итоговая система $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, что дает единственное решение $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

Свободных неизвестных нет, поэтому нет и ФСР.

14.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Итоговая система

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— для неоднородного случая на этом вычисления прекратились, так как последнее уравнение было несовместным. Теперь же следует провести обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, получаем $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$

Таким образом, общее решение имеет вид $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = c \\ x_3 = c \\ x_4 = 0 \end{cases}, c \in \mathbb{R}.$

Свободная неизвестная одна — это, например, x_3. Придавая ей значение 1, получим столбец $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, который и составляет ФСР. Общее решение можно записать как $cX_1, c \in \mathbb{R}$.

14.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Итоговая система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, то есть

$$\begin{cases} x_1 = 3c_1 - 4c_2 \\ x_2 = -2c_1 + c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

— общее решение СЛОУ.

Свободных неизвестных две — это x_3 и x_4. Сперва полагаем

$$x_3 = 1, x_4 = 0$$

и получаем столбец $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Далее берем

$$x_3 = 0, x_4 = 1,$$

что дает столбец $X_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Эта пара столбцов и составляет фундаментальную систему решений. Общее решение можно записать как $c_1X_1 + c_2X_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Заметим, что для неоднородных систем понятие ФСР не вводится.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ.

1. Вычислить определители.

2. Для каждой из трех систем линейных уравнений требуется:

а) решить ее методом Гаусса, выписать множество решений,

б) правильность результата проверить подстановкой,

в) вычислить ранги основной и расширенной матриц системы,

г) по теореме Кронекера-Капелли сделать вывод о совместности системы и о числе базисных и свободных неизвестных, сравнить с полученным ранее результатом,

д) решить однородную систему линейных уравнений с той же основной матрицей,

е) найти фундаментальную совокупность решений этой однородной системы.

Кроме того, требуется решить методом Крамера одну из систем, допускающих применение этого метода, и сравнить результат с полученным ранее.

3. Требуется:

а) решить матричное уравнение методом Гаусса, правильность результата проверить подстановкой,

б) найти матрицу, обратную к А, правильность результата проверить подстановкой,

в) решить матричное уравнение с помощью домножения на матрицу, обратную к А, сравнить результат с полученным ранее.

Вариант 1

1. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 12 & 11 & 15 & 13 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & 8 & 9 & 6 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 & 7 & 20 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 9 & -24 & 48 \\ -2 & 7 & 23 & -66 & 126 \\ -1 & 3 & 9 & -26 & 50 \\ 2 & 1 & -3 & 12 & -14 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 9 & 24 & 24 \\ -2 & 7 & 23 & 66 & 66 \\ -1 & 3 & 9 & 26 & 26 \\ 1 & -1 & -5 & -16 & -16 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -21 & 48 & 3 & -51 \\ -2 & 7 & -16 & -1 & 17 \\ -6 & 27 & -60 & -9 & 69 \\ 4 & -17 & 38 & 5 & -43 \end{array}\right)$.

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. $\begin{vmatrix} 11 & 4 & 8 & 9 & 6 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 8 & 7 & 20 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \\ 5 & -4 & 12 & 11 & 15 & 13 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a & b & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & \dots & \dots & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 23 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 9 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 12 & -30 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -21 & 48 & -81 & -51 \\ -2 & 7 & -16 & 27 & 17 \\ -6 & 27 & -60 & 99 & 69 \\ 4 & -17 & 38 & -63 & -43 \end{array}\right);\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 9 & 0 & 24 \\ -2 & 7 & 23 & 2 & 66 \\ -1 & 3 & 9 & 2 & 26 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & -16 \end{array}\right).$$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 3

1. $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 8 & 7 & 20 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & -4 & -4 \\ 11 & 4 & 8 & 9 & 6 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 12 & 11 & 15 & 13 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 4 & 10 & 10 \\ 1 & 3 & 7 & 16 & 16 \\ -2 & 3 & 12 & 28 & 28 \\ -5 & 0 & 9 & 22 & 22 \end{array}\right);$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 10 & -18 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & -9 & 3 \\ 8 & 6 & 22 & -36 & -12 \\ 5 & 9 & 19 & -33 & 2 \end{array}\right);\ \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 4 & -10 & -28 \\ 1 & 3 & 7 & -16 & -52 \\ -2 & 3 & 12 & -28 & -84 \\ -1 & 2 & -3 & 17 & 61 \end{array}\right).$$

3.$XA = B; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Вариант 4

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$$

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & 6 & 8 & -14 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & -7 \\ 6 & -9 & -15 & 0 & 39 \\ -6 & 6 & 12 & 6 & -30 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -9 & 21 & 81 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 9 & -22 & -82 \\ -1 & 2 & -3 & 17 & 46 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -9 & -21 & -30 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 22 & 28 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -10 \end{array}\right)$.

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 5

1. $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 3 & -3 & 10 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 13 & -4 & 12 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}$.

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & -3 & 17 & 53 \\ 3 & 1 & 7 & -22 & -82 \\ -1 & 2 & -3 & 17 & 56 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 8 & 20 & -12 & -16 \\ -2 & 3 & 9 & -4 & -7 \\ 2 & -5 & -11 & 8 & 9 \\ -6 & 12 & 30 & -18 & -25 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & -3 & -17 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & 22 & 4 \\ 5 & -3 & 9 & 38 & -10 \end{array}\right)$.

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & -47 & 1 & 0 & 0 \\ -55 & 94 & 0 & 1 & 0 \\ 62 & -71 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 6

1. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 12 & -1 & 7 & -5 \\ 10 & -4 & 10 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} c_0 & b & b & \dots & b \\ a & c_1 & y & \dots & 0 \\ a & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-y_1 & y_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-y_2 & y_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-y_{n-1} & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-y_n \end{vmatrix}$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 5 & -4 \\ -2 & 3 & -9 & -31 & 22 \\ 3 & -1 & 13 & 38 & -22 \\ 5 & -5 & 23 & 74 & -48 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -5 & 19 \\ -2 & 3 & -9 & 31 & -127 \\ 3 & -1 & 13 & -38 & 160 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & -42 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -16 & -8 & 40 & 32 \\ -2 & 3 & 3 & -8 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & 12 & 9 \\ 6 & -12 & -6 & 30 & 24 \end{array}\right)$.

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант 7

1. $\begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 9 & 21 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_1+b_1 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & 1+a_1+b_1 & \dots & a_3+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & 1+a_1+b_1 \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} a & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$; 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -13 & 8 & 19 & 25 \\ -2 & 3 & 0 & -5 & -7 \\ 2 & -5 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & -9 & 6 & 13 & 16 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -9 & -26 & 22 \\ 3 & -1 & 13 & 34 & -22 \\ 5 & -5 & 23 & 64 & -48 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -4 & 12 \\ -2 & 3 & -9 & 26 & -86 \\ 3 & -1 & 13 & -34 & 114 \\ 2 & 1 & -3 & 12 & -30 \end{array}\right)$.

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Вариант 8

1. $\begin{vmatrix} 9 & 11 & 10 & 4 & 7 & 2 \\ -4 & 0 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 11 & -5 & 10 & 13 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 13 & 2 & 14 & 7 & 11 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} y_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & y_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & y_n \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -13 & 8 & -33 & 25 \\ -2 & 3 & 0 & 7 & -7 \\ 2 & -5 & 4 & -13 & 9 \\ 4 & -9 & 6 & -23 & 17 \end{array}\right);$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & -9 & 22 & 22 \\ 3 & -1 & 13 & -22 & -22 \\ 5 & -5 & 23 & -48 & -48 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & -9 & -22 & 10 \\ 3 & -1 & 13 & 22 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 12 & -14 \end{array}\right).$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

Вариант 9

1. $\begin{vmatrix} 14 & 4 & 11 & 7 & 9 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 23 & 13 & -5 & 9 & 11 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 21 & 7 & 2 & 11 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2\cos t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos t \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad 2. \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 4 & 16 & 10 \\ 1 & 3 & 7 & 22 & 16 \\ -2 & 3 & 12 & 43 & 28 \\ -5 & 0 & 9 & 37 & 22 \end{array}\right);$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 4 & -16 & 34 \\ 1 & 3 & 7 & -22 & 40 \\ -2 & 3 & 12 & -43 & 86 \\ 2 & -1 & -3 & 12 & -29 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -9 & 12 & 0 & -9 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & -18 & -12 \\ 0 & -6 & 12 & -6 & -13 \end{array}\right).$$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Вариант 10

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} y_1 + a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & y_2 + a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & y_3 + a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & y_n + a_nb_n \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & a+b \end{vmatrix}. \quad 2. \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -9 & -30 & -30 \\ -2 & 1 & 1 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 28 & 28 \\ 3 & -1 & -1 & -10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 0 & -21 & 21 \\ -2 & 1 & 0 & 7 & -7 \\ 6 & -9 & 12 & -27 & 39 \\ 4 & 1 & -6 & -11 & 5 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -9 & 30 & -42 \\ -2 & 1 & 1 & -8 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & -28 & 40 \\ 2 & -1 & -3 & 12 & -14 \end{array}\right).$$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Вариант 11

1. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 14 & 3 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \operatorname{cosec} t & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\operatorname{cosec} t & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{cosec} t & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\operatorname{cosec} t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\operatorname{cosec} t \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{vmatrix}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & -16 & 16 \\ 2 & -1 & -3 & 12 & -10 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & -3 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & 16 & 4 \\ 5 & -3 & 9 & 14 & -10 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -7 & -4 & -13 & 19 \\ -2 & 3 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 4 & -7 & 9 \\ 4 & -3 & -6 & -7 & 11 \end{array}\right)$.

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 12

1. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -2 & -7 \\ 9 & 14 & 3 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a+1 \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ b_1 & a & b_2 & \ldots & b_n \\ b_1 & b_2 & a & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & a \end{vmatrix}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 7 & -16 \\ -2 & 3 & 0 & -5 & 8 \\ 3 & 2 & 11 & -32 & 78 \\ 1 & -1 & -3 & 8 & -15 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -11 & -13 & -27 & 27 \\ -2 & 3 & 3 & 7 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & -9 & 9 \\ 6 & -7 & -11 & -19 & 19 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -7 & -7 \\ -2 & 3 & 0 & 5 & 13 \\ 3 & 2 & 11 & 32 & 22 \\ 5 & -2 & 9 & 20 & 2 \end{array}\right)$.

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 13

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & 10 & 4 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 8 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \dots & b \\ b & a_2 & b & \dots & b \\ b & b & a_3 & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a_n \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 0 & -5 & 13 \\ 3 & 2 & 11 & 34 & 22 \\ 5 & -2 & 9 & 34 & 2 \end{array}\right);$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 7 & 19 & 1 & -15 \\ -2 & 3 & 9 & 1 & -7 \\ 2 & -5 & -11 & 1 & 9 \\ -6 & 11 & 29 & 1 & -24 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 5 & 20 \\ -2 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 11 & -34 & -120 \\ -1 & 1 & -3 & 14 & 45 \end{array}\right).$

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -21 \\ 3 & 12 & -92 & -279 \\ -1 & -4 & 31 & 94 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Вариант 14

1. $\begin{vmatrix} 9 & 14 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 12 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & 1 & -2 & -7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \cos t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos t \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_1 & a_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & a_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 7 & 19 & 29 & -15 \\ -2 & 3 & 9 & 13 & -7 \\ 2 & -5 & -11 & -19 & 9 \\ -6 & 11 & 29 & 45 & -23 \end{array}\right);$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & -7 & -28 \\ 3 & 2 & 11 & 2 & -12 \\ -1 & -3 & 1 & 14 & 41 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 3 & 0 & 7 & 13 \\ 3 & 2 & 11 & -2 & 22 \\ 5 & -2 & 9 & -10 & 2 \end{array}\right).$$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Вариант 15

1. $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \dots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & a_2+a_3 & \dots & a_2+a_n \\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & 2a_3 & \dots & a_3+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \dots & 2a_n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & 10 & 4 & -1 & 7 \\ -3 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 8 & 7 \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} 1-x & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ b & b^2-x & b^3 & \dots & b^n \\ b^2 & b^3 & b^4-x & \dots & b^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{n-1} & b^n & b^{n+1} & \dots & b^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 4 & -8 & 18 \\ 1 & 3 & 7 & -14 & 24 \\ -2 & 3 & 12 & -25 & 50 \\ 2 & -3 & -1 & 12 & -35 \end{array}\right);$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 4 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 7 & 14 & 16 \\ -2 & 3 & 12 & 25 & 28 \\ -5 & 0 & 9 & 19 & 22 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -9 & 12 & -18 & -9 \\ 1 & 3 & -4 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & 12 & -18 & -15 \end{array}\right).$$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -83 & 47 & 1 & 0 & 0 \\ 55 & -94 & 0 & 1 & 0 \\ -62 & 71 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 16

1. $\begin{vmatrix} 1+2a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \dots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 1+2a_2 & a_2+a_3 & \dots & a_2+a_n \\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & 1+2a_3 & \dots & a_3+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \dots & 1+2a_n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 11 & 6 & 7 & 10 & 3 \\ -4 & 0 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & -5 & 6 & 16 & 12 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 13 & 2 & 14 & 7 & 11 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a \end{vmatrix}. \quad 2. \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -9 & -18 & -30 \\ -2 & 1 & 1 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 16 & 28 \\ 3 & -1 & -1 & -10 & -10 \end{array}\right);$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 0 & -27 & 21 \\ -2 & 1 & 0 & 9 & -7 \\ 6 & -9 & 12 & -45 & 39 \\ 4 & 1 & -6 & -9 & 5 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -9 & 18 & -18 \\ -2 & 1 & 1 & -8 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & -16 & 16 \\ 2 & -3 & -1 & 12 & -10 \end{array}\right).$$

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Вариант 17

1. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 & -6 \\ 5 & -1 & 10 & -6 & -2 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 14 & -7 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad 2. \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & -3 & 10 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & 9 & -10 & -10 \end{array}\right);$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -3 & -10 & 22 \\ 3 & 1 & 7 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & -1 & 12 & -14 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -7 & -4 & -27 & 19 \\ -2 & 3 & 0 & 11 & -7 \\ 2 & -5 & 4 & -17 & 9 \\ 4 & -3 & -6 & -13 & 8 \end{array}\right).$$

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Вариант 18

1. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 & -2 & -6 \\ 8 & 3 & 14 & -7 & -4 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -11 & -13 & -49 & 27 \\ -2 & 3 & 3 & 13 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & -19 & 9 \\ 6 & -7 & -11 & -33 & 19 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 0 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 11 & 14 & 22 \\ 5 & -2 & 9 & -2 & 2 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 5 & -10 \\ -2 & 3 & 0 & -11 & 26 \\ 3 & 2 & 11 & -14 & 24 \\ 1 & -3 & -1 & 8 & -17 \end{array}\right)$.

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & -47 & 1 & 0 & 0 \\ -55 & 94 & 0 & 1 & 0 \\ 62 & -71 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант 19

1. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 8 & 7 \\ -3 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & 10 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x^n & (x-1)^n & \dots & (x-n+1)^n & (x-n)^n \\ x^{n-1} & (x-1)^{n-1} & \dots & (x-n+1)^{n-1} & (x-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x-1 & \dots & x-n+1 & x-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 15 & 1 & -7 \\ 2 & -5 & -21 & 1 & 9 \\ -2 & 5 & 21 & -1 & -12 \end{array}\right)$;

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & -18 & -36 \\ -3 & 1 & -1 & 12 & 7 \end{array}\right)$; $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 3 & 0 & -9 & 13 \\ 3 & 2 & 11 & 18 & 22 \\ 5 & -2 & 9 & 26 & 2 \end{array}\right)$.

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Вариант 20

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 15 & 7 & -7 \\ 2 & -5 & -21 & -9 & 9 \\ -2 & 5 & 21 & 9 & -9 \end{array}\right);$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 0 & -3 & 13 \\ 3 & 2 & 11 & 0 & 22 \\ 5 & -2 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 11 & 0 & -18 \\ -3 & -1 & 1 & 12 & 5 \end{array}\right).$

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 21

1. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 1 & 2 & -1 \\ 10 & 9 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & n-2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & n-1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -15 & -15 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right);$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

3. $XA = B; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 22

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -6 & -1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 6 & 9 & 7 & 8 & -1 \\ -2 & 13 & -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix};$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$ 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right);$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & -16 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 6 & 18 & 50 & 50 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 9 & -20 & 33 & 23 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & -16 & 27 & 17 \\ -1 & 5 & -11 & 18 & 13 \end{array}\right).$$

3. $AX = B; A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Вариант 23

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2/x & 1/x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/x & 1/x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2/x \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2. \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 7 & -16 & -1 & 17 \\ -2 & 9 & -20 & -3 & 23 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -17 & 38 & 5 & -43 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & -16 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 8 \\ -1 & 6 & 18 & 2 & 50 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

$$3.\ AX = B; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 24

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 2 & 1 & x & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 3 & 2 & 1 & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 & x \\ n+1 & n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x & a_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} 2. \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 16 & 16 \\ -7 & 3 & 21 & 50 & 50 \\ -2 & 3 & 12 & 28 & 28 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 13 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & 5 & 5 & -12 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

$$3.\ XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 25

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-2} & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^2 & x^3 & x^4 & \dots & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & x+1 \end{vmatrix}; \quad 2. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right);$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 9 & 15 \\ -5 & 2 & -9 & 2 & -2 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 15 \end{array}\right);$$

$$3.\ XA = B; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & -8 & 4 \\ -4 & 8 & 1 & -2 \\ -8 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Список литературы.

1. **Боревич З. И.** Определители и матрицы. М.: Наука, 1970.

2. **Ильин В. А., Поздняк Э. Г.** Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.

3. **Полищук В. И.** Методические указания по курсу лекций "Высшая математика". Самостоятельная подготовка линейной алгебры и аналитической геометрии. /ЛЭТИ. Л., 1982.

4. **Проскуряков В. И.** Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.

5. **Тихомиров С. Р.** Сборник задач по линейной алгебре. С-Пб.: Издательство СПбГТУ, 1995.

ОГЛАВЛЕНИЕ