

## Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы

*Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов\*,  
НИУ Московский энергетический институт*

**Ключевые слова:** ферма; погрешность монтажа; износ узлов; индукция; прогиб; Maple

Ценность точных аналитических решений задач для строительных и инженерных конструкций не вызывает сомнения. Такие решения, существующие еще до широкого распространения численных методов, позволяющих рассчитать напряженное и деформированное состояние достаточно сложных систем, были и остаются важным инструментом для исследователя, расчетчика и проектировщика. К сожалению, таких решений, во-первых, немного, во-вторых, они, как правило, имеют сравнительно узкое применение. В частности, для ферм, входящих во многие конструкции и как основной, и как вспомогательный элемент, существующие точные решения не содержат важный изменяемый параметр – число панелей или стержней, – и записываются для какого-либо конкретного числа, существенно уменьшая общность и, тем самым, ценность решения. Некоторые известные аналитические решения, справедливые для произвольного числа стержней, обычно сильно упрощают модель фермы, грубо оценивая работу решетки, и являются, по сути, приближенными (часто полуэмпирическими). С появлением систем компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, Maxima и др.) появилась возможность на основе индуктивного метода не только найти точные решения для произвольного числа панелей, но и с их помощью оценить более тонкие явления. Например, можно исследовать влияние неточности позиционирования узлов или дефектов жесткости стержней на усилия в стержнях и прогиб всей конструкции в целом. Такая задача все чаще встречается в практическом и теоретическом проектировании [1-10]. В данной работе на иллюстративном примере получены некоторые зависимости, показывающие возможности метода индукции.

### Ферма

Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму с треугольной решеткой. Не уменьшая общности, примем четное число панелей (число стержней верхнего пояса)  $2n$ . Нагрузку приложим в середине пролета. Расчет усилий в стержнях проведем по программе [11-13], написанной для Maple применительно к пространственным фермам и вполне применимой также для плоских ферм. Для расчета в программе необходимо задать координаты шарниров (узлов), описать структуру фермы (задать номера концов стержней) и нагрузку.

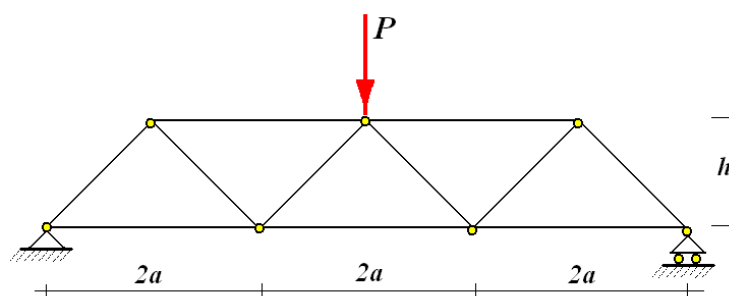


Рисунок 1. Схема фермы,  $n = 1$

### Прогиб

Программа, в которую заложен метод вырезания узлов, определяет усилия  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  в  $m = 8n + 3$  стержнях фермы и реакции опор. Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора [14]:

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{S_i^2 l_i}{EF} = \frac{A_1 a^3 + A_2 (a^2 + h^2)^{3/2}}{2h^3 EF},$$

Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы

где  $A_1 = 2n(8n^2 + 12n + 7)/3 + 1$ ,  $A_2 = 2n - 1$ . Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  получены методом индукции. Для этого при вычислении прогиба фермы последовательно при  $n = 1, 2, 3, \dots$  выписывалась последовательность коэффициентов при  $a^3$ : 19, 85, 231, 489, 891, 1469, 2255, 3281. Затем в пакете **genfunc** системы Maple [8-11] применялась функция **rgf\_findrecur**, возвращающая рекуррентное уравнение 4-го порядка:

$$A_1(n) = 4A_1(n-1) - 6A_1(n-2) + 4A_1(n-3) - A_1(n-4).$$

Решение этого уравнения можно найти с помощью оператора **rsolve**. Одновременно выписывались коэффициенты при  $(a^2 + h^2)^{3/2}$ . Но они устроены проще. Это нечетные числа, и зависимость  $A_2 = 2n - 1$  определяется сразу без использования Maple.

Рассмотрим случай, когда один из шарниров имеет некоторое отклонение координат от расчетных значений. Это может произойти в результате погрешности монтажа или неточности изготовления стержней. Пронумеруем узлы фермы, принимая номера узлов нижнего пояса  $1, \dots, 2(n+1)$ , верхнего –  $2n+3, \dots, 4n+3$ . Изучим вариант, когда такое отклонение имеет только один узел (рис. 2):

$$x_j = x_{j0} + \varepsilon \cos \varphi, \quad y_j = y_{j0} + \varepsilon \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $x_{j0}, y_{j0}$  – проектные значения координат узла  $j$ ;  $\varepsilon, \varphi$  – величина и направление смещения.

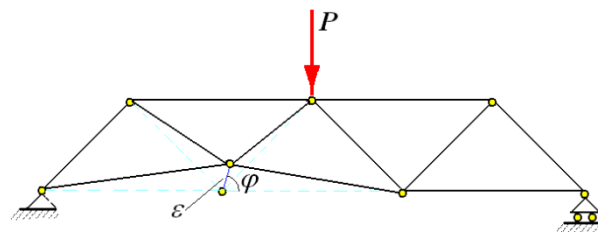


Рисунок 2. Ферма,  $n = 1, j = 2$

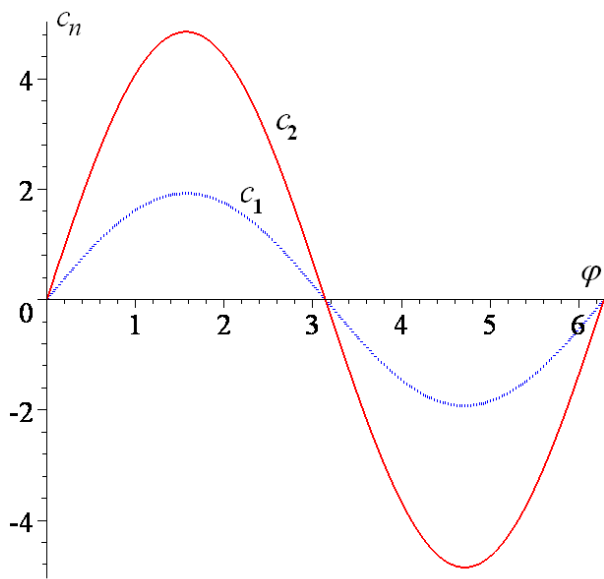
Находим прогиб фермы как функцию дефекта  $\varepsilon$  и отбрасываем в разложении этого выражения в ряд величины  $\varepsilon$  второго и более порядка малости. Получаем следующий результат:  $\Delta_\varepsilon = \Delta + \varepsilon c_n$ . Коэффициент  $c_n$  зависит от числа панелей. Рассмотрим случай дефекта узла, соседнего с левой опорой ( $j = 2$ ). При  $n = 1, 2$  имеем, соответственно:

$$c_1 = 3a^2 \sin \varphi \left( 6a + \sqrt{a^2 + h^2} \right) / (2h^3 EF),$$

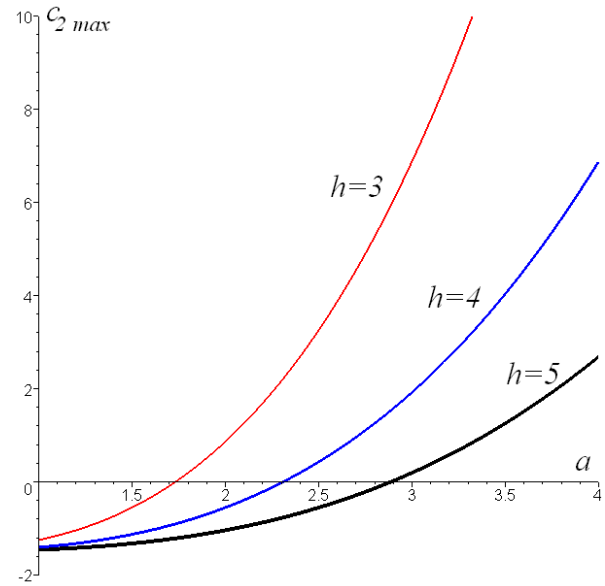
$$c_2 = 3 \sin \varphi \left( 6a^3 - h^2 \sqrt{a^2 + h^2} \right) / (2h^3 EF).$$

Для ферм с большим числом пролетов коэффициент  $c_n$  не меняется,  $c_n = c_2, n > 2$ . Такой же эффект наблюдается и при дефекте других узлов как нижнего, так и верхнего пояса (рис. 3). При вычислениях берем  $P = 1$ , а прогиб относим к жесткости, или, что то же,  $EF = 1$ . Наибольшие отклонения прогиба от расчетного значения получаются при смещении узла по вертикали:  $\varphi = \pi/2, \varphi = 3\pi/2$ .

При некоторых значениях коэффициент  $c_2$  равен нулю (рис. 4, размеры даны в метрах). Из равенства  $c_2 = 0$  получаем  $a = h\sqrt{3}/3$  при  $\sin \varphi \neq 0$ . При таких размерах конструкции или близким к ним соотношениям высоты и длины панели отсутствует влияние дефекта или оно минимально.



**Рисунок 3. Зависимости дополнительных слагаемых от направления смещения узла**



**Рисунок 4. Обращение в нуль коэффициента  $c_{2max}$**

Аналитическое выражение для прогиба позволяет провести исследование и по отношению к дефектам стержней фермы, влияющих на их жесткость. Пусть жесткость всех стержней одинакова и равна  $EF$ , а жесткость  $j$ -го стержня (отсчет ведется от левой опоры) нижнего пояса равна  $EF(1 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – малая безразмерная величина. Раскладываем прогиб фермы в ряд и, удерживая только линейный член, получаем  $\Delta_{\varepsilon j} = \Delta + \varepsilon d_j$ , где  $d_j = -(2j - 1)^2 a^3 / (2h^2)$ ,  $j \leq n + 1$ . Аналогично, для стержней верхнего пояса поправочный коэффициент имеет вид:  $d_j = -2j^2 a^3 / h^2$ ,  $j \leq n + 1$ .

В обоих случаях погрешность растет в квадратичной зависимости от номера стержня, имея минимальное значение для крайних стержней и максимальное – в середине пролета. Качественный характер этого эффекта можно было предположить заранее, зная, что усилия в стержнях в середине пролета больше, чем с краю. Однако квадратичную зависимость выявляет лишь аналитический метод. Практический вывод очевиден: дефектный стержень с уменьшенной жесткостью выгоднее ставить с края пролета.

### Экстремальные усилия

Определим влияние неточности монтажа на усилия сжатия стержней. Принимая прежнюю схему нагружения (сосредоточенная вертикальная сила в середине пролета, рис. 1), находим усилия в стержнях. Очевидно, максимально растянутый стержень будет в середине пролета в нижнем поясе и усилие его равно  $S_{max} = P(a/h)(k + 1/2)$ . Максимально сжатых стержней два. Они симметричны и находятся в верхнем поясе в середине пролета:  $S_{min} = -nPa/h$ . На усилия в этих стержнях влияет только неточность установки узлов с номерами  $3n + 3$ ,  $3n + 2$  и  $n + 1$  и опорные узлы 1 и  $2n + 2$  (рис. 5). Усилия в стержнях решетки при заданной схеме нагружения не зависят от числа панелей. Для восходящих раскосов  $S = -P\sqrt{a^2 + h^2} / (2h)$ , нисходящих –  $S = P\sqrt{a^2 + h^2} / (2h)$ .

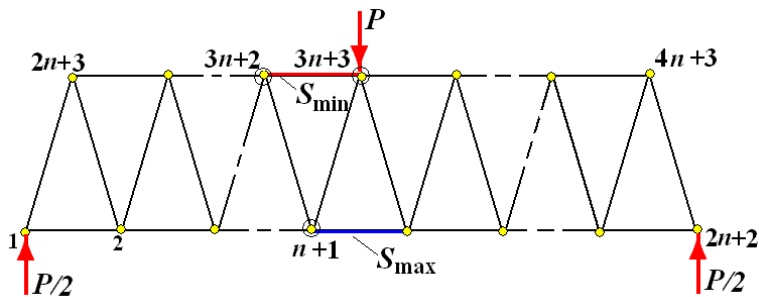


Рисунок 5. Номера возмущаемых узлов и стержни с экстремальными усилиями

Используя определение (1), где  $j = 3n + 3, 3n + 2, n + 1$ , представим усилия в отмеченных стержнях в виде  $S_{\max,\varepsilon}^j = S_{\max} + (P\varepsilon/a)\tilde{S}_{\max}^j$ , где верхний индекс означает номер узла, неточность установки которого исследуется. Имеем следующие выражения:

$$\tilde{S}_{\min}^{3n+3} = \frac{na}{2(2n+1)h^2}(2h \cos \varphi + (2n+1)a \sin \varphi), \quad \tilde{S}_{\max}^{3n+3} = -\frac{(2n+1)a^2}{2h^2} \sin \varphi,$$

$$\tilde{S}_{\min}^{3n+2} = \frac{na^2}{2h^2} \sin \varphi, \quad \tilde{S}_{\max}^{3n+2} = 0,$$

$$\tilde{S}_{\min}^{n+1} = -\frac{a}{2h^2}(h \cos \varphi + 2na \sin \varphi), \quad \tilde{S}_{\max}^{n+1} = \frac{(2n+1)a^2}{4h^2} \sin \varphi.$$

Зависимости добавочных слагаемых к усилию максимально сжатого стержня от направления смещения при возмущении положения трех отмеченных узлов для  $n = 3, a = 3\text{м}, h = 4\text{м}$  отображены на рисунке 6. Очевидно, что наибольшее влияние на усилия оказывает положение среднего узла нижнего пояса, и это влияние возрастает с увеличением числа пролетов. В некоторых случаях при определенном сочетании размеров фермы числа пролетов и направления смещения узла величина  $\varepsilon$  не влияет на усилия. На рис. 7 представлены зависимости  $\tilde{S}_{\min}^{3n+3}$  от длины  $a$  при  $h = 6\text{м}, \varphi = 3\pi/4$ . Пересечение кривой с координатной осью  $a$  как раз соответствует этому эффекту. Точное значение координаты определяется из равенства  $\tilde{S}_{\min}^{3n+3} = 0$  и имеет вид  $\text{tg } \varphi = -nh/(a(2n+1))$ . Аналогично можно проанализировать влияние других узлов на напряженное и деформированное состояние фермы.

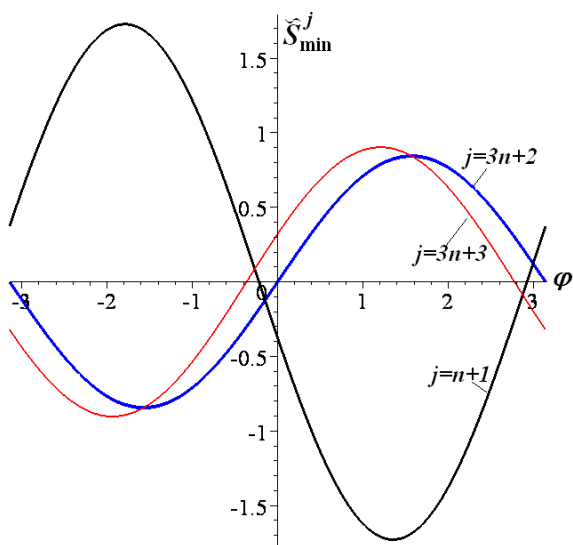


Рисунок 6. Добавочные слагаемые для сжатого стержня в зависимости от направления смещения

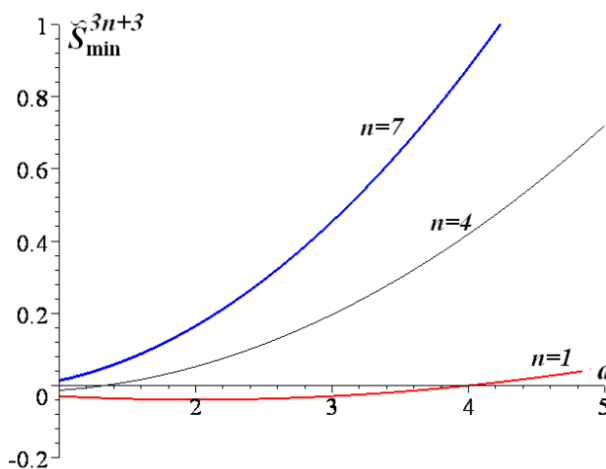


Рисунок 7. Обращение в нуль  $\tilde{S}_{\min}^{3n+3}$  при некоторых  $a$  и  $n$

Таким образом, на ряде примеров с модельной схемой фермы показаны возможности аналитического исследования напряженного состояния конструкции. Численные расчеты, пусть даже с применением совершенных пакетов, учитывающих многие факторы и обладающие высокой точностью счета, не могут дать ясную картину работы фермы [1-3]. Аналитические же исследования, опирающиеся на современные математические пакеты символьной математики (без которых некоторые закономерности найти невозможно), могут найти некоторые неочевидные особенности, как, например, найденное здесь свойство независимости погрешности определенного рода от числа панелей фермы:  $c_n = c_2, n > 2$ .

### Литература

1. Ватин Н. И., Кузнецов В. Д., Недвига Е. С. Учет погрешности монтажа при расчете крупнопанельных зданий // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 35-40.
2. Куражова В. Г., Назмеева Т. В. Виды узловых соединений в легких стальных тонкостенных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 47-52.
3. Покровский А. А. Об учете жесткостей узлов в расчетах ферм с элементами малой гибкости // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. Т. 3. С. 31-33.
4. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Vol. 85, №9. Pp. 607–617.
5. Fleck N. A. An overview of the mechanical properties of foams and periodic lattice materials // Symposium on Cellular Metals and Polymers. Fuerth. 12-14 October, 2004. Ed. R. F. Singer, Neue Materialien, Fuerth, Germany. Pp. 1-4.
6. Sofla A. Y. N., Elzey D. M., Wadley H. N. G. Shape morphing hinged truss structures // Smart Mater. Struct. 2009. Vol. 18. Pp. 1-8.
7. Sofla A. Y. N., Elzey D. M., Wadley H. N. G. A rotational joint for shape morphing space trusses // Smart Mater. Struct. 2007. Vol. 16. Pp. 77–84.
8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // J. Mech. Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Pp. 756-782.
9. Deshpande V. S., Fleck N. A., Ashby M. F. Effective properties of the octet-truss lattice material // J. Mech. Physics of Solids. 2001. Vol. 49. Pp. 1747 – 1769.
10. Лихтарников Я. М. Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
11. Кирсанов М. Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
12. Кирсанов М. Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 28-34.
13. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53.
14. Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б. Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем / Под ред. В. Д. Потапова. М.: Высш. шк., 2007. 511 с.
15. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК-Пресс, 2011. 800 с.
16. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: ПаркКом, 2010. 644 с.
17. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 526 с.
18. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.
19. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

\* Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия,

Тел. раб.: +7(495)503-27-93; эл. почта: [trei2004@yandex.ru](mailto:trei2004@yandex.ru)

© Кирсанов М.Н., 2012

doi: 10.5862/MCE.31.5

## Inductive analysis of the effect of error mounting on the stiffness and strength of a plane truss

**M.N. Kirsanov,**

*Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia*

+7(495)503-27-93; e-mail: mpei2004@yandex.ru

### Key words

truss; induction; error in installation; deterioration of hinges; deflection; Maple

### Abstract

For the trusses that are part of structures, the existing exact solutions does not contain an important variable parameter - number of panels or bars - and are written for a specific number that significantly reduces the value of them. Some well-known analytical solutions, which are valid for an arbitrary number of cores, usually greatly simplify the model of truss, roughly estimating the grid work, and are, in fact, approximate. With the advent of computer algebra systems we created the opportunity based on inductive method not only to find the exact solutions for any number of panels, but also to use them to evaluate more subtle phenomenon.

In the article the impact of inaccurate mounting plane truss settlement through the maximum and minimum forces in the bars is estimated. We present an analytical solution under the assumption that the deviations of the provisions of the host truss are small. Several examples with the model farm scheme shows the potential of the analytical investigation of the stress state of the construction.

The obtained solution depends parametrically on the number of panels and dimensions of truss. Inductive method with the support of computer mathematics Maple is used.

### References

1. Vatin N. I., Kuznetsov, V. D., Nedviga E.S. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 6 (24). Pp. 35-40. (rus)
2. Kurazhova V. G., Nazmeeva T. V. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 3 (21). Pp. 47-52. (rus)
3. Pokrovsky A. A. *Structural mechanics and computation facilities*. 2011. Vol. 3. Pp.31-33. (rus)
4. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. No. 85(9). Pp. 607 – 617.
5. Fleck N. A. An overview of the mechanical properties of foams and periodic lattice materials. Proceedings of Symposium on Cellular Metals and Polymers. Fuerth, 12-14 October, 2004. Germany. Pp. 1-4.
6. Sofla A. Y. N., Elzey D. M., Wadley H. N. G. Shape morphing hinged truss structures. *Smart Mater. Struct.* 2009. No. 18. Pp. 1-8.
7. Sofla A. Y. N., Elzey D. M., Wadley H. N. G. A rotational joint for shape morphing space trusses. *Smart Mater. Struct.* 2007. No. 16. Pp. 77–84
8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss. *J.Mech. Physics of Solids*. 2006. No. 54. Pp. 756-782.
9. Deshpande V. S., Fleck N. A., Ashby M. F. Effective properties of the octet-truss lattice material. *J.Mech. Physics of Solids*. 2001. No. 49. Pp. 1747 – 1769.
10. Likhtarnikov J. M. *Variantnoe proektirovanie i optimizatsiya stalnih konstruksiy* [The variant design and optimization of steel structures]. Moscow: Stroiizdat, 1979. 320 p. (rus)
11. Kirsanov M. N. *Structural mechanics and computation facilities*. 2011. No. 5. Pp. 11-15. (rus)
12. Kirsanov M. N. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 6 (24). Pp. 28-34. (rus)
13. Kirsanov M. N. *Structural mechanics of engineering structures and buildings*. 2012. No. 1. Pp. 49-53. (rus)
14. Potapov V. D., Aleksandrov A. V., Kositsyn S. B., Dolotkazhin D. B. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow: Moscow: Vyshaya Shkola, 2007. 511 p. (rus)
15. Dyakonov V. P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetah* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow: DMK - Press, 2011. 800 p. (rus)

16. Goloskokov D. P. *Prakticheskiy kurs matematicheskoy fiziki v sisteme Maple* [Practical course in mathematical physics in the Maple]. Saint Petersburg, 2011. 644 p. (rus)
17. Matrosov A. V. *Maple 6. Reshenie zadach vysshey matematiki i mekhaniki* [Maple 6. Solving problems of higher mathematics and mechanics]. Saint Petersburg: BHV - Petersburg, 2001. 526 p. (rus)
18. Kirsanov M. N. *Praktika programmirovaniya v sisteme Maple* [The practice of programming in the Maple]. Moscow: 2011. 208 p. (rus)
19. Kirsanov M. N. *Maple I MapleT. Reshenie zadach mekhaniki* [Maple and MapleT. The solution of problems of mechanics]. St. Petersburg: Lan, 2012. 512 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 38-42**