Геометрически нелинейные математические модели термоползучести оболочек переменной толщины

К.т.н., доцент В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Ключевые слова: оболочки переменной толщины; ребристые оболочки; термоупругость; геометрическая нелинейность; поперечные сдвиги; ползучесть

Оболочки как элементы разного рода конструкций широко применяются в различных областях техники и строительства.

Тонкостенные элементы современных конструкций в виде оболочек предназначены для работы под воздействием механических нагрузок (как статических, так и динамических) и нередко температурного поля, обуславливающего появление чисто температурных деформаций.

Для придания в нужных местах большей жёсткости профиль тонких оболочек может иметь плавные утолщения. С целью повышения жёсткости тонкостенная часть оболочки может быть подкреплена дискретно расположенными рёбрами. В обоих случаях существенно повышается несущая способность конструкции при незначительном увеличении её массы.

Таким образом, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной толщины. В зависимости от характера изменения толщины будем различать оболочки гладко-переменной и, соответственно, ступенчато-переменной толщины (ребристые оболочки).

Известно, что тонкие оболочки могут допускать прогибы, соизмеримые с их толщиной (даже под воздействием нагрузок, далёких от критических значений).

Расчёты на прочность, устойчивость и колебания оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций переменной толщины, при котором проявляются геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, вязкоупругость (ползучесть) материала, переменность профиля и возникают чисто температурные деформации, исследовано недостаточно. Причины тому – сложность совместного учёта упомянутых факторов и необходимость решения громоздких нелинейных краевых задач.

Физические основы теплопроводности и термоупругости изложены в энциклопедическом курсе Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1]. Прикладные аспекты теории упругости и ползучести обстоятельно освещены в трудах Н.И. Безухова [2] и Н.Н. Малинина [3]. Вопросам расчётов различного рода конструкций на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур посвящена монография Н.И. Безухова и др. [4]. Анализ современного состояния теории оболочек, формулировка основополагающих принципов и построение модели термоупругих оболочек постоянной толщины приводится в весьма содержательной работе П.А. Жилина [5]. Современное состояние теории ребристых оболочек отражено в работах В.В. Карпова [6], а также зарубежных учёных И. Бискова, Дж. Хансена, Б. Чробота, С. Фишера, С. Берта, В. Койтера, Ю. Джиунченга, Р. Лижо, Дж. Маковски, В. Петрашкевича, Х. Стампфа и др. [7 -12].

Разработке математических моделей термоупругости оболочек переменной толщины для задач статики посвящены публикации В.В. Карпова и др. [6, 13]. Однако в статье [13] не учитываются поперечные сдвиги (используется модель Кирхгофа-Лява) и геометрическая нелинейность, а также не рассматриваются ребристые оболочки. В монографии [6] в задачах термоупругости (приведенных исключительно для ребристых оболочек) используется модель Кирхгофа-Лява при учёте геометрической нелинейности. В работе В.М. Жгутова [14] построена математическая модель термоупругости оболочек (как гладко-переменной, так и ступенчато-переменной толщины) для задач статики и динамики при учёте поперечных сдвигов (модель типа Тимошенко-Рейсснера) и геометрической нелинейности. Тем не менее, в работе [14] не учитывается возможность проявления ползучести материала при достаточно длительных нагрузках.

Математическому моделированию деформирования ребристых оболочек и оболочек гладко-переменной толщины при учёте различных свойств материала (нелинейная упругость, ползучесть и т.д.) посвящены работы В.М. Жгутова [15 – 18] и др., а также Р.А. Абдикаримова и В.М. Жгутова [19, 20]. Но в указанных работах не учитывается возможное влияние температурного поля на напряжённо-деформированное состояние и устойчивость исследуемых оболочек.

Проектирование и последующее создание лёгких, но вместе с тем прочных и надёжных, конструкций требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел, а также разработки новых интегральных методов их расчёта.

В связи с этим разработка более совершенной математической модели термоползучести оболочек является актуальной и важной задачей.

В настоящей статье предложены математические модели термоползучести оболочек переменной толщины (для задач статики и динамики), основанные на модели типа Тимошенко-Рейсснера (учитывающей поперечные сдвиги).

В случае ребристых оболочек учитывается также дискретность расположения рёбер, их ширина, сдвиговая и крутильная жёсткости.

Постановка задачи

Рассмотрим *тонкие* оболочки общего вида с краем (пологие на прямоугольном плане и вращения, в частности, цилиндрические, конические, сферические, торообразные, а также многие другие оболочки) [15].

Некоторую внутреннюю поверхность оболочки принимаем за отсчётную поверхность $x_3 = 0$. Координатные линии x_1 и x_2 криволинейной ортогональной системы координат ($-a/2 \le x_1 \le a/2$ и $-b/2 \le x_2 \le b/2$) направляем по линиям кривизны (параллелям и меридианам в случае поверхности вращения), а ось x_3 – по внутренней нормали отсчётной поверхности так, чтобы система координат x_1, x_2, x_3 была правой. (Полагаем, что определённая таким образом сеть координатных линий на отсчётной поверхности оболочки обеспечивает гладкость и регулярность её параметризации).

Дифференциалы длин дуг координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 определяем по формулам [15]:

$$dl_1 = H_1 \cdot dx_1,\ dl_2 = H_2 \cdot dx_2,\ dl_3 = H_3 \cdot dx_3 = dx_3,$$

где $H_1 = H_1(x_1, x_2)$, $H_2 = H_2(x_1, x_2)$, $H_3 \equiv 1$ – метрические коэффициенты Лямэ. При этом H_1 и H_2 зависят от вида оболочки. Например: $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ для пологих оболочек и пластин; $H_1 = const$ и $H_2 = H_2(x_1)$ в случае оболочек вращения.

Переменную толщину оболочки $\tilde{h} = \tilde{h}(x_1, x_2) \in C^k$ задаем ограничивающими её (в направлениях нормалей к отсчётной поверхности) гладкими (или ступенчато-гладкими) поверхностями $z_B = z_B(x_1, x_2)$ и $z_H = z_H(x_2, x_2)$ так, что $\tilde{h} = z_H - z_B$ и $z_B \le x_3 \le z_H$. (Принадлежность функции $f(x_1, x_2)$ классу гладкости C^k означает, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка $k \ge 1$ включительно; запись $f(x_1, x_2) \in C^0$ требует только непрерывности по совокупности аргументов). Полагаем, что векторы (ковекторы) градиентов $\overrightarrow{\nabla z_B}$ и $\overrightarrow{\nabla z_H}$ отличны от нуля и коллинеарны $\left(rang \begin{bmatrix} \partial z_B / \partial x_1 & \partial z_B / \partial x_2 \\ \partial z_H / \partial x_1 & \partial z_H / \partial x_2 \end{bmatrix} = 1 \right)$ в любой точке поверхности $x_3 = 0$.

Пусть $K_1 = K_1(x_1, x_2)$ и $K_2 = K_2(x_1, x_2)$ – главные кривизны отсчётной поверхности $x_3 = 0$ оболочки в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Отметим, в частности, что для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$; $0 \ne K_1 \equiv K_2 \equiv const$ для сферических и $K_1 \equiv 0 \ne K_2 \equiv const$ в случае цилиндрических оболочек вращения.

В случае ребристой оболочки за отсчётную поверхность $x_3 = 0$ принимаем срединную поверхность обшивки толщиной h. Рёбра задаем с помощью ступенчато-гладкой функции

$H = H(x_1, x_2) \in C^0$, характеризующей распределение рёбер по оболочке (как правило, с внутренней стороны обшивки вдоль координатных линий), их ширину и высоту (возможно переменные) [21, 22]. Таким образом, толщина ребристой оболочки равна $\widetilde{h} = h + H$, причем $z_B = -h/2$ и $z_H = h/2 + H$.

Считаем, что оболочка находится в стационарном температурном поле $T = T(x_1, x_2, x_3)$ $[K]$ и под действием механической нагрузки (статической или динамической) при определённом закреплении её края (контура).

Будем совместно учитывать геометрическую нелинейность, влияние температуры, нелинейную упругость (упругопластичность), поперечные сдвиги. В случае ребристых оболочек учитываем также дискретное расположение рёбер, их ширину, сдвиговую и крутильную жёсткости.

Математические модели термоползучести рассматриваемых оболочек

Как известно, математическая модель деформирования оболочки состоит из геометрических соотношений, физических соотношений и функционала полной энергии её деформации (из условия минимума которого следуют уравнения равновесия или движения).

Геометрические соотношения

Геометрические соотношения (зависимости деформаций от перемещений) в отсчётной поверхности $x_3 = 0$ с учётом геометрической нелинейности и влияния температуры имеют вид:

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} - \widetilde{\varepsilon}_0 \,;\; \widetilde{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} - \widetilde{\varepsilon}_0 \,;\; \widetilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \widetilde{\gamma}_{21}\,, \tag{1}$$

где ε_{11}, ε_{22} и $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ – деформации растяжения или сжатия вдоль линий x_1, x_2 и сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2) – составляющие геометрических соотношений (1), обусловленные исключительно механической нагрузкой; $\widetilde{\varepsilon}_0$ – чисто температурные деформации («температурные» составляющие).

Здесь:

$$\varepsilon_{11} = \frac{Du_1}{\partial l_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_1}\right)^2 ;\; \varepsilon_{22} = \frac{Du_2}{\partial l_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_2}\right)^2 ;\; \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{Du_2}{\partial l_1} + \frac{Du_1}{\partial l_2} + \frac{Du_3}{\partial l_1}\cdot\frac{Du_3}{\partial l_2}\,, \tag{2}$$

где $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ и $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ – компоненты вектора перемещений точек отсчётной поверхности вдоль координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 соответственно; $\dfrac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$ – операторы ковариантного дифференцирования по направлениям l_α произвольных полей (в частности, скалярного поля $a = a(x_1, x_2, x_3)$, векторного поля $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i \le 3$, поля тензора второго ранга $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i, k \le 3$ и т.д.).

Напомним, что операторы ковариантного (абсолютного) дифференцирования $\dfrac{D}{\partial l_\alpha}$ действуют по правилам [23, 24]:

$$a \;\mapsto\; \frac{Da}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$a_i \;\mapsto\; \frac{Da_i}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha} - \sum_{k=1}^{3} a_k \Gamma_{ik\alpha}$$

и, соответственно,

$$a_{ik} \mapsto \frac{Da_{ik}}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\alpha} - \sum_{l=1}^{3} (a_{lk}\Gamma_{il\alpha} + a_{il}\Gamma_{kl\alpha}),$$

где $\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{ik\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ – символы Кристоффеля (1-го рода), $1 \le i, k, \alpha \le 3$.

Как известно, символы Кристоффеля симметричны по крайним индексам при $k \ne i, k \ne \alpha$ ($\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{\alpha ki}$) и антисимметричны по первым двум индексам ($\Gamma_{ik\alpha} = -\Gamma_{ki\alpha}$), а потому величины $\Gamma_{ik\alpha}$ с разными значениями индексов равны нулю ($\Gamma_{ik\alpha} = 0$ при $i \ne k, i \ne \alpha, k \ne \alpha$). Это значит, что в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$ ненулевыми могут быть не более 12: $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik}$.

При этом $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik} = \frac{1}{H_i H_k} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \ln H_k}{\partial x_i}$, а те 12 из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$, которые в ортогональной криволинейной системе координат могут быть отличными от нуля, имеют вид:

$$\Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1};\ \Gamma_{133} = -\Gamma_{313} = 0;\ \Gamma_{211} = -\Gamma_{121} = \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2};\ \Gamma_{233} = -\Gamma_{323} = 0;$$

$$\Gamma_{311} = -\Gamma_{131} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = -K_1;\ \Gamma_{322} = -\Gamma_{232} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_2} = -K_2.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{Du_1}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_2 - K_1 \cdot u_3; & \frac{Du_1}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_2; \\ \frac{Du_2}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_1; & \frac{Du_2}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_1 - K_2 \cdot u_3; \\ \frac{Du_3}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_1 \cdot u_1; & \frac{Du_3}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2 \cdot u_2. \end{cases} \tag{3}$$

Введём обозначения:

$$\Theta_1 = \Theta_1(x_1, x_2) \equiv \frac{Du_3}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_1 \cdot u_1;\ \Theta_2 = \Theta_2(x_1, x_2) \equiv \frac{Du_3}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2 \cdot u_2. \tag{4}$$

Тогда с учётом выражений (3) и (4) составляющие от механической нагрузки (2) геометрических соотношений (1) принимают вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_2 - K_1 \cdot u_3 + \frac{1}{2}\Theta_1^2; \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_1 - K_2 \cdot u_3 + \frac{1}{2}\Theta_2^2; \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot u_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot u_2 + \Theta_1 \cdot \Theta_2. \end{cases} \tag{5}$$

В ряде случаев можно полагать, что в процессе деформирования

$$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} >> K_1 \cdot u_1;\ \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} >> K_2 \cdot u_2,$$

а значит,

$$\Theta_1 \approx \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1};\quad \Theta_2 \approx \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$ и $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ (как было отмечено выше), а потому операторы ковариантного дифференцирования $\frac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$ совпадают с операторами обычного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ и составляющие (2), (5) от механической нагрузки геометрических соотношений (1) максимально упрощаются:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2; \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2; \ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (6)$$

В соотношениях (2), (5) и (6) квадратичные члены характеризуют геометрическую нелинейность, которую следует учитывать в случаях, когда поперечные перемещения u_3 (прогибы) соизмеримы с толщиной оболочки $\tilde{h}$.

Деформации поперечных (также как и продольных) сдвигов не зависят от температуры [1, 14] и могут быть определены по формулам:

$$\gamma_{13} = c f(x_3)\Phi_1; \ \ \gamma_{23} = c f(x_3)\Phi_2.$$

Здесь $f(x_3)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{13} и τ_{23} в главных нормальных сечениях (dx_1, dx_3) и (dx_2, dx_3) оболочки, такая, что $f(z_B) = f(z_H) = 0$, $\frac{1}{\tilde{h}}\int_{z_B}^{z_H} f(x_3)dx_3 = 1$, $\frac{1}{\tilde{h}}\int_{z_B}^{z_H} f^2(x_3)dx_3 = 1/c$ (c – константа); $\Phi_1 = \Psi_1 + \frac{Du_3}{\partial l_1}$ и $\Phi_2 = \Psi_2 + \frac{Du_3}{\partial l_2}$ – полные углы сдвигов, где $\Psi_1 = tg\psi_1$ и $\Psi_2 = tg\psi_2$, причём $\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2)$ и $\psi_2 = \psi_2(x_1, x_2)$ – углы поворота отрезка нормали к отсчётной поверхности в соответствующих главных нормальных сечениях оболочки [14, 15].

В качестве $f(x_3)$ используем квадратичную зависимость [14, 15]:

$$f(x_3) = -\frac{6}{\tilde{h}^2}(x_3 - z_H)(x_3 - z_B) = f_0 + f_1 x_3 + f_2 x_3^2,$$

где $f_0 = -\frac{6 z_H z_B}{\tilde{h}^2}$; $f_1 = \frac{6(z_H + z_B)}{\tilde{h}^2}$ и $f_2 = -\frac{6}{\tilde{h}^2}$, и тогда $c = 5/6$.

Перемещения в слоях $x_3 = const$ вычисляем по формулам [14, 15]:

$$u_1^{(x3)} = u_1 + x_3 \cdot \Phi_1, \ u_2^{(x3)} = u_2 + x_3 \cdot \Phi_2, \ u_3^{(x3)} = u_3. \quad (7)$$

Отсюда для деформаций в слоях $x_3 = const$ получаем выражения:

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} = \tilde{\varepsilon}_{11} + x_3 \cdot \mathrm{X}_1 = \varepsilon_{11}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon}; \ \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} = \tilde{\varepsilon}_{22} + x_3 \cdot \mathrm{X}_2 = \varepsilon_{22}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon}; \ \gamma_{12}^{(x3)} = \gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}, \quad (8)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \alpha T$, $\varepsilon_{11}^{(x3)} = \varepsilon_{11} + x_3 \cdot \mathrm{X}_1$ и $\varepsilon_{22}^{(x3)} = \varepsilon_{22} + x_3 \cdot \mathrm{X}_2$.

Здесь α – коэффициент линейного теплового расширения материала $[K^{-1}]$;

T – температура оболочки в данной точке;

$$\mathrm{X}_1 \equiv \frac{D\Phi_1}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_2;$$

$$\mathrm{X}_2 \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_1;$$

$$2\mathrm{X}_{12} \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_1} + \frac{D\Phi_1}{\partial l_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_2\right).$$

Считаем, что температурное поле $T(x_1,x_2,x_3)$ (определяемое из решения уравнения теплопроводности) задано и соответствует установившемуся тепловому режиму. Вдоль оси x_3 оно может быть представлено с помощью квадратичного закона распределения [14]:

$$T(x_1,x_2,x_3) = T_0(x_1,x_2) + T_1(x_1,x_2)\cdot x_3 + T_2(x_1,x_2)\cdot x_3^2 = \sum_{i=1}^{3} T_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1} \tag{9}$$

или линейной зависимости, применимой для тонких оболочек:

$$T(x_1,x_2,x_3) = T_0(x_1,x_2) + T_1(x_1,x_2)\cdot x_3 = \sum_{i=1}^{2} T_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1},$$

где $T_0 = T_0(x_1,x_2)$, $T_1 = T_1(x_1,x_2)$ и $T_2 = T_2(x_1,x_2)$ – известные функции.

В ряде случаев можно предполагать (равномерное температурное поле):

$$T(x_1,x_2,x_3) = T_0(x_1,x_2).$$

Известно, что для многих материалов при достаточно высоких или низких температурах модуль упругости E и коэффициент α заметно изменяются. В этом случае для вычисления их значений могут быть использованы аппроксимации [14]:

$$E = E(T) = E_0 + E_1 T + E_2 T^2 = \sum_{i=1}^{3} E_{i-1} T^{i-1}; \tag{10}$$

$$\alpha = \alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{j-1} T^{j-1}, \tag{11}$$

где E_0 и α_0 – некоторые «начальные» значения E и α; E_1, E_2 и α_1 – экспериментальные параметры.

Как правило, E_0 и α_0 (и, соответственно, коэффициенты E_1, E_2 и α_1) отвечают значению $T = 20^0 C$.

В большинстве случаев коэффициент Пуассона μ материала не зависит от изменений температуры в достаточно обширной температурной области.

С учётом представления (9) аппроксимации (10) и (11) могут быть записаны для каждой точки $P = P(x_1,x_2,x_3)$ оболочки в виде [14]:

$$E = E(P) = E(x_1,x_2,x_3) = \widetilde{E}_0 + \widetilde{E}_1\cdot x_3 + \widetilde{E}_2\cdot x_3^{\,2} + \widetilde{E}_3\cdot x_3^{\,3} + \widetilde{E}_4\cdot x_3^{\,4} = \sum_{i=1}^{5}\widetilde{E}_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1}; \tag{12}$$

$$\alpha = \alpha(P) = \alpha(x_1,x_2,x_3) = \widetilde{\alpha}_0 + \widetilde{\alpha}_1\cdot x_3 + \widetilde{\alpha}_2\cdot x_3^{\,2} = \sum_{i=1}^{3}\widetilde{\alpha}_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1}. \tag{13}$$

Здесь $\widetilde{E}_0$, $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_3$, $\widetilde{E}_4$ и $\widetilde{\alpha}_0$, $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$ – суть функции точки $P_0 = P_0(x_1,x_2)$ отсчётной поверхности $x_3 = 0$ оболочки, подробные выражения для которых приведены в основном тексте работы [14].

Для чисто температурных деформаций $\widetilde{\varepsilon} = \alpha T$ с учётом выражений (12) и (13) будем иметь:

$$\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(P) = \alpha(P)T(P) = \widetilde{\varepsilon}_0 + \widetilde{\varepsilon}_1\cdot x_3 + \widetilde{\varepsilon}_2\cdot x_3^{\,2} + \widetilde{\varepsilon}_3\cdot x_3^{\,3} + \widetilde{\varepsilon}_4\cdot x_3^{\,4} = \sum_{i=0}^{5}\widetilde{\varepsilon}_{i-1}\cdot x_3^{\,i-1}, \tag{14}$$

где

$$\widetilde{\varepsilon}_k = \widetilde{\varepsilon}_k(P_0) = \widetilde{\varepsilon}_k(x_1,x_2) = \sum_{i=0}^{k}\widetilde{\alpha}_i T_{k-i}, \quad 0 \le k \le 4 \tag{15}$$

суть коэффициенты при z^k (функции точки $P_0 = P_0(x_1, x_2)$) в представлении (14) (считаем, что $\widetilde{\alpha}_i = 0$ при $i > 2$ и $T_{k-i} = 0$ при $k - i > 2$).

В развернутом виде выражения (15) для функций $\widetilde{\varepsilon}_k$ в соотношении (14) приведены в приложении 1 работы [14].

Физические соотношения

Как известно, в настоящее время существует несколько теорий ползучести, каждая из которых применима для определённого круга материалов в зависимости от многих факторов.

Для металлов (ползучесть в которых развивается только при высоких температурах) обычно пользуются *теорией течения*, которая хорошо описывает ползучесть при напряжениях, изменяющихся монотонно и медленно, но основана на ярко выраженной нелинейной зависимости $d\varepsilon / dt = f(\sigma, t)$.

Более полное описание ползучести дает *теория упрочения*, согласно которой $d\varepsilon / dt = f(\sigma, d\varepsilon / dt)$. Теория упрочения правильно улавливает особенности ползучести при изменяющихся напряжениях и удобна для анализа кратковременной ползучести при высоком уровне напряжений, однако её применение связано с большими математическими трудностями.

В механике полимеров и для бетона широко используется линейный вариант *теории наследственности*, основанный на принципе суперпозиции деформаций и учитывающий историю напряжённого состояния.

В соответствии с линейной теорией наследственности физические соотношения для изотропного материала могут быть записаны в виде:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{22}^{(x3)} - \int_{t_0}^{t}(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{22}^{(x3)})R1(t,s)ds\right];$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{11}^{(x3)} - \int_{t_0}^{t}(\varepsilon_{22}^{(x3)} + \mu\varepsilon_{11}^{(x3)})R1(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1-\mu)}\left[\gamma_{12}^{(x3)} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{12}^{(x3)}R2(t,s)ds\right]; \tag{16}$$

$$\tau_{13} = \frac{E}{2(1-\mu)}\left[\gamma_{13} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{13}R2(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{23} = \frac{E}{2(1-\mu)}\left[\gamma_{23} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{23}R2(t,s)ds\right],$$

где $R1(t,s)$ и $R2(t,s)$ – функции влияния (ядра релаксации) материала при растяжении (или сжатии) и сдвиге соответственно, s – переменная интегрирования (имеющая смысл времени).

Для полимерных материалов и старого бетона функции влияния имеют вид соответственно:

$$R1(t,s) = R_1 \cdot \exp(-\beta_1 t)\cdot(t-s)^{\gamma_1 - 1}, \; R2(t,s) = R_2 \cdot \exp(-\beta_2 t)\cdot(t-s)^{\gamma_2 - 1}; \tag{17}$$

$$R1(t,s) = \eta E C_0 \exp[-\eta(1 + EC_0)\cdot(t-s)], \; R2(t,s) = 2R_1(t,s)\cdot\frac{G}{E}, \tag{18}$$

где R_1, R_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, η и C_0 – экспериментальные параметры; $G = E/2(1+\mu)$.

Весьма хорошо удовлетворяет опытным данным *теория упругоползучего тела* – линейный вариант наследственной теории, обобщённый на случай учёта процесса старения материала (в частности, бетона).

(Предполагается случай *простого нагружения*, при котором внешние силы возрастают пропорционально некоторому параметру (например, времени) или постоянны; тогда главные оси напряжённого состояния сохраняют свои направления в процессе деформирования в каждой точке).

Опыт показывает, что с ростом температуры вязкоупругие свойства материалов ещё более усиливаются.

В соответствии с теорией упругоползучего тела физические соотношения в случае вязкоупругого изотропного материала оболочки, находящейся в температурном поле, могут быть представлены в следующем виде.

Напряжения растяжения (или сжатия) в направлениях x_1 и x_2:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{11}^E - \tilde{\sigma}_{11}^C = \left(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MC}\right) - \left(\sigma^{TC} - \sigma^{TC}\right); \quad (19)$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\sigma}_{22}^E - \tilde{\sigma}_{22}^C = \left(\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{22}^{MC}\right) - \left(\sigma^{TE} - \sigma^{TC}\right). \quad (20)$$

Здесь:

1) $\tilde{\sigma}_{11}^E$, $\tilde{\sigma}_{22}^E$ – термоупругие составляющие напряжений растяжения или сжатия [14]:

$$\tilde{\sigma}_{11}^E = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)}\right] = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{11}^{ME} - \sigma^{TE}; \quad (21)$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^E = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)}\right] = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{22}^{ME} - \sigma^{TE}, \quad (22)$$

где $\sigma_{11}^{ME} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)\right]$, $\sigma_{22}^{ME} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)\right]$ – составляющие термоупругих напряжений растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (с той разницей, что входящий в их выражения модуль упругости $E = E(P)$ является зависящей от температуры в точке P величиной); $\sigma^{TE} = \frac{(1+\mu)\tilde{\sigma}(P)}{1-\mu^2}$ – составляющая термоупругих напряжений растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\tilde{\sigma}(P) = E(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P)$ вычисляем по формуле (25), приведённой ниже);

2) $\tilde{\sigma}_{11}^C$, $\tilde{\sigma}_{22}^C$ – термовязкоупругие составляющие напряжений растяжения:

$$\tilde{\sigma}_{11}^C = \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)}\right] = \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{11}^{MC} - \sigma^{TC}; \quad (23)$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^P = \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \mu\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)}\right] = \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma_{22}^{MC} - \sigma^{TC}, \quad (24)$$

где $\sigma_{11}^{MC} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)\right]$, $\sigma_{22}^{MC} = \frac{E(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)\right]$ – составляющие термовязкоупругих напряжений растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (с той разницей, что входящие в их выражения модуль упругости $E = E(P)$ и функция влияния $R1(t,s,P)$ являются зависящими от температуры в точке P величинами); $\sigma^{TP} = \frac{(1+\mu)\tilde{\sigma}(P)R1(t,s,P)}{1-\mu^2}$ – составляющая термопластических напряжений растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями.

В формулах (21) – (24)

$$\tilde{\sigma}(P) = E(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P) =$$
$$= \tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 x_3 + \tilde{\sigma}_2 x_3{}^2 + \tilde{\sigma}_3 x_3{}^3 + \tilde{\sigma}_4 x_3{}^4 + \tilde{\sigma}_5 x_3{}^5 + \tilde{\sigma}_6 x_3{}^6 + \tilde{\sigma}_7 x_3{}^7 + \tilde{\sigma}_8 x_3{}^8 = \sum_{i=1}^{9} \tilde{\sigma}_{i-1} x_3^{i-1}, \tag{25}$$

где

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k(P_0) = \tilde{\sigma}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{E}_i \cdot \tilde{\varepsilon}_{k-i} \ , \ 0 \le k \le 8 \tag{26}$$

(считаем, что $\tilde{E}_i = 0$ при $i > 4$, $\tilde{\varepsilon}_{k-i} = 0$ при $k - i > 4$) [8].

В развёрнутом виде выражения (26) для коэффициентов $\tilde{\sigma}_k$ в соотношении (25) представлены в приложении 2 работы [14].

Напряжения сдвигов в плоскостях (dx_1, dx_2) и (dx_1, dx_3), (dx_2, dx_3) имеют тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\tilde{\tau}_{12} = \tilde{\tau}_{12}^E - \tilde{\tau}_{12}^C \ ; \ \tilde{\tau}_{13} = \tilde{\tau}_{13}^E - \tilde{\tau}_{13}^C \ ; \ \tilde{\tau}_{23} = \tilde{\tau}_{23}^E - \tilde{\tau}_{23}^C \ . \tag{27}$$

Здесь:

1) $\tilde{\tau}_{12}^E$ и $\tilde{\tau}_{13}^E$, $\tilde{\tau}_{23}^E$ – термоупругие составляющие напряжений сдвига [14]:

$$\tilde{\tau}_{12}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^{(x3)} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right); \tag{28}$$

$$\tilde{\tau}_{13}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{13} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left[c\, f(x_3)\Phi_1\right] = \frac{c\Phi_1\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \tag{29}$$

$$\tilde{\tau}_{23}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{23} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left[c\, f(x_3)\Phi_2\right] = \frac{c\Phi_2\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \tag{30}$$

2) $\tilde{\tau}_{12}^P$ и $\tilde{\tau}_{13}^P$, $\tilde{\tau}_{23}^P$ – термовязкоупругие составляющие напряжений сдвига:

$$\tilde{\tau}_{12}^P = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^{(x3)} = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right); \tag{31}$$

$$\tilde{\tau}_{13}^E = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\gamma_{13} = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\left[c\, f(x_3)\Phi_1\right] = \frac{c\Phi_1 R2(t,s,P)\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \tag{32}$$

$$\tilde{\tau}_{23}^E = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\gamma_{23} = \frac{E(P)R2(t,s,P)}{2(1+\mu)}\left[c\, f(x_3)\Phi_2\right] = \frac{c\Phi_2 R2(t,s,P)\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}. \tag{33}$$

В формулах (32) и (33):

$$\tilde{\tau}(P) = E(P)\cdot f(x_3) = \tilde{\tau}_0 + \tilde{\tau}_1 x_3 + \tilde{\tau}_2 x_3{}^2 + \tilde{\tau}_3 x_3{}^3 + \tilde{\tau}_4 x_3{}^4 + \tilde{\tau}_5 x_3{}^5 + \tilde{\tau}_6 x_3{}^6 = \sum_{i=1}^{7} \tilde{\tau}_{i-1} x_3^{i-1}, \tag{34}$$

где

$$\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_k(P_0) = \tilde{\tau}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{E}_i \cdot f_{k-i} \ , \ 0 \le k \le 6 \tag{35}$$

(считаем, что $\tilde{E}_i = 0$ при $i > 4$ и $f_{k-i} = 0$ при $k - i > 2$) [14].

В развёрнутом виде выражения (35) для коэффициентов $\tilde{\tau}_k$ в соотношениях (34) представлены в приложении 3 работы [14].

Проинтегрируем напряжения (19), (20), (27) по переменной x_3, $z_B \le x_3 \le z_H$. Получим следующие выражения для внутренних силовых факторов, приведённых к отсчётной поверхности оболочки (и приходящихся на единицу длины сечения, т.е. погонных).

Усилия растяжения или сжатия в направлениях x_1 и x_2:

$$\widetilde{N}_{11} = \widetilde{N}_{11}^E - \widetilde{N}_{11}^C = \left(N_{11}^{ME} - N_{11}^{MC}\right) - \left(N^{TE} - N^{TC}\right); \tag{36}$$

$$\widetilde{N}_{22} = \widetilde{N}_{22}^E - \widetilde{N}_{22}^C = \left(N_{22}^{ME} - N_{22}^{MC}\right) - \left(N^{TE} - N^{TC}\right). \tag{37}$$

Здесь:

1) $\widetilde{N}_{11}^E$, $\widetilde{N}_{22}^E$ – термоупругие составляющие усилий растяжения [14]:

$$\widetilde{N}_{11}^E = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^E dx_3 = I_1(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) + I_2(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\widetilde{N}(P_0) = N_{11}^{ME} - N^{TE}; \tag{38}$$

$$\widetilde{N}_{22}^E = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{22}^E dx_3 = I_1(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) + I_2(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - (1+\mu)\widetilde{N}(P_0) = N_{22}^{ME} - N^{TE}, \tag{39}$$

где $N_{11}^{ME} = I_1(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) + I_2(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)$ и $N_{22}^{ME} = I_1(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) + I_2(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)$ – составляющие термоупругих усилий растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (величины $I_1 = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)dx_3$, $I_2 = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)x_3 dx_3$ вычисляем по формулам (57), (58), приведённым ниже); $N^{TE} = (1+\mu)\widetilde{N}^E(P_0)$ – составляющая термоупругих усилий растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\widetilde{N}^E(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P)dx_3$ вычисляем по формуле (59), приведённой ниже);

2) $\widetilde{N}_{11}^C$, $\widetilde{N}_{22}^C$ – термопластические составляющие усилий растяжения:

$$\widetilde{N}_{11}^C = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^C dx_3 = I_1^C(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) + I_2^C(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\widetilde{N}^C(P_0) = N_{11}^{MC} - N^{TC}; \tag{40}$$

$$\widetilde{N}_{22}^C = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{22}^C dx_3 = I_1^C(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) + I_2^C(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - (1+\mu)\widetilde{N}^C(P_0) = N_{22}^{MC} - N^{TC}, \tag{41}$$

где $N_{11}^{MC} = I_1^C(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) + I_2^C(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)$, $N_{22}^{MC} = I_1^C(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) + I_2^C(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)$ – составляющие термопластических усилий растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке $\left(I_1^C = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)R1(t,s,P)dx_3,\ I_2^P = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)R1(t,s,P)x_3 dx_3\right)$;

$N^{TP} = (1+\mu)\widetilde{N}^C(P_0)$ – составляющая термопластических усилий растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями $\left(\widetilde{N}^C(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P)R1(t,s,P)dx_3\right)$.

Усилие сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2) имеет тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\widetilde{N}_{12} = \widetilde{N}_{12}^E - \widetilde{N}_{12}^C. \tag{42}$$

Здесь:

1) $\widetilde{N}_{12}^{E}$ – термоупругая составляющая усилия сдвига [14]:

$$\widetilde{N}_{12}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{12}^{E} dx_3 = \mu_1\left(I_1\gamma_{12} + I_2 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right), \tag{43}$$

где $\mu_1 = (1-\mu)/2$;

2) $\widetilde{N}_{12}^{C}$ – термовязкоупругая составляющая усилия сдвига:

$$\widetilde{N}_{12}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\tau}_{12}^{C} dx_3 = \mu_1\left(\widehat{I}_1^{C}\gamma_{12} + \widehat{I}_2^{C} \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right), \tag{44}$$

где $\widehat{I}_1^{C} = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)R2(t,s,P)dx_3$, $\widehat{I}_2^{C} = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)R2(t,s,P)x_3 dx_3$.

<u>Изгибающие моменты</u> вдоль линий x_1 и x_2:

$$\widetilde{M}_{11} = \widetilde{M}_{11}^{E} - \widetilde{M}_{11}^{C} = \left(M_{11}^{ME} - M_{11}^{MC}\right) - \left(M^{TE} - M^{TC}\right); \tag{45}$$

$$\widetilde{M}_{22} = \widetilde{M}_{22}^{E} - \widetilde{M}_{22}^{C} = \left(M_{22}^{ME} - M_{22}^{MC}\right) - \left(M^{TE} - M^{TC}\right). \tag{46}$$

Здесь:

1) $\widetilde{M}_{11}^{E}$, $\widetilde{M}_{22}^{E}$ – термоупругие составляющие изгибающих моментов [14]:

$$\widetilde{M}_{11}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{E} x_3 dx_3 = I_2\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) - (1+\mu)\widetilde{M}(P_0) = M_{11}^{ME} - M^{TE}; \tag{47}$$

$$\widetilde{M}_{22}^{E} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{E} x_3 dx_3 = I_2\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) - (1+\mu)\widetilde{M}(P_0) = M_{22}^{ME} - M^{TE}, \tag{48}$$

где $M_{11}^{ME} = I_2\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right)$, $M_{22}^{ME} = I_2\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$ – составляющие термоупругих изгибающих моментов, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (величину $I_3 = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} E(P)x_3^{\,2} dx_3$ вычисляем по формуле (60), приведённой ниже); $M^{TE} = (1+\mu)\widetilde{M}^{E}(P_0)$ – составляющая изгибающих моментов, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\widetilde{M}^{E}(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\displaystyle\int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}(P)x_3 dx_3$ вычисляем по формуле (61), приведённой ниже);

2) $\widetilde{M}_{11}^{C}$, $\widetilde{M}_{11}^{C}$ – термовязкоупругие составляющие изгибающих моментов:

$$\widetilde{M}_{11}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{C} x_3 dx_3 = I_2^{C}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3^{C}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) - (1+\mu)\widetilde{M}^{C}(P_0) = M_{11}^{MC} - M^{TC}; \tag{49}$$

$$\widetilde{M}_{22}^{C} = \int_{z_B}^{z_H} \widetilde{\sigma}_{11}^{C} x_3 dx_3 = I_2^{C}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_3^{C}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) - (1+\mu)\widetilde{M}(P_0) = M_{22}^{MC} - M^{TC}, \tag{50}$$

где $M_{11}^{MC} = I_2^C(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) + I_3^C(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)$, $M_{22}^{MC} = I_2^C(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) + I_2^C(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)$ – составляющие термовязкоупругих изгибающих моментов, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке $\left(I_3^C = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int\limits_{z_B}^{z_H} E(P)R1(t,s,P)x_3{}^2 dx_3\right)$; $M^{TP} = (1+\mu)\widetilde{M}^C(P_0)$ – составляющая изгибающих моментов, обусловленная чисто температурными деформациями $\left(\widetilde{M}^C(P_0) = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\sigma}(P)R1(t,s,P)x_3 dx_3\right)$.

<u>Крутящий момент</u> вдоль касательной плоскости (dx_1, dx_2) имеет тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\widetilde{M}_{12} = \widetilde{M}_{12}^E - \widetilde{M}_{12}^C. \tag{51}$$

Здесь:

1) $\widetilde{M}_{12}^E$ – термоупругая составляющая крутящего момента [14]:

$$\widetilde{M}_{12}^E = \int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}_{12}^E x_3 dx_3 = \mu_1\left[I_2\gamma_{xy} + I_3\cdot 2\mathrm{X}_{12}\right]; \tag{52}$$

2) $\widetilde{M}_{12}^C$ – термовязкоупругая составляющая крутящего момента:

$$\widetilde{M}_{12}^C = \int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}_{12}^C x_3 dx_3 = \mu_1\left(\widehat{I}_2^C\gamma_{12} + \widehat{I}_3^C\cdot 2\mathrm{X}_{12}\right), \tag{53}$$

где $\widehat{I}_3^C = \dfrac{1}{1-\mu^2}\int\limits_{z_B}^{z_H} E(P)R2(t,s,P)x_3{}^2 dx_3$.

<u>Поперечные усилия</u> в главных нормальных сечениях (dx_1, dx_3), (dx_2, dx_3) имеют тот же вид, что и при чисто механических деформациях:

$$\widetilde{Q}_{13} = \widetilde{Q}_{13}^E - \widetilde{Q}_{13}^C;\ \widetilde{Q}_{23} = \widetilde{Q}_{23}^E - \widetilde{Q}_{23}^C. \tag{54}$$

Здесь:

1) $\widetilde{Q}_{13}^E$ и $\widetilde{Q}_{23}^E$ – термоупругие составляющие поперечных сил [14]:

$$\widetilde{Q}_{13}^E = \int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}_{13}^E dx_3 = c\Phi_1\cdot\widetilde{Q}(P_0);\ \widetilde{Q}_{23}^E = \int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}_{23}^E dx_3 = c\Phi_2\cdot\widetilde{Q}(P_0), \tag{55}$$

где величина $\widetilde{Q}^E(P_0) = \dfrac{1}{2(1+\mu)}\int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}(P)dx_3$ вычисляется по формуле (62), приведённой ниже;

2) $\widetilde{Q}_{13}^C$, $\widetilde{Q}_{23}^C$ – термопластические составляющие поперечных сил:

$$\widetilde{Q}_{13}^C = \int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}_{13}^C dx_3 = c\Phi_1\cdot\widetilde{Q}^C(P_0);\ \widetilde{Q}_{23}^C = \int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}_{23}^C dx_3 = c\Phi_2\cdot\widetilde{Q}^C(P_0), \tag{56}$$

где $\widetilde{Q}^P(P_0) = \dfrac{1}{2(1+\mu)}\int\limits_{z_B}^{z_H}\widetilde{\tau}(P)R2(t,s,P)dx_3$.

Приведём для величин, входящих в формулы (36) – (39), (42), (43), (45) – (52), (54), (55) некоторые расчётные соотношения, полученные в работе [14]:

$$I_1 = \frac{\sum_{m=1}^{5} \tilde{E}_{m-1} A_{m-1}}{1-\mu^2} = \frac{\tilde{E}_0 A_0 + \tilde{E}_1 A_1 + \tilde{E}_2 A_2 + \tilde{E}_3 A_3 + \tilde{E}_4 A_4}{1-\mu^2}; \tag{57}$$

$$I_2 = \frac{\sum_{m=1}^{5} \tilde{E}_{m-1} A_m}{1-\mu^2} = \frac{\tilde{E}_0 A_1 + \tilde{E}_1 A_2 + \tilde{E}_2 A_3 + \tilde{E}_3 A_4 + \tilde{E}_4 A_5}{1-\mu^2}; \tag{58}$$

$$\tilde{N}^E(P_0) = \frac{\sum_{m=1}^{9} \tilde{\sigma}_{m-1} A_{m-1}}{1-\mu^2} = \frac{\tilde{\sigma}_0 A_0 + \tilde{\sigma}_1 A_1 + \tilde{\sigma}_2 A_2 + \tilde{\sigma}_3 A_3 + \tilde{\sigma}_4 A_4 + \tilde{\sigma}_5 A_5 + \tilde{\sigma}_6 A_6 + \tilde{\sigma}_7 A_7 + \tilde{\sigma}_8 A_8}{1-\mu^2}; \tag{59}$$

$$I_3 = \frac{\sum_{m=1}^{5} \tilde{E}_{m-1} A_{m+1}}{1-\mu^2} = \frac{\tilde{E}_0 A_2 + \tilde{E}_1 A_3 + \tilde{E}_2 A_4 + \tilde{E}_3 A_5 + \tilde{E}_4 A_6}{1-\mu^2}; \tag{60}$$

$$\tilde{M}^E(P_0) = \frac{\sum_{m=1}^{9} \tilde{\sigma}_{m-1} A_m}{1-\mu^2} = \frac{\tilde{\sigma}_0 A_1 + \tilde{\sigma}_1 A_2 + \tilde{\sigma}_2 A_3 + \tilde{\sigma}_3 A_4 + \tilde{\sigma}_4 A_5 + \tilde{\sigma}_5 A_6 + \tilde{\sigma}_6 A_7 + \tilde{\sigma}_7 A_8 + \tilde{\sigma}_8 A_9}{1-\mu^2}; \tag{61}$$

$$\tilde{Q}^E(P_0) = \frac{\sum_{m=1}^{7} \tilde{\tau}_{m-1} A_{m-1}}{2(1+\mu)} = \frac{\tilde{\tau}_0 A_0 + \tilde{\tau}_1 A_1 + \tilde{\tau}_2 A_2 + \tilde{\tau}_3 A_3 + \tilde{\tau}_4 A_4 + \tilde{\tau}_5 A_5 + \tilde{\tau}_6 A_6}{2(1+\mu)}. \tag{62}$$

Нам понадобится ещё одно выражение, приведённое в статье [14]:

$$N_1^E(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2} \int_{z_B}^{z_H} \tilde{\pi}(P) dx_3 = \frac{\sum_{m=1}^{12} \tilde{\pi}_{m-1} A_{m-1}}{1-\mu^2} = \frac{\left[\tilde{\pi}_0 A_0 + \tilde{\pi}_1 A_1 + \tilde{\pi}_2 A_2 + \ldots + \tilde{\pi}_{11} A_{11} + \tilde{\pi}_{12} A_{12}\right]}{1-\mu^2}, \tag{63}$$

где

$$\tilde{\pi}(P) = \tilde{\sigma}(P) \cdot \tilde{\varepsilon}(P) = \tilde{\pi}_0 + \tilde{\pi}_1 x_3 + \tilde{\pi}_2 x_3{}^2 + \ldots + \tilde{\pi}_{11} x_3{}^{11} + \tilde{\pi}_{12} x_3{}^{12} = \sum_{i=1}^{13} \tilde{\pi}_{i-1} x_3{}^{i-1}, \tag{64}$$

причём

$$\tilde{\pi}_k = \tilde{\pi}_k(P_0) = \tilde{\pi}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\varepsilon}_{k-i}, \ 0 \le k \le 12 \tag{65}$$

(считаем, что $\tilde{\sigma}_i = 0$ при $i > 8$ и $\tilde{\varepsilon}_{k-i} = 0$ при $k - i > 4$).

Выражения (65) для коэффициентов $\tilde{\pi}_k$, входящих в соотношение (64), в развернутом виде приведены в приложении 4 работы [14].

В формулах (57) – (63) $A_{m-1} = \int_{z_B}^{z_H} x_3{}^{m-1} dx_3$, $1 \le m \le 12$ – геометрические характеристики главных нормальных сечений оболочки [14].

Функционал W полной энергии деформации

Функционал W полной энергии деформации рассматриваемых оболочек на данном отрезке $[t_0, t_1]$ времени t для задач динамики в соответствии с [5, 25, 26] имеет вид:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \tilde{U} + A\right) dt, \tag{66}$$

где K и $\tilde{U}$ – кинетическая и потенциальная энергии оболочки; A – работа внешних сил.

В задачах динамики подлежащие определению функции перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1, Ψ_2 являются не только функциями координат x_1, x_2, но и времени t: $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, t)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(x, y, t)$, $\Psi_2 = \Psi_2(x, y, t)$.

Для задач статики полная энергия деформации оболочки (функционал Лагранжа) может быть записана в виде [1, 2, 5 -26]:

$$W = \widetilde{U} - A. \tag{67}$$

В соотношениях (66) и (67):

$$K = \frac{\rho}{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(H_1\frac{\partial u_1^{(x3)}}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial u_2^{(x3)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(x3)}}{\partial t}\right)^2\right]d\Omega; \tag{68}$$

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[\widetilde{\sigma}_{11}\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \widetilde{\sigma}_{22}\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}\gamma_{23}]d\Omega; \tag{69}$$

$$A = \iint_S (P_1u_1 + P_2u_2 + qu_3)dS. \tag{70}$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки $(\rho \approx const)$; P_1, P_2 и $q \equiv P_3$ – компоненты внешней механической нагрузки в направлениях x_1, x_2 и x_3 (в задачах динамики – функции не только координат x_1 и x_2, но и времени t); $\Omega = [-a/2, a/2]\times[-b/2, b/2]\times[z_B, z_H]$ – компакт в пространстве (x_1, x_2, x_3); $S = [-a/2, a/2]\times[-b/2, b/2]$ – компакт на плоскости (x_1, x_2); $d\Omega$ и dS – дифференциалы объёма и отсчётной поверхности данной оболочки $(d\Omega = H_1H_2dx_1dx_2dx_3; dS = H_1H_2dx_1dx_2)$. (Координаты x_1, x_2, x_3 считаются неподвижными).

С учётом соотношений (8), (19), (20), (27) выражение для потенциальной энергии (69) запишем в виде:

$$\begin{aligned}\widetilde{U} &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[(\widetilde{\sigma}_{11}^E - \widetilde{\sigma}_{11}^C)\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + (\widetilde{\sigma}_{22}^E - \widetilde{\sigma}_{22}^C)\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + (\widetilde{\tau}_{12}^E - \widetilde{\tau}_{12}^C)\gamma_{12}^{(x3)} + \\ &\quad + (\widetilde{\tau}_{13}^E - \widetilde{\tau}_{13}^C)\gamma_{13} + (\widetilde{\tau}_{23}^E - \widetilde{\tau}_{23}^C)\gamma_{23}]d\Omega = \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[(\sigma_{11}^M - \sigma^T)(\varepsilon_{11}^{(x3)} - \widetilde{\varepsilon}) + (\sigma_{22}^M - \sigma^T)(\varepsilon_{22}^{(x3)} - \widetilde{\varepsilon}) + \widetilde{\tau}_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}\gamma_{23}]d\Omega = \\ &\quad \widetilde{U}^E - \widetilde{U}^C = U^M - U^T.\end{aligned} \tag{71}$$

Здесь:

$$\widetilde{U}^E = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\widetilde{\sigma}_{11}^E\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \widetilde{\sigma}_{22}^E\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}^E\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}^E\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}^E\gamma_{23}\right)d\Omega; \tag{72}$$

$$\widetilde{U}^C = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\widetilde{\sigma}_{11}^C\widetilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \widetilde{\sigma}_{22}^C\widetilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}^C\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}^C\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}^C\gamma_{23}\right)d\Omega \tag{73}$$

суть термоупругая и термовязкоупругая составляющие потенциальной энергии (69) деформирования оболочки;

$$\begin{aligned}U^M &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\sigma_{11}^M\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^M\varepsilon_{22}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \widetilde{\tau}_{13}\gamma_{13} + \widetilde{\tau}_{23}\gamma_{23}\right)d\Omega = \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[\begin{array}{l}(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MC})\varepsilon_{11}^{(x3)} + (\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{11}^{MC})\varepsilon_{22}^{(x3)} + \\ + (\widetilde{\tau}_{12}^E - \widetilde{\tau}_{12}^C)\gamma_{12}^{(x3)} + (\widetilde{\tau}_{13}^E - \widetilde{\tau}_{13}^C)\gamma_{13} + (\widetilde{\tau}_{23}^E - \widetilde{\tau}_{23}^C)\gamma_{23}\end{array}\right]d\Omega = \\ &= U^{ME} - U^{MC}\end{aligned} \tag{74}$$

является составляющей потенциальной энергии (69), имеющей тот же вид, что и при чисто механической нагрузке, а

$$U^T = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\sigma^T\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \left(\sigma_{11}^M + \sigma_{22}^M\right)\tilde{\varepsilon} + 2\sigma^T\tilde{\varepsilon}\right] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left\langle \begin{matrix} (\sigma^{TE} - \sigma^{TC})\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \\ \left[(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MC}) + (\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{22}^{MC})\right]\tilde{\varepsilon} + 2(\sigma^{TE} - \sigma^{TC})\tilde{\varepsilon} \end{matrix} \right\rangle d\Omega = \quad (75)$$

$$= U^{TE} - U^{TC}$$

имеет смысл составляющей потенциальной энергии (69), обусловленной чисто температурными деформациями.

В функционалах (74), (75) величины

$$U^{ME} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(\sigma_{11}^{ME}\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^{ME}\varepsilon_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12}^E\gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13}^E\gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23}^E\gamma_{23}\right) d\Omega,$$

$$U^{MC} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(\sigma_{11}^{MC}\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^{MC}\varepsilon_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12}^C\gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13}^C\gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23}^C\gamma_{23}\right) d\Omega$$

можно трактовать как термоупругую и термовязкоупругую составляющие энергии U^M, а величины

$$U^{TE} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\sigma^{TE}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \left(\sigma_{11}^{ME} + \sigma_{22}^{ME}\right)\tilde{\varepsilon} + 2\sigma^{TE}\tilde{\varepsilon}\right] d\Omega$$

$$U^{TC} = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\sigma^{TC}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \varepsilon_{22}^{(x3)}\right) + \left(\sigma_{11}^{MC} + \sigma_{22}^{MC}\right)\tilde{\varepsilon} + 2\sigma^{TC}\tilde{\varepsilon}\right] d\Omega$$

– как термоупругую и термовязкоупругую составляющие энергии U^T.

Проинтегрируем по переменной x_3, $z_B \le x_3 \le z_H$ выражения (68) и (69) в функционалах (66) и (67). В результате получаем следующие выражения:

$$K = \frac{\rho}{2}\iint_S \left\{ A_0\left[\left(H_1\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2A_1\left[H_1^2\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + H_2^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right] + A_2\left[\left(H_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)^2\right]\right\} dS \quad (76)$$

и, в частности,

$$W = \left(U^M - A\right) - U^T, \quad (77)$$

где, с учетом формулы (70),

$$U^M - A =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_S \left[N_{11}^M\varepsilon_{11} + N_{22}^M\varepsilon_{22} + N_{12}^M\gamma_{12} + M_{11}^M \mathrm{X}_1 + M_{22}^M \mathrm{X}_2 + 2M_{12}^M \mathrm{X}_{12} - 2(P_1u_1 + P_2u_2 + qu_3)\right] dS; \quad (78)$$

$$U^T = \frac{1}{2}\iint_S \left[2N^T\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) + 2M^T\left(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2\right) - 2N_1^T\right] dS. \quad (79)$$

В формулах (78) и (79) $N_{11}^M = N_{11}^{ME} - N_{11}^{MC}$; $N_{22}^M = N_{22}^{ME} - N_{22}^{MC}$; $N_{12}^M = N_{12}^{ME} - N_{12}^{MP}$; $M_{11}^M = M_{11}^{ME} - M_{11}^{MC}$; $M_{22}^M = M_{22}^{ME} - M_{22}^{MC}$; $N^T = N^{TE} - N^{TC}$; $M^T = M^{TE} - M^{TC}$; $N_1^T = (1+\mu)\left[(N_1^E(P_0) + N_1^C(P_0)\right]$, где величина $N_1^E(P_0)$ вычисляется по формуле (63), а

$$N_1^C(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_B}^{z_H} \tilde{\pi}(P)R2(t,s,P)dx_3.$$

Уравнения движения или равновесия оболочки могут быть получены, исходя из фундаментальных принципов наименьшего действия (в форме Гамильтона-Остроградского) или минимума потенциальной энергии (в форме Лагранжа) [1, 5, 6 – 26], согласно которым

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \widetilde{U} + A\right) dt = 0 \tag{80}$$

или, соответственно,

$$\delta W = \delta(\widetilde{U} - A) = 0 ,$$

где δ – символ вариации.

Таким образом, математическая модель деформирования оболочек переменной толщины, находящихся под воздействием механической нагрузки и температурного поля, для задач статики и динамики построена. Начальные и граничные условия, соответствующие тому или иному способу закрепления контура оболочки, предполагаются заданными.

Предложенная математическая модель термоползучести (термовязкоупругости) может быть обобщена на иные случаи различных свойств материалов рассматриваемых оболочек (нелинейная упругость, ортотропия и др.).

В задачах статики для отыскания минимума функционала (67), записанного с учётом выражений (68) – (79), может быть эффективно применён метод Ритца при разложении искомых функций перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1 и Ψ_2 в ряды.

В задачах динамики для решения системы уравнений движения оболочки, эквивалентной вариационному уравнению (80), целесообразно последовательно применить методы Власова-Канторовича и Рунге-Кутта.

Как отмечалось в работах [14, 15], если априори считать функции перемещений u_1, u_2, u_3 компонентами потенциального вектора (что, очевидно, почти всегда выполняется, поскольку возможные локальные повороты, нарушающие симметрию деформаций сдвига, не искажают картину деформированного и напряжённого состояния оболочки), то в этом случае мы имеем:

$$\frac{Du_1}{\partial l_2} = \frac{Du_2}{\partial l_1}, \ \Psi_1 = \frac{Du_1}{\partial x_3} = \frac{Du_3}{\partial l_1}, \ \Psi_2 = \frac{Du_2}{\partial x_3} = \frac{Du_3}{\partial l_2},$$

а значит, полные углы сдвигов:

$$\Phi_1 = 2\frac{Du_3}{\partial l_1}, \ \Phi_2 = 2\frac{Du_3}{\partial l_2}$$

и, кроме того,

$$\mathrm{X}_{11} = 2\frac{Du_3}{\partial l_1}, \ \mathrm{X}_{22} = 2\frac{Du_3}{\partial l_2}, \ 2\mathrm{X}_{12} = 2\frac{D^2 u_3}{\partial l_1 \partial l_2}.$$

Таким образом, полученные математические модели существенно упрощаются.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 2007. 264 с.

2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.

3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.

4. Безухов Н. Н. [и др.] Расчёты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / под ред. И. И. Гольденблата. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.

5. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.

6. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.: АСВ. СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с.

7. Byskov E., Hansen J. C. Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of axially stiffened cylindrical shells with mode interaction // J. struct. mech. 1980. № 2. Pp. 205–224.
8. Chrobot B. Mathematical models of ribbed shells // Studia Geotechnica et Mechanica. 1982. Vol. IV. №3-4. Pp. 55–68.
9. Fisher C. A., Berit C. W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shells with discrete rings and stringers // Trans. ASME. Ser. E. 1973. Vol. 40. №3. Pp. 736–740.
10. Koiter W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells // Proc. Konikl. Ned. Acad. Wetenscap, 1966. Ser. B69. Pp. 1 – 54.
11. Wu Jiuncheng, Pan Lizhou. Nonlinear theory of multilayer sandwich shells and its application. 1. – General theory // Appl. Math, and Mech. / Engl. Ed.1997.18. № 1.Pp. 19 -27.
12. Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells // Arch. Mech. 1998. 50. № 3. Pp. 483-495.
13. Карпов В. В., Филатов В. Н. Математические модели термоупругости оболочек переменной толщины при учете различных свойств материала // Вестник гражданских инженеров. 2006. №3. С. 42–45.
14. Жгутов В. М. Геометрически нелинейные математические модели термоупругости оболочек переменной толщины // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2011. №4. С. 46–56.
15. Жгутов В. М. Математические модели деформирования оболочек переменной толщины с учётом различных свойств материалов // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1. С. 79–90.
16. Жгутов В. М. Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2009. №4. С. 24–30.
17. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2010. №2. С. 53–59.
18. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости упругих ребристых оболочек при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2011. №1. С. 122–129.
19. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6. С. 38–47.
20. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричный случай) // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8. С. 47–55.
21. Жгутов В. М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8. С. 40–46.
22. Жгутов В. М. Ответ профессору Карпову, Владимиру Васильевичу (о научном приоритете в методе конструктивной анизотропии для ребристых оболочек и на функционал, описывающий ползучесть их материала) // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3. С. 75–80.
23. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 428 с.
24. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. М.: Наука, Физматлит, 1969. 352 с.
25. Компанеец А. С. Теоретическая физика. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1957. 564 с.
26. Жилин П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 339 с.

** Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru

doi: 10.5862/MCE.31.6

Geometrically nonlinear creeping mathematic models of shells with variable thickness

V.M. Zhgoutov,
"Architectural and Engineering Company Kitezh" LTd.
+7(812)378-20-83; e-mail: abc_kitezh@mail.ru

Key words

smoothly variable shells; ribbed shells; thermoelasticity; geometrical nonlinearity; creeping; transverse shear

Abstract

Calculations of strength, stability and vibration of shell structures play an important role in the design of modern devices machines and structures. However, the behavior of thin-walled structures of variable thickness during which geometric nonlinearity, lateral shifts, viscoelasticity (creep) of the material, the variability of the profile take place and thermal deformation starts up is not studied enough.

In this paper the mathematical deformation models of variable thickness shells (smoothly variable and ribbed shells), experiencing either mechanical load or permanent temperature field and taking into account the geometrical nonlinearity, creeping and transverse shear, were developed. The refined geometrical proportions for geometrically nonlinear and steadiness problems are given.

References

1. Landau L. D., Lifshits Ye. M. *Teoreticheskaya fizika. T. VII. Teoriya uprugosti* [Theoretical physics. Vol. VII. Theory of elasticity]. Moscow: Fizmatlit, 2007. 264 p. (rus)
2. Bezukhov N. I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of theory of elasticity, plasticity and creeping]. Moscow: Vysshaya shkola, 1968. 512 p. (rus)
3. Malinin N. N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creeping]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. 399 p. (rus)
4. Bezukhov N. N. [and others] *Raschety na prochnost, ustoychivost i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur* [Strength, stability and oscillations analysis in high temperatures]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1965. 566 p. (rus)
5. Zhilin P. A. *Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek* [Applied mechanics. Fundamentals of theory of shells]. Saint-Petersburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2006. 167 p. (rus)
6. Karpov V. V., Ignatyev O. V., Salnikov A. Yu. *Nelineynyye matematicheskiye modeli deformirovaniya obolochek peremennoy tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniya* [Nonlinear mathematical models for variable thickness shells deformation and algorithms of their inestigation]. Moscow: ASV. Saint-Petersburg: SPbGASU, 2002. 420 p. (rus)
7. Byskov E., Hansen J. C. Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of axially stiffened cylindrical shells with mode interaction. *J. struct. mech*. 1980. No. 2. Pp. 205–224.
8. Chrobot B. Mathematical models of ribbed shells. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 1982. Vol. IV. No. 34. Pp. 55–68.
9. Fisher C. A., Berit C. W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shells with discrete rings and stringers. *Trans. ASME. Ser. E*. 1973. Vol. 40. No. 3. Pp. 736–740.
10. Koiter W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Konikl. Ned. Acad. Wetenscap*, 1966. Ser. B69. Pp. 1–54.
11. Wu Jiuncheng, Pan Lizhou. Nonlinear theory of multilayer sandwich shells and its application. 1. – General theory. *Appl. Math, and Mech*. 1997.18. No. 1. Pp. 19 -27.
12. Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells. *Arch. Mech*. 1998. No.50. No. 3. Pp. 483-495.
13. Karpov V. V., Filatov V. N. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2006. No. 3. Pp. 42–45. (rus)
14. Zhgutov V. M. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskiye nauki»*. 2011. No. 4. Pp. 46–56. (rus)
15. Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.1. Pp. 79–90. (rus)

16. Zhgutov V. M. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskiye nauki».* 2009. No. 4. Pp. 24–30. (rus)

17. Zhgutov V. M. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskiye nauki».* 2010. No. 2. Pp. 53–59. (rus)

18. Zhgutov V. M. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskiye nauki»*. 2011. No. 1. Pp. 122–129. (rus)

19. Abdikarimov R. A., Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 6. Pp. 38–47. (rus)

20. Abdikarimov R. A., Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 8. Pp. 47–55. (rus)

21. Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 8. Pp. 40–46. (rus)

22. Zhgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 3. Pp. 75–80. (rus)

23. Kochin N. Ye. *Vektornoye ischisleniye i nachala tenzornogo ischisleniya* [Vector calculuss and principles of tenzor calculus]. Moscow: Nauka, 1965. 428 p. (rus)

24. Akivis M. A., Goldberg V. V. *Tenzornoye ischisleniye* [Tenzor calculus]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1969. 352 p. (rus)

25. Kompaneyets A. S. *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. Moscow: Gos. izd-vo tekhn.-teor. lit-ry, 1957. 564 p. (rus)

26. Zhilin P. A. *Teoreticheskaya mekhanika. Fundamentalnyye zakony mekhaniki* [Theoretical mechanics. Fundamental laws of mechanics]. Saint-Petersburg: Izd-vo SPbGTU. 339 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 43-59