

## Оценка демпфирующего влияния основания на колебания сооружения (детерминированный, вероятностный и возможностный подходы)

*Научный сотрудник Е.А. Андрианова\*;  
к.т.н., ведущий научный сотрудник Б.Д. Кауфман;  
д.т.н., профессор С.Г. Шульман,  
ОАО «ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева»*

**Ключевые слова:** сооружение; основание; колебания; теория вероятностей; теория возможностей

Проблема взаимодействия сооружения с основанием является одной из центральных в теории сейсмостойкости, т.к. от ее решения в значительной мере зависят нагрузки на сооружение.

Известно, что в процессе динамического взаимодействия сооружение отдает часть энергии колебаний посредством распространяющихся в основании упругих волн. Это приводит к появлению некоторого «присоединенного затухания», величина которого зависит от соотношения жесткостей сооружения и основания [1-7]. Если жесткостные характеристики сооружения определяются однозначно, то свойства основания, как правило, отличаются значительным разбросом. Например, коэффициенты вариации скоростей распространения волн в основании часто достигают 30-40%. Динамический модуль, пропорциональный квадрату скорости поперечных волн, – величина еще более неопределенная.

Традиционным методом решения задач в таких условиях является вероятностный подход, однако далеко не всегда мы располагаем достаточным по количеству и качеству статистическим материалом, позволяющим обоснованно применять аппарат теории вероятностей. В последние десятилетия развиваются другие методы учета неопределенностей, основанные на теории нечетких множеств. Наибольшее распространение получила теория возможностей [8,9], применение которой приводит к интервальным оценкам. Однако для системы «сооружение-основание» эти методы пока не использовались.

Ниже рассматривается задача об оценке демпфирующего влияния основания, характеристики которого, в зависимости от полноты информационного обеспечения, считаются либо случайными (в терминах теории вероятностей), либо нечеткими (при использовании теории возможностей). В детерминистической постановке эта задача рассматривалась в работах [1,2,5,6,7].

Моделью сооружения служит линейный осциллятор, моделью основания – упругая однородная полуплоскость.

Уравнение колебаний осциллятора имеет вид:

$$\ddot{X} + 2\varepsilon\dot{X} + \omega_0^2 X = -\alpha. \quad (1)$$

Здесь  $X$  – вертикальное или горизонтальное перемещение сооружения относительно основания;  $\omega_0$  – соответствующая частота его собственных незатухающих колебаний;  $\varepsilon$  – коэффициент затухания. Смещение основания  $\alpha$  представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  – смещение поверхности основания в месте установки сооружения, но в его отсутствие;  $\alpha_1$  – смещение основания от нагрузки взаимодействия, которая определяется из условий сопряжения сооружения с основанием:

$$\left. \begin{array}{l} 2ap(t) \\ 2aq(t) \end{array} \right\} = -rX(t), \quad (3)$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  – соответственно вертикальная и горизонтальная нагрузки взаимодействия, которые будем считать равномерно распределенными на участке  $2a$  границы полуплоскости.

Необходимо определить перемещения  $\alpha_1$  точки  $(0,0)$  полуплоскости от нагрузок взаимодействия. Поставленная задача является одной из модификаций задачи Лэмба [10,11] – о динамических перемещениях упругой полуплоскости в условиях плоской деформации при заданных нагрузках, изменяющихся во времени.

Свойства материала основания характеризуются плотностью  $\rho_0$  и скоростями распространения продольных и поперечных волн:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}},$$

где  $\lambda_0$  и  $\mu_0$  – постоянные Ляме.

Дифференциальные уравнения движения полуплоскости имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \eta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \ddot{U} \\ \eta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \ddot{V} \end{cases}, \quad (4)$$

где  $U(x, z, t)$ ,  $V(x, z, t)$  – соответственно горизонтальные и вертикальные перемещения в полуплоскости;  $\eta = c_2/c_1$ .

Для решения применим интегральные преобразования Лапласа по времени (при нулевых начальных условиях) и Фурье – по координате  $x$ . Указанные преобразования функции  $U(x, z, t)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, z, \phi) &= \int_0^{\infty} U(x, z, t) e^{-\phi t} dt, \\ \tilde{U}(\xi, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, z, t) e^{-i\xi x} dx, \end{aligned}$$

где  $\theta$  и  $\xi$  – параметры в преобразованиях Лапласа и Фурье соответственно.

Введем следующие безразмерные соотношения:

$$t^* = \frac{c_2}{a} t; \quad s = \frac{a}{c_2} \phi; \quad \psi = a\xi; \quad x^* = \frac{x}{a}; \quad z^* = \frac{z}{a}.$$

В дальнейшем  $t$ ,  $x$ ,  $z$  будут употребляться только в безразмерном виде, и звездочки над ними опустим.

В результате (4) примет вид:

$$\begin{cases} \eta^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{U}}}{\partial z^2} + (1 - \eta^2) i\psi \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{V}}}{\partial z} = (s^2 \eta^2 + \psi^2) \tilde{\tilde{U}} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{V}}}{\partial z^2} + (1 - \eta^2) i\psi \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{U}}}{\partial z} = \eta^2 (s^2 + \psi^2) \tilde{\tilde{V}} \end{cases}. \quad (5)$$

Двойной надчерк над функциями в (5) и далее обозначает, что проделаны оба интегральных преобразования.

Андрианова Е.А., Кауфман Б.Д., Шульман С.Г. Оценка демпфирующего влияния основания на колебания сооружения (детерминированный, вероятностный и возможностный подходы)

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) будем искать по Эйлеру в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= A_1 e^{-k_1 z} + A_2 e^{-k_2 z} \\ \tilde{V} &= B_1 e^{-k_1 z} + AB_2 e^{-k_2 z},\end{aligned}\quad (6)$$

где  $k_1 = \sqrt{s^2 \eta^2 + \psi^2}$ ;  $k_2 = \sqrt{s^2 + \psi^2}$ .

Коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  находятся из граничных условий, поэтому задачи о действии на полуплоскость нагрузок  $p(t)$ ,  $q(t)$  рассмотрим отдельно.

Для определения вертикальных смещений границы полуплоскости от вертикальной нагрузки уравнения (4) решаются при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}z = 0: \quad \sigma_z &= \begin{cases} p(t), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty \end{cases} \\ z = 0: \quad \tau_{xy} &= 0, \quad -\infty < x < \infty \\ z \rightarrow \infty: \quad \sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda_0 \frac{\partial V}{\partial z} \\ \sigma_z &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda_0 \frac{\partial U}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \mu_0 \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)\end{aligned}\right\}.\quad (8)$$

Применяя к (7) и (8) преобразования Лапласа и Фурье [12,13], определим значения коэффициентов  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  и, подставив (6) в (5), получим выражение для перемещений  $\tilde{U}(\psi, z, s)$ ,  $\tilde{V}(\psi, z, s)$ . Интересующие нас в данном случае вертикальные перемещения границы полуплоскости после обратного преобразования Фурье будут иметь вид [1]:

$$\tilde{V}(x, 0, s)_\phi = -\frac{2a\bar{p}(s)}{\pi\mu_0} s^2 \int_0^\infty \frac{\sin \psi}{\psi} \frac{\sqrt{s^2 \eta^2 + \psi^2}}{F(\psi, s)} \cos \psi x \partial \psi, \quad (9)$$

где

$$F(\psi, s) = (2\psi^2 + s^2)^2 - 4\psi^2 \sqrt{s^2 \eta^2 + \psi^2} \sqrt{s^2 + \psi^2}. \quad (10)$$

При определении горизонтальных смещений границы полуплоскости от горизонтальной нагрузки граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}z = 0: \quad \tau_{xy} &= \begin{cases} q(t), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty \end{cases} \\ z = 0: \quad \sigma_z &= 0, \quad -\infty < x < \infty \\ z \rightarrow \infty: \quad \sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

Решая задачу аналогично, получим выражение для горизонтальных смещений границы полуплоскости в изображениях по Лапласу [1,2]:

$$\tilde{U}(x, 0, s)_\phi = -\frac{2a\bar{q}(s)}{\pi\mu_0} s^2 \int_0^\infty \frac{\sin \psi}{\psi} \frac{\sqrt{s^2 \eta^2 + \psi^2}}{F(\psi, s)} \cos \psi x \partial \psi. \quad (12)$$

Андрианова Е.А., Кауфман Б.Д., Шульман С.Г. Оценка демпфирующего влияния основания на колебания сооружения (детерминированный, вероятностный и возможностный подходы)

Считая начальные условия нулевыми, применим к (1) преобразование Лапласа и, переходя к безразмерным параметрам, получим:

$$(s^2 + 2\bar{\varepsilon}s + \bar{\omega}_0^2)\bar{X} = -s^2(\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1), \quad (13)$$

где  $\bar{\omega}_0 = \omega_0 \frac{a}{c_2}$ ,  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{a}{c_2}$  – безразмерные частота и коэффициент затухания осциллятора.

При вертикальных колебаниях  $\alpha_1(s) = \bar{V}(0,0,s)$ , при горизонтальных  $\alpha_1(s) = \bar{U}(0,0,s)$ . Подстановка выражений (9) или (12) в (13) приводит к уравнению колебаний осциллятора с учетом его взаимодействия с основанием:

$$[s^2 + 2\bar{\varepsilon}s + \bar{\omega}_0^2 + r_0s^3\bar{K}_0(s)]\bar{X} = -s^2\bar{\alpha}_0, \quad (14)$$

где  $r_0 = \frac{r}{\pi\mu_0}$  – относительная жесткость сооружения и основания.

Функция  $\bar{K}_0(s)$ , отражающая влияние основания, для различных видов колебаний имеет вид:

$$\bar{K}_0^{верт}(s) = s \int_0^\infty \frac{\sin \psi}{\psi} \frac{\sqrt{s^2\eta^2 + \psi^2}}{F(\psi, s)} \partial \psi, \quad (15)$$

$$\bar{K}_0^{гор}(s) = s \int_0^\infty \frac{\sin \psi}{\psi} \frac{\sqrt{s^2 + \psi^2}}{F(\psi, s)} \partial \psi. \quad (16)$$

Из (14) можно найти изображение  $\bar{X}(s)$ , однако непосредственный переход к оригиналам при помощи таблиц не представляется возможным ввиду сложности выражений (15) и (16). Поэтому воспользуемся приемом, предложенным в работах [14,15] для решения сходной задачи. Обе части уравнения поделим на  $s^3$ . Тогда получим:

$$\bar{X}[\bar{K}(s) + \bar{K}_0(s)] = -\frac{1}{s}\bar{\alpha}_0, \quad (17)$$

где

$$\bar{K}(s) = \frac{1}{s} + 2\bar{\varepsilon}\frac{1}{s^2} + \bar{\omega}_0^2\frac{1}{s^3}. \quad (18)$$

Применяя к (17) теорему о свертках, получим интегральное уравнение Вольтерра 1 рода относительно  $X(\tau)$  с ядром  $K_1(\tau)$ :

$$\int_0^t K_1(t-\tau)X(\tau)\partial\tau = \int_0^t \alpha_0(\tau), \quad (19)$$

где

$$K_1(\tau) = K(\tau) + r_0K_0(\tau). \quad (20)$$

Выражение для  $K(\tau)$  получим из таблиц [16]:

$$K(\tau) = 1 + 2\bar{\varepsilon}\tau + \bar{\omega}_0^2\frac{\tau^2}{2}. \quad (21)$$

Обращение функции  $\bar{K}_0(s)$  выполнено в работе [14]. В результате получены следующие выражения для функций  $K_0(\tau)$ :

а) при вертикальных колебаниях

$$\bar{K}_0^{верт}(\tau) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^1 \frac{(2-\delta^2)^2 \sqrt{1-\eta^2\delta^2} + 4(1-\eta^2\delta^2)\sqrt{1-\delta^2}}{\delta\Phi(\delta)} f(\tau\delta) \delta \delta + \right. \\ \left. + \int_1^{1/\eta} \frac{(2-\delta^2)^2 \sqrt{1-\eta^2\delta^2}}{\delta\Phi(\delta)} f(\tau\delta) \delta \delta \right] \quad (22)$$

где

$$f(\tau\delta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \tau\delta, & 0 \leq \tau\delta \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \tau\delta > 1 \end{cases}; \quad (23)$$

$$\Phi(\delta) = 16(1-\eta^2) - 8(3-2\eta^2)\delta^2 + 8\delta^4 - \delta^6; \quad (24)$$

б) при горизонтальных колебаниях

$$\bar{K}_0^{гор}(\tau) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^1 \frac{(2-\delta^2)^2 \sqrt{1-\delta^2} + 4(1-\delta^2)\sqrt{1-\eta^2\delta^2}}{\delta\Phi(\delta)} f(\tau\delta) \delta \delta + \right. \\ \left. + 4 \int_1^{1/\eta} \frac{(1-\delta^2)\sqrt{1-\eta^2\delta^2}}{\delta\Phi(\delta)} f(\tau\delta) \delta \delta \right] \quad (25)$$

Интегралы в пределах  $0 \leq \delta \leq 1$ , входящие в полученные выражения, существуют в смысле главного значения, так как  $\Phi(\delta) = 0$  в промежутке интегрирования.

В случае ненулевых начальных условий уравнение (19) будет иметь вид:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)X(\tau)\delta\tau = \int_0^t \alpha_0(\tau) + [\dot{X}(0) - \dot{\alpha}_0(0)]\frac{t^2}{2} + [X(0) - \alpha_0(0)]t. \quad (26)$$

Описанный алгоритм решения задачи реализован в виде вычислительной программы, которая позволяет исследовать влияние полуплоскости на колебания осциллятора при задании воздействия непосредственно на осциллятор (задача динамики сооружений), задании сейсмограммы (акселерограммы), зарегистрированной на свободной поверхности основания (задача сейсмостойкости сооружений), а также собственные колебания осциллятора. В этом случае задаются его начальные смещения  $X(0)$  и (или) скорость  $\dot{X}(0)$ . Решение задачи о собственных колебаниях осциллятора при  $\bar{\varepsilon} = 0$  дает возможность провести количественный анализ затухания, возникающего вследствие оттока энергии в основание.

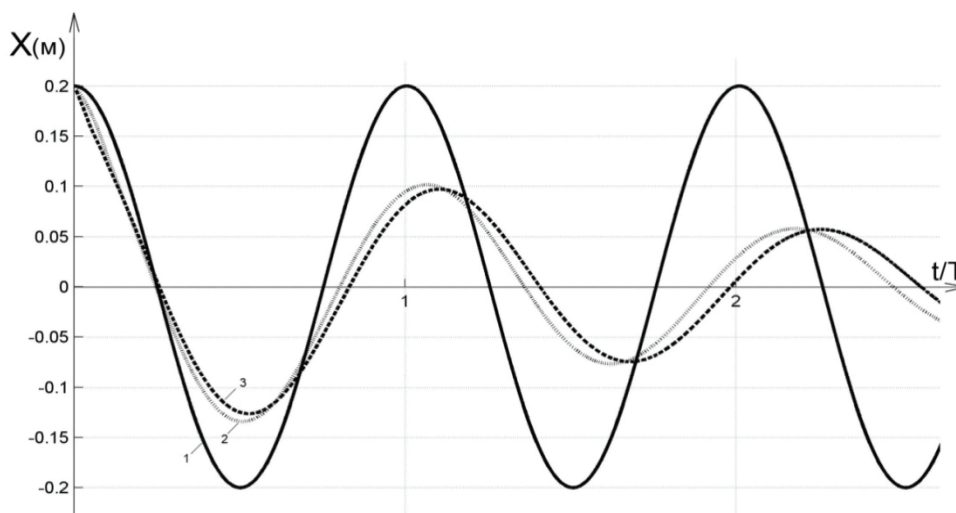
$K_0(\tau)$  для вертикальных и горизонтальных колебаний осциллятора определяется выражениями (22) и (25). При  $r_0 = 0$  (26) описывает колебания осциллятора на абсолютно жестком основании. Его смещения в этом случае представляют собой бесконечную незатухающую синусоиду с частотой  $\bar{\omega}_0$ . В качестве примера на рис. (1) приведены графики колебаний осциллятора с  $\bar{\omega}_0 = 1.0$ .

Из графиков следует, что эффект взаимодействия проявился, во-первых, в появлении значительного затухания, связанного с отдачей энергии в основание, во-вторых, в изменении периода колебаний [17]. Изменение периода является следствием двух причин: 1) влияние инерционных и жесткостных свойств основания; 2) влияние затухания, так как имеют место зависимости:

Андрианова Е.А., Кауфман Б.Д., Шульман С.Г. Оценка демпфирующего влияния основания на колебания сооружения (детерминированный, вероятностный и возможностный подходы)

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sqrt{1 + \frac{\delta_0^2}{4\pi^2}}, \quad \delta_0 = \ln \psi_1, \quad \psi_1 = \frac{X(t)}{X(T+t)},$$

где  $\delta_0$  – логарифмический декремент колебаний;  $\psi_1$  – коэффициент затухания (отношение двух последовательных отклонений системы от положения равновесия в одну сторону).



**Рисунок 1. Колебания осциллятора, взаимодействующего с полуплоскостью:**  
**1 – основание абсолютно жесткое ( $r_0 = 0$ ); 2 – вертикальные колебания ( $r_0 = 0.3$ );**  
**3 – горизонтальные колебания ( $r_0 = 0.3$ )**

Известно, однако, что даже при значительном затухании период колебаний изменяется несущественно (при двукратном уменьшении амплитуды в течение одного полного колебания изменение периода составляет всего 0.3% [18]). Поэтому обычно в теории колебаний влиянием затухания на период пренебрегают. Это допущение позволяет в рамках рассматриваемой задачи считать, что изменение периода определяется только влиянием инерционных и жесткостных свойств основания, а затухание – оттоком энергии.

Для количественной оценки демпфирующего влияния основания произведены расчеты двух видов колебаний осциллятора, по результатам которых определены логарифмические декременты  $\delta_0$ .

При принятом допущении об отсутствии затухания в материале сооружения поведение рассматриваемой системы «сооружение – основание» полностью определяется шестью параметрами, из которых три –  $\gamma$ ,  $m$ ,  $a$  – относятся к сооружению, остальные три –  $\rho_0$ ,  $c_2$ ,  $\eta$  – являются характеристиками основания. Разработанная программа позволяет исследовать влияние любого из параметров системы на величину  $\delta_0$ , но наибольший интерес представляет влияние скорости распространения поперечных волн  $c_2$  – вследствие ее неопределенности.

На рис.(2,3) приведены графики зависимости  $\delta_0(c_2)$  при вертикальных и горизонтальных колебаниях осциллятора для трех значений  $\eta$ . Графики построены для осциллятора с характеристиками:  $\omega_0 = 6.5$  Гц,  $2a = 23,5$  м.

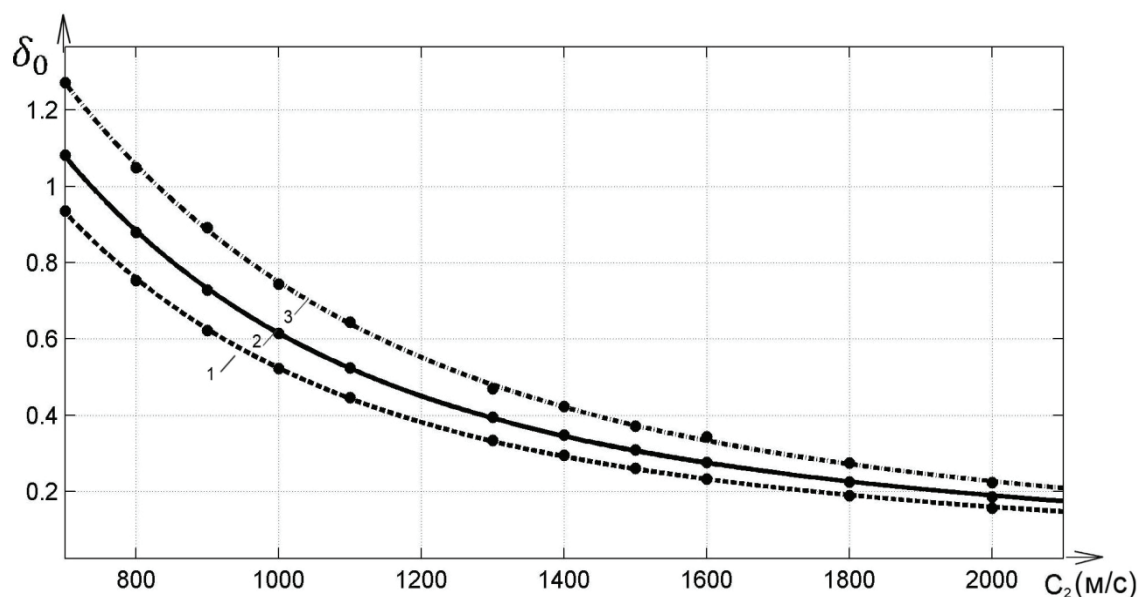


Рисунок 2. Зависимость  $\delta_0$  от  $c_2$  при вертикальных колебаниях осциллятора ( $\omega_0 = 6.5 \text{ Гц}$ ):  
1 –  $\eta = 0.3$ ; 2 –  $\eta = 0.5$ ; 3 –  $\eta = 0.63$

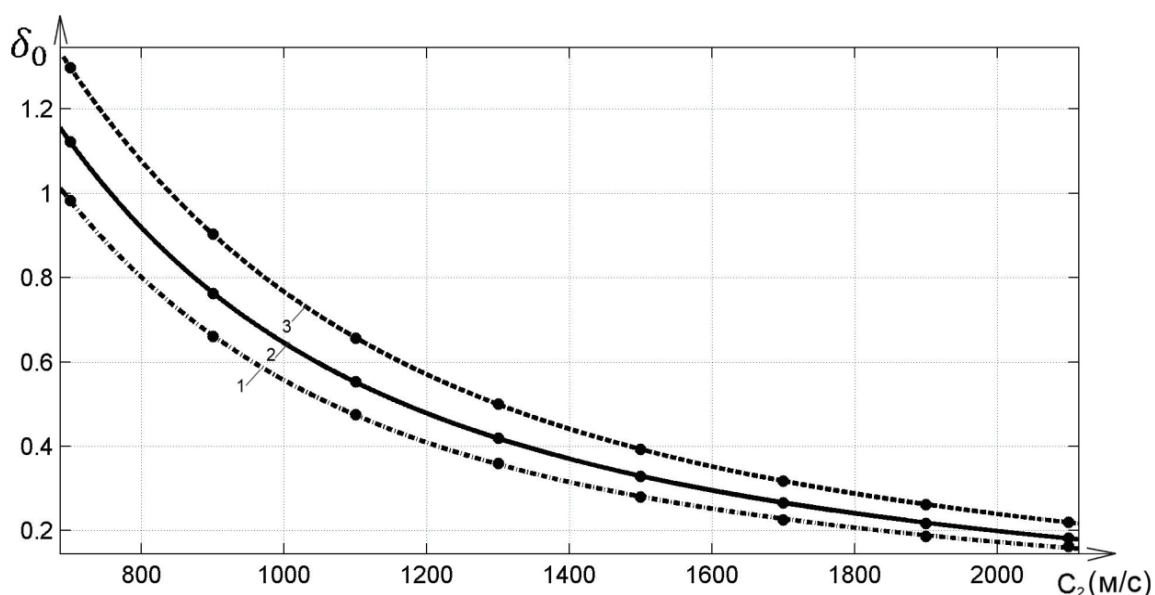


Рисунок 3. Зависимость  $\delta_0$  от  $c_2$  при горизонтальных колебаниях осциллятора  
( $\omega_0 = 6.5 \text{ Гц}$ ): 1 –  $\eta = 0.3$ ; 2 –  $\eta = 0.5$ ; 3 –  $\eta = 0.63$

Из графиков следует, что при увеличении  $c_2$  (ужесточении основания) отток энергии падает и при  $c_2 > 2000 \text{ м/с}$ , т.е. скоростях, соответствующих хорошему скальному основанию, асимптотически приближается к  $\delta_0 = 0.1 \div 0.15$ . Для грунтовых оснований с  $c_2 = 700 \div 1300 \text{ м/с}$  значения  $\delta_0$  лежат в пределах  $0.4 \div 1.2$ .

Зависимости, представленные на рис. 2,3, хорошо аппроксимируются следующей функцией:

$$\delta_0 = a \exp(bc_2) + c \exp(dc_2), \quad (27)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  подбираются с помощью метода наименьших квадратов (использовался пакет MATLAB).

Решая задачу о влиянии разброса значений  $c_2$  на  $\delta_0$  в вероятностной постановке, будем считать, что  $c_2$  – случайная величина с нормальным законом распределения. Поскольку установлена функция  $\delta_0(c_2)$  в виде (27), то можно привести формулу, связывающую плотности вероятностей  $c_2$  и  $\delta_0$ .

Введем следующие обозначения: пусть  $\psi(\delta_0)$  – функция, обратная к (27);  $f_\delta$  – плотность распределения  $\delta_0$ ;  $f_{c_2}$  – плотность распределения  $c_2$ . Тогда

$$f_\delta(\delta_0) = f_{c_2}(\psi(\delta_0)) \left| \frac{d\psi(\delta_0)}{d\delta_0} \right|. \quad (28)$$

Выражение для плотности  $f_\delta(\delta_0)$  при условии нормальной плотности  $f_{c_2}(\psi(\delta_0))$  получается достаточно громоздким, но в нашем случае функция  $\delta_0$  достаточно хорошо аппроксимируется не только суммой 2 экспонент, но и одной экспонентой, что дает нам право предполагать, что  $\delta_0$  имеет распределение, близкое к логнормальному (как величина, логарифм которой распределен по нормальному закону).

Плотность распределения логнормального закона:

$$f(\delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \delta_0} \cdot e^{-\frac{(\ln(\delta_0) - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (29)$$

Математическое ожидание  $m_\delta$  и дисперсия  $D_\delta$  связаны с параметрами этого распределения следующим образом:

$$m_\delta = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad D_\delta = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}. \quad (30)$$

Чтобы убедиться в близости закона распределения  $\delta_0$  к логнормальному, используем метод Монте-Карло. Итак,  $c_2$  считаем распределенным по нормальному закону с заданными  $m_c$  и  $\sigma_c$  – математическим ожиданием – и среднеквадратическим отклонением  $c_2$ , а остальные параметры примем детерминированными. Проводим 15000 испытаний, по результатам которых строим эмпирический закон распределения величины  $\delta_0$ , а также вычисляем ее эмпирические характеристики  $m_\delta$ ,  $\sigma_\delta$ . Это дает нам возможность вычислить параметры логнормального закона распределения  $\mu$  и  $\sigma$  по формулам, обратным к (30).

$$\mu = \ln\left(\frac{m_\delta^2}{\sqrt{m_\delta^2 + \sigma_\delta^2}}\right), \quad \sigma = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma_\delta^2}{\sqrt{m_\delta^2 + \sigma_\delta^2}} + 1\right)}. \quad (31)$$

Далее по критерию Колмогорова-Смирнова проверяем соответствие выборки логнормальному распределению. Для проверки используется тест «ktest» пакета MATLAB.

Ниже (рис. 4) приводятся графики эмпирических функций распределения затухания  $\delta_0$  ( $c_2 = 1500$  м/с, коэффициенты вариации  $c_2$  10%, 20% и 30%) и логнормальных распределений с параметрами, вычисленными по (31). Из графика видно, что эмпирические графики и графики логнормального распределения хорошо согласуются между собой, что также подтверждает принятую гипотезу.



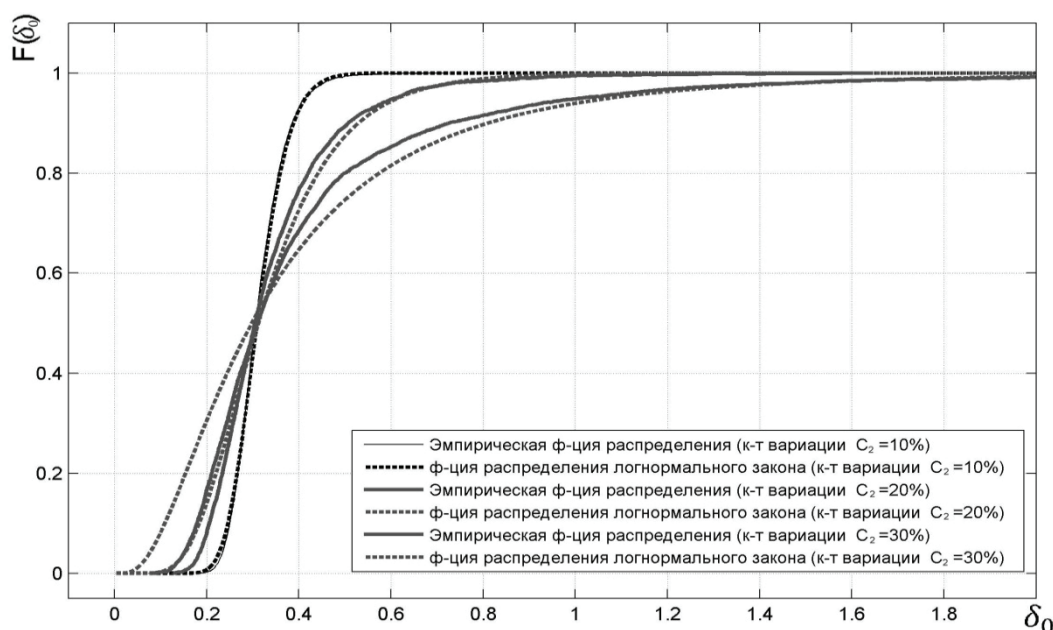


Рисунок 4. Эмпирические функции распределения логнормального закона с параметрами, вычисленными по результатам численного эксперимента

При числе испытаний  $n = 15000$  пройдем весь ряд значений  $c_2$  от 500 до 2100 м/с с шагом 200 м/с при  $\sigma_c = 0.2m_c$ . Исходные значения  $c_2$  и результаты расчета ( $m_\delta, \sigma_\delta, V_\delta = \sigma_\delta/m_\delta$ ) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные значения  $c_2$  и результаты расчета

$c_2, \text{м/с}$	500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100
$\delta_0$	1.771	1.075	0.721	0.523	0.394	0.308	0.251	0.211	0.172
$m_\delta$	1.797	1.163	0.781	0.572	0.433	0.342	0.272	0.220	0.183
$\sigma_\delta$	0.381	0.278	0.203	0.154	0.115	0.096	0.077	0.068	0.059
$V_\delta$	20.96	24.68	27.06	28.28	27.82	29.56	29.87	31.97	34.08

Полученные результаты свидетельствуют о том, что во всем рассмотренном диапазоне скоростей  $c_2$  коэффициенты вариации  $V_\delta$  превышают 0.2 на 50-60%. Таким образом, заложенная в исходные данные неопределенность имеет тенденцию к увеличению в результатах расчета. Это в значительной степени объясняется тем, что в соответствии с уравнением (20) влияние основания пропорционально квадрату  $c_2$ , входящему в коэффициент  $r_0$ .

Если информация о  $c_2$  недостаточна для обоснованного использования теории вероятностей, то оценку величины затухания можно осуществлять на основе теории возможностей. Будем считать  $c_2$  нечеткой величиной. В качестве характеристики  $c_2$  будем рассматривать функцию распределения возможностей (ФРВоз) в форме Гаусса [19]:

$$\pi_c(c_2) = e^{-(c_2 - a_c)^2 / 2b_c^2} \quad (32)$$

Примем, что  $a_c = m_c$ , а для определения  $b_c$  сгенерируем множество значений  $\{c_2\}$  с заданными  $m_c$  и  $\sigma_c$  определим  $c_{2\min}$  и  $c_{2\max}$ , а по ним – параметр  $b_c$ .

Поскольку затухание  $\delta_0$  является функцией от  $c_2$ :

$$\delta_0 = f(c_2), \quad (33)$$

то ФРВоз для  $\delta_0$  вычисляется по формуле [9]:

$$\pi_{f(c_2)}(\delta_0) = \pi_c(f^{-1}(\delta_0)). \quad (34)$$

В нашем случае затухание  $\delta_0$  наиболее точно аппроксимируется суммой 2 экспонент, но для упрощения выражений можно с хорошей точностью аппроксимировать  $\delta_0$  и одной экспонентой:

$$\delta_0 = ae^{bc_2}. \quad (35)$$

Тогда

$$\pi_\delta(\delta_0) = \pi_{f(c_2)}(\delta_0) = e^{-(1/b \ln(\delta_0/a) - a_c)^2 / 2b_c^2}. \quad (36)$$

Рассмотрим следующий пример:  $a_c = 1500$ ,  $\eta = 0.5$ .

Для этих значений получаем следующие коэффициенты в (35):  $a = 3.95$ ,  $b = -0.0016$ . Для наглядности (по аналогии с коэффициентом вариации) рассмотрим величину  $V_c$  – коэффициент нечеткости:

$$V_c = b_c / a_c 100\%.$$

На рис. 5 показаны графики ФРВоз для разных коэффициентов нечеткости величины  $c_2$ .

Из графиков видно, как изменение коэффициента нечеткости для величины  $c_2$  влияет на вид функции распределения возможностей.

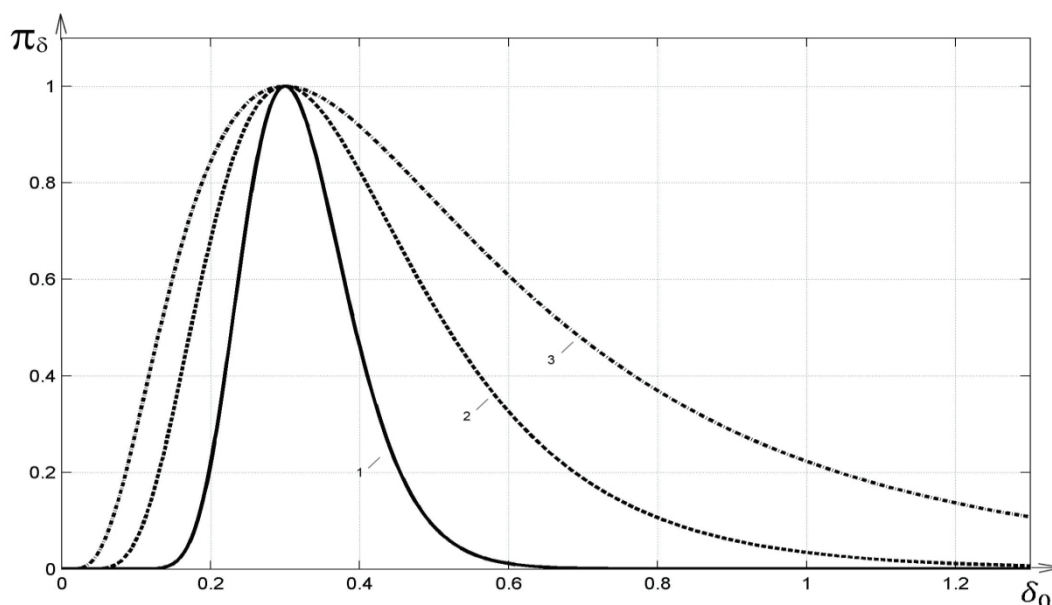


Рисунок 5. Графики ФРВоз для разных значений коэффициента нечеткости:

1 –  $V_c = 10\%$ ; 2 –  $V_c = 20\%$ ; 3 –  $V_c = 30\%$

Знание ФРВоз позволяет получить интервальные оценки для затухания  $\delta_0$ . Вероятность того, что  $\delta_0$  больше некоторой величины  $D$ , обозначим  $P(\delta_0 > D)$ . Тогда имеет место следующая интервальная оценка [9]:

$$P(\delta_0 > D) \in [P\bar{P}]$$

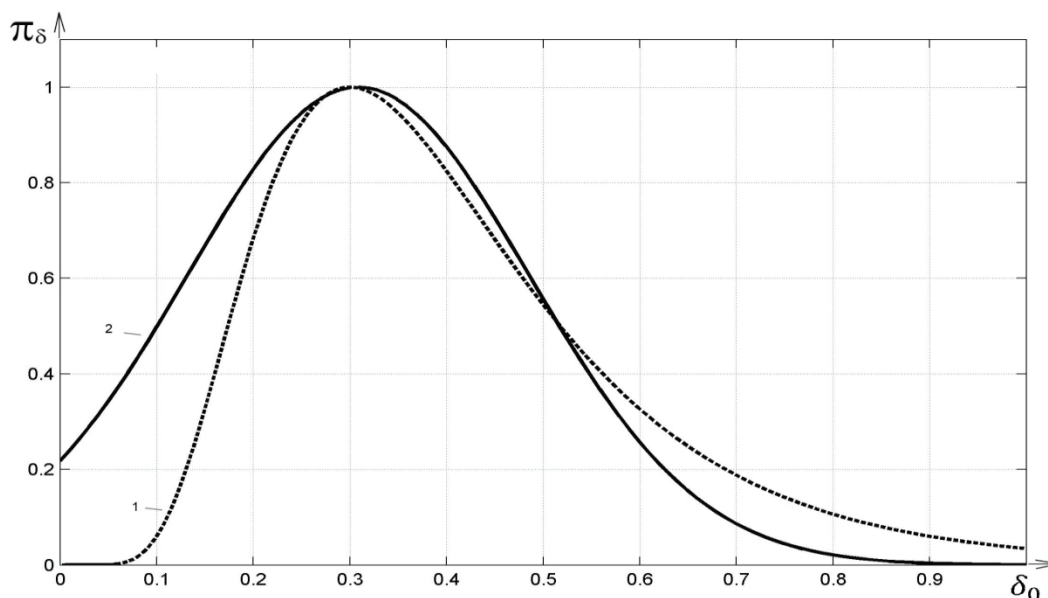
$$\underline{P} = 1 - \pi_{f(c_2)}, \quad \bar{P} = 1 \quad (37)$$

Нижняя граница интервала равна разности между единицей и значением ФРВоз при затухании, равном  $D$ , верхняя граница всегда равна единице.

Отметим, что если упростить модель и считать, что затухание  $\delta_0$  имеет Гауссовскую ФРВоз, то параметр  $b_\delta$  определяется по формуле [9]:

$$b_\delta = |\delta_0(a_c) - \delta_0(a_c - b_c)|.$$

Сравним ФРВоз, вычисленную точно, и линейризованную в форме Гаусса. Для наглядности они показаны на графике (рис.6):



**Рисунок 6. Графики ФРВоз (1 – точная; 2 – в форме Гаусса)**

Пунктирная линия (1) – ФРВоз, полученная точно по формуле (36), сплошная линия (2) – приближение ФРВоз к Гауссовскому виду. Из графиков видно, что приближение ФРВоз к Гауссовскому виду дает очень большую ошибку. Затухание является заведомо неотрицательной величиной, однако согласно этой ФРВоз имеется большая возможность не только нулевого (значение функции распределения возможностей в нуле равно 0.2), но и отрицательных значений затухания. Малые затухания (до 0.5), как мы видели из предыдущих примеров, имеют очень низкие возможности, однако согласно гауссовскому приближению они превышают 0.25.

В качестве примера найдем интервальную оценку вероятности того, что затухание будет больше 0.05, (т.е.  $D=0.05$ ),  $a_c = 1500$ , а параметр  $b_c$  принимает значения 150, 300, 450, 600 (им соответствуют коэффициенты нечеткости 10%, 20%, 30%, 40%), и сравним с вероятностной (точной) оценкой. Результаты приведены в таблице 2.

**Таблица 2. Интервальная и вероятностная оценка. Пример расчета**

$b_c (V_c)$	300 (20%)	450 (30%)	600 (40%)
$[P \div \bar{P}]$	$[0.99942789 \div 1]$	$[0.96378578 \div 1]$	$[0.84534303 \div 1]$
$P$	0.99999972	0.99958109	0.99387730

Изложенная методика позволяет проводить оценку влияния различных факторов на надежность сооружения или его элементов в условиях неполной или неточной информации об исходных параметрах.

## Литература

1. Кауфман Б.Д., Шульман С.Г. Собственные колебания осциллятора, взаимодействующего с упругой полуплоскостью // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1978. Т. 122. С. 105-108.
2. Кауфман Б.Д., Шульман С.Г. Совершенствование методов расчета и проектирования гидротехнических сооружений, возводимых в сейсмических районах. Л.: Энергия, 1976. С. 41-44.
3. Wolf J.P. Dynamic soil-structure interaction. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985. 466 p.
4. Wolf J.P. Soil – structure – interaction analysis in time domain. New Jersey: Prentice-Hall. 1988. 446 p.
5. Chi-Wen Lin. Damping effect on the structure – foundation interaction // Nuclear Engineering and Design. 1970. Vol. 12. No. 1. Pp. 48-54.
6. Савинов О.А., Уздин А.М. О некоторых особенностях механического взаимодействия сооружения и его основания при землетрясении // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1974. Т. 106. С. 119-126.
7. Proulx J., Darbre G., Kamileris N. Analytical and experimental investigation of damping in arch dams based on recorded earthquake // Proceedings 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Paper №68. Vancouver, Canada, 2004. Pp. 1-13.
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. Pp. 3-28.
9. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь. 1990. 228 с.
10. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. 1904. Vol. 203. Pp. 128-130.
11. Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И. О задаче Лэмба в случае полупространства // Ученые записки ЛГУ. 1950. Вып. 21. №135. С. 71-118.
12. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Иностранная литература, 1955. 668 с.
13. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.
14. Сеймов В.М., Островерх Б.Н. О колебаниях пластины, защемленной в упругое полупространство под действием нагрузки внезапно приложенной к пластине и полупространству // Труды Гидропроекта. 1971. Т. 20. С. 113–121.
15. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976. 268 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
17. Савинов О.А. Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Л.: Стройиздат, 1979. 200 с.
18. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1971. 239 с.
19. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 490 с.

*\*Елена Александровна Андрианова, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)535-55-80; эл. почта: elena-andrianova@bk.ru*

© Андрианова Е.А., Кауфман Б.Д., Шульман С.Г., 2012

doi: 10.5862/MCE.35.11

## Evaluation of the damping effect of the base on the vibrations of the structure (deterministic, probabilistic and possibilistic approach)

**E.A. Andrianova, B.D. Kaufman, S.G. Shulman,**  
JSC Vedeneyev VNIIG, Saint-Petersburg, Russia  
+7(812)535-55-80; e-mail: elena-andrianova@bk.ru

### Key words

construction; building base; vibrations; probability theory; theory of possibilities

### Abstract

The solution of problems of dynamic structure interaction with its base is always connected with a problem of uncertainty of initial information. Most of it concerns the properties of the base. A traditional approach to the solution of problem in such conditions is the probabilistic approach.

However, in recent decades other methods are being developed, for example, the theory of possibilities, which allows estimating with incomplete statistics, when the use of probabilistic methods is incorrect. In this paper these methods are used to estimate the outflow of energy from the vibrating structure.

The procedure for estimating the impact of different factors on the structure reliability with incomplete or inaccurate initial information is given.

### References

1. Kaufman B.D., Shulman S.G. *Izvestia VNIIG im. B.E. Vedeneeva*. 1978. Vol.122. Pp.105-108.(rus)
2. Kaufman B.D., Shulman S.G. *Sovershenstvovanie metodov rascheta i proektirovaniya gidrotekhnicheskikh sooruzheniy, vozvodimykh v seismicheskikh rayonakh* [Perfection of methods of calculation and design hydraulic facilities in seismic areas]. Leningrad: Energiya, 1976. Pp. 41-44.(rus)
3. Wolf J.P. *Dynamic soil–structure interaction*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985. 466 p.
4. Wolf J.P. *Soil–structure interaction analysis in time domain*. New Jersey: Prentice-Hall, 1988. 446 p.
5. Chi-Wen Lin. Damping effect on the structure – foundation interaction. *Nuclear Engineering and Design*. 1970. Vol. 12. No. 1. Pp. 48-54.
6. Savinov O.A., Uzdin A.M. *Izvestia VNIIG im. B.E. Vedeneeva*. 1974. Vol. 106. Pp. 119-126. (rus)
7. Proulx J., Darbre G., Kamileris N. Analytical and experimental investigation of damping in arch dams based on recorded earthquake. *Proceedings 13<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, Paper № 68, Vancouver, Canada, 2004. Pp. 1-13.
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol. 1. Pp. 3-28.
9. Dyubua D., Prad A. *Teoriya vozmozhnostey. Prilozhenie k predstavleniyu znaniy v informatike* [Possibility Theory. An Approach to Computerized Processing of Uncertainty]. Moscow: Radio i sviaz, 1990. 228 p.(rus)
10. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London. A*. 1904. Vol. 203. Pp. 128-130.
11. Petrashen G.I., Marchuk G.I., Ogurtsov K.I. *Uchenye zapisi LGU*. 1950. Vol. 21. No. 135. Pp. 71-118. (rus)
12. Sneddon I. *Preobrasovaniya Furye* [Fourier transform]. Moscow: Inostrannaya literatura. 1955. 668 p. (rus)
13. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Handbook of operational calculus]. Moscow: Vysshaya shkola, 1965. 466 p. (rus)
14. Seimov V.M., Ostroverkh B.N. *Trudy Gidroproekta*. 1971. Vol. 20. Pp. 113–121. (rus)
15. Seimov V.M. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi* [Dynamic contact problems]. Kiev: Naukova dumka, 1976. 268 p. (rus)

Barabanshchikov Yu.G., Vasilyev A.S. The effectiveness of setting and hardening accelerators for sprayed concrete

16. Bateman H., Erdelyi A. *Tablitsy integralnykh preobrazovaniy* [Tables of integral transforms]. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1969. 343 p. (rus).
17. Savinov O.A. *Sovremennye konstruksii fundamentov pod mashiny i ikh raschet* [Modern design of foundations for machines and their calculation]. Leningrad: Stroyizdat, 1979. 200 p. (rus)
18. Panovko Y.G. *Vvedenie v teoriyu mechanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow: Nauka, 1971. 239 p. (rus)
19. Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow: Nauka, 1969. 490 p.(rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 85-96**