

Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

*К.т.н., доцент И.И. Овчинников**

ФГБОУ ВПО Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.;

Д.т.н., профессор И.Г. Овчинников,

ФГБОУ ВПО Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Ключевые слова: деформационная модель; коррозия железобетона; пластинка на упругом основании; хлоридная коррозия; жесткая дорожная одежда

В транспортном строительстве широкое применение находят армированные конструкции в виде толстенных и тонкостенных плит и пластинок на упругом основании. Расчетная схема в виде плиты (пластинки) на упругом основании используется для расчета дорожных одежд, плит, применяемых для укрепления откосов насыпей, конусов мостов, при расчете мостового полотна и ряда других конструкций.

В связи с ростом количества автомобилей и увеличением их веса требования к уровню прочности дорожных одежд существенно возросли. С учетом тяжелых климатических условий в большинстве регионов нашей страны более долговечными окажутся жесткие дорожные одежды, выполняемые из железобетонных плит на упругом основании.

Преимущества жестких дорожных одежд:

- значительно большая прочность и жесткость цементобетона в сравнении с асфальтобетоном (относительная стабильность деформативных свойств цементобетона при изменении внешних температурных воздействий) [1]; увеличение прочности цементобетона с возрастом;
- стабильность коэффициента сцепления бетонных покрытий с колесом автомобиля, слабая его зависимость от влажности;
- существенно больший срок службы жестких покрытий до капитального ремонта.

Несмотря на то, что в данный момент стоимость строительства жестких дорожных одежд на 10-20% больше по сравнению с асфальтобетонными покрытиями, это соотношение не является стабильным и будет изменяться в связи с ростом цен на нефтепродукты и транспортные услуги.

В статье рассматривается моделирование поведения жестких дорожных одежд с учетом реальных условий эксплуатации, и в частности, основное внимание уделяется учету воздействия агрессивных эксплуатационных сред. Эти среды проникают в объем дорожной одежды, взаимодействуют с ее компонентами и в результате приводят к деградации их механических свойств. Одной из распространенных эксплуатационных агрессивных сред для дорожных железобетонных покрытий является хлоридсодержащая среда, причиной появления которой являются либо хлоридсодержащие средства-антиобледенители, применяемые с целью обеспечения безопасности проезда автотранспорта при гололеде на проезжей части дорог, либо солевой туман (характерный для приморской атмосферы), имеющий контакт с конструкцией.

Многочисленные результаты экспериментальных исследований и натурных наблюдений, выполненных многими учеными [2,3,4,5], свидетельствуют о том, что воздействие хлоридсодержащей среды приводит к существенным изменениям механических свойств железобетона, а в ряде случаев – к изменению характера работы конструкции. Изменение свойств со временем носит, как правило, необратимый характер и зависит от условий нагружения, концентрации агрессивной среды и других факторов. По мере проникания агрессивной среды в тело конструкции происходит деградация защитного слоя бетона, после чего возможна коррозия арматуры. В результате коррозии уменьшается площадь поперечного сечения арматуры, а образующиеся при этом продукты коррозии приводят к появлению трещин, ориентированных вдоль арматуры, и последующему отслаиванию защитного слоя бетона. При этом изменяется характер сцепления арматуры с бетоном. Все эти факторы снижают несущую способность и повышают деформативность дорожных железобетонных покрытий.

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

Обычно при расчете железобетонных конструкций применяется методология, основанная на применении теории предельных состояний. Согласно этой теории железобетонная конструкция считается разрушенной, если усилия от внешней нагрузки превышают несущую способность железобетона, определяемую с учетом предельных характеристик бетона и арматуры. Однако в реальных условиях эксплуатации в подавляющем большинстве случаев железобетон разрушается не от того, что нагрузка увеличивается до опасного уровня, а от того, что характеристики составляющих компонентов железобетона ухудшаются настолько, что конструкция разрушается от рабочей нагрузки.

Поэтому при расчете железобетонных конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных сред, более правильным является использование нелинейных деформационных моделей [6], являющихся более корректными с точки зрения моделирования процесса деформирования конструкции.

Бетон – основной материал жестких дорожных одежд – является разномодульным и нелинейно деформируемым материалом.

Как видно, моделирование поведения жестких дорожных покрытий из разномодульного нелинейно деформируемого армированного материала с учетом воздействия агрессивных хлоридсодержащих сред является актуальной проблемой, которая имеет практический интерес и представляет собой весьма сложную и трудоемкую задачу.

Состояние проблемы

Исследованиям процессов коррозии бетона, стали и железобетона в агрессивных средах с химической точки зрения посвящено достаточно много работ. На данный момент существуют несколько фундаментальных теорий, описывающих процессы коррозии бетона и стали. Имеются экспериментальные данные, характеризующие общие условия разрушения бетона, стали и железобетона в различных агрессивных средах.

Теория расчета жестких железобетонных дорожных покрытий на упругом основании, работающих в обычных условиях, в определенной мере развита и обоснована, но не получила развития в направлении расчетов с учетом эффектов коррозии. Методики расчета конструкций, работающих в агрессивных средах, имеют частный характер, так как основываются на выведенных авторами формулах с эмпирическими коэффициентами, вычисленными на основании опытных данных для конкретных случаев нагружения и действия среды. Такие методики расчета немногочисленны и не доведены до практического применения.

Согласно [4] главная задача расчета железобетонной конструкции – определить возможность эксплуатации конструкции без специальной защиты, изолирующей конструкцию от окружающей среды. Эта защита приводит к весьма существенному удорожанию конструкции и обычно не обладает стойкостью на весь период эксплуатации, а ремонт поврежденных конструкций и нарушенной защиты обычно сложен и не экономичен.

В методах расчета, разрабатываемых А.Ф. Полаком [7], предполагается, что долговечность железобетонных конструкций в коррозионной среде может быть определена с помощью математического моделирования.

Различные подходы к оценке срока службы бетонных конструкций в условиях эксплуатации рассматриваются в работах [8, 9]. В [9] предлагается следующая процедура прогноза долговечности бетона:

- устанавливаются эксплуатационные требования и критерии повреждений;
- устанавливаются критические характеристики эксплуатационной пригодности материала;
- устанавливаются ожидаемый вид и размеры фактора повреждений;
- задаются характеристики материала, для которого делается прогноз долговечности;
- определяется возможный механизм повреждения;
- выполняется проектирование и проводятся быстрые испытания с целью вызвать быстрое повреждение и определить его механизм;
- организуются длительные испытания в эксплуатационных условиях;
- разрабатывается математическая модель повреждения, и сравниваются скорости изменений в натуральных и лабораторных условиях;
- осуществляется прогноз долговечности конструкции.

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

За рубежом активные исследования поведения железобетонных конструкций в условиях хлоридной коррозии проводятся под руководством Д.Н. Франгопола [10,11,12]. Причем в этих исследованиях большое внимание уделяется учету вероятностного характера коррозионных и деформационных процессов [13,14], а также учету геометрической нелинейности при расчете железобетонных конструкций [15].

Большой вклад в развитие методики проектирования железобетонных конструкций в агрессивных средах внесли В.М. Бондаренко, Е.А. Гузеев, Н.В. Савицким с сотрудниками [16]. Ими развиты и экспериментально обоснованы представления об определяющем влиянии внешних воздействий, коррозионных сред и силовых факторов на напряженно-деформированное состояние и перераспределение усилий в железобетонных конструкциях.

А.И. Попеско [17] предложил методику расчета подверженных коррозии железобетонных конструкций, основанную на использовании эквивалентных модулей деформаций. Эти модули являются интегральными характеристиками деформативных свойств конструкции и учитывают деформированную схему конструкции, геометрические и физико-механические характеристики ее элементов. В.М. Бондаренко [18] предложил методику оценки силового сопротивления железобетонных конструкций, подверженных коррозионным воздействиям. В соответствии с этой методикой силовое сопротивление (деформирование) бетона определяют следующие факторы:

- анизотропия механических свойств в зависимости от уровня и знака напряжений;
- нелинейность связи между напряжениями и деформациями, разномодульность (разноспротивляемость сжатию и растяжению);
- неравновесность и наследственность деформирования во времени;
- значительная необратимость деформаций.

В работе [19] приводится метод расчета-прогноза долговечности бетона с использованием подходов механики разрушения.

Достаточно корректным на современном этапе является метод расчета композитных строительных конструкций с учетом действия агрессивных сред, предложенный В.И. Соломатовым и В.П. Селяевым [20]. В этом методе модули упругости бетона при сжатии и растяжении имеют различные значения; зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии описывается нелинейной функцией; при определении напряжений от действия нагрузок и объемных изменений, происходящих вследствие переноса агрессивных сред в бетонном элементе, применяется принцип суперпозиции; действие агрессивной среды на механические и геометрические характеристики бетонного элемента учитывается с помощью деградационных функций жесткости и несущей способности.

В работе [21] представлена модель деформирования железобетонного элемента с агрессивной средой в рамках механики сплошной среды. Физико-химическое разрушение и механическое поведение бетона рассматриваются совместно с использованием объединенной механохимической модели повреждения, согласно которой вводится дополнительная внутренняя переменная, названная «повреждением от воздействия окружающей среды».

Весьма перспективным является также подход И.Г. Овчинникова и В.В. Петрова, основанный на теории структурных параметров [22, 23]. Согласно этому подходу модель конструкции, взаимодействующей с агрессивной средой, представляется в виде совокупности моделей: модели конструктивного элемента, модели грунтового основания, модели материала, модели воздействия среды и модели наступления предельного состояния.

В данной статье методология работ [22, 23] применяется к моделированию поведения железобетонной пластины на упругом основании

1. Построение основных соотношений

1.1. Модель конструктивного элемента

В качестве модели конструктивного элемента, учитывая соотношения размеров плоских армированных элементов, а также характер их деформирования под действием нагрузки, будем рассматривать модель пластины по технической теории изгиба с учетом соответствующих гипотез.

Отнесем эту пластину к прямоугольной системе координат x, y, z ; где z – координата, нормальная к срединной поверхности пластины (рис. 1).

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки на упругом основании при пренебрежении трением, возникающим между пластинкой и упругим основанием, может быть представлено в виде:

$$-\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) = p(x, y) - q(x, y), \quad (1)$$

где $q(x, y)$ – реактивные давления упругого основания (нагрузка на основание); $p(x, y)$ – заданные поверхностные силы, действующие на пластинку; M_x, M_y – изгибающие моменты; H – крутящий момент.

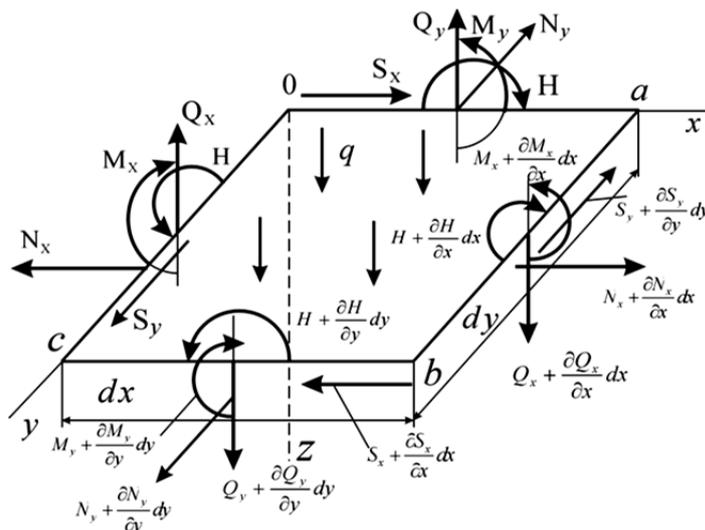


Рисунок 1. Элемент пластинки с приложенными усилиями

1.2. Модель грунтового основания

В качестве модели грунтового основания принимается двухпараметрическая модель типа Власова-Леонтьева [24]:

$$2m\nabla^2 W(x, y) - nW(x, y) + q_1 = 0. \quad (2)$$

Коэффициент n определяет работу упругого основания на сжатие и в этом смысле аналогичен коэффициенту постели, а коэффициент m характеризует работу упругого основания на сдвиг.

1.3. Модель нагружения

Схема и программа нагружения пластинки будут зависеть от того, моделью какого конструктивного элемента является рассматриваемая пластина. Далее полагаем, что пластина либо равномерно, либо локально нагружена статической нагрузкой по поверхности, причем нагрузка условно приложена к срединной плоскости.

1.4. Модель деформирования материала пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии и подвергающейся воздействию хлоридсодержащей среды

При выводе физических соотношений для определенности в качестве армированного материала будем рассматривать железобетон. Железобетон в общем случае является ортотропным материалом, по-разному сопротивляющимся растяжению и сжатию. Несмотря на то, что бетон и арматура имеют близкие коэффициенты расширения, бетон имеет отличающиеся диаграммы деформирования при растяжении и сжатии. Это позволяет использовать для описания поведения армированного бетона нелинейную деформационную модель в виде составной модели ортотропного нелинейного разномодульного материала. Основные соотношения, описывающие поведение элемента пластины в условиях плоского напряженного состояния, будут складываться из физических соотношений для бетона, работающего в условиях плоского напряженного состояния, и физических соотношений для арматуры, которая работает в условиях одноосного напряженного состояния для каждого направления армирования. Влияние времени на процесс

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

деформирования учитывается путем введения параметра поврежденности в физические соотношения и конструированием специальных уравнений накопления повреждения для этого параметра.

Физические соотношения для бетона принимаем в виде [25]:

$$\sigma_x^b = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2} (e_x + \nu_j e_y); \quad \sigma_y^b = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2} (e_y + \nu_j e_x); \quad \tau_{xy}^b = \frac{\Psi_j}{2(1+\nu_j)} e_{xy}. \quad (3)$$

Здесь ν_j – коэффициент поперечной деформации; $j = 1, 2$; $\sigma_x^b, \sigma_y^b, \tau_{xy}^b$ – компоненты тензора напряжений; e_x, e_y, e_{xy} – то же, деформаций, причем:

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x + \chi_x z; & e_y &= \varepsilon_y + \chi_y z; & e_{xy} &= \varepsilon_{xy} + 2\chi_{xy} z; \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; & \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

В этих формулах $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – деформации точек срединной поверхности; $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ – кривизны в этих точках; z – координаты рассматриваемых точек, отсчитываемые от срединной плоскости; u, v, w – перемещения в направлении осей x, y, z . Принимается, что любая точка пластины находится в растянутом состоянии ($j=1$), если $\sigma_0 \geq 0$, и в сжатом состоянии ($j=2$), если $\sigma_0 < 0$. Здесь σ_0 – среднее напряжение, определяемое выражением:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \quad (5)$$

Функция Ψ_j имеет вид:

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j(e_u, C, \Pi)}{e_u}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

где Φ_j – функции, аппроксимирующие обобщенную кривую деформирования бетона $\sigma_u^b(e_u)$ при растяжении ($j=1$) и при сжатии ($j=2$); σ_u^b – интенсивность напряжений; e_u – интенсивность деформаций. Влияние концентрации хлоридсодержащей среды C и уровня поврежденности Π учитывается при задании выражений для Φ_j .

Физические соотношения для арматуры принимаются в виде:

$$\text{а) для направления } x: \quad \sigma_x = f_x(e_x); \quad (7)$$

$$\text{б) для направления } y: \quad \sigma_y = f_y(e_y). \quad (8)$$

Здесь f_x – функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования стержневой арматуры, уложенной в направлении x , а f_y – в направлении y .

1.5. Модель воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды

Процесс взаимодействия хлоридсодержащей среды с армированной пластиной состоит из нескольких стадий: проникание среды в объем пластины; взаимодействие ее с материалом, приводящее к изменению механических характеристик бетона и коррозии арматуры; деформирование и разрушение с учетом происходящего процесса деградации.

1.5.1. Модель проникания хлоридсодержащей среды

На стадии проникания среды формируется закон распределения агрессивной среды по объему пластины, определяющий затем характер неоднородности бетона и интенсивность коррозии арматуры.

Кинетику проникания хлоридсодержащей среды в пластину будем описывать с помощью уравнения диффузии, имеющего вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \text{grad}C) - g(C), \quad (9)$$

где t – время; D – коэффициент диффузии; $g(C)$ – скорость связывания проникшей среды.

Чтобы выявить распределение концентрации хлоридсодержащей среды C по объему пластины в любой момент времени нужно решить это уравнение с начальными и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче.

1.5.2. Модель воздействия хлоридсодержащей среды на бетон

Положим, что в рамках нелинейной деформационной модели бетон является нелинейным разносопротивляющимся материалом. Тогда зависимость $\sigma_u^e(e_u, C)$ примем в виде [25]:

$$\sigma_u^b = [A_j^b(C) \cdot e_u - B_j^b(C) \cdot e_u^{m_j(C)}] / (1 + \lambda \Pi), \quad (10)$$

где $A_j^b(C)$, $B_j^b(C)$, $m_j(C)$ – функции, учитывающие влияние концентрации хлоридсодержащей среды C на деформирование бетона при растяжении ($j = 1$) и сжатии ($j = 2$), а функция $(1 + \lambda \Pi)$ учитывает влияние уровня поврежденности Π на деформирование бетона. Включение функции поврежденности Π в физические соотношения для бетона (10) позволяет отразить влияние ползучести бетона на процесс его деформирования через изменение диаграммы деформирования с течением времени.

1.5.3. Модель воздействия хлоридсодержащей среды на арматуру

Так как под влиянием хлоридсодержащей среды изменения механических свойств арматуры практически не происходит [5], а происходит коррозионное разрушение, вызывающее изменение площади сечения арматуры, то зависимость между напряжениями и деформациями в арматуре примем в виде диаграммы Прандтля:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot e, & \sigma < \sigma_T, \\ \sigma_T, & \sigma \geq \sigma_T, \end{cases} \quad (11)$$

где E – модуль упругости; σ_T – предел текучести.

Процесс коррозионного разрушения арматуры состоит из двух стадий: инкубационного периода t_u , в течение которого концентрация хлоридов в точке расположения арматурного стержня изменяется от начального до критического значения C_{KP} , и стадии интенсивного коррозионного разрушения, в которой происходит коррозионный износ арматуры.

Кинетику коррозионного износа арматуры можно описывать с использованием моделей, приведенных в работе [25]. Для определенности будем полагать, что коррозионный износ описывается функцией:

$$\delta = \begin{cases} 0, & t < t_u, \\ (\delta_K \cdot t) / (t + T), & t \geq t_u, \end{cases} \quad (12)$$

где δ_K – предельная глубина коррозии; T – параметр.

Положим, что коррозионный износ арматурного стержня круглого сечения с начальным диаметром d_0 происходит по хорде. Тогда площадь его сечения с учетом коррозионного поражения запишем в виде:

$$F(t) = \begin{cases} (\pi \cdot d_0^2) / 4, & t < t_u, \\ (\pi \cdot d_0^2) / 4 - d_0^2 \cdot (S - \sin S) / 8, & t \geq t_u, \end{cases} \quad (13)$$

где $S = 2 \arccos(1 - (2 \cdot \delta / d_0))$.

1.6. Модель разрушения материала

В подавляющем большинстве случаев разрушение железобетона начинается с разрушения бетонной части. Поэтому при моделировании разрушения армированной пластины будем рассматривать процесс разрушения бетона как процесс накопления дисперсных повреждений. Уровень поврежденности оцениваем с помощью параметра поврежденности Π , равного нулю в начальном неповрежденном состоянии материала и равного единице в момент разрушения. Скорость изменения параметра Π полагаем зависящей от интенсивности напряжений σ_u^b , вида напряженного состояния, концентрации хлоридсодержащей среды C и достигнутого значения поврежденности Π . В результате уравнение накопления повреждений принимаем в виде:

$$d\Pi/dt = a_j(C) [\sigma_u^b/(1-\Pi)]^{\varepsilon_j(C)}, \quad \Pi(0)=0, \quad \Pi(t_p)=1, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

где t_p – время до разрушения точки пластины, в которой поврежденность достигает предельного уровня $\Pi = 1$; $a_j(C)$ и $\varepsilon_j(C)$ – коэффициенты уравнения накопления повреждений, зависящие от концентрации агрессивной среды C в точке пластины и от вида напряженного состояния в этой точке.

Если предположить, что локальное разрушение (в точке пластины) можно отождествить с разрушением всей пластины, то тогда t_p можно принять за время до разрушения пластины в агрессивной среде.

1.7. Физические соотношения для усилий и деформаций, возникающих в железобетонной пластине

Получим выражения для изгибающих моментов и усилий через деформации, полагая, что в сечениях пластинки они складываются из моментов и усилий, воспринимаемых бетоном, и моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, а на сдвиг работает только бетон.

С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^b + M_x^a; & M_y &= M_y^b + M_y^a; & H &= H^b; \\ N_x &= N_x^b + N_x^a; & N_y &= N_y^b + N_y^a; & S &= S^b. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения для частей моментов и усилий, воспринимаемых бетоном:

$$\begin{aligned} M_x^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b z dz, & M_y^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b z dz, \\ H^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b z dz, & N_x^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b dz, \\ N_y^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b dz, & S^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b dz. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь z_0 – уравнение нейтральной поверхности, определяемой из условия $\sigma_0=0$ и отделяющей растянутую зону пластинки от сжатой; i, j – индексы, характеризующие сжатую и растянутую зону пластинки. Если нижняя зона изгибаемой пластинки растянута, то $j = 1, i = 2$; если нижняя зона изгибаемой пластинки сжата, а верхняя растянута, то $j = 2, i = 1$.

Выражения для z_0 получим из условия:

$$\sigma_0^b = \frac{(\sigma_x^b + \sigma_y^b)}{3} = \frac{\Psi_j}{1 - \nu_j^2} [(1 + \nu_j)(e_x + e_y)] = 0. \quad (17)$$

Отсюда следует:

$$z_0(x, y) = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y}. \quad (18)$$

Для получения выражений для моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, условно заменим арматурные стержни в направлении координаты x сплошным эквивалентным слоем металла переменной толщины (рис. 2).

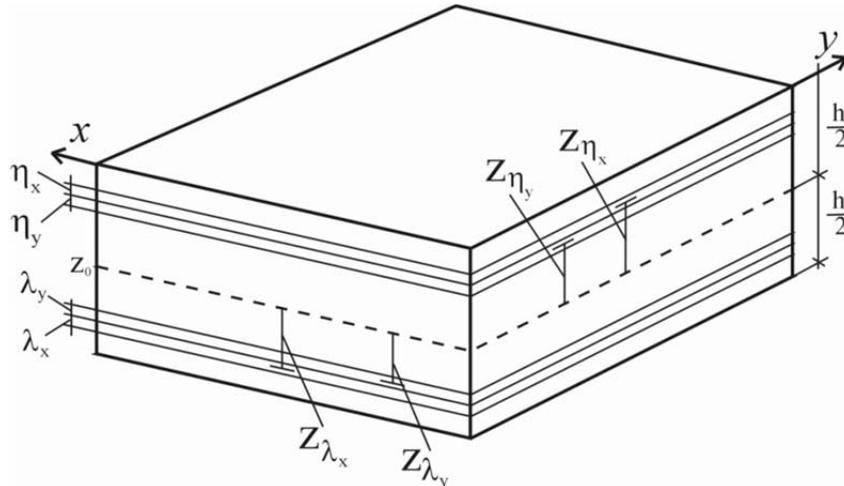


Рисунок 2. Замена арматурных стержней эквивалентным слоем

Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты x определяется законами изменения площади поперечного сечения арматурных стержней в направлении координаты x . Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты y определяется аппроксимацией площадей арматурных стержней в направлении y некоторой функцией, задающей закон изменения толщины эквивалентного слоя в направлении y .

Обозначим η_x, η_y – толщины эквивалентных армирующих слоев в верхней части пластинки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно x, y ; λ_x, λ_y – толщины эквивалентных армирующих слоев в нижней части пластинки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно x, y ; z_{η_x}, z_{η_y} – ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев в верхней части пластинки; $z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$ – ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев в нижней части пластинки.

Далее будем полагать, что под влиянием коррозионного износа будет изменяться сечение арматурных стержней, приводя к изменению толщин $\eta_x, \eta_y, \lambda_x, \lambda_y$ эквивалентных армирующих слоев, не изменяя при этом величины координат центров тяжести $z_{\eta_x}, z_{\eta_y}, z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$. Таким образом, будем полагать, что под влиянием коррозионного износа толщина эквивалентных армирующих слоев изменяется, а их положение по толщине пластинки остается неизменным.

С учетом введенных гипотез, выражения для части моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, примут вид:

$$\begin{aligned}
 M_x^a &= \sigma_x^a(z_{\lambda_x}) \lambda_x z_{\lambda_x} + \sigma_x^a(z_{\eta_x}) \eta_x z_{\eta_x}, \\
 M_y^a &= \sigma_y^a(z_{\lambda_y}) \lambda_y z_{\lambda_y} + \sigma_y^a(z_{\eta_y}) \eta_y z_{\eta_y}, \\
 N_x^a &= \sigma_x^a(z_{\lambda_x}) \lambda_x + \sigma_x^a(z_{\eta_x}) \eta_x, \\
 N_y^a &= \sigma_y^a(z_{\lambda_y}) \lambda_y + \sigma_y^a(z_{\eta_y}) \eta_y.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Здесь $\sigma_x^a(z_{\lambda_x})$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси x и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_x} от срединной поверхности; $\sigma_x^a(z_{\eta_x})$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси x и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_x} от срединной поверхности; $\sigma_y^a(z_{\lambda_y})$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси y и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_y} от срединной поверхности; $\sigma_y^a(z_{\eta_y})$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси y и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_y} от срединной поверхности.

С учетом отсутствия продольных усилий в сечении пластины, получим следующие окончательные выражения для M_x , M_y и H :

$$\begin{aligned}
 M_x &= D_{11} \chi_x + D_{12} \chi_y, \\
 M_y &= D_{21} \chi_x + D_{22} \chi_y, \\
 H &= D_3 \chi_{xy},
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \left[f_{11} (J_1^b + J_{x1}^a) + (J_2^b + J_{x2}^a) + f_{21} I_1^b \right], & D_{12} &= \left[f_{12} (J_1^b + J_{x1}^a) + f_{22} I_1^b + I_2^b \right], \\
 D_{21} &= \left[f_{21} (J_1^b + J_{y1}^a) + f_{11} I_1^b + I_2^b \right], & D_{22} &= \left[f_{22} (J_1^b + J_{y1}^a) + (J_2^b + J_{y2}^a) + f_{12} I_1^b \right], \\
 D_3 &= \left[2T_2^b - 2 \frac{(T_1^b)^2}{T_0^b} \right],
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

в этих выражениях:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \frac{I_0^b I_1^b - (J_0^b + J_{y0}^a)(J_1^b + J_{x1}^a)}{(J_0^b + J_{x0}^a)(J_0^b + J_{y0}^a) - (I_0^b)^2}, & f_{12} &= \frac{I_0^b (J_1^b + J_{y1}^a) - (J_0^b + J_{y0}^a) I_1^b}{(J_0^b + J_{x0}^a)(J_0^b + J_{y0}^a) - (I_0^b)^2}, \\
 f_{22} &= \frac{I_0^b I_1^b - (J_0^b + J_{x0}^a)(J_1^b + J_{y1}^a)}{(J_0^b + J_{x0}^a)(J_0^b + J_{y0}^a) - (I_0^b)^2}, & f_{21} &= \frac{I_0^b (J_1^b + J_{x1}^a) - (J_0^b + J_{x0}^a) I_1^b}{(J_0^b + J_{x0}^a)(J_0^b + J_{y0}^a) - (I_0^b)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Жесткости, входящие в эти выражения, определяются следующими формулами:

- для бетона:

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

$$J_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z^k \partial z, \quad \kappa = 0, 1, 2. \quad I_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z^k \partial z, \quad \kappa = 0, 1, 2. \quad (23)$$

$$T_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z^k \partial z, \quad \kappa = 0, 1, 2;$$

- для арматуры:

$$J_{xk}^a = E_a (\lambda_x z_{\lambda_x}^k + \eta_x z_{\eta_x}^k), \quad J_{yk}^a = E_a (\lambda_y z_{\lambda_y}^k + \eta_y z_{\eta_y}^k) \quad \kappa = 0, 1, 2. \quad (24)$$

В формулах:

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} = -\frac{\chi_x (f_{11} + f_{21}) + \chi_y (f_{12} + f_{22})}{\chi_x + \chi_y} \quad (25)$$

$$\alpha_j = \frac{\Psi_j}{1 - \nu_j^2}, \quad \alpha_i = \frac{\Psi_i}{1 - \nu_i^2}, \quad \beta_j = \frac{\Psi_j}{2(1 + \nu_j)}, \quad \beta_i = \frac{\Psi_i}{2(1 + \nu_i)} \quad (26)$$

Следует учитывать, что при выводе вышеприведенных выражений предполагается, что арматура и бетон работают совместно, невзирая на коррозионный износ арматуры.

2. Разрешающее уравнение изгибаемой армированной пластины на упругом основании, взаимодействующей с хлоридсодержащей средой

Подставляя в (1) выражения (20) с учетом (4) и выражение для q из модели грунтового основания, получим следующее разрешающее дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины на упругом основании в условиях хлоридной коррозии:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_{21} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right) - 2m \nabla^2 W + nW = p(x, y). \quad (27)$$

Для определения характеристик напряженно-деформированного состояния армированной пластины в каждый момент времени необходимо из решения уравнения диффузии (9) с соответствующими начальными и граничными условиями найти закон распределения концентрации C хлоридсодержащей среды по объему пластины в рассматриваемый момент времени. По уравнениям (14) можно определить уровень накопления повреждений в точках объема пластины к рассматриваемому моменту времени, по уравнениям (12), (13) – степень коррозионного поражения арматуры пластины к этому моменту времени. И в результате решить уравнение (27) с соответствующими граничными условиями, позволяющими получить для каждого конкретного случая однозначное решение. Имея решение этого уравнения, можно определить напряжения и деформации в любой точке армированной пластины в рассматриваемый момент времени.

Полученное дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины на упругом основании в сочетании с уравнениями проникания хлоридсодержащей среды, уравнениями накопления повреждений в бетоне и уравнениями коррозионного износа арматуры позволяет рассчитывать пластины при разном характере нагружения, при разных схемах опирания пластины

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

по контуру, разных программах воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды (среда сверху, снизу, среда с обеих сторон и среда действует на часть поверхности), а также определять время до разрушения пластины. Заметим, что в качестве условий разрушения выступает условие либо достижения предельного уровня поврежденности ($\Gamma = 1$) в любой точке бетонного массива, либо достижения предельного уровня напряжений в арматуре вследствие ее коррозионного износа и взаимодействия с поврежденным окружающим бетоном.

Выводы

1. Полученные в статье уравнения позволяют описывать процесс деформирования и разрушения (трактуемого как накопление повреждений) армированных пластин на упругом основании, подвергающихся действию агрессивной хлоридсодержащей среды. Эти уравнения можно использовать для моделирования поведения железобетонных дорожных плит, подвергающихся воздействию агрессивных сред – антиобледенителей, применяемых для борьбы с гололедом. Если исключить из уравнений влияние упругого основания, то они могут использоваться для моделирования поведения железобетонных плит пролетных строений мостовых сооружений.

2. Характерной особенностью приведенных уравнений является то, что при их получении использовался деформационный подход, согласно которому поведение и арматуры и заполнителя описывалось нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями, причем в случае заполнителя учитывалась и характерная обычно для бетона неодинаковость сопротивления материала растяжению и сжатию.

3. Приведенные детерминированные уравнения с использованием метода статистического моделирования (Монте-Карло) могут быть использованы и для вероятностного моделирования процессов деформирования и коррозионного разрушения армированных пластин.

4. Во второй части статьи будет рассмотрено применение метода последовательных возмущений параметров в сочетании с методом сеток для решения приведенных уравнений. Будут приведены численные результаты, полученные с помощью разработанного программного комплекса и иллюстрирующие влияние хлоридсодержащей среды на поведение железобетонной пластины.

Исследование проведено при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России из федерального бюджета в рамках реализации федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение №14.В37.21.1222, а также в соответствии с грантом РФФИ №12-01-31130 Мол_а «Нелинейные модели деформирования и методы определения долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами и полями».

Литература

1. Глушков Г.И., Бабков В.Ф., Тригопи В.Е. [и др.] Жесткие покрытия аэродромов и автомобильных дорог / Под ред. Глушкова. М.: Транспорт, 1994. 349 с.
2. Гвоздев А.А. Прочность, структурные изменения и деформации бетона. - М.: Стройиздат, 1978. С. 223-253.
3. Москвин В.М., Иванов Ф.М., Алексеев С.Н., Гузев Е.А. Коррозия бетона и железобетона, методы их защиты. М.: Стройиздат, 1980. 536 с.
4. Алексеев С.Н., Иванов Ф.М., Модры С., Шисль П. Долговечность железобетона в агрессивных средах. М.: Стройиздат, 1990. 320 с.
5. Овчинников И.Г., Раткин В.В., Землянский А.А. Моделирование поведения железобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридсодержащих сред. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2000. 232 с.
6. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
7. Полак А.Ф. Расчет долговечности железобетонных конструкций. Уфа: Изд-во Уфимск. нефт. ин-та, 1983. 116 с.

Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения

8. Mullek R.F. The Possibility of Evolving a Theory for Predicting the Service Life of Reinforced Concrete Structures // Mater. et Constr. 1985. Vol. 18. №108. Pp. 463-472.
9. Wright J., Frohnsdorf G. Durability of Buildings Materials: Durability Research in US and the Influence of RILEM on Durability Research // Mater. et Constr. 1985. Vol. 18. №105. Pp. 205-214.
10. Frangopol D.M., Lin K.Y., Estes A. Reliability of reinforced concrete girders under corrosion attack // Journal of Structural Engineering. ASCE. 1997. Vol. 123. №3. Pp. 286-297.
11. Enright M.P., Frangopol D.M. Service Life Prediction of Deteriorating Concrete Structures // Journal of Structural Engineering. ASCE. 1998. Vol. 124. №3. Pp. 309-317.
12. Biondini F., Bontempi F., Frangopol D. M., Malerba P. G. Cellular Automata Approach to Durability Analysis of Concrete Structures in Aggressive Environments // Journal of Structural Engineering. ASCE. 2004. Vol. 130. №11. Pp. 1724-1737.
13. Kong J.S., Ababneh A.N., Frangopol D.M., Xi Y. Reliability analysis of chloride penetration in saturated concrete // Probabilistic Engineering Mechanics. 2002. Vol. 17. №3. Pp. 305-315.
14. Frangopol D.M., Kallen M.-J., Van Noortwijk J.M. Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: review and future directions // Progress in Structural Engineering and Materials. 2004. Vol. 6. №4. Pp. 197-212.
15. Biondini F., Bontempi F., Frangopol D.M., Malerba P.G. Reliability of material and geometrically non-linear reinforced and prestressed concrete structures // Journal of Pure and Applied Algebra. 2004. Vol. 82. №13. Pp. 1021-1031.
16. Гузеев Е.А., Бондаренко В.М., Савицкий Н.В. Интегральный метод оценки напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов в случае воздействия агрессивной среды и силовой нагрузки // Труды НИИЖБ. М., Стройиздат, 1984. С. 20-27.
17. Попеско А.И. Работоспособность железобетонных конструкций, подверженных коррозии. СПб.: СПб гос. архит.-строит. ун-т, 1996. 182 с.
18. Бондаренко В.М., Прохоров В.Н. К вопросу об оценке силового сопротивления железобетона повреждению коррозионными воздействиями // Известия вузов. Строительство. 1998. №3. С. 30-41.
19. Леонович С.Н. Трещиностойкость и долговечность бетонных и железобетонных элементов в терминах силовых и энергетических критериев механики разрушения. Минск: Тьдзень, 1999. 264 с.
20. Соломатов В.И., Селяев В.П. Химическое сопротивление композиционных строительных материалов. М.: Стройиздат, 1987. 264 с.
21. Saelta A., Scotta R., Vitaliani R. Coupled Environmental-Mechanical Damage Model of RC Structures // Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 1999. Vol. 125. Issue 8. Pp.4930-940.
22. Овчинников И.Г., Петров В.В. Определение долговечности элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. №2. С. 13-18.
23. Овчинников И.Г., Петров В.В. Прогнозирование работоспособности элементов конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных рабочих сред // Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СПИ, 1984. С. 3-15.
24. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
25. Овчинников И.И., Наумова Г.А. Накопление повреждений в стержневых и пластинчатых армированных конструкциях, взаимодействующих с агрессивными средами. Волгоград: ВГАСУ, 2007. 272 с.

**Илья Игоревич Овчинников, г. Саратов, Россия*
Тел. раб.: (8452) 99-89-08; эл. почта: bridgeart@mail.ru

© Овчинников И.И., Овчинников И.Г., 2013

doi: 10.5862/MCE.36.4

Application of nonlinear deformation model for the analysis of behavior of reinforced plates on elastic foundation, interacting with chloride-containing environments. The basic relations

I.I. Ovchinnikov,

Saratov State Technical University, Saratov, Russia;

I.G. Ovchinnikov,

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

(8452) 99-89-08; e-mail: bridgeart@mail.ru

Key words

deformation model; corrosion of reinforced concrete; plate on elastic foundation; chloride corrosion; road pavement

Abstract

In transport construction the reinforced structures such as heavy-wall and thin-wall slabs and plates on elastic foundation are widely used. The design model of slab (plate) on elastic foundation is used for calculating road pavements, slabs for reinforcing fill slopes, bridge decks and other structures.

The constructing a deformation model of the reinforced plate interacting with a chloride-containing environments, based on the Vlasov-Leontiev elastic base is considered. The method based on the theory of structure parameters is used. The model of the structure is represented as symbiosis of models.

A system of resolving equations of the model is given. The article is the first part of the research. In the second part the numerical results obtained in the software developed by authors will be given.

References

1. Glushkov G.I., Babkov V.F., Trigoni V.E. [et al.] *Zhestkiye pokrytiya aerodromov i avtomobilnykh dorog* [Rigid pavements of airfields and highways]. Moscow: Transport, 1994. 349 p. (rus)
2. Gvozdev A.A. *Prochnost, strukturnyye izmeneniya i deformatsii betona* [Strength, structural changes and deformation of concrete]. Moscow: 1978, Pp. 223-253. (rus)
3. Moskvina V.M., Ivanov F.M., Alekseev S.N., Guzeev E.A. *Korroziya betona i zhelezobetona, metody ikh zashchity* [Corrosion of concrete and reinforced concrete, methods of protection]. Moscow: Stroyizdat, 1980. 536 p. (rus)
4. Alekseyev S.N., Ivanov F.M., Modry S., Shissl P. *Dolgovechnost zhelezobetona v agressivnykh sredakh* [Durability of concrete in aggressive environments]. Moscow: Stroyizdat, 1990. 320 p. (rus)
5. Ovchinnikov I.G., Ratkin V.V., Zemlyansky A.A. *Modelirovaniye povedeniya zhelezobetonnykh elementov konstruksiy v usloviyakh vozdeystviya khloridsoderzhashchikh sred* [Modeling the behavior of reinforced concrete structures in chloride-containing environments]. Saratov: Sarat. Gos. tekhn. un-t, 2000. 232 p. (rus)
6. Karpenko N.I. *Obshchie modeli mekhaniki zhelezobetona* [General models of the mechanics of reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat, 1996. 416 p. (rus)
7. Polak A.F. *Raschet dolgovechnosti zhelezobetonnykh konstruksiy* [Calculation of durability of reinforced concrete]. Ufa: Izd-vo Ufimsk. nef. in-ta, 1983. 116 p. (rus)
8. Mullek R.F. The Possibility of Evolving a Theory for Predicting the Service Life of Reinforced Concrete Structures. *Mater. et Constr.* 1985. Vol. 18. No. 108. Pp. 463-472.
9. Wright J., Frohnsdorf G. Durability of Buildings Materials: Durability Research in US and the Influence of RILEM on Durability Research. *Mater. et Constr.* 1985. Vol. 18. No. 105. Pp. 205-214.
10. Frangopol D.M., Lin K.Y., Estes A. Reliability of reinforced concrete girders under corrosion attack. *Journal of Structural Engineering. ASCE.* 1997. Vol. 123. No. 3. Pp. 286-297.
11. Enright M.P., Frangopol D.M. Service Life Prediction of Deteriorating Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering. ASCE.* 1998. Vol. 124. No. 3. Pp. 309-317.

Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G. Application of nonlinear deformation model for the analysis of behavior of reinforced plates on elastic foundation, interacting with chloride-containing environments. The basic relations

12. Biondini F., Bontempi F., Frangopol D. M., Malerba P. G. Cellular Automata Approach to Durability Analysis of Concrete Structures in Aggressive Environments. *Journal of Structural Engineering. ASCE*. 2004. Vol. 130. No. 11. Pp. 1724-1737.
13. Kong J.S., Ababneh A.N., Frangopol D.F., Xi Y. Reliability analysis of chloride penetration in saturated concrete. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2002. Vol. 17. No. 3. Pp. 305-315.
14. Frangopol D.M., Kallen M.-J., Van Noortwijk J.M. Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: review and future directions. *Progress in Structural Engineering and Materials*. 2004. Vol. 6. No. 4. Pp. 197-212.
15. Biondini F., Bontempi F., Frangopol D.M., Malerba P.G. Reliability of material and geometrically non-linear reinforced and prestressed concrete structures. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2004. Vol. 82. No. 13. Pp. 1021-1031
16. Guzeyev Ye.A., Bondarenko V.M., Savitskiy N.V. *Trudy NIIZhB*. Moscow: Stroyizdat, 1984. Pp. 20-27 (rus)
17. Popesko A.I. *Rabotosposobnost zhelezobetonnykh konstruksiy, podverzhennykh korrozii* [The performance capacity of reinforced concrete structures subjected to corrosion]. Saint-Petersburg: SPb gos. arkhit.-stroit. un-t, 1996. 182 p. (rus)
18. Bondarenko V.M., Prokhorov V.N. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo*. 1998. No. 3. Pp. 30-41. (rus)
19. Leonovich S.N. Treshchinostoykost i dolgovechnost betonnykh i zhelezobetonnykh elementov v terminakh silovykh i energeticheskikh kriteriyev mekhaniki razrusheniya [Fracture toughness and durability of concrete and reinforced concrete elements in terms of power and energy criteria of fracture mechanics]. Minsk: Tydzen, 1999. 264 p. (rus)
20. Solomatov V.I., Selyayev V.P. *Khimicheskoye soprotivleniye kompozitsionnykh stroitelnykh materialov* [Chemical resistance of composite building materials]. Moscow: Stroyizdat, 1987. 264 p. (rus)
21. Saetta A., Scotta R., Vitaliani R. Coupled Environmental-Mechanical Damage Model of RC Structures. *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*. 1999. Vol. 125. Issue 8. Pp.4930-940.
22. Ovchinnikov I.G., Petrov V.V. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 1982. No. 2. Pp. 13-18. (rus)
23. Ovchinnikov I.G., Petrov V.V. Prognozirovaniye rabotosposobnosti elementov konstruksiy, podvergaushchikhsya vozdeistviyu agressivnykh rabochikh sred. Raschet elementov konstruksiy, vzaimodeystvuyushchikh s agressivnymi sredami. Mejevuz. nauch. sb. [Forecasting performance of structural elements exposed to aggressive environments]. Saratov: Izd-vo SPI, 1984. Pp. 3-15. (rus)
24. Vlasov V.Z., Leontyev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic foundation]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 491 p. (rus)
25. Ovchinnikov I.I., Naumova G.A. Nakopleniye povrezhdeniy v sterzhnevyykh i plastinchatykh armirovannykh konstruksiyakh, vzaimodeystvuyushchikh s agressivnymi sredami [The accumulation of damage in the rod and plate-reinforced structures, interacting with aggressive environments]. Volgograd: Izd-vo VGASU, 2007. 272 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 27-38