

## Эндохронная теория пластичности, обобщающая теорию Сандерса-Клюшникова

*Д.ф.-м.н., профессор Ю.И. Кадашевич;*

*к.ф.-м.н., доцент С.П. Помыткин\*;*

*ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный технологический университет  
растительных полимеров*

**Ключевые слова:** пластичность; теория; эндохронный подход; определяющие соотношения; квазистатистический вариант

При расчетах напряженно-деформированного состояния оснований фундаментов и конструкций [1] основное внимание уделяется механическим и реологическим свойствам грунтов [2-5]. Поскольку реальные грунты и породы обладают определенными механическими особенностями, а именно сугубо нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями, а также возможностью деформаций развиваться во времени, в этих расчетах используются самые разные феноменологические [6] и физические теории упругости [3], пластичности [7, 8] и ползучести [9, 10]. Одним из направлений исследования зон пластических деформаций в материалах и грунтах является эндохронный подход [11-17].

Активное развитие эндохронной теории неупругости началось с 80-х годов прошлого века [18, 19]. Современное состояние эндохронного подхода кратко изложено в обзоре [20]. Опубликовано достаточно много оригинальных работ, пытающихся связать эндохронный подход с хорошо известными классическими теориями (деформационная теория пластичности, теория скольжения, теория пластического течения, теория процессов, физическая теория неупругости и т.д.). В предлагаемой читателям статье делается попытка построить эндохронный вариант теории пластичности с присущими ей достоинствами и недостатками на основе работ Дж. Сандерса [21] и В.Д. Клюшникова [22]. Отметим, что оригинальный взгляд на эндохронную теорию пластичности, отличающийся от предлагаемой работы и от недавно опубликованной статьи [23], можно найти в ряде работ отечественных ученых [24-26].

В работе Сандерса [21] было показано, как можно построить вариант теории пластического течения, если использовать понятия плоских поверхностей текучести. Оказалось, что такая теория близка как к прогнозам деформационной теории пластичности, так и к следствиям из теории скольжения [27]. В работе [22] В.Д. Клюшников изучил плоский случай нагружения. В статье [28] было намечено новое направление развития теории пластического течения, в предположении о том, что локальные поверхности текучести становятся плоскими. В предлагаемой статье на основе работ [21, 22] и [28, 29] авторами строится эндохронная теория пластичности.

В работе [28], исходя из предположения о том, что влиянием первого и третьего инвариантов тензора напряжений на закономерности пластического деформирования можно пренебречь, авторы строят определяющие соотношения теории течения в пятимерном пространстве Ильюшина [30], дополнительно постулируя, что поверхности текучести являются плоскими. Эти поверхности текучести движутся независимо друг от друга, удаляясь от начала координат, как только точка в пространстве напряжений достигает их границы. Определяющие уравнения такой теории имели следующий вид:

$$\sum_{k=1}^5 (\sigma_k - b \varepsilon_k^p) \cdot \cos \varphi_k = \tau, \quad (1)$$

$$\varepsilon_k^p = \varepsilon_i^p \cdot \cos \varphi_k, \quad \sum_{k=1}^5 \cos^2 \varphi_k = 1. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_k$ ,  $\varepsilon_k^p$  – компоненты пятимерных векторов напряжений и пластических деформаций в пространстве Ильюшина;  $\tau$  – предел текучести материала;  $\varepsilon_i^p$  – интенсивность вектора пластических деформаций;  $b$  – постоянный параметр.

Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория пластичности, обобщающая теорию Сандерса-Клюшникова

В частности, для одноосного нагружения было показано, что

$$b \varepsilon_1^p = \sigma_1 \cos^2 \varphi - \tau \cdot \cos \varphi, \quad (3)$$

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{\tau}{2\pi b} \left( \frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} - \sin \varphi_0 \right), \quad (4)$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos \varphi_0}, \quad (5)$$

где  $\langle \varepsilon_1^p \rangle$  – среднее значение пластической деформации;  $\varphi_0$  – граничное значение угла  $\varphi$ , при котором плоскости поверхности текучести не перемещаются. Обратим внимание, что перемещаются поверхности текучести при значениях параметра в пределах  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ . Асимптотика решения имеет вид:

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{1}{4b} \left( \sigma_1 - \frac{4\tau}{\pi} \right). \quad (6)$$

Согласно работам [18, 31] построим эндохронный вариант соотношений (1) – (2), если введем вместо вектора  $b \varepsilon_k^p$  новый вектор  $r_k$  по формуле

$$r_k = \varepsilon_k - \frac{1-\alpha}{2G} \sigma_k. \quad (7)$$

В определении (7) входят  $\alpha$  – параметр эндохронности ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) и модуль сдвига  $G$ . Тогда получим, что

$$\sum_{k=1}^5 (\sigma_k - b r_k) \cdot \cos \varphi_k = \tau, \quad r_k = r_i \cdot \cos \varphi_k, \quad (8)$$

$$b r_i = \sum_{k=1}^5 \sigma_k \cdot \cos \varphi_k - \tau, \quad \sum_{k=1}^5 \cos^2 \varphi_k = 1. \quad (9)$$

Как и в классической теории эндохронного типа [31], здесь интересны три частных случая:

- $\alpha = 0$ , тогда  $r_k = \varepsilon_k^p$ ;
- $\alpha = 1$ , тогда  $r_k = \varepsilon_k$ ;
- $\alpha \rightarrow 0$ , тогда решение а) может отличаться от б), особенно при циклических нагружениях.

При построении эндохронной теории пластичности [18], [31] в определяющие соотношения специально вводился новый (малый) параметр  $\alpha \sigma$ , чтобы обеспечить начальные условия деформирования  $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = 0$ . При формулировке данного варианта теории вместо условия (5) будем использовать условие

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos \varphi_0} \cdot (1 - \cos \varphi_0), \quad (10)$$

из которого следует, что при  $\varphi_0 = 0$ ,  $\sigma_1 = 0$ . Фактически это означает, что  $r_i$  принимается в форме

$$b r_i = \sum_{k=1}^5 (\sigma_k + \tau) \cdot \cos \varphi_k - \tau, \quad (11)$$

чтобы обеспечить работу соотношений, начиная со значения  $\varphi = 0$ .

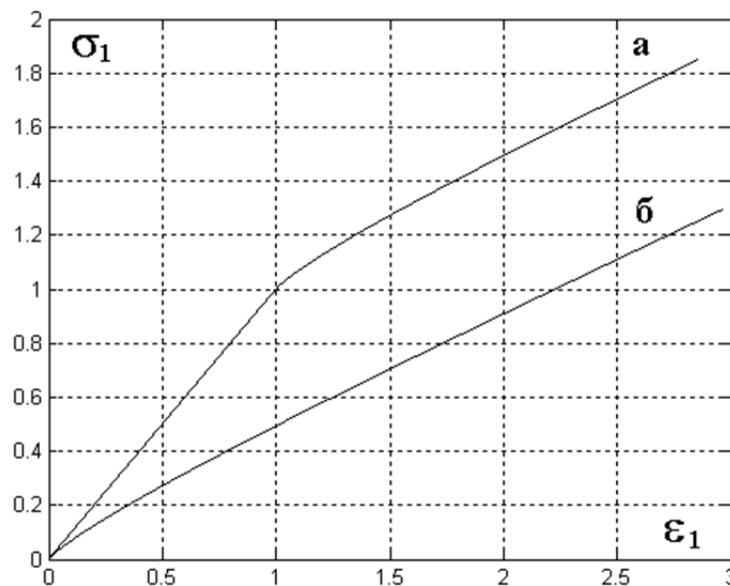
При одноосном прямом нагружении имеем

$$b r_1 = [(\sigma_1 + \tau) \cdot \cos \varphi - \tau] \cdot \cos \varphi,$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{\cos \varphi_0} \cdot (1 - \cos \varphi_0) \quad \text{при} \quad \varphi_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0.$$

На рис. 1 приведено решение (кривая а), полученное согласно работе [22]. График б) на рис. 1 – результат использования формулы

$$\langle r_1 \rangle = \frac{\tau}{2\pi b} \left( \frac{1 + \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} - 1 \right). \quad (12)$$

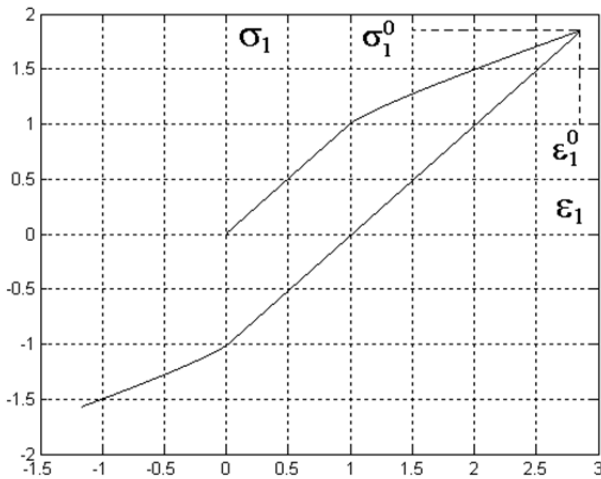


**Рисунок 1. Кривые деформирования при прямом одноосном нагружении**

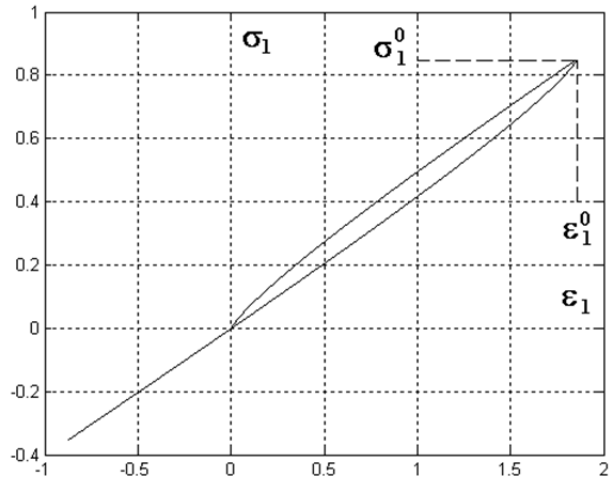
На рис. 2 и рис. 3 приведены решения одноосной задачи, когда прямое нагружение  $\sigma_1$  до величины  $\sigma_1 = \sigma_1^0$  сменяется нагружением противоположного знака. Согласно идеям Сандерса [21], возникающие при этом пластические деформации образуются другими плоскими поверхностями текучести, расположенными в области от  $\pi - \varphi$  до  $\pi + \varphi$ . Если же воспользоваться формулами вида (12), то решение примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^0 + \frac{\tau}{\cos \varphi_0} \cdot (\cos \varphi_0 - 1) && \text{при } \varphi_0 \geq 0, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \frac{\tau}{2\pi b} \cdot \left( 1 + \frac{\sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - \varphi_0 - 1}{\cos \varphi_0} \right) && \text{при } \varphi_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\sigma_1^0$  и  $\varepsilon_1^0$  – значения напряжения и деформации, достигнутые при прямом нагружении. Отметим, что характер кривых «напряжение-деформация», приведенных на рис.2 и рис.3, может вызвать вопросы у экспериментаторов. Однако они сознательно приводятся для того, чтобы подчеркнуть особенности подхода Сандерса-Клюшникова и необходимость дальнейшего уточнения и развития предложенного выше метода. Во всех расчетах принято, что  $\varphi_0 \geq 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $2G = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $2\pi b = 1$ .



**Рисунок 2. Циклическое нагружение гипотетического материала по схеме Сандерса-Клюшникова**



**Рисунок 3. Прямое и обратное нагружение гипотетического материала согласно (13)**

Подчеркнем, что знакопеременному и циклическому нагружению геоматериалов уделяется достаточно большое внимание инженеров и исследователей [32].

Таким образом, предложен новый эндохронный вариант теории неупругости, обобщающий подход Сандерса-Клюшникова. Приведенные примеры продемонстрировали, что определяющие соотношения новой теории инициируют дополнительные возможности в описании неупругого поведения материалов. Отмечено, что следствия, вытекающие из уравнений новой теории, должны быть проверены экспериментально для рекомендации их применения в практике инженерных расчетов. В дальнейших публикациях авторы намерены расширить число приведенных примеров за счет сложных траекторий нагружения и сопоставить результаты расчетов с имеющимися экспериментальными данными.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00157).*

## Литература

1. СНиП 2.02.01-83. Основания зданий и сооружений. М., 2003.
2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.
3. Цытович Н.А. Механика грунтов: краткий курс. М.: Книжный Дом «Либроком», 2013. 272 с.
4. Mitchell J.K., Soga K. Fundamentals of Soil Behavior. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005. 592 p.
5. Fang H.-Y., Daniels J.L. Introductory Geotechnical Engineering. An Environmental Perspective. London: Taylor and Francis, 2006. 546 p.
6. Nakai T. Constitutive Modeling of Geomaterials. Principles and Applications. CRC Press, 2010. 376 p.
7. Davis R.O., Selvadurai A.P.S. Plasticity and Geomechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 287 p.
8. Lade P.V. Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surface // International Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. №11. Pp. 1019-1035.
9. Динариев О.Ю., Николаевский В.Н. Ползучесть горных пород как источник сейсмического шума // Доклады Академии Наук. 1993. Т. 331. С. 739-741.
10. Culling W.E.H. Soil creep and the development of Hillside Slopes // The Journal of Geology. 1963. Vol. 71. №2. Pp. 127-161.
11. Bazant Z.P., Shieh C.Z. Endochronic model for nonlinear triaxial deformations of concrete // Nuclear Engineering and Design. 1978. Vol. 47. №4. Pp. 598-619.

12. Wu H.C., Wang Z.K., Aboutorabi M.R. Endochronic modeling of sand in true triaxial test // Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 1985. Vol.111. Issue 10. Pp. 1257-1276.
13. Valanis K.C., Read H.E. A new endochronic plasticity model for concrete // Mechanics of Materials. 1986. №5. Pp. 277-295.
14. Imai G., Xie C. An endochronic constitutive law for static shear behaviour of over consolidated clays // Soils and Foundations. 1990. Vol. 30. Pp. 65-75.
15. Wang J.G., Fan J.H. An endochronic model for normally consolidated soils // Journal of Chongqing University. 1991. Vol. 14. №4. Pp. 1-7.
16. Bakhshiani A., Khoei A.R., Modif M. An endochronic plasticity model for powder compaction processes // Material Processing Technology. 2002. Vol. 125-126. Pp. 138-143.
17. Yeh W.C., Lin S.Y. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy // International Journal of Plasticity. 2006. Vol. 22. Pp. 16-38.
18. Valanis K.C. Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory // Archives of Mechanics. 1980. Vol. 32. Pp. 171-191.
19. Мосолов А.Б. Эндохронная теория пластичности. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1988. 44 с.
20. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Этапы развития эндохронной теории неупругости // Упругость и неупругость. М.: Издательство Московского университета, 2011. С. 151-154.
21. Sanders J.L. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions // Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics. Ann Arbor, MI, 14-18 June 1954. New York: ASME, 1955. Pp. 455-460.
22. Ключников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 722-731.
23. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Описание эффектов второго порядка в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. №6. С. 123-136.
24. Семенов А.С., Мельников Б.Е., Горохов М.Ю. Циклическая нестабильность при расчетах больших пластических деформаций // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. №3. С. 129-138.
25. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред // Вестник Ленинградского университета. Математика, механика, астрономия. 1990. №3(15). С. 87-91.
26. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Применение инженерных моделей вязкоупругости в расчетах конструкций из высокоэластичных полимерных материалов при конечных деформациях // Упругость и неупругость. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 55-69.
27. Batdorf S.B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip: Technical Note №1871. NASA. April, 1949.
28. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1980. №3. С. 93-96.
29. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 908-922.
30. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Издательство АН СССР, 1963. 271 с.
31. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. №4. С. 99-105.
32. Bouckovalas G., Whitman R.V., Marr W.A. Permanent displacement of sand with cyclic loading // Journal of Geotechnical Engineering. 1984. Vol. 110. №11. Pp. 1606-1623.

*\*Сергей Павлович Помыткин, Санкт-Петербург, Россия*

*Тел. моб.: 946-52-79; эл.почта: sppom @yandex.ru*

© Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П., 2013

doi: 10.5862/MCE.36.10

## Endochronic theory of plasticity generalizing Sanders-Klyushnikov theory

**Yu.I. Kadashevich;  
S.P. Pomytkin,**

*Saint-Petersburg State Technological University of Plant Polymers, Saint-Petersburg, Russia  
+7(812)946-52-79; e-mail: sppom @yandex.ru*

### Key words

plasticity; theory; endochronic approach; defining relations; quasi-statistical variant

### Abstract

The importance of exact estimation of plastic deformations in the soils and building materials is noted.

The defining relations for stresses and endochronic type deformations generalizing the theory of Sanders-Klyushnikov were proposed. Quasi-statistical equations of the new theory are based on the Novozhilov's idea about the independence of motion of piecewise-linear plane yield surfaces and the technology of conversion from flow theory to endochronic theory.

The practical formulas for calculating the uniaxial active and reversible loading of the material are presented. The similarity and difference between the new theory and the Sanders-Klyushnikov's version are demonstrated on the several examples.

### References

1. SNiP 2.02.01-83. *Osnovaniya zdaniy i sooruzheniy* [Russian building standards. Foundations of buildings and constructions]. Moscow: 2003. (rus)
2. Vyalov S.S. *Reologicheskiye osnovy mekhaniki* [Rheological bases of soil mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1978. 447 p. (rus)
3. Tsytovich N.A. *Mekhanika gruntov: kratkiy kurs* [Mechanics of soils: a short course]. Moscow: Librokom, 2013. 272 p. (rus)
4. Mitchell J.K., Soga K. *Fundamentals of Soil Behavior*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005. 592 p.
5. Fang H.-Y., Daniels J.L. *Introductory Geotechnical Engineering. An Environmental Perspective*. London: Taylor and Francis, 2006. 546 p.
6. Nakai T. *Constitutive Modeling of Geomaterials. Principles and Applications*. CRS Press, 2010. 245 p.
7. Davis R.O., Selvadurai A.P.S. *Plasticity and Geomechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 287 p.
8. Lade P.V. Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surface. *International Journal of Solids and Structures*. 1977. Vol. 13. No. 11. Pp. 1019-1035.
9. Dinariev O.Yu., Nikolaevskiy V.N. *Doklady Akademii Nauk*. 1993. Vol. 331. Pp. 739-741.
10. Culling W.E.H. Soil creep and the development of Hillside Slopes. *The Journal of Geology*. 1963. Vol. 71. No. 2. Pp. 127-161.
11. Bazant Z.P., Shieh C.Z. Endochronic model for nonlinear triaxial deformations of concrete. *Nuclear Engineering and Design*. 1978. Vol. 47. No. 4. Pp. 598-619.
12. Wu H.C., Wang Z.K., Aboutorabi M.R. Endochronic modeling of sand in true triaxial test. *Journal of Engineering Mechanics*. 1985. Vol. 111. No. 10. Pp. 1257-1276.
13. Valanis K.C., Read H.E. A new endochronic plasticity model for concrete. *Mechanics of Materials*. 1986. No. 5. Pp. 277-295.
14. Imai G., Xie C. An endochronic constitutive law for static shear behaviour of over consolidated clays. *Soils and Foundations*. 1990. Vol. 30. No. 1. Pp. 65-75.
15. Wang J.G., Fan J.H. An endochronic model for normally consolidated soils. *Journal of Chongqing University*. 1991. Vol. 14. No. 4. Pp. 1-7.
16. Bakhshiani A., Khoei A.R., Modif M. An endochronic plasticity model for powder compaction processes. *Journal of Material Processing Technology*. 2002. Vol. 125-126. Pp. 138-143.



17. Yeh W.C., Lin S.Y. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy. *International Journal of Plasticity*. 2006. Vol. 22. No. 1 Pp. 16-38.
18. Valanis K.C. Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory. *Archives of Mechanics*. 1980. Vol. 32. No. 2. Pp. 171-191.
19. Mosolov A.B. *Endokhronnaya teoriya plastichnosti* [Endochronic theory of plasticity]. Moscow: Institut problem mekhaniki AN SSSR, 1988. 44 p. (rus)
20. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. *Uprugost i neuprugost* [Elasticity and Anelasticity]. Moscow: Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 2011. Pp.151-154. (rus)
21. Sanders J.L. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions. *Proceedings of the Second U.S. National Congress of Applied Mechanics. Ann Arbor, MI, 14-18 June 1954*. New York: ASME, 1955. Pp. 455-460.
22. Klyushnikov V.D. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1959. Vol. 23. No. 4. Pp. 722-731. (rus)
23. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2010. No. 6. Pp.123-136. (rus)
24. Semenov A.S., Melnikov B.E., Gorokhov M.Yu. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU*. 2003. No. 3. Pp. 129-138. (rus)
25. Fedorovskiy G.D. *Vestnik Leningradskogo universiteta. Matematika, mekhanika, astronomiya*. 1990. No. 3(15). Pp. 87-91. (rus)
26. Bykov D.L., Konovalov D.N. *Uprugost i neuprugost* [Elasticity and Anelasticity]. Moscow: LENAND, 2006. Pp. 55-69. (rus)
27. Batdorf S.B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. NASA Technical Note 1871. 1949.
28. Kadashevich Yu.I., Novozhilov V.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1980. No. 3. Pp. 93-96. (rus)
29. Kadashevich Yu.I., Novozhilov V.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1968. Vol. 32. No. 5. Pp. 908-922. (rus)
30. Ilyushin A.A. *Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii* [Plasticity. Foundations of the General Mathematical Theory]. Moscow: Izdatelstvo AN SSSR, 1963. 271 p. (rus)
31. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 1997. No. 4. Pp. 99-105. (rus)
32. Bouckovalas G., Whitman R.V., Marr W.A. Permanent displacement of sand with cyclic loading. *Journal of Geotechnical Engineering*. 1984. Vol. 110. No. 11. Pp. 1606-1623.

**Full text of this article in Russian: pp. 82-86**