

Применение модифицированных условий пластичности для расчета безопасных давлений на грунты земляного полотна

*Аспирант А.Л. Калинин**

ФГБОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия»

Ключевые слова: условия пластичности; главные напряжения; безопасное давление

Пластические деформации, накапливаемые грунтами земляного полотна и материалами дорожных одежд, обуславливают ухудшение ровности покрытия. Это приводит к снижению скорости и безопасности движения. Исследования [1–5] показывают, что пластические деформации грунтов земляного полотна дорог, расположенных во 2-й и 3-й дорожно-климатических зонах, составляют до 80% необратимой деформации, накапливаемой всей дорожной конструкцией. В связи с этим высока актуальность работ, направленных на обеспечение требуемого сопротивления грунтов сдвигу.

Нормативные документы по проектированию дорожных одежд, действовавшие на территории РФ в разное время [6–11], в обязательном порядке регламентировали проверку условия сдвигоустойчивости грунтов земляного полотна и слоев дорожной одежды из слабосвязных материалов.

В современной трактовке [10–12] критерий сопротивления сдвигу грунтов и дискретных материалов дается условием:

$$T \leq T_{\text{пр}} / K_{\text{пр}}^{\text{тр}}, \quad (1)$$

где $K_{\text{пр}}^{\text{тр}}$ – требуемое минимальное значение коэффициента прочности, определяемое с учетом заданного уровня надежности; T – расчетное активное напряжение сдвига (часть сдвигающего напряжения, непогашенная внутренним трением) в расчетной (наиболее опасной) точке конструкции от действующей временной нагрузки; $T_{\text{пр}}$ – предельная величина активного напряжения сдвига (в той же точке), превышение которой вызывает нарушение прочности на сдвиг.

Предельная величина сопротивления сдвигу определяется по формуле [10–12]:

$$T_{\text{пр}} = c_N \cdot k_d + 0,1 \cdot \gamma_{\text{ср}} \cdot z_{\text{оп}} \cdot \text{tg} \varphi_{\text{ср}}, \quad (2)$$

где c_N – сцепление в грунте земляного полотна (или в промежуточном песчаном слое), принимаемое с учетом повторности нагрузки, МПа; k_d – коэффициент, учитывающий особенности работы конструкции на границе песчаного слоя с нижним слоем несущего основания; $z_{\text{оп}}$ – глубина расположения поверхности слоя, проверяемого на сдвигоустойчивость, относительно верха конструкции, см; $\gamma_{\text{ср}}$ – средневзвешенный удельный вес конструктивных слоев, расположенных выше проверяемого слоя, кг/см³; $\varphi_{\text{ср}}$ – расчетная величина угла внутреннего трения материала проверяемого слоя при статическом действии нагрузки.

Активное напряжение сдвига представляет собой левую часть объединенного условия пластичности Кулона–Мора [13, 14], в котором специалисты дорожной отрасли учитывают влияние усталостных процессов на величину сцепления и угла внутреннего трения [11, 12]. В этом случае параметры предельной прямой Кулона–Мора являются функцией не только влажности, но и числа приложенных расчетных нагрузок. В нормативных документах [11, 12] эта функция задана таблично. Вследствие этого условие пластичности Кулона–Мора необходимо дать в виде:

$$\frac{1}{\cos \varphi_N} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \text{tg} \varphi_N \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = c_N, \quad (3)$$

где c_N – сцепление в грунте земляного полотна, принимаемое по нормам [11, 12] с учетом количества повторных нагрузок, МПа; σ_1 и σ_3 – максимальное и минимальное главные напряжения, Па; φ_N – угол внутреннего трения, принимаемый по нормам [11, 12] с учетом количества повторных нагрузок, град.

Экспериментальные данные, полученные на основе испытания грунтов трехосным сжатием, показывают, что при их хрупком разрушении условие Кулона–Мора достаточно точно описывает предельные напряжения. При пластическом разрушении предельное состояние по условию Кулона–Мора наступает при деформации образцов 15–20% [15, 16]. То есть при наступлении предельного состояния образца высотой 10 см смещение его поверхности составляет 1,5–2 см. Глубина неровностей, формирующихся на покрытии в продольном направлении, оценивается величиной просветов под трехметровой рейкой [17]. Предельные значения этих просветов составляют 6 мм [17]. Предельные значения глубин продольных неровностей, рекомендуемые разными авторами [3, 18, 19], не превышают 5 мм. Допускаемая глубина колеи составляет 4 мм для дорог I категории; 7 мм, 12 мм, 25 мм и 30 мм для дорог II, III, IV и V технической категории соответственно [20]. Предельная глубина колеи на дорогах I и II категории составляет 20 мм; 35 мм на дорогах III, IV и V технической категории. Предельная глубина колеи, рассчитанная из условия обеспечения требуемого коэффициента сцепления колеса с мокрым покрытием, составляет 22 мм [21, 22]. Таким образом, к моменту наступления предельного состояния по условию Кулона–Мора пластические деформации грунтов земляного полотна превышают большинство предельных значений глубин продольных и поперечных неровностей покрытий автомобильных дорог.

В связи с таким обстоятельством особую важность приобретает задача поиска условия пластичности, по которому предельное состояние наступает при деформациях меньших, чем по критерию Кулона–Мора.

Одним из вариантов решения такой задачи может быть модификация оригинального условия Кулона–Мора, которую можно выполнить, используя схемы Р.Ф. Црайга [23] и Г.К. Арнольда [24].

Р.Ф. Црайг [23], применяя теорию Ренкина и условие Кулона–Мора для решения задачи предельного равновесия, показал, что альтернативой величине $\tan^2(\pi/4 - \varphi/2)$ является зависимость $(1 - \sin\varphi)/(1 + \sin\varphi)$. Рассматривая трактовку Р.Ф. Црайга для активного ренкиновского состояния, можно записать условие Кулона–Мора и его предельное максимальное главное напряжение в виде формул:

$$\left(\sigma_1 - \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \cdot \sigma_3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}} = c, \quad \sigma_{1п} = 2 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}} + \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \cdot \sigma_3, \quad (4)$$

где $\sigma_{1п}$ – предельное максимальное главное напряжение для принятого условия пластичности при заданном удерживающем напряжении σ_3 , МПа.

Г.К. Арнольд [24], анализируя работу Р.Ф. Црайга, заметил, что экспериментальные значения минимальных главных напряжений, необходимые для возникновения предельного состояния грунта, не превышают величин, вычисленных из условия Кулона–Мора. Базируясь на экспериментальных данных, Г.К. Арнольд [24] модифицировал формулы Р.Ф. Црайга и получил зависимости для расчета предельной величины минимального главного напряжения. Преобразуя формулы Г.К. Арнольда для активного ренкиновского состояния, найдем условие пластичности и его предельное максимальное напряжение по формулам:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_1 - \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \cdot \sigma_3 \right) = c. \quad \sigma_{1п} = 2 \cdot c + \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \cdot \sigma_3. \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), несложно убедиться в том, что по условию Кулона–Мора (4) предельное состояние возникает при более высоких значениях максимального главного напряжения, чем по эмпирическому условию Г.К. Арнольда, и, наоборот, касательные напряжения по (5) выше, чем по (4).

Отметим, что условия пластичности (3) и (4) получены расчетно-аналитическим путем [25]. Первая формула (5) получена из формул, рекомендованных Г.К. Арнольдом для расчета предельных значений минимальных главных напряжений для активного ренкиновского состояния. Эта формула реализует экспериментально-феноменологический подход, в котором основное Калинин А.Л. Применение модифицированных условий пластичности для расчета безопасных давлений на грунты земляного полотна

внимание уделяется экспериментальному изучению поведения реальных материалов под внешней нагрузкой при разрушении [25]. Несмотря на различие в подходах, применимы все эти формулы.

Используя идею Г.К. Арнольда об эмпирической корректировке условия Кулона–Мора, формулы (5) можно представить в виде:

$$\left(\sigma_1 - \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = c, \quad \sigma_{1n} = 2 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3, \quad (6)$$

где B – параметр материала, определяемый на основе экспериментальных данных.

Параметр материала B следует подбирать на основе анализа экспериментальной зависимости вертикальной деформации образца от главных напряжений. На этой зависимости определяется местоположение точки предельной деформации, например, $\varepsilon_{np}=8\%$, для которой определяется предельное максимальное напряжение σ_{1n} при известном минимальном напряжении σ_3 . Подстановка установленных таким образом значений σ_{1n} и σ_3 в формулу (6) с ее последующим решением относительно B позволяет определить величину этого параметра.

Другим вариантом решения задачи является модификация известных критериев прочности твердых тел и поиск среди модифицированных условий наиболее пригодного для определения предельных напряжений. Для этого необходимо найти взаимосвязь пределов прочности на одноосное сжатие и растяжение с параметрами условия Кулона–Мора и, используя найденные закономерности, модифицировать оригинальные критерии прочности. Уравнения модифицированных моделей нужно решить относительно предельной величины максимального главного напряжения, а вычисленные по ним предельные значения напряжений следует сравнить с экспериментальными данными, полученными при трехосных испытаниях.

В рамках критерия Друкера–Прагера для сжатия и растяжения при возникновении напряженного состояния, характеризующегося условием $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, прочность дискретного материала можно определить по формулам:

$$R_c = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad R_p = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad (7)$$

где R_c – прочность на одноосное сжатие, МПа; R_p – прочность на одноосное растяжение, МПа.

Подстановка (7) в известные критерии позволяет их модифицировать таким образом, что пределы прочности на одноосное сжатие и растяжение будут заменены параметрами предельной прямой Кулона–Мора. Модифицированные таким образом условия пластичности приведены в таблице 1⁵. Для примера рассмотрим модификацию критерия Мариотта. В оригинальном виде предельное состояние по этому критерию дают уравнением:

$$\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = R_c. \quad (8)$$

Для напряженного состояния $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ критерий примет вид:

$$\sigma_1 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_3 = R_c. \quad (9)$$

Подставив (7) в (9), получим:

$$\sigma_1 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_3 = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (10)$$

После преобразований (10) примет вид:

$$\frac{(\sigma_1 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_3) \cdot (1 - \sin \varphi)}{2 \cdot \cos \varphi} = c. \quad (11)$$

В таблице 1, кроме модифицированных моделей, даны модели Кулона–Мора и Друкера–Прагера (6), полученные на основе использования идеи Г.К. Арнольда.

⁵ Модификация условий пластичности выполнена автором совместно с Г.В. Долгих и А.С. Александровым.

Таблица 1. Оригинальные и модифицированные условия пластичности при $\sigma_2 = \sigma_3$

Наименование критерия	Математическое выражение предельного состояния по критерию при $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$	
	Оригинальное	Модифицированное автором
1	2	3
1. Критерий Галилея [26]	$\sigma_1 = R_c$	$\frac{\sigma_1 \cdot (1 - \sin \varphi)}{2 \cdot \cos \varphi} = c$
2. Критерий Мариотта [26]	$\sigma_1 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_3 = R_c$	$\frac{(\sigma_1 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_3) \cdot (1 - \sin \varphi)}{2 \cdot \cos \varphi} = c$
3. Критерий Кулона–Сен-Венана–Леви [26]	$\sigma_1 - \sigma_3 = R_c$	$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot (1 - \sin \varphi)}{2 \cdot \cos \varphi} = c$
4. Критерий Губера–Мизеса–Генки [26]	$\sigma_1 - \sigma_3 = R_c$	$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot (1 - \sin \varphi)}{2 \cdot \cos \varphi} = c$
5. Модифицированный критерий Бельтрами [26]	$\sigma_1^2 + 2 \cdot \sigma_3^2 \cdot (1 - \mu) - 4 \cdot \mu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 = R_c^2$	$\frac{\sigma_1^2 + 2 \cdot \sigma_3^2 \cdot (1 - \mu) - 4 \cdot \mu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3}{4 \cdot \cos^2 \varphi} \times$ $\times (1 - \sin \varphi)^2 = c^2$
6. Критерий Сдобырева [27, 28]	$\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_3 = R_c$	$\frac{(2 \cdot \sigma_1 - \sigma_3) \cdot (1 - \sin \varphi)}{4 \cdot \cos \varphi} = c$
7. Критерий Писаренко–Лебедева [28, 29]	$\sigma_1 - \frac{3 \cdot (1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 = R_c$	$\left(\sigma_1 - \frac{3 \cdot (1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 \right) \cdot \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cdot \cos \varphi} = c$
8. Критерий Мора [26, 28]	$\sigma_1 - \frac{3 \cdot (1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 = R_p$	$\left(\sigma_1 - \frac{3 \cdot (1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 \right) \cdot \frac{3 - \sin \varphi}{6 \cdot \cos \varphi} = c$
9. Критерий Кулона – Мора [13, 14]	$\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = c$	$\left(\sigma_1 - \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = c$
10. Оригинальный критерий Друкера–Прагера [30]	$\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = c$	$\left(\sigma_1 - \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \sigma_3 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = c$
11. Оригинальная модель Cam Clay [31]	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{M \cdot p_3} + \ln \left(\frac{p_0}{p_3} \right) = 0$	нет
12. Критерий модифицированной модели Cam Clay [32]	$\frac{1}{3} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{p_3^2} + M \cdot \left(\frac{p_0}{p_3} - 1 \right) = 0$	нет

Левая часть модифицированных условий пластичности представляет собой касательное напряжение, возникающее по этим условиям, а правая часть является прочностью, характеризуемой величиной сцепления. Для учета условий работы грунта земляного полотна необходимо заменить сцепление предельной величиной касательных напряжений, определяемой по формуле (2). Таким образом, прочностная характеристика во всех модифицированных условиях одинаковая, а касательные напряжения различны. Обоснование и выбор условия пластичности можно осуществить при помощи трехосных испытаний, сопоставляя предельное напряжение по условию с его экспериментальной величиной, при возникновении которой достигается предельная деформация. Для решения этой задачи необходимо обоснование предельных значений деформации образца при трехосных испытаниях грунтов. На данном этапе исследований выполнить такое обоснование затруднительно, так как требуется сопоставление

результатов различных экспериментов, например, напряжений и деформаций образца при трехосных испытаниях, давлений и осадок при штамповых испытаниях.

На основании вышеизложенного автор предлагает иной путь решения задачи обеспечения сопротивления сдвигу грунтов земляного полотна. Условие сдвигоустойчивости грунтов земляного полотна можно представить критерием недопущения давлений, превышающих некоторое предельное значение, которое называют безопасным давлением [33]. Критерий обеспечения сдвигоустойчивости грунтов можно дать в виде:

$$p \leq p_6 / K_{пр}^{тр}, \quad (12)$$

где p – давление, передаваемое дорожной одеждой на земляное полотно, Па; p_6 – безопасное давление на грунт земляного полотна, вычисляемое из выбранного условия пластичности, Па.

Такой критерий расчета по обеспечению сдвигоустойчивости применяется при расчете оснований насыпей.

Первое решение задачи о величине безопасного давления выполнено Н.П. Пузыревским [34]. В основе решения лежит условие Кулона–Мора, в которое подставляются главные напряжения, рассчитываемые по выражению Митчелла [33], дополненному боковой равномерно распределенной пригрузкой и собственным весом грунта неустойчивой области [34, 35]. Определяемые таким образом главные напряжения подставляются в условие Кулона–Мора, из решения уравнения получают формулу для определения ординаты, ограничивающей неустойчивую область [35]. Далее, полагая, что максимальная глубина распространения зон неустойчивых областей в полупространстве образуется при определении угла видимости разностью половины числа пи и угла внутреннего трения, получают формулу:

$$p = \left(Z_{\max} + h + \frac{c}{\gamma} \cdot ctg \varphi \right) \cdot \frac{\pi \cdot \gamma}{ctg \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + \gamma \cdot h, \quad (13)$$

где p – давление от нагрузки, равномерно распределенной по бесконечной полосе или в основании насыпи, Па; γ – вес грунта в пределах боковой пригрузки, Н/м³; h – толщина боковой пригрузки, м; Z_{\max} – максимальная глубина распространения зон неустойчивых областей в полупространстве, м; φ и c – угол внутреннего трения и сцепления грунта, радиан и Па соответственно.

При подстановке в (13) $Z_{\max}=0$ это выражение примет вид формулы Н.П. Пузыревского [33, 34]. В.Н. Яромко модифицировал модель Н.П. Пузыревского для оценки коэффициента прочности дорожной одежды [36]. Оценивая применимость методов предельного равновесия к расчетам дорожных одежд, следует отметить, что все оригинальные решения являются приближением, так как базируются на представлении Митчелла. Суть этого приближения состоит в том, что формулы, описывающие затухание главных напряжений по глубине от нагрузки, равномерно распределенной по круглой площадке, заменяются представлением, используемым для определения напряжений от полосовой нагрузки. Поэтому автор данной статьи считает, что наряду с такими решениями возможен поиск нового, иного приближения. В этом направлении было выполнено несколько исследований [33, 37]. В этих работах для расчета напряжений используются решения, полученные для нагрузок, распределенных по круглой площадке. Так, в исследовании [37] авторы применили формулу И.И. Кандаурова, позволяющую рассчитывать вертикальное нормальное напряжение в зернистой среде. Для точки, лежащей на пересечении оси Z и линии, ограничивающей активную зону, получена формула для расчета критических давлений [37].

За рубежом для определения допускаемых нагрузок на грунты земляного полотна и дискретные материалы дорожных одежд применяют теорию приспособляемости. Основанием для применения этой теории послужили данные М.Ф. Кента [38], согласно которым при испытании дорожных одежд в некоторых конструкциях наблюдалась стабилизация деформации. Р. Шарп [39] и И. Коллинз [40, 41] применили теорию приспособляемости к расчету дорожных конструкций. Суть этой теории состоит в том, что материалы обладают тремя уровнями приспособляемости (пределы упругой, эластической и пластической приспособляемости). По своей сути предел пластической приспособляемости близок к понятию безопасного давления. Безопасное давление ограничивает диапазон давлений, при которых материал работает в стадии уплотнения, не испытывая деформаций сдвига. Предел пластической приспособляемости ограничивает величину

Калинин А.Л. Применение модифицированных условий пластичности для расчета безопасных давлений на грунты земляного полотна

напряжений, при возникновении которых материал испытывает некоторые пластические деформации, но по мере реализации повторных нагрузок эти деформации затухают и, в конечном итоге, становятся равными нулю, а в дальнейшем материал испытывает только обратимые деформации.

Для решения задачи о безопасных давлениях на материалы дорожных конструкций рассмотрим возможность подстановки в условия пластичности главных напряжений, рассчитываемых по формулам [16], представленным в таблице 2.

Таблица 2. Формулы для расчета максимального и минимального главных напряжений от нагрузки, распределенной по гибкому круглому штампу

Максимальное главное напряжение	$\sigma_1 = p_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\left[1 + (R/Z)^2 \right]^{1,5}} \right)$
Минимальное главное напряжение	$\sigma_2 = \sigma_3 = p_0 \cdot \left(\frac{1 + 2 \cdot \mu}{2} - \frac{1 + \mu}{\left[1 + (R/Z)^2 \right]^{0,5}} + \frac{1}{2 \cdot \left[1 + (R/Z)^2 \right]^{1,5}} \right)$

Примечание: p_0 – давление от штампа, Па; R – радиус штампа, м; Z – расстояние (глубина) от поверхности до рассматриваемой точки, м; где μ – коэффициент Пуассона материала.

Из анализа зависимостей таблицы 2 следует:

- 1) минимальные главные напряжения на поверхности ($Z = 0$) имеют значения выше величин, при которых материал находится в состоянии компрессионного сжатия [33];
- 2) на некоторой глубине эти напряжения становятся отрицательными, то есть из сжимающих превращаются в растягивающие.

Эти обстоятельства не соответствуют условиям работы дискретных материалов. При воздействии равномерно распределенной нагрузки непосредственно вблизи штампа имеет место компрессия (материал сжимается без возможности бокового расширения), а с увеличением глубины материал работает с некоторой возможностью бокового расширения. Так как минимальные главные напряжения затухают по глубине более интенсивно по сравнению с максимальными, то по мере удаления от поверхности степень бокового расширения увеличивается [42, 43]. Таким образом, в дискретных материалах реализуется трехосное сжатие, при котором σ_1 и σ_3 имеют одинаковый знак в любой точке. Это сдерживает применение формул таблицы 2 в решении задачи о безопасных давлениях, в связи с чем очевидна актуальность работ, направленных на поиск альтернативных решений.

Одним из таких решений является выражение, полученное в работе [42], в соответствии с которым минимальное главное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \alpha \cdot \xi \cdot \sigma_1 = \alpha \cdot \mu \cdot \sigma_1 / (1 - \mu), \quad (14)$$

где ξ – коэффициент бокового давления; α – коэффициент, характеризующий степень бокового расширения.

Из (14) следует, что введение дополнительного множителя, имеющего значение меньше 1, позволяет описывать работу материала с определенной возможностью бокового расширения. Применение (14) требует решения задачи об изменении величины α по глубине. В работе [37] авторам удалось связать коэффициент α с известным в механике грунтов коэффициентом бокового обжатия β и на основе выражения В.Г. Федоровского и С.Г. Безволева [43] для β получить формулы для расчета α .

В соответствии с этим решением коэффициент α определяется по формуле:

$$\alpha = \left(\alpha_c - \sqrt{1 - K^2} \cdot (\alpha_c - \alpha_u) \right), \quad (15)$$

где α_c – значение коэффициента α на поверхности (для равномерно распределенной нагрузки $\alpha_c = 1$, а для гибкого штампа $\alpha_c \approx 1$); α_u – значение коэффициента α на бесконечности, где условно реализуется одноосное сжатие; K – коэффициент затухания максимального главного напряжения по глубине в сечении, проходящем через ось симметрии нагрузки.

Калинин А.Л. Применение модифицированных условий пластичности для расчета безопасных давлений на грунты земляного полотна

В том случае, если на бесконечности имеют место условия $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1$, а $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E$ (E – модуль деформации (упругости) материала), то $\alpha = 0$, а формула (15) принимает вид:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - K^2}. \quad (16)$$

Так как по оси симметрии нагрузки, распределенной по круглой площадке, направления главных напряжений совпадают с направлением осей z , x и y и имеют место равенства $\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_2 = \sigma_x$ и $\sigma_3 = \sigma_y$, то, используя формулы (14) и (16), можно модифицировать известные модели, предназначенные для расчета вертикальных напряжений. При этом максимальное главное напряжение определяется по формуле оригинальной модели, а минимальное главное напряжение рассчитывается по (14) с подстановкой вместо α уравнения (16). Модифицированные таким образом модели расчета главных напряжений приведены в работе [44].

После дополнения этих моделей объемными силами от веса дорожной одежды и грунта, расположенного в пределах неустойчивой области, напряжения можно определить по формулам:

$$\sigma_1 = p \cdot K_1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i + \gamma_{i+1} \cdot Z_{max}, \quad (17)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left(p \cdot K_1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i + \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - K_1^2} \right), \quad (18)$$

где K_1 – коэффициент затухания максимального главного напряжения по глубине в сечении, расположенном на оси симметрии нагрузки, которая распределена по круглой площадке, и определяемый по индивидуальной для каждой модели формуле [44].

Подставив (17) и (18) в условия пластичности таблицы 1 и решив эти условия относительно p , получим формулы для определения величины безопасного давления для каждого критерия таблицы 1.

Эти формулы представлены в таблице 3.

Таблица 3. Формулы для расчета безопасных давлений для различных модифицированных условий пластичности

Наименование критерия	Полученное выражение
1	2
1. Модифицированный критерий Галилея	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i + \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
2. Модифицированный критерий Мариотта	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \mu^2}{1 - \mu} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - K_1^2} \right) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i - \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
3. Модифицированный критерий Кулона–Сен-Венана–Леви	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - K_1^2} \right) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i - \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$

Наименование критерия	Полученное выражение
4. Модифицированный критерий Губера–Мизеса–Генки	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i - \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
5. Модифицированный критерий Бельтрами	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\sqrt{\frac{4 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot (1 - \mu) \cdot \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right)^2 \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2})^2 - 4 \cdot \mu \cdot \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right)}} \right) - \frac{1}{K_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i + \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
6. Модифицированный критерий В.П. Сдобырева	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{4 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cdot \left(2 - \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i - \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
7. Модифицированный критерий Писаренко–Лебедева	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot (1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi} \cdot \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i - \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
8. Модифицированный критерий Мора	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{(3 - \sin \varphi) \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot (1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi} \cdot \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right)} - \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i \right)$
9. Оригинальный критерий Кулона–Мора	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\left(1 - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right) - \sin \varphi \cdot \left(1 + \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i + \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$
10. Оригинальный критерий Друкера–Прагера	$p_{i+1} = \frac{1}{K_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\left(1 - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right) - \sin \varphi \cdot \left(1 + \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (1 - \sqrt{1 - K_1^2}) \right)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i + \gamma_{i+1} \cdot Z_{max} \right)$

Для обоснованного выбора формулы определения безопасного давления автором совместно с Г.В. Долгих выполнены штамповые испытания на вновь построенном земляном полотне автомобильной дороги Петровка–Калиновка в Омской области. В состав установки входят: жесткий круглый штамп, диаметром 37 см; реперная балка, к которой крепятся два индикатора часового типа ИЧ-100, фиксирующих осадку штампа; гидравлический домкрат с нагрузкой 5 т и ДОСМ, снабженный индикатором для определения усилия, сообщаемого штампом. Фрагмент штамповых испытаний представлен на рисунке 1.

Необходимость таких испытаний состоит в том, что безопасные давления, определяемые по формулам таблицы 3, представляют собой величину давления, при котором в наиболее опасной Калинин А.Л. Применение модифицированных условий пластичности для расчета безопасных давлений на грунты земляного полотна

точке земляного полотна возникает предельное состояние для условия пластичности, положенного в основу вывода формулы. В этом случае каждому условию пластичности соответствует свое индивидуальное значение безопасного давления. Цель штамповых испытаний заключалась в определении экспериментальной величины безопасного давления и оценке ее соответствия значениям, вычисляемым по формулам таблицы 3. В качестве критерия определения экспериментальной величины безопасного давления рассматривалось два условия.



Рисунок 1. Общий вид устройства нагружения

В первом случае под безопасным давлением понималось давление, при котором наблюдается переход от линейных осадок (стадия уплотнения) к нелинейным деформациям (стадия сдвигов). При таких давлениях осадки штампа составляли 3–4 мм. Для допускаемой глубины колеи и предельных значений продольных неровностей дорог I–II технической категории это достаточно большие осадки. Поэтому в качестве второго критерия определения экспериментальной величины безопасного давления принималось условие достижения осадкой некоторой предельной величины. В качестве этой предельной осадки принята половина допускаемой глубины колеи для дорог I–II технической категории, то есть $S=2$ мм. Таким образом, по завершению экспериментов имелось два значения безопасного давления. Наименьшая величина этого давления рекомендуется для дорог I–II технической категории, а наибольшая – III–IV технической категории.

Таблица 4. Результаты расчета и экспериментального определения безопасных давлений

№ испытания	Параметры грунта		Безопасные давления, МПа			
	с, МПа	φ, град.	Экспериментальные значения		Результаты расчета по формуле	
			При S=2мм	Для начала стадии сдвигов	Табл. 3 (критерий Писаренко-Лебедева)	Работы [33]
1	0,022	29	0,098	0,140	0,083	0,133
2	0,024	27	0,102	0,140	0,089	0,138
3	0,020	29	0,086	0,125	0,076	0,121
4	0,025	26	0,091	0,140	0,091	0,140
5	0,020	26	0,078	0,124	0,073	0,112
6	0,021	25	0,082	0,125	0,076	0,115

В ходе экспериментов нагрузку прикладывали ступенями. Каждую ступень нагрузки выдерживали до условной стабилизации осадки. В качестве меры условной стабилизации принята скорость осадки, которая не должна превышать 0,01 мм/мин для каждого индикатора, измеряющего вертикальное смещение штампа. Испытания проводили до появления устойчивой нелинейной зависимости осадки от давления. В таблице 4 приведены экспериментальные безопасные давления, а также результаты расчета безопасных давлений по формуле, опубликованной в работе [33], а также по выражению таблицы 3, полученному на основе модифицированного условия Писаренко-Лебедева.

Выводы

1. Из представленных материалов следует, что наряду с условием (1) можно предложить принципиально новый критерий расчета дорожных одежд. В соответствии с этим критерием давление, передаваемое конструкцией на земляное полотно, не должно превышать безопасной величины, определяемой по одной из формул таблицы 3.

2. Формулы таблицы 3 позволяют определять безопасные давления для различных условий пластичности от нагрузки, распределенной по площади круглого гибкого штампа. Такое решение дано впервые.

Калинин А.Л. Применение модифицированных условий пластичности для расчета безопасных давлений на грунты земляного полотна

3. Анализ результатов штамповых испытаний показал, что для определения безопасных давлений наиболее пригодны формулы, полученные из модифицированных моделей Писаренко–Лебедева (таблица 3) и Арнольда (опубликована в работе [33]). Формулу для расчета безопасных давлений по модифицированному условию Писаренко–Лебедева можно рекомендовать для проектирования дорожных одежд дорог I и II технической категории. Формула, полученная автором совместно с А.С. Александровым и Г.В. Долгих и опубликованная в работе [33], приводит к несколько более высоким значениям безопасного давления. Следовательно, эту формулу можно рекомендовать для расчета дорожных одежд дорог III и IV категории.

Статья подготовлена при поддержке гранта РФФИ №12-08-98008-р_сибирь_a

Литература

1. Александров А.С. Расчет пластических деформаций материалов и грунтов дорожных конструкций при воздействии транспортной нагрузки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. №2. С. 3–11.
2. Жустарева Е.В. Влияние плотности связного грунта в рабочем слое земляного полотна на остаточные деформации нежестких дорожных одежд: Автореф. дисс....канд. техн. наук. М.: Изд-во МАДИ, 2000. 20 с.
3. Золотарь И.А. К определению остаточных деформаций в дорожных конструкциях при многократных динамических воздействиях на них подвижных транспортных средств. Санкт-Петербург: Изд-во ВАТТ, 1999. 31 с.
4. Каныгина С.Ю. Прогнозирование остаточных деформаций дорожных одежд нежесткого типа на земляном полотне из глинистых грунтов: Автореф. дисс....канд. техн. наук. М.: Изд-во МАДИ, 1999. 20 с.
5. Фадеев В.Б. Влияние остаточных деформаций грунта земляного полотна на колеобразование на проезжей части дорог с нежесткими дорожными одедами: Автореф. дисс....канд. техн. наук. М.: Изд-во МАДИ, 1999. 21 с.
6. Инструкция по проектированию дорожных одежд нежесткого типа. ВСН 46-72. М.: Транспорт, 1973. 110 с.
7. Инструкция по проектированию жестких дорожных одежд. ВСН 197-83. М.: Минтрансстрой, 1984. 129 с.
8. Инструкция по проектированию жестких дорожных одежд. ВСН 197-91. М.: Союздорнии, 1992. 130 с.
9. Инструкция по проектированию дорожных одежд нежесткого типа. ВСН 46-83. М.: Транспорт, 1985. 157 с.
10. Методические рекомендации по проектированию жестких дорожных одежд (взамен ВСН 197-91) / Минтранс России. 2003.
11. Проектирование нежестких дорожных одежд. ОДН 218-046-01. М.: ГСДХ Минтранса России, 2001. 146 с.
12. МОДН 2-2001. Проектирование нежестких дорожных одежд / СоюзДорНИИ. 2001.
13. Кривисский А.М. Принципы назначения конструкций дорожных одежд нежесткого типа на магистральных автомобильных дорогах: Автореф. дисс....докт. техн. наук. Л.: ЛИСИ, 1963. 31 с.
14. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Изд-во физико-математической литературы, 1960. 242 с.
15. ГОСТ 12248-2010. Грунты. Методы лабораторного определения характеристик прочности и деформируемости.
16. Семенова Т.В., Гордеева С.А., Герцог В.Н. Определение пластических деформаций материалов, используемых в дорожных конструкциях // Вестник ТГАСУ. 2012. №4. С. 249–257.
17. СНиП 3.06.03-85 Автомобильные дороги.
18. Смирнов А.В., Малышев А.А., Агалаков Ю.А. Механика устойчивости и разрушения дорожных конструкций. Омск: СибАДИ, 1997. 91с.
19. Александров А.С. Критерии расчета дорожных конструкций по ровности, допускаемые и предельные неровности // Вестник гражданских инженеров. 2008. №4. С. 97–104.

20. Рекомендации по выявлению и устранению колебаний на нежестких дорожных одеждах: ОДМ. М.: Росавтодор, 2002. 179 с.
21. Александров А.С., Гордеева С.А., Шпилько Д.Н. О допускаемых и предельных значениях неровностей асфальтобетонных покрытий дорожных одежд жесткого типа // Автомобильная промышленность. 2011. №2. С. 31–35.
22. Александров А.С., Александрова Н.П., Семенова Т.В. Критерии проектирования шероховатых асфальтобетонных покрытий из условия обеспечения безопасности движения // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2009. №2. С. 66–73.
23. Craig R.F. Soil Mechanics. London–New York: Taylor & Francis, 2004. 447 p.
24. Arnold G.K. Rutting of Granular Pavements // Thesis submitted to The University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy, November 2004. 417 p.
25. Литвинский Г.Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов. Донецк: Изд-во Норд-Пресс, 2008. 207 с.
26. Гольденблат И.И., Кнопов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
27. Сдобырев В.П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. №6. С. 93–99.
28. Потапова Л.Б., Ярцев В.П. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? М.: Машиностроение-1, 2005. 244 с.
29. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова Думка, 1976. 416 с.
30. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis of limit design // Quarterly of applied mechanics. 1952. Vol. 10. No.2. Pp. 157–165.
31. Roscoe K., Schofield A., Wroth C. On the yielding of soils // Geotechnique. 1958. Vol. 8. No.1. Pp. 22–53.
32. Roscoe K., Schofield A., Thurairajah A. Yielding of clays in state wetter than critical // Geotechnique. 1963. Vol. 13. No.3. Pp. 211–240.
33. Александров А.С., Долгих Г.В., Калинин А.Л. О допускаемых давлениях на грунты земляного полотна и слои дорожной одежды // Наука и техника в дорожной отрасли. 2012. №2. С. 10–13.
34. Пузыревский Н.П. Теория напряженности землистых грунтов. Л.: Изд-во ЛИИПС, 1929. 68 с.
35. Березанцев В.Г. Расчет прочности оснований сооружений. Ленинград, 1960. 137 с.
36. Яромко В.Н. О совершенствовании проектирования дорожных одежд нежесткого типа // Наука и техника в дорожной отрасли. 2008. №2. С. 28–32.
37. Баданин А.Н., Бугров А.К., Кротов А.В. Обоснование первой критической нагрузки на зернистую среду супесчаного основания // Инженерно-строительный журнал. 2012. №9. С. 29–34.
38. Kent M.F. AASHO road test vehicle operating costs related to gross weight. Highway Research Board Special Report 73. 1962. Pp. 149–165.
39. Sharp R.W., Booker J.R. Shakedown of Pavements under Moving Surface Loads // Journal of Transportation Engineering. ASCE. 1984. Vol. 110. No.1. Pp. 1–14.
40. Collins I.F., Cliffe P.F. Shakedown in frictional materials under moving surface loads // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1987. Vol. 11. No.4. Pp. 409–420.
41. Collins I.F., Wang A.P., Saunders L.R. Shakedown-Theory and the Design of Unbound Pavements. Australian Road Research Board // Road and Transport Research. 1993. Vol. 2. No.4. Pp. 28–37.
42. Александров А.С., Долгих Г.В., Юрьев Д.В. Расчет главных напряжений в слоях дорожных конструкций из дискретных материалов // Транспортное строительство. 2011. №7. С. 17–22.
43. Федоровский В.Г., Безволев С.Г. Расчет осадок фундаментов мелкого заложения и выбор модели основания для расчета плит // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2000. № 4. С. 10–18.
44. Александров А.С., Александрова Н.П., Долгих Г.В. Модифицированные модели для расчета главных напряжений в дорожных конструкциях из дискретных материалов // Строительные материалы. 2012. №10. С. 14–17.

Александр Львович Калинин, г. Омск, Россия

Тел. моб.: +7(965)985-85-72; эл. почта: a1exsandr55ne@mail.ru

© Калинин А.Л., 2013

doi: 10.5862/MCE.39.4

Application of modified yield criteria for calculation of safe pressures on the subgrade soil

A.L. Kalinin,*Siberian State Automobile and Highway Academy, Omsk, Russia
+7(965)985-85-72; e-mail: a1exsandr55ne@mail.ru*

Key words

yield criteria; principal stresses; safe pressure

Abstract

The article deals with design the road constructions by ensuring the shear resistance of the subgrade soil and pavement layers made of weakly cohesive materials.

The analysis of Mohr–Coulomb plasticity criterion was performed and it was found, that in case of a limiting condition state by this criterion pavement smoothness goes out of the limits regulated by normative documents. On the basis of analysis of Drucker–Prager yield criterion there were obtained formulas connecting ultimate strength uniaxial compression and tension with the parameters of Mohr–Coulomb failure envelope. Substitution of these expressions into the original criteria for the strength of materials, that are continuums, allowed modifying certain conditions so that the tensile strength changed the angle of internal friction and cohesion.

A number of dependencies for calculating safe pressure on discrete material of half-space is obtained from the modified conditions of plasticity. Comparison of the numerical results to experimental data allowed determining the most suitable formula for the design of road constructions.

References

1. Aleksandrov A.S. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2009. No.2. Pp. 3–11. (rus)
2. Zhustareva E.V. *Vliyanie plotnosti svyaznogo grunta v rabochem sloye zemlyanogo polotna na ostatochnyye deformatsii nezhestkikh dorozhnykh odezhd* [The impact of cohesive soil consistency in working layer of the subgrade on the residual deformations of flexible pavement]. Abstract of a PhD thesis. Moscow: Izd-vo MADI, 2000. 20 p. (rus)
3. Zolotar I.A. *K opredeleniyu ostatochnykh deformatsiy v dorozhnykh konstruktsiyakh pri mnogokratnykh dinamicheskikh vozdeistviyakh na nikh podvizhnykh transportnykh sredstv* [On the estimation of residual deformations in road structures with repeated dynamic impact of transport vehicle]. Abstract of a PhD thesis. Saint–Petersburg: Izd-vo VATT, 1999. 31 p. (rus)
4. Kanygina S.Yu. *Prognozirovaniye ostatochnykh deformatsiy dorozhnykh odezhd nezhestkogo tipa na zemlyanom polotne iz glinistykh gruntov* [Forecasting of residual deformations of flexible pavement on the clay soil subgrade]. Abstract of a PhD thesis. Moscow: Izd-vo MADI, 1999. 20 p. (rus)
5. Fadeev V.B. *Vliyaniye ostatochnykh deformatsiy grunta zemlyanogo polotna na koleyeobrazovaniye na proyezzhey chasti dorog s nezhestkimi dorozhnymi odezhdami* [The impact of residual deformations of soil subgrade on rutting on the traffic area of the flexible pavement]. [Abstract of a PhD thesis. Moscow: Izd-vo MADI, 1999. 21 p. (rus)
6. VSN 46-72. *Instruktsiya po proyektirovaniyu dorozhnykh odezhd nezhestkogo tipa* [Military construction standards. Instructions for designing flexible pavement]. Moscow: Transport, 1973. 110 p. (rus)
7. VSN 197-83. *Instruktsiya po proyektirovaniyu zhestkikh dorozhnykh odezhd* [Military construction standards. Instructions for designing rigid pavement]. Moscow: Mintransstroy, 1984. 129 p. (rus)
8. VSN 197-91. *Instruktsiya po proyektirovaniyu zhestkikh dorozhnykh odezhd* [Military construction standards. Instructions for designing rigid pavement]. Moscow: Soyuzdornii, 1992. 130 p. (rus)
9. VSN 46-83. *Instruktsiya po proyektirovaniyu dorozhnykh odezhd nezhestkogo tipa* [Military construction standards. Instructions for designing flexible pavement]. Moscow: Izd-vo Transport, 1985. 157 p. (rus)
10. *Metodicheskiye rekomendatsii po proyektirovaniyu zhestkikh dorozhnykh odezhd* [Guideline on designing rigid pavement]. Mintrans, 2003 (rus)

11. ODN 218-046-01. *Proyektirovaniye nezhestkikh dorozhnykh odezhd* [Trade road standards. Designing flexible pavement]. Moscow: GSDKh Mintransa Rossii, 2001. 146 p. (rus)
12. MODN 2-2001. *Proyektirovaniye nezhestkikh dorozhnykh odezhd* [Interstate trade road standards. Designing flexible pavement]. SoyuzDorNII, 2001. (rus)
13. Krivisskiy A.M. *Printsipy naznacheniya konstruksii dorozhnykh odezhd nezhestkogo tipa na magistralnykh avtomobilnykh dorogakh* [Principles of fixing flexible pavement on primary roads]. Abstract of a PhD thesis. Leningrad: LISI, 1963. 31 p. (rus)
14. Sokolovskiy V.V. *Statika sypuchei sredy* [Granulated solids statics]. Moscow: Izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury, 1960. 242 p. (rus)
15. GOST 12248-2010. *Grunty. Metody laboratornogo opredeleniya kharakteristik prochnosti i deformiruемости* [National standard. Soil. Methods of laboratory determination of strength and deformability characteristics].
16. Semenova T.V., Gordeeva S.A., Gertsog V.N. *Vestnik TGASU*. 2012. No.4. Pp. 249–257. (rus)
17. SNiP 3.06.03-85. *Avtomobilnyye dorogi* [Standards and regulations in construction Highways]. (rus)
18. Smirnov A.V., Malyshev A.A., Agalakov Yu.A. *Mekhanika ustoychivosti i razrusheniya dorozhnykh konstruksiy* [Stability and fracture mechanics of road structures]. Omsk: SibADI, 1997. 91p. (rus)
19. Aleksandrov A.S. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2008. No.4. Pp. 97–104.
20. *Rekomendatsii po vyyavleniyu i ustranenyu koley na nezhestkikh dorozhnykh odezhdakh: ODM* [Recommendations on exposure and elimination of ruts on flexible pavement: trade road methodic]. Moscow: Rosavtodor, 2002. -179 p.
21. Aleksandrov A.S., Gordeeva S.A., Shpilko D.N. *Avtomobilnaya promyshlennost*. 2011. No.2. Pp. 31–35. (rus)
22. Aleksandrov A.S., Aleksandrova N.P., Semenova T.V. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2009. No.2. Pp. 66–73. (rus)
23. Craig R.F. *Soil Mechanics*. London–New York: Taylor & Francis, 2004. 447 p.
24. Arnold G.K. *Rutting of Granular Pavements*. Thesis submitted to The University of Nottingham for the degree of Doctor of Philosophy, November 2004. 417 p.
25. Litvinskiy G.G. *Analiticheskaya teoriya prochnosti gornykh porod i massivov* [Analytic theory of strength of rock and solid mass]. Donetsk: Izd-vo Nord-Press, 2008. 207 p. (rus)
26. Goldenblat I.I., Knopov V.A. *Kriterii prochnosti i plastichnosti konstruksionnykh materialov* [Strength and plasticity criterion of constructional materials]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1968. 192 p. (rus)
27. Sdobyrev V.P. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroyeniye*. 1959. No.6. Pp. 93–99. (rus)
28. Potapova L.B., Yartsev V.P. *Mekhanika materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. Kak prognoziryut predelnyye napryazheniya?* [Mechanics of materials in complex stressed state. How to forecast the ultimate stress?]. Moscow: Mashinostroyeniye-1, 2005. 244 p. (rus)
29. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. *Deformirovaniye i prochnost materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii* [Deformation of strength of materials in complex stressed state]. Kiev: Naukova Dumka, 1976. 416 p. (rus)
30. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quarterly of applied mechanics*. 1952. Vol. 10. No.2. Pp. 157–165.
31. Roscoe K., Schofield A., Wroth C. On the yielding of soils. *Geotechnique*. 1958. Vol. 8. No.1. Pp. 22–53.
32. Roscoe K., Schofield A., Thurairajah A. Yielding of clays in state wetter than critical. *Geotechnique*. 1963. Vol. 13. No.3. Pp. 211–240.
33. Aleksandrov A.S., Dolgikh G.V., Kalinin A.L. *Science & Engineering for Roads*. 2012. No.2. Pp. 10–13. (rus)
34. Puzyrevskiy N.P. *Teoriya napryazhennosti zemlistykh gruntov* [Theory of earthy soil intensity]. Leningrad: Izd-vo LIIPS, 1929. 68 p. (rus)
35. Berezantsev V.G. *Raschet prochnosti osnovaniy sooruzheniy* [Calculation of strength of beses of structures]. Leningrad, 1960. 137 p. (rus)
36. Yaromko V.N. *Science & Engineering for Roads*. 2008. No.2. Pp. 28–32. (rus)
37. Badanin A.N., Bugrov A.K., Krotov A.V. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.9. Pp. 29–34. (rus)
38. Kent M.F. AASHO road test vehicle operating costs related to gross weight. *Highway Research Board Special Report 73*. 1962. Pp. 149–165.

39. Sharp R.W., Booker J.R. Shakedown of Pavements under Moving Surface Loads. *Journal of Transportation Engineering. ASCE*. 1984. Vol. 110. No.1. Pp. 1–14.
40. Collins I.F., Cliffe P.F. Shakedown in frictional materials under moving surface loads. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1987. Vol. 11. No.4. Pp. 409–420.
41. Collins I.F., Wang A.P., Saunders L.R. Shakedown-Theory and the Design of Unbound Pavements. *Australian Road Research Board, Road and Transport Research*. 1993. Vol. 2. No.4. Pp. 28–37.
42. Aleksandrov A.S., Dolgikh G.V., Yuryev D.V. *Transport Construction*. 2011. No.7. Pp. 17–22. (rus)
43. Fedorovskiy V.G., Bezvolev S.G. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2000. No.4. Pp. 10–18. (rus)
44. Aleksandrov A.S., Aleksandrova N.P., Dolgikh G.V. *Construction materials*. 2012. -No.10. Pp. 14–17. (rus).

Full text of this article in Russian: pp. 35–45