

На правах рукописи

ПОЦЕЛУЕВ КИРИЛЛ АНДРЕЕВИЧ

**Проникновение магнитного поля в трехмерную упорядоченную
джозефсоновскую среду**

01.04.07 - физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Научный руководитель:

Зеликман Марк Аронович
доктор физико-математических наук,
профессор **СПбГПУ**, кафедра
экспериментальной физики.

Официальные оппоненты:

Ханин Самуил Давидович
доктор физико-математических наук,
профессор **РГПУ им. А.И. Герцена**,
кафедра физической электроники.

Эйдельман Евгений Давидович
доктор физико-математических наук,
профессор **СПХФА**, кафедра физики.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук».

Защита состоится «18» декабря 2013 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д212.229.29 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, главный учебный корп., ауд.118.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан « ____ » _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент

Ермакова Наталья Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Настоящая диссертация посвящена исследованию ряда физических явлений, происходящих в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, помещенной во внешнее магнитное поле. Понятие джозефсоновской среды было введено при изучении высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), имеющих сложную неоднородную структуру, обусловленную присутствием в ВТСП большого количества сверхпроводящих гранул, разделенных диэлектрическими областями. Наличие джозефсоновских контактов, возникающих между соседними гранулами, делает ВТСП-керамику сильно нелинейной средой. Среда, содержащая большое количество таких контактов, принято называть джозефсоновскими.

Важной особенностью гранулированных сверхпроводников является ячеистая структура среды, когда между соприкасающимися сверхпроводящими гранулами находятся диэлектрические области. В местах соприкосновения гранул друг с другом образуются джозефсоновские контакты, являющиеся нелинейными элементами, что сильно усложняет анализ таких сред. Токовые состояния, как экранирующие, так и вихревые, отличаются по своей структуре от существующих в обычных сверхпроводниках. Уравнения Гинзбурга-Ландау неприменимы в этой ситуации, и нужно искать другую основу для математического описания гранулированных сверхпроводников. Возникла необходимость разработки нового математического аппарата для джозефсоновских сред. На этом пути часто используются макроскопические (континуальные) подходы [3-5], в которых описание основано на усреднении описываемых параметров. Такие подходы позволяют получить ценную информацию о свойствах среды без учета ее дискретности. Однако подходы, учитывающие дискретность, дают более детальную информацию.

Такие исследования на основе уравнений, выводимых из условий минимума потенциала Гиббса, проводились и для одномерных джозефсоновских контактов, и для двумерных. Удалось ответить на ряд вопросов, связанных, например, с критическим состоянием цепочки СКВИДов [1], рассчитать профиль проникающего магнитного поля [2], исследовать лавинную динамику проникновения вихрей магнитного потока и вопросы самоорганизации [3], были изучены так называемый Bulk-SQUID-эффект [4] и самоорганизованное критическое состояние двумерной сетки джозефсоновских контактов [5], вопросы несоизмеримости [6], вычислено значение H_{C1} и энергия вихря для случая, когда линейный размер гранул значительно превышает лондоновскую длину λ_L [7].

В работе [8] было показано, что более простой подход, основанный на условиях квантования флюксоида в отдельных ячейках среды, приводит к тем же уравнениям, что и минимизация потенциала Гиббса.

Флюксоидом называется выражение вида $\Phi_m + \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_k \varphi_k^{(m)}$, где Φ_m - полный магнитный поток через m -ую ячейку, Φ_0 - квант магнитного потока, $\sum_k \varphi_k^{(m)}$ - сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах m -ой ячейки с учетом знака. Согласно условию квантования флюксоида, полный флюксоид должен быть кратен кванту магнитного потока, то есть

$$\Phi_m + \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_k \varphi_k^{(m)} = K_m \Phi_0 \quad (1)$$

где K_m - целое число, равное количеству квантов потока в m -ой ячейке. Если в контуре нет джозефсоновских контактов, квантование флюксоида переходит в квантование магнитного потока. Выписав уравнение (1) для каждой ячейки, получаем систему разностных уравнений для конкретного распределения токов.

В серии работ [8-11] было продемонстрировано применение условий квантования флюксоида к модели трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, представляющей собой кубическую решетку из сверхпроводящих проводов, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, помещенную во внешнее магнитное поле. На основе этой модели удалось рассчитать мейсснеровскую токовую конфигурацию, получить характерные значения магнитных полей, до которых возможен эффект Мейсснера, описать возникающие вихри и их взаимодействие друг с другом. Одним из важных результатов является определение критического значения параметра пиннинга [10], разделяющего два режима проникновения поля. Интересные результаты получены при анализе устойчивости [9] мейсснеровского состояния относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах и развития этих флуктуаций, а также при исследовании устанавливающихся профилей магнитного поля в образце [11]. Важным достоинством этой модели является то, что ей внутренне присущ пиннинг, связанный с дискретностью. В результате нет необходимости вводить дополнительные центры пиннинга.

В целях упрощения анализа уравнений в этих работах был рассмотрен случай, когда рассматриваемая модель не дискретна вдоль направления внешнего магнитного поля. На рисунке 1а показан простейший элемент этой модели, представляющий собой «нить» с крестообразным сечением, а на рисунке 1b – структура, составленная из 4 таких элементов. Джозефсоновскими контактами являются заштрихованные области – поверхности соединения таких элементов. Структура, составленная из множества таких «нитей», периодична вдоль плоскости, перпендикулярной оси «нити», однако не периодична вдоль внешнего поля, направление которого показано на рисунке 1.

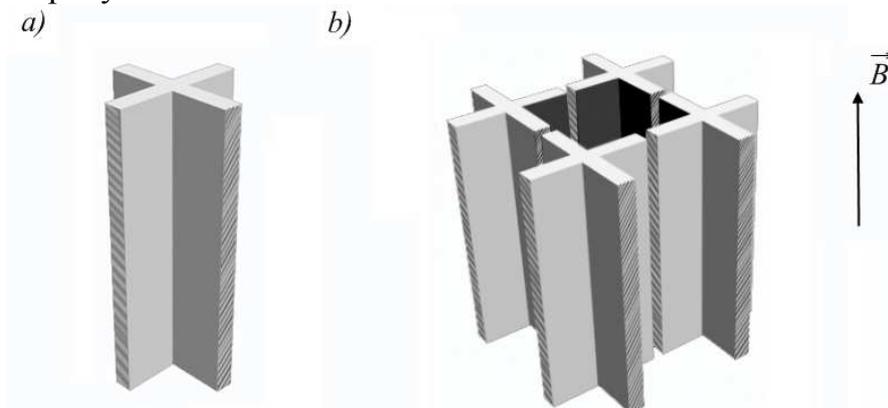


Рисунок 1. Пример трехмерной джозефсоновской среды, дискретной только в двух направлениях. *a* – простейший элемент этой среды; *b* – структура из 4 таких элементов.

В этой модели магнитное поле внутри каждого замкнутого участка (см. рисунок 1b) будет однородным. Такая картина справедлива [12], в частности, для искусственной структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с

другом по всей длине, так что джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Внешнее поле направлено вдоль нитей. Таким образом, условие $b=0$, удобное для решения системы уравнений, соответствует другой физической модели, так как не учитывает периодичность среды вдоль направления приложенного поля.

Поскольку для случая $b=0$ модель оказалась полезной, представляется важным рассмотреть более общий случай и учесть дискретность среды в направлении внешнего магнитного поля. Этот вариант гораздо ближе к реальным гранулированным средам.

Дополнительным аргументом для использования модели с периодическим расположением джозефсоновских контактов [8] может служить фотография структуры композита In-опал [13] (Рисунок 2).

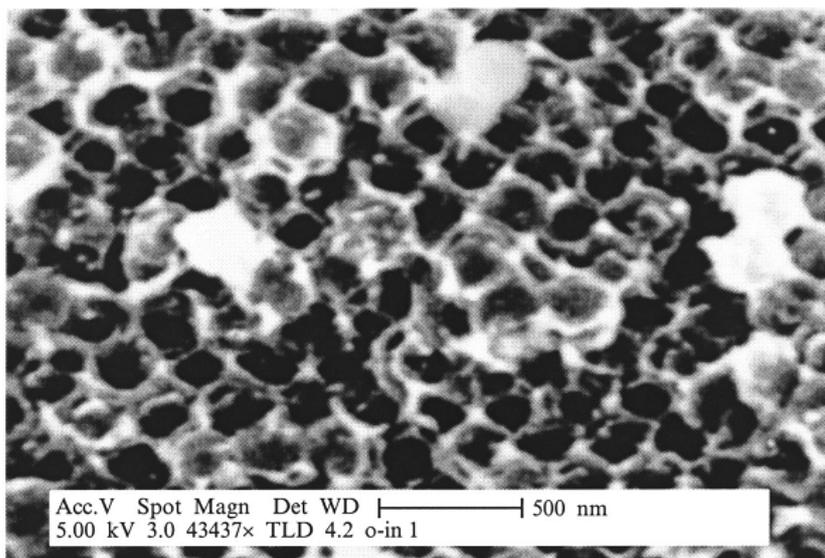


Рисунок 2. Электронно-микроскопические снимки композита In-опал. Светлые области соответствуют металлу, темные – диэлектрику [13].

В настоящей диссертации рассматривается трехмерная упорядоченная джозефсоновская среда, имеющая более сложную структуру. На рисунке 3а показан ее простейший элемент, а на рисунке 3б – структура из 4 таких элементов.

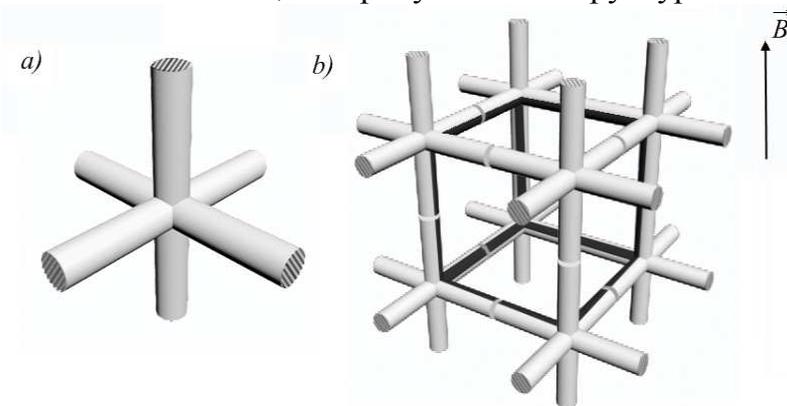


Рисунок 3. Пример трехмерной джозефсоновской среды, дискретной в трех направлениях. *a* – простейший элемент этой среды; *b* – структура из 4 таких элементов.

Джозефсоновскими контактами здесь являются 6 заштрихованных торцов элемента на рисунке 3а. В модели, представленной на рисунке 3б, линии индукции магнитного поля искривлены из-за дискретности среды вдоль оси внешнего поля. Учет неоднородности поля приводит к появлению в уравнениях так называемого структурного фактора b , величина которого определяется периодом решетки a и радиусом провода δ . Чем более искривлены линии индукции магнитного поля, тем больше значение параметра b .

Представляется важным изучить влияние неоднородности поля на происходящие процессы. Математически это соответствует поиску решений систем разностных нелинейных уравнений для случая $b \neq 0$.

В работе Гинзбурга [14] (2009 год) говорится о недостаточном внимании к вопросу о влиянии структурных свойств сложных сетей на происходящие в них процессы. Учет различных значений структурного фактора b можно считать шагом на пути устранения этой недоработки.

Таким образом, **актуальность диссертационной работы** определяется тем, что она является дальнейшим этапом исследования трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, которую можно считать упрощенной моделью гранулированных сверхпроводников.

Степень разработанности: в рамках диссертации полностью рассчитаны конкретные физические ситуации, на все поставленные вопросы получены полные ответы.

Цель диссертационной работы: изучение поведения трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды во внешнем магнитном поле, в рамках которого были проведены следующие конкретные исследования:

1. Анализ влияния структурного фактора b на мейсснеровские токовые конфигурации и максимальное значение магнитного поля, до которого еще возможно мейсснеровское состояние.
2. Описание и расчет возможных конфигураций уединенного линейного вихря, вычисление энергии вихря, сравнение устойчивости конфигураций во всем диапазоне значений b .
3. Расчет конфигураций двух взаимодействующих линейных вихрей. Вычисление критических значений параметра пиннинга I_d , при которых вихри еще могут находиться на заданном расстоянии d друг от друга. Изучение влияния параметра b на эти значения.
4. Нахождение максимальной силы пиннинга F и исследование ее зависимости от величины структурного фактора b .

Для достижения указанных целей потребовалось решение **следующих задач:**

- Вывод систем разностных нелинейных уравнений для мейсснеровского и вихревого случаев и разработка идей их решения.
- Разработка алгоритмов численного решения систем разностных уравнений, описывающих каждый из исследуемых вопросов.
- Вывод формул для структурного фактора b в случае мейсснеровского состояния и в случае вихрей.
- Вывод формул для магнитной составляющей энергии уединенного вихря для случая ненулевого значения b .

- Вывод зависимости максимальной силы пиннинга от структурного фактора b .

Научная новизна работы

Работа является логическим продолжением исследований процессов в джозефсоновских средах [1-5,7-12,14,17-19], основанных на дискретном описании. В работах [1-5,7,14,17,18] рассматривались длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт и двумерные системы. В [8-12,19] рассматривалась трехмерная джозефсоновская среда, но не учитывалась неоднородность магнитного поля внутри среды, что соответствовало равенству нулю параметра b , входящего в систему уравнений. В настоящей диссертации впервые проводится рассмотрение для всех возможных значений параметра b , что соответствует учету этой неоднородности. Новизна полученных результатов подтверждается отсутствием аналогичных результатов в других работах по этой тематике.

Научная ценность результатов, представленных в диссертации, состоит в том, что полученные новые результаты являются вкладом в теорию трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды. Следует отметить, что в 2006 году были получены экспериментальные данные [15,16], для объяснения которых авторы привлекли теорию, предложенную в [8]. Кроме того, в работах [15,17,18] имеются ссылки на определенные теоретические выводы, полученные на базе этой модели, что подтверждает ее полезность.

Практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты способствуют более детальному пониманию процессов в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, которую можно считать упрощенной моделью гранулированных сверхпроводников. Результаты проведенного исследования могут быть использованы при анализе экспериментальных данных для ВТСП-образцов: изучении характерных магнитных полей, формы вихрей, характера вихревой решетки, зависимости расстояния между вихрями от температуры и т. д. Разработанные методы решения систем разностных нелинейных уравнений, соответствующих мейсснеровскому состоянию, одиночному линейному вихрю и двум взаимодействующим вихрям, могут быть применены и для анализа других конфигураций.

Методология и методы исследования: работа представляет собой теоретическое исследование, включающее в себя вывод основных уравнений на основе физики сверхпроводников и электродинамики, их аналитическое решение, а также составление программ численного расчета для случаев, не поддающихся аналитическому решению.

Положения, выносимые на защиту

1. При внесении трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды во внешнее магнитное поле в ней возникают экранирующие токи, обеспечивающие мейсснеровское состояние, которое может существовать до некоторого критического значения h_c магнитного поля. Это значение определяется параметром пиннинга I и структурным фактором b . Величина h_c является монотонно возрастающей функцией как параметра I , так и параметра b .

2. При любых значениях параметра пиннинга I и структурного фактора b линейный вихрь в дискретной джозефсоновской среде имеет центральную часть (остов вихря), в которой токи и скачки фаз на контактах значительно больше, чем в наружной области вихря.
3. Энергия линейного вихря с центром на контакте при всех значениях I и b больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки. В обеих конфигурациях с увеличением структурного фактора b при одном и том же значении параметра пиннинга I скачки фаз на контактах и токи в центральной области вихря, а также полные энергии вихрей уменьшаются. Рост структурного фактора b ведет к снижению значения критического поля H_{C1} , при котором возникновение вихревой решетки является энергетически выгодным.
4. При заданном расстоянии между центральными ячейками вихрей d и фиксированной величине структурного фактора b система уравнений, описывающая конфигурацию двух взаимодействующих вихрей, имеет решение только при значениях параметра пиннинга, превышающих некоторое критическое значение $I_d(b)$. Рассчитанная на базе этих значений максимальная величина силы пиннинга является монотонно растущей функцией параметров I и b .
5. Для всех значений b при стремлении I к нулю минимальное расстояние между двумя уединенными линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно (как для абрикосовских вихрей в непрерывной среде), а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным, что говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя.

Достоверность полученных результатов подтверждается адекватностью примененного математического подхода: условия квантования флюксоида выполнены для всех ячеек среды. Кроме того, ожидаемые физические факты, а именно существование как мейсснеровского, так и вихревых состояний, взаимодействие вихрей, их пиннинг, наличие критического значения параметра пиннинга, при котором вихри еще могут находиться на заданном расстоянии друг от друга и т.д. – все это подтвердилось. Результаты, соответствующие частному значению $b=0$, совпали с результатами предыдущих работ.

Апробация результатов работы. Полученные в работе результаты докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Международной конференции по инновационным материалам и методам, секция «сверхпроводимость и магнетизм» (Conference on Innovative Materials and Techniques (CIMT), Hammamet, Tunisia 12-15 November, 2012); на российской молодежной конференции по физике и астрономии, секция «физика конденсированного состояния» (Физика.СПб, Санкт-Петербург, 24-25 октября 2012 - Санкт-Петербургский физико-технический институт имени А.Ф.Иоффе); на I всероссийском конгрессе молодых ученых, секция «физика твердого тела и материаловедение» (Санкт-Петербург, 10-13 апреля 2012 - Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики); на неделях науки в Санкт-Петербургском Политехническом университете (в 2010, 2011, 2012 годах).

Личный вклад автора: Диссертант принимал участие в постановке и решении задач, обработке и обсуждении полученных результатов; выбор общего направления

исследований и оптимальных методик вычислений осуществлялся совместно с научным руководителем. Все представленные в диссертации теоретические результаты получены автором лично. Автором также был предложен метод полной линеаризации нелинейных уравнений, не использовавшийся ранее.

Публикации: материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них 6 статей в рецензируемых журналах и 5 тезисов докладов. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы Диссертация состоит из четырех глав и заключения, содержит 112 стр. машинописного текста, включая 29 рисунков и список цитированной литературы (101 наименование).

В первой главе, представляющей собой вводную часть диссертации, проведен обзор экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию джозефсоновских сред, освещены современные результаты, связанные с исследованием поведения таких сред в магнитном поле. Отмечена связь этих вопросов с разрабатываемой в диссертации тематикой.

В параграфе 1.1 освещен математический аппарат, используемый для непрерывных сверхпроводящих сред. Здесь же отмечены геометрические характеристики образцов, влияющие на однородность магнитного поля внутри среды.

В параграфе 1.2 вводится понятие джозефсоновской среды, отмечаются трудности, связанные с ее свойствами. Здесь же намечается основной круг вопросов, которые будут рассматриваться в дальнейшем на конкретных примерах джозефсоновских сред: длинного периодически модулированного джозефсоновского контакта, двумерных массивов джозефсоновских контактов.

В параграфе 1.3 рассмотрен длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт – пример одномерной задачи о проникновении магнитного поля в джозефсоновскую среду. Введены понятие флюксоида и сформулированы условия его квантования. Рассмотрено понятие пиннинга и его роль в проникновении магнитного поля в такую среду. Также отмечается существование критического значения параметра пиннинга, разделяющего два возможных режима проникновения магнитного поля.

В параграфе 1.4 идет речь о двумерных джозефсоновских структурах. Здесь выделены основные явления, с которыми связаны трудности описания двумерных гранулированных сверхпроводников.

В параграфе 1.5 речь идет о трехмерных джозефсоновских средах. Обсуждены важные физические отличия от предыдущего двумерного случая. Проведена параллель с длинным контактом, с которым трехмерный случай имеет много общего. Именно поэтому ему уделялось столько внимания в параграфе 1.3. Описан дискретный подход, основанный на модели трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, который с помощью условий квантования флюксоида в отдельных ячейках позволяет описывать явления, происходящие в такой среде, если она помещена во внешнее магнитное поле. Освещены основные достоинства и недостатки этого подхода, на базе чего формулируется цель диссертации.

В конце первой главы, представляющей обзор тех результатов из физики упорядоченных джозефсоновских сред, которые имеют непосредственное отношение к тематике диссертации, дана постановка задачи. Здесь же обоснована актуальность

темы, сформулирована цель, показаны новизна и практическая ценность исследований, приведены положения, выносимые на защиту.

Во второй главе проведено исследование мейсснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды на основе упорядоченной модели, упомянутой в первой главе.

В параграфе 2.1 изложены основные положения рассматриваемой модели. Модель представляет собой трехмерную кубическую решетку из сверхпроводящих проводов радиуса δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт. Период решетки a .

Для математического описания эффекта предложено использовать условия квантования флюксоида в отдельных ячейках, которые для мейсснеровской конфигурации принимают вид:

$$2\pi\Phi_m / \Phi_0 + \varphi_m - \varphi_{m+1} = 0, \quad (2)$$

где Φ_0 - квант магнитного потока; Φ_m - полный магнитный поток через m -ю ячейку; φ_i - разность фаз на i -м контакте, так что

$$J_i = J_C \sin \varphi_i. \quad (3)$$

Магнитный поток Φ_m выражается как

$$\Phi_m = \mu_0(a - 2\delta) \int_{\delta}^{a-\delta} H(x) dx = \mu_0(a - 2\delta)^2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{J_k}{a} + \frac{b}{a} (J_{m-1} - J_m) - H_e \right), \quad (4)$$

$$\text{где } b = \frac{1}{2\pi(1 - 2\alpha)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1 - \alpha))}{1 - \exp(-2\pi\alpha)}. \quad (5)$$

Безразмерный параметр b , который мы будем называть структурным фактором, связан с неоднородностью поля в ячейках из-за дискретности распределения токов вдоль оси y . Если бы поле было однородным, то параметр b равнялся бы нулю. В формуле (5) величина H_e - напряженность внешнего магнитного поля; $\alpha = \delta/a$, δ - радиус провода. Практически значимые величины структурного фактора b , соответствующие $0,01 \leq \delta/a \leq 0,5$, находятся в диапазоне от 0,454 до 0,049,

$$b_{\min} = \frac{1}{e^\pi - 1} \approx 0.0452.$$

При подстановке выражения (4) в условия (2) получается следующая система уравнений, описывающая токовое распределение в мейсснеровском режиме

$$(bI \sin \varphi_{m+1} + \varphi_{m+1}) - 2(bI \sin \varphi_m + \varphi_m) + (bI \sin \varphi_{m-1} + \varphi_{m-1}) = I \sin \varphi_m, \quad m \geq 1 \quad (6)$$

$$2\pi h - I \sin \varphi_0 - (bI \sin \varphi_0 + \varphi_0) + (bI \sin \varphi_1 + \varphi_1) = 0. \quad (7)$$

Здесь h - нормированная напряженность внешнего поля, $h = H_e / H_0$, H_0 - напряженность внешнего магнитного поля, при которой через 1 ячейку проходит 1 квант магнитного потока, I - параметр пиннинга, определяемый выражением:

$$I \equiv 2\pi\mu_0 J_c (a - 2\delta)^2 / \Phi_0 a \quad (8)$$

Эта система уравнений допускает два аналитических решения: для случая малых скачков фаз на контактах и для случая слабого пиннинга. Этим случаям посвящены параграфы 2.2 и 2.3 соответственно, где получены следующие выражения для критического значения магнитного поля, до которого еще возможен эффект Мейсснера:

$$h_{\max} = 0,25(1 - \gamma) + \frac{I(1 + b(1 - \gamma))}{2\pi} + \frac{(1 - \gamma)^2}{4\pi I(1 + b(1 - \gamma))}, \quad I \gg 1 \quad (9)$$

$$h_{\max} = \sqrt{I} / \pi, \quad I \ll 1 \quad (10)$$

Здесь $\gamma = g/2 + 1 - \sqrt{(g/2)^2 + g}$, где $g = I/(Ib + 1) = 1/(b + 1/I)$.

В обоих упомянутых аналитических случаях также были получены формулы, описывающие соответствующие токовые распределения. В параграфе 2.2 также показано, что уже при $I \geq 3$ все скачки фаз, кроме φ_0 (наиболее близкого к границе), можно считать малыми, то есть $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$.

В параграфе 2.4 проведено численное решение уравнений (6) и (7). Здесь же рассчитано критическое значение магнитного поля, до которого возможно мейсснеровское состояние и исследована зависимость этого значения от основных параметров системы (параметра пиннинга I и структурного фактора b).

В параграфе 2.5 приведены основные результаты и выводы, представлены теоретические кривые (наиболее важные из них приведены на рисунках 4 и 5). В параграфе 2.6 получена формула для критического значения I_C параметра пиннинга, разделяющего два режима проникновения магнитного поля. Существование такого критического значения I_C имеет место и в случае длинного периодически модулированного джозефсоновского контакта, обсужденного в первой главе.

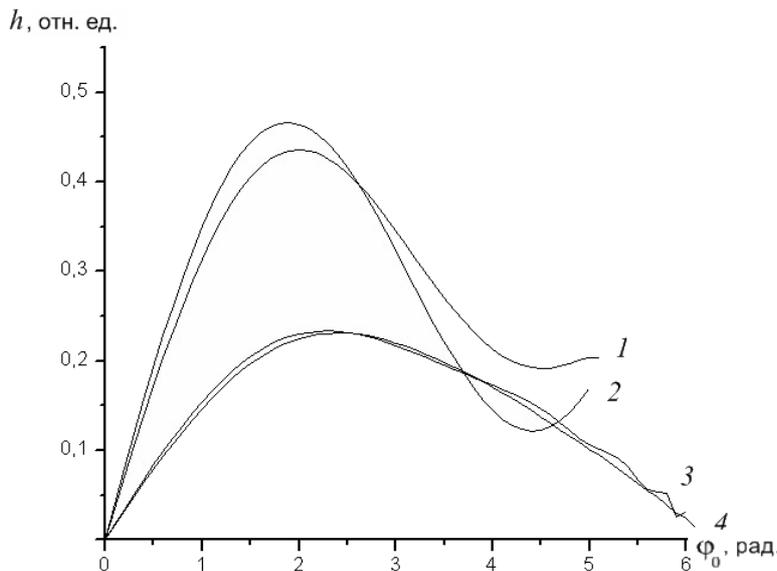


Рисунок 4. Связь между скачком фазы на границе образца и внешним магнитным полем при варьировании параметров I и b : $I = 1.5$ (кривые 1,2); $I = 0.5$ (кривые 3,4); $b = 0.049$ (кривые 1,3); $b = 0.454$ (кривые 2,4).

Таким образом, первое проведенное исследование показало, что в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, внесенной во внешнее магнитное поле, эффект Мейсснера будет существовать до некоторого критического значения внешнего магнитного поля h_c , величина которого определяется значениями параметров I и b . Величина h_c является монотонно возрастающей функцией как от параметра I , так и b . Использованный подход, основанный на условиях квантования

флюксоида в ячейках, позволяет рассчитать мейсснеровскую токовую конфигурацию при любых значениях структурного фактора b и параметра пиннинга I . В ходе исследования получены приближенные аналитические решения системы разностных уравнений для случаев малых I и малых значений скачков фазы, хорошо описывающие точное решение на большей части диапазона изменения параметров.

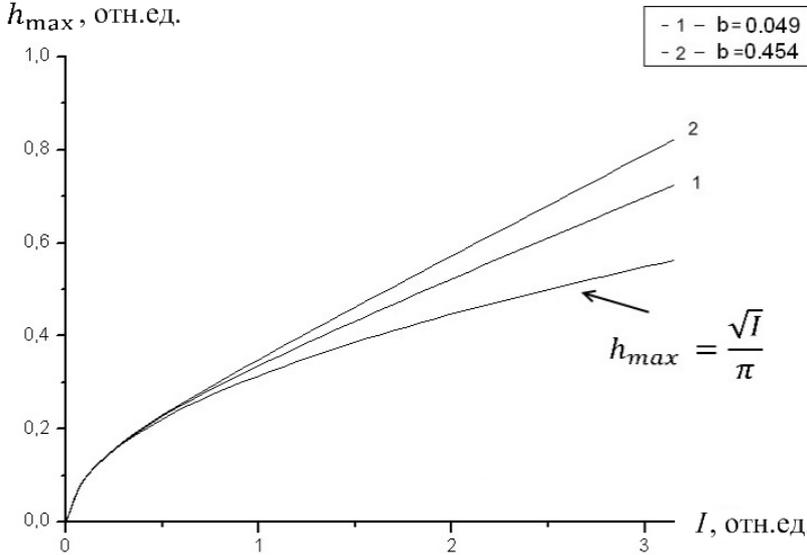


Рисунок 5. Графики зависимостей максимального внешнего поля h_{\max} в мейсснеровском режиме от параметра пиннинга I для различных значений фактора b , полученные численным расчетом (кривые 1 и 2). Для сравнения приведена теоретическая зависимость $h_{\max} = \sqrt{I} / \pi$ (см. формулу (10)).

В третьей главе на базе той же трехмерной модели изучены возможные конфигурации линейного вихря: центр вихря в середине ячейки (конфигурация «а»), либо в середине ее ребра (конфигурация «б»), а также вычислена их энергия. Каждой из конфигураций посвящен отдельный параграф (3.2 и 3.3). Для удобства расчета был применен метод контурных токов. Контурные скачки фаз для соответствующих ячеек обозначены как ψ_i . В случае линейного вихря выражение для структурного фактора b будет иным. Обозначим его b_L .

$$\begin{aligned}
 b_L = & \frac{1}{2\pi(1-2\alpha)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{2(1-\alpha)^2 + n^2} - 2\sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + n^2} + \sqrt{2\alpha^2 + n^2} + \right. \\
 & + \frac{(1-\alpha)}{2} \ln \frac{\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2 + n^2} - 1 + \alpha \right) \left(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} + 1 - \alpha \right)}{\left(\sqrt{2(1-\alpha)^2 + n^2} + 1 - \alpha \right) \left(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} - 1 + \alpha \right)} - \\
 & \left. - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\left(\sqrt{2\alpha^2 + n^2} + \alpha \right) \left(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} - \alpha \right)}{\left(\sqrt{2\alpha^2 + n^2} - \alpha \right) \left(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} + \alpha \right)} \right] - \frac{1}{4}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Расчет показывает, что при всех α значение b_L на 5-7% меньше b . Но b соответствует учету неоднородности от поля, созданного бесконечно длинными токами, а b_L - только от участка, ограничивающего ячейку. Значит, вклад от остальных участков мал, и им можно пренебречь в целях упрощения анализа. Поэтому в расчетах можно использовать более простое выражение (5) вместо (11). Условия квантования флюксоида, записанные через контурные токи, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 I(1+4b)\psi_0 - 4Ib\psi_1 + 4\phi_0 &= 2\pi & (m=0) \\
 [I(1+4b)+2]\psi_1 - Ib(\psi_0 + \psi_2 + 2\psi_4) - 2\psi_4 + \phi_1 - \phi_0 &= 0 & (m=1) \\
 [I(1+4b)+3]\psi_2 - Ib\psi_1 - (Ib+1)(\psi_3 + 2\psi_5) - \phi_1 &= 0 & (m=2) \\
 (g+4)\psi_3 - \psi_2 - 2\psi_6 &= 0 & (m=3) \\
 (g+4)\psi_4 - 2\psi_1 - 2\psi_5 &= 0 & (m=4) \\
 (g+4)\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7 &= 0 & (m=5)
 \end{aligned} \tag{12}$$

и т.д.

$$\sin \phi_0 = \psi_0 - \psi_1$$

$$\sin \phi_1 = \psi_1 - \psi_2$$

Система уравнений (12) позволяет рассчитать токовое распределение уединенного линейного вихря с центром в середине ячейки (конфигурация «а»). Для ситуации, когда центр вихря находится на середине ребра ячейки (конфигурация «б»), система уравнений во многом аналогична. Здесь она не приведена.

Решение конечной системы (12) производилось путем выражения значений всех ψ_m через ϕ_0 и ϕ_1 из линейных уравнений системы и подстановкой их в два последних уравнения, содержащие синусы. В результате получаем систему из двух нелинейных уравнений

$$\phi_1 = [2\pi - I(1+4b)\sin \phi_0 - A(I,b)\phi_0] / B(I,b) \tag{13}$$

$$\phi_0 = [\sin \phi_1 - C(I,b)\phi_1 - F(I,b)] / D(I,b) \tag{14}$$

где A, B, C, D и F – некоторые функции от I и b .

Кривые (13) и (14) в диапазоне $(0 - \pi)$ имеют одну точку пересечения, соответствующую которой ϕ_0 и ϕ_1 находятся численным методом. Зная ϕ_0 и ϕ_1 , затем находим и все ψ_m .

Полная энергия вихря складывается из джозефсоновской и магнитной составляющих. Первая, в соответствии с [19], выражается формулой:

$$E_J^a = \frac{E_c}{a} \sum_k (1 - \cos \phi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \phi_k) \tag{15}$$

где $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$ - нормировочная постоянная. Суммирование по k в (15) ведется по всем джозефсоновским контактам. Индекс «а» указывает на то, что формула относится к конфигурации «а».

Для расчета магнитной энергии E_H^a получено выражение

$$E_H^a = 0.5/a \sum_m i_m \Phi_m \tag{16}$$

где i_m - контурный ток в m -той ячейке, Φ_m - поток через нее.

Суммирование по m в (16) ведется по всем ячейкам с учетом симметрии вихря (что приводит к коэффициенту 4 для ячеек, лежащих на центральных столбце и строке, и к коэффициенту 8 для всех остальных). Для конкретной конфигурации “а” выражение (16) принимает вид

$$E_H^a = 0.5I^2 E_0 [\psi_0(\psi_0 + 4b(\psi_0 - \psi_1)) + 4\psi_1(\psi_1 + b(4\psi_1 - 2\psi_4 - \psi_0 - \psi_2)) + 4\psi_2(\psi_2 + b(4\psi_2 - 2\psi_5 - \psi_1 - \psi_3)) + 4\psi_4(\psi_4 + b(4\psi_4 - 2\psi_1 - 2\psi_5)) + 8\psi_5(\psi_5 + b(4\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7)) + 4\psi_7(\psi_7 + b(4\psi_7 - 2\psi_5 - 2\psi_8)) + \dots] \quad (17)$$

При $b=0$ (17) совпадает с выражением для E_H^a из [19]. Аналогичный расчет был проведен для конфигурации «б».

На рисунке 6 представлены зависимости полной энергии вихрей обеих конфигураций от значений параметра пиннинга I при различных значениях структурного фактора b : 1 – конфигурация “а”, 2 – конфигурация “б”. Сплошные кривые соответствуют $b=0,049$, пунктирные – 0,454. Здесь $E_0 \equiv \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 a^2$ - нормировочная константа. Из приведенных графиков видно, что с ростом b полная энергия всегда уменьшается. При малых I кривые для разных b совпадают, т.е. справедливы расчеты [12,19], в которых b считается равным нулю.

Знание полной энергии вихря позволяет найти значение H_{c1} - внешнего магнитного поля, при котором энергетически выгодно возникновение вихрей.

В параграфах 3.4 и 3.5 изложены основные результаты расчетов: проведен анализ токового распределения, соответствующего каждой конфигурации, рассчитаны значения их энергий, построены теоретические зависимости полной энергии от параметра пиннинга для некоторых значений структурного фактора b (рисунок 6).

В параграфе 3.6 представлены **основные выводы второго исследования**: подход, основанный на условиях квантования флюксоида в ячейках, подтверждает возможность существования самоподдерживающегося уединенного линейного вихря и позволяет рассчитать структуру и энергию линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при любых значениях структурного фактора b .

В отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием I стремится к бесконечности, линейный вихрь при любых значениях I и b имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит, и токи в контактах намного больше, чем в остальной области вихря. Эта центральная часть является остовом вихря.

Показано, что рассматриваемая конфигурация вихря эквивалентна периодической последовательности вихрей попеременно чередующейся ориентации. Эта идентичность позволяет понять механизм влияния размеров и формы рассматриваемой области на структуры и энергии вихрей, на основе чего выводятся формулы, описывающие вихри при любых сколь угодно малых значениях параметра пиннинга.

Энергия линейного вихря с центром на контакте при всех значениях I и b больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки. В обеих конфигурациях с увеличением структурного фактора b при одном и том же значении параметра пиннинга I скачки фаз на контактах и токи в центральной области вихря, а также полные энергии вихрей уменьшаются. Рост структурного фактора b ведет к

снижению значения критического поля H_{C1} , при котором возникновение вихревой решетки является энергетически выгодным.

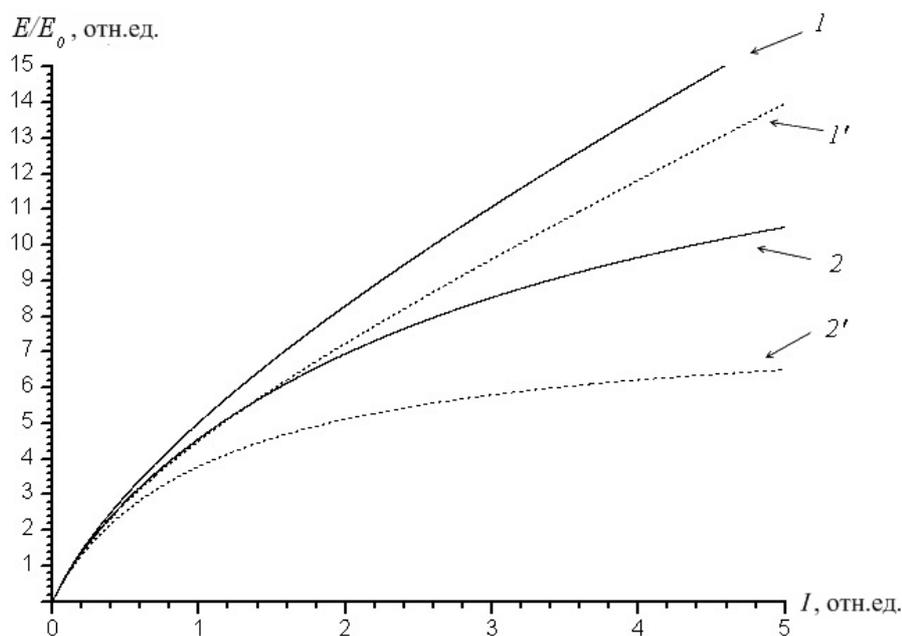


Рисунок 6. Зависимости полной энергии вихрей обеих конфигураций от значений параметра пиннинга I при различных значениях структурного фактора b : 1 – конфигурация “а”, 2 – конфигурация “б”. Сплошные кривые соответствуют $b=0,049$, пунктирные – 0,454.

В четвёртой главе исследован случай двух взаимодействующих вихрей.

В параграфе 4.1 рассчитаны токовые конфигурации для двух случаев: 1) – вихри сонаправлены, то есть токи в вихрях закручены в одну сторону, например, против часовой стрелки; 2) – вихри противоположны по направлениям, когда токи одного вихря направлены по часовой стрелке, а другого – против. Первый случай соответствует отталкиванию вихрей, а второй – их притяжению.

Для каждой конфигурации рассчитано (параграф 4.2) критическое значение I_d параметра пиннинга I , при котором вихри еще могут находиться на заданном расстоянии друг от друга. При величинах параметра пиннинга I , меньших этого критического значения I_d (индекс d соответствует числу ячеек между центрами вихрей), система не имеет решения, что означает, что при таких значениях I вихри не могут удерживаться на столь малых расстояниях. При $I > I_d$ система имеет два решения, соответствующие двум возможным конфигурациям вихрей (оба “а” или оба “б” – см. описание к предыдущей главе). При уменьшении I эти решения сближаются и при $I = I_d$ совпадают. Отметим, что может быть и еще один вариант: когда один из вихрей имеет конфигурацию “а”, а другой – “б”. В этом случае симметрия токовых распределений отсутствует, поэтому рассмотрение было бы более громоздким. Но, поскольку мы интересуемся критическими значениями I_d , а, как сказано выше, при $I = I_d$ конфигурации “а” и “б” совпадают, то и в этом случае критическое значение будет тем же.

Построена зависимость I_d от структурного фактора b . С ростом b значения I_d монотонно убывают при всех d . (рисунок 7). Проведен сравнительный анализ значений скачков фаз.

В параграфе 4.3 получена формула для критического значения параметра пиннинга I_d , очень точно описывающая зависимость I_d от b , описанную в предыдущем параграфе:

$$I_d(b) = I_d(0)/(1 + k_d b). \quad (18)$$

Здесь k_d - коэффициент разложения, зависящий от расстояния d между вихрями.

Погрешности описания не превышают долей процента во всем диапазоне изменения b (от 0 до 0,45). При $d > 5$ критическое состояние отсутствует, т.е. система имеет решения при любых, сколь угодно малых, значениях I . Это говорит о том, что при стремлении I к нулю минимально возможное расстояние между линейными вихрями не возрастает неограниченно, как в случае плоских вихрей, а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным.

В параграфе 4.4 проведен расчет максимальной силы пиннинга. Рассчитывая силу взаимодействия вихрей при заданном расстоянии d между ними и параметре пиннинга $I = I_d$, можно найти максимальную силу пиннинга:

$$F = \frac{E_0 \pi g}{a} \sqrt{g} \left[K_1(d\sqrt{g}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_1(\sqrt{d^2 + (mL)^2} \sqrt{g}) (-1)^m \frac{d}{\sqrt{d^2 + (mL)^2}} \right] \quad (19)$$

где a – период решетки, d – число ячеек между центрами вихрей пары, L – расстояние от вихрей до границы образца (величины d и L выражены в числе ячеек), K_1 - функция Бесселя (Ганкеля) первого порядка от мнимого аргумента, $E_0 \equiv \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 a^2$ - нормировочная константа, $g = I / (Ib + 1)$.

Получена упрощенная формула, описывающая зависимость F от b :

$$F(I, b) = F(I, 0) + k \cdot I \cdot b \quad (20)$$

Здесь k - коэффициент разложения, зависящий от расстояния d между вихрями.

Как показал расчет, F является монотонно возрастающей функцией как параметра I , так и структурного фактора b (рисунок 8). Ранее зависимость F от b не исследовалась.

В параграфе 4.5 изложены **основные результаты третьего исследования**: при заданном расстоянии между центральными ячейками вихрей d и фиксированной величине структурного фактора b система уравнений, основанная на условиях квантования флюксоида, имеет решение только при значениях параметра пиннинга, превышающих некоторое критическое значение $I_d(b)$. При меньших значениях параметра пиннинга вихри не могут находиться на заданном расстоянии друг от друга.

Получена формула зависимости критического значения параметра пиннинга I_d от b для различных расстояний d между осями вихрей. При больших d значения I_d перестают зависеть от величины b . Поэтому они могут быть вычислены при $b=0$. При конкретном значении d с ростом b значение I_d монотонно убывает.

Исследованы зависимости максимальной силы пиннинга F от параметра I при различных значениях b . Максимальная сила пиннинга, рассчитанная на базе зависимости I_d от b , является монотонно возрастающей функцией параметров I и b .

Для всех b при стремлении I к нулю минимальное расстояние между двумя уединенными линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно (как для абрикосовских вихрей в непрерывной среде), а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Этот факт говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя.

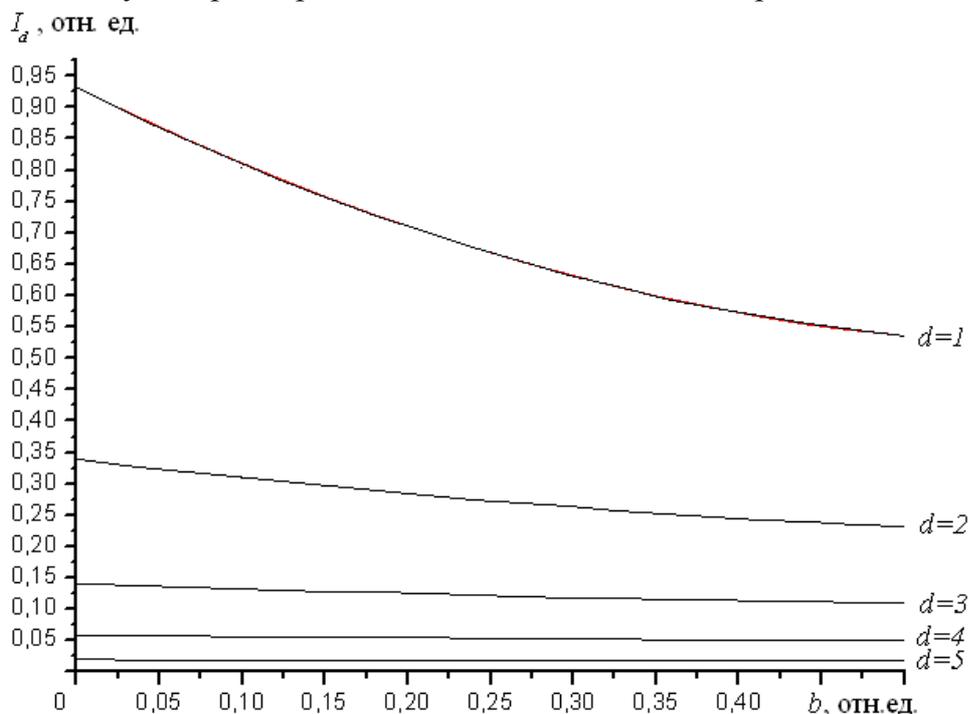


Рисунок 7. Графики зависимости I_d от b для разных расстояний d между центрами вихрей.

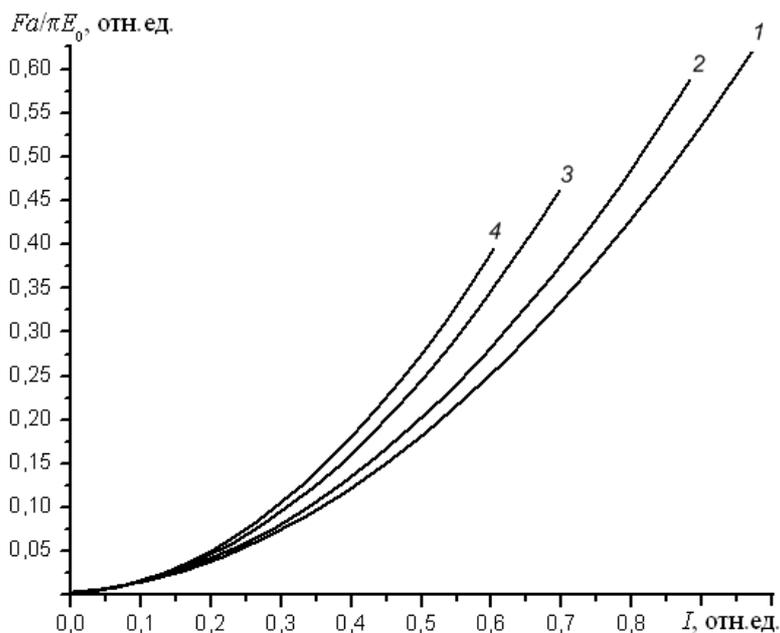


Рисунок 8. Графики зависимостей максимальной силы пиннинга от параметра I при различных значениях b : 1- $b=0$, 2- $b=0.1$, 3- $b=0.3$, 4- $b=0.45$.

В **Заключении** приводятся основные результаты работы.

Перспективы дальнейшей разработки темы: В качестве дальнейшего направления исследований планируются следующие варианты:

- 1) Исследование устойчивости мейсснеровского состояния трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды по отношению к малым флуктуациям во всем диапазоне значений структурного фактора b на основе анализа квадратичной формы второй вариации потенциала Гиббса. Это исследование позволит узнать, как параметр b влияет на характер проникновения магнитного поля.
- 2) Проследить развитие неустойчивых флуктуаций, на основе чего определить приграничный профиль проникающего в образец магнитного поля при ненулевых значениях структурного фактора b .

Рекомендации: результаты проведенного исследования могут быть использованы при анализе экспериментальных данных для ВТСП-образцов: изучении характерных магнитных полей, формы вихрей, характера вихревой решетки, зависимости расстояния между вихрями от температуры и т. д. Кроме того, было бы целесообразно провести экспериментальное исследование на искусственно созданных структурах, максимально приближенных к описанной модели, с целью проверки теоретических предсказаний и внесения уточнений в построенную теорию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дороговцев С.Н. Критическое состояние цепочки сквидов [Текст] / С.Н. Дороговцев, Ю.И. Кузьмин // СФХТ.- 1993.-Т.6.-№1.-С.44-50.
2. Зеликман М.А. Проникновение магнитного поля в длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ.- 2009.-Т.79.-№2.-С.36-42.
3. Гинзбург С.Л. Структура критического состояния в дискретном сверхпроводнике с различными значениями сквид-параметра [Текст] / С.Л. Гинзбург, А.В. Накин, Н.Е. Савицкая // Известия РАН. Серия физическая. -2009.- Т.73.-№1.-С.13-15.
4. Гинзбург С.Л. Bulk-SQUID-эффект в дискретном сверхпроводнике как следствие синхронизации частот генерации составляющих его джозефсоновских контактов [Текст] / С.Л. Гинзбург, А.В. Накин, Н.Е. Савицкая // ЖЭТФ.-2012.-Т.141.-№2.-С.310-318.
5. Гинзбург С.Л. Лавинообразная динамика магнитного потока в двумерном дискретном сверхпроводнике [Текст] / С.Л. Гинзбург, А.В. Накин, Н.Е. Савицкая // ЖЭТФ.-2006.-Т.130.-№5(11).-С.862-872.
6. Бабаев Е.С. Эффекты несоизмеримости в решеточной модели Гинзбурга-Ландау [Текст] / Е.С. Бабаев, С.А. Ктиторов //ФТТ.-1997.-Т.39.-№7.-С.1158-1162.
7. Брыксин В.В. Свойства решеток с «большими» джозефсоновскими контактами между сверхпроводящими гранулами [Текст] / В.В. Брыксин, А.В. Гольцев, С.Н. Дороговцев // Письма в ЖЭТФ.-1989.-Т.49.-№8.-С.440-443.
8. Зеликман М.А. Вихревые состояния и экранирующие токи в трехмерной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман //СФХТ, 1992,Т.5,№1,с.60-72.
9. Зеликман М.А. Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при малых значениях параметра пиннинга [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ.-

2006.-Т.76.-№4.-С.9-16.

10. Зеликман М.А. Равновесные состояния плоских вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и смысл понятия «энергия пиннинга» [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ-2004.-Т.74.-№9.-С.55-62.
11. Зеликман М.А. Развитие неустойчивости мейсснеровского состояния в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ.-2009.-Т.79.-№9.-С.47-57.
12. Зеликман М.А. Проникновение магнитного поля в трехмерную упорядоченную джозефсоновскую среду при малых значениях параметра пиннинга [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ.- 2010.- Т.80.- №3.-С.21-30.
13. Романов С.Г. Разрушение током сверхпроводящего состояния в трехмерной решетке слабосвязанных гранул индия в опале [Текст] / С.Г. Романов, Д.В. Шамшур // ФТТ.-1991.-Т.42.-№ 4.-С.581-588.
14. Гинзбург С.Л. Влияние структуры сложной сети на свойства динамических процессов на ней [Текст] / С.Л. Гинзбург, А.В. Накин, Н.Е. Савицкая // Письма в ЖЭТФ. – 2009. – Т.90. - № 12. – С.873 – 878.
15. Милошенко В.Е. Нижние критические поля сверхпроводника Y-Ba-Cu-O [Текст] / В.Е. Милошенко, И.М. Шушлебин, О.В.Калядин // ФТТ.-2006.- Т.48.- № 3.-С.403-406.
16. Шушлебин И.М. Проникновение магнитного потока в сверхпроводники Y-Ba-Cu-O и Tl-Ba-Ca-Cu-O [Текст] / И.М. Шушлебин //Изв. РАН. Сер.физ.-1993.-Т.57.- №11.-С.178-182.
17. Matteo Di. Lower threshold field in 3D Josephson junction arrays [Text]/ Di Matteo, Paasi, Tuohimaa, De Luca // Phys. Lett, A.-1998.-V.247.- No.4-5. - P.360-364.
18. Tuohimaa. Magnetic flux distribution in a 3D inductive network of Josephson junctions [Text] / Tuohimaa, Paasi, De Luca, Tarhasaari, Di Matteo // Phys. Rev. B.-2000.-V.61.- No.14.- P.9711-9718.
19. Зеликман М.А. Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ.- 2005.- Т. -75.- № 1. - С. 37-44.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ РАБОТЫ

1. Зеликман М.А. Влияние структурного фактора на мейсснеровское состояние в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. - 2011. – Т.116. - №1. – С.18 – 25.
2. Зеликман М.А. Мейсснеровское состояние в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Журнал технической физики. - 2012. – Т.82. - №5. – С.1 – 6.
3. Зеликман М.А. Влияние структурного фактора на конфигурацию линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. - 2012. – Т.1. - №141. – С.17 – 27.
4. Зеликман М.А. Структура и энергия линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Журнал технической физики. - 2013. – Т.83. - №3.– С.8 – 16.

5. Зеликман М.А. Пиннинг и возможные расстояния между линейными вихрями в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. - 2013. – Т.2. - №170. – С.39 – 46.
6. Зеликман М.А. Пиннинг линейных вихрей и возможные расстояния между ними в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде с отличным от нуля структурным фактором [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Журнал технической физики. - 2014. – Т.84. - №1.– С.28-37.
7. Potseluev K.A. Meissner state in a 3D ordered Josephson medium [Text] / М.А. Zelikman, К.А. Potseluev // First International Conference on Innovative Materials and Techniques (CIMT-2012), Hammamet, Tunisia, November 12-15 (2012). Book of Abstracts.- 2012. – P.76.
8. Поцелуев К.А. Влияние структурного фактора на конфигурацию линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Российская молодежная конференция по физике и астрономии «ФизикА.СПб», Санкт-Петербург, Россия, Октябрь 24-25 (2012). Тезисы докладов.- 2012. – С.7-8.
9. Поцелуев К.А. Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // I Всероссийский Конгресс молодых ученых, Санкт-Петербург, Россия, Апрель 10-13 (2012). Тезисы докладов.- 2012. – С.196-197.
10. Поцелуев К.А. Эффект Мейсснера в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Материалы научно-практической конференции «XXXIX Неделя науки СПбГПУ», Санкт-Петербург, Россия, Декабрь 6-11 (2010). Материалы конференции. Физико-механический факультет / СПб.: Изд. Политех. ун-та.- 2010. – С.131-132.
11. Поцелуев К.А. Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Материалы научно-практической конференции «XL Неделя науки СПбГПУ», Санкт-Петербург, Россия, Декабрь 5-10 (2011). Материалы конференции. Физико-механический факультет / СПб.: Изд. Политех. ун-та.- 2011. – С.150-151.