

На правах рукописи

ДЬЯКОВ Станислав Федорович

**Применение полусдвиговой теории
В.И. Сливкера к решению задач статики и
динамики тонкостенных стержней**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор,
Лалин Владимир Владимирович

Официальные оппоненты: **Мельников Борис Евгеньевич**,
доктор технических наук, профессор,
ФГБОУ СПбГПУ, зав. каф. «Сопротивление мате-
риалов»

Редин Дмитрий Геннадьевич,
кандидат технических наук,
ООО «С.-Петербургский научно-исследовательский
и проектно-конструкторский институт Атомэнерго-
проект», ведущий специалист

Ведущая организация: ЗАО «С.-Петербургский проектно-конструкторский и научно-исследовательский институт авиационной промышленности Гипроавиапром»

Защита состоится «18» декабря 2013 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.05 при ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет», расположенном по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29, II учебный корпус, ауд. 265.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Автореферат разослан «_____» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н, доц.



Воробьева Татьяна Владимировна

Общая характеристика работы

Актуальность работы

В механике деформируемого твердого тела для анализа и расчета конструкций и их элементов применяются расчетные схемы — реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей. Одним из основных способов построения расчетных схем является приведение геометрической формы тела к схеме стержня или к схеме оболочки в зависимости от соотношения характерных размеров:

1. У оболочки одно из измерений (толщина) много меньше двух других;
2. У стержня одно из измерений (длина) много больше двух других.

Однако, в некоторых случаях целесообразно выделение еще одной расчетной схемы, промежуточной между двумя вышеназванными — схемы тонкостенного стержня. Для тонкостенного стержня характерно существенное различие всех трех характерных размеров: толщина стенки стержня t много меньше протяженности профиля поперечного сечения s , которая, в свою очередь, много меньше длины стержня L .

Критерием тонкостенности, в связи со всем вышесказанным, могут служить следующие условия:

$$\frac{d}{t} \gg 1, \quad \frac{L}{d} \gg 1, \quad (1)$$

где d — характерный размер поперечного сечения.

Основываясь на указанных критериях, к тонкостенным относятся не только популярные нынче легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК), но и обычный «черный» прокат.

Возобновление интереса к теории тонкостенных стержней в России связано с тем фактом, что повсеместно в строительстве стали использоваться легкие стальные тонкостенные конструкции из тонкостенных холодногнутых профилей.

Они нашли применение в области:

1. малоэтажного и индивидуального строительства;

2. реконструкции кровель с организацией мансардных этажей;
3. производства термопанелей для каркасно-монолитного строительства;
4. коммерческого строительства (ангары, автомойки, офисы продаж и т.д.).

Несмотря на то, что ЛСТК пытаются активно внедрить во многие сферы строительства, несовершенство российской нормативной базы, а также недостаточность опыта проектирования таких конструкций являются причинами, задерживающими более широкое их распространение.

При включении тонкостенного стержня в конструкцию, стержень работает, в том числе, и на стесненное кручение. Это означает, что депланация поперечных сечений не происходит равномерно по длине стержня (в отличие от свободного кручения). Неравномерность (стесненность) депланации приводит к тому, что по-разному искривляясь, соседние сечения «давят» друг на друга. Из-за этого, при стесненном кручении, в поперечных сечениях возникают дополнительные нормальные секториальные напряжения, которые могут вносить существенный вклад в суммарные нормальные напряжения.

Видимо, это стало одной из причин, почему в новом СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*» добавлено четвертое слагаемое, отвечающее, как раз, за учет нормальных секториальных напряжений:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{B}{I_\omega} \omega, \quad (2)$$

где σ — суммарные нормальные напряжения; N — продольное усилия; A — площадь поперечного сечения; M_y и M_z — изгибающие моменты относительно осей y и z ; B — бимомент; I_y и I_z — моменты инерции относительно осей y и z ; I_ω — секториальный момент инерции; ω — секториальная площадь.

Для численного решения инженерных задач расчета конструкций, включающих в себя тонкостенные стержни, с применением конечноэлементных методик существует два способа: использование оболочечного моделирования или стержневой модели.

Современное положение на рынке конечноэлементных программ таково, что в расчетных комплексах, реализующих метод конечных элементов

(МКЭ), в элементах типа «стержень» присутствует только шесть степеней свободы в узле. Поэтому компоненты напряжений, связанные с депланацией, которую можно назвать седьмой степенью свободы, не учитываются. Исследователи пока не пришли к единому мнению о реализации седьмой степени свободы в МКЭ.

Использование для тонкостенных стержней оболочечного моделирования хоть и дает достаточно точные результаты, но является очень трудоемким, как для расчетчика, так и для вычислительной техники, т.к. многократно увеличивает количество степеней свободы.

Все вышеперечисленное говорит о том, что требуется разработка новых стержневых конечных элементов, подходящих для расчета тонкостенных конструкций и, соответственно, учитывающих энергию депланации.

Теорию тонкостенных стержней, созданную В.З. Власовым и А.А. Уманским, развивали такие ученые и исследователи, как Р.А. Ададуров, О.В. Лужин, Д.В. Бычков, Б.Н. Горбунов, А.И. Стрельбицкая, А.А. Захаров, Е.А. Бейлин, А.К. Мрощинский, В.А. Постнов, Г.Ю. Джанилидзе, Я.Г. Пановко, В.Б. Мещеряков, А.Р. Туснин, И.Ф. Дьяков, С.А. Чернов, В.П. Юзиков, В.Ф. Оробей, J.M. Gere, W.F. Chen, M.Y. Kim, G.A. Gunnlaugsson, J.W. Wekezer, A.G. Razaqpur и другие.

Исторически для всей теории тонкостенных стержней сложилось разделение на две ветви по типу профиля: открытый и замкнутый. Данное разделение было вызвано двумя причинами:

1. теории стержней открытого и замкнутого профилей строились независимо друг от друга;
2. стержни открытого профиля отождествлялись с бессдвиговой теории, а в стержнях замкнутого профиля учитывались деформации сдвига при кручении.

Со временем такое разделение повлекло за собой необходимость разработки двух различных конечных элементов для проведения численных расчетов тонкостенных стержней в рамках МКЭ, что является крайне неудобным с точки зрения унификации расчетов.

В 2005 г. В.И. Сливкером была предложена теория тонкостенных стерж-

ней, которую можно применять как для расчета тонкостенных стержней замкнутого, так и открытого профилей. Эту теорию автор назвал полусдвиговой теорией, т. к. изгиб такого стержня описывается в рамках бессдвиговой теории Бернулли-Эйлера.

В настоящее время вопросы динамики тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории являются неисследованными как в теоретическом плане, так и с точки зрения численной реализации МКЭ.

Все вышеперечисленное свидетельствует об актуальности темы диссертационной работы.

Целями диссертационной работы являются:

1. Аналитическое решение статических задач кручения стержня в рамках полусдвиговой теории при любых граничных условиях. Сравнение полученных решений с известными решениями аналогичных задач по бессдвиговой теории Власова;
2. Вывод уравнений динамики тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории. Аналитическое исследование крутильно-депланационных волн, свойств собственных частот и форм колебаний. Сравнение полученных решений с известными решениями аналогичных задач по бессдвиговой теории Власова;
3. Получение матриц жесткости и масс тонкостенных конечных элементов с использованием различных функций формы;
4. Разработка конечноэлементной программы, позволяющей решать задачи статики и динамики пространственных конструкций, состоящих из тонкостенных стержней.

Научная новизна В диссертационной работе:

1. Получены уравнения динамики тонкостенного стержня в рамках полусдвиговой теории В.И. Сливкера;
2. Построены и проанализированы дисперсионные зависимости и фазовые скорости крутильно-депланационных волн в бисимметричных тонкостенных стержнях по полусдвиговой теории Сливкера. Произведено сравнение с известным решением аналогичных задач для бессдвиговой теории Власова;

3. Получены аналитические решения ряда задач о собственных колебаниях тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории, применимые для стержней замкнутого и открытого профилей. Произведено сравнение с известным решением аналогичных задач для бессдвиговой теории Власова;
4. Построена матрица жесткости конечного элемента тонкостенного стержня открытого и замкнутого профилей по полусдвиговой теории с использованием общего решения однородных уравнений равновесия;
5. Получены согласованные матрицы масс конечных элементов тонкостенного стержня открытого и замкнутого профилей по полусдвиговой теории, основанные на различных видах аппроксимаций функций перемещений. Произведено сравнение их эффективности;
6. Разработан алгоритм и программа для решения задач статики и динамики пространственных конструкций, состоящих из тонкостенных стержней открытого и (или) закрытого профилей.

Практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Получены универсальные выражения для функции угла закручивания $\theta(x)$ и меры деформации $\beta(x)$, позволяющие получить решение статических задач для любых граничных условий;
2. Получены универсальные уравнения, позволяющие получить спектр собственных частот тонкостенного стержня с бисимметричным поперечным сечением для различных граничных условий;
3. Получены общие выражения для геометрических параметров — коэффициентов формы сечения ψ и $\mu_{\omega\omega}$, позволяющие вычислить их значения для профилей в виде швеллера, двутавра или прямоугольной трубы;
4. Разработаны конечные элементы тонкостенных стержней по полусдвиговой теории В.И. Сливкера, позволяющие выполнить статический и динамический расчеты пространственных стержневых конструкций, состоящих из тонкостенных стержней открытого и (или) закрытого профилей;

5. Приведенные в работе выкладки позволяют разработчикам внедрить конечный элемент, учитывающий стесненное кручение, в любой конечноэлементный расчетный комплекс, при условии, что он может работать с конечными элементами, имеющими семь степеней свободы в узле.

На защиту диссертации выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Аналитические решения для функции угла закручивания $\theta(x)$ и меры депланации $\beta(x)$ задач стесненного кручения в рамках полусдвиговой теории;
2. Явные формулы, позволяющие вычислить значения геометрических параметров ψ и $\mu_{\omega\omega}$ для тонкостенных стержней открытого, а также закрытого профилей;
3. Матрица жесткости конечного элемента, построенная с помощью общего решения однородных уравнений равновесия полусдвиговой теории тонкостенных стержней;
4. Вывод уравнений движения в рамках полусдвиговой теории, применимых для тонкостенных стержней любого профиля;
5. Построение и анализ дисперсионных кривых крутильно-депланационных волн тонкостенного стержня бисимметричного профиля;
6. Матрицы масс конечных элементов тонкостенного стержня произвольного профиля, построенные с использованием различных аппроксимаций для функций перемещений.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: VII Международная конференция по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте, ПГУПС, Санкт-Петербург, июнь 2011 г.; XXIV международная конференция «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов», СПбГАСУ, Санкт-Петербург, сентябрь 2011 г.; Семинар на кафедре строительной механики и теории упругости СПбГПУ, СПбГПУ, Санкт-Петербург, 2012 г.; Научная конференция «Строительство, архитектура, инженерная охрана окружающей среды» в рамках Политехнического молодежного фестиваля науки ФГБОУ ВПО СПбГПУ,

Санкт-Петербург, май 2013; XXV международная конференция «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов», СПбГАСУ, Санкт-Петербург, сентябрь 2013; XLII scientific and practical conference for students, graduate students and young scientists «Week of Science in SPbSPU», Saint-Petersburg, December 2013.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 работах, из них 3 работы — в изданиях, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, утвержденный ВАК Российской Федерации.

Личный вклад автора Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Подготовка к публикации полученных результатов частично проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и трех приложений. Общий объем диссертации 119 страниц, включая 32 рисунка и 9 таблиц. Библиография включает 82 наименования.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, отражено краткое содержание глав диссертации.

В первой главе приводится краткий исторический обзор по развитию теории расчета тонкостенных стержней, из которого становится понятно, что исторически теория тонкостенных стержней разделилась на две ветви. Первая ветвь включает в себя тонкостенные стержня открытого профиля. Основателем этой теории является В.З. Власов. Вторая ветвь охватывает тонкостенные стержни замкнутого профиля. Здесь в первую очередь следует упомянуть А.А. Уманского а также Г.Ю. Джанелидзе и Я.Г. Пановко.

Отдельно следует упомянуть Р.А. Ададунова, который разработал более общий вариант теории тонкостенных стержней, правда не являющейся прикладной. Тонкостенный стержень комбинированного профиля рассматривался О.В. Лужиным и Е.А. Бейлиным.

Далее в работе рассматривается разработанная В.И. Сливкером полусдвиговая теория тонкостенных стержней, которая позволяет избавиться от главного недостатка двух предыдущих теорий — отсутствия универсальности. Полусдвиговая теория Сливкера, в рамках единой формулировки, позволяет выполнять расчет стержней как открытого, так и замкнутого профилей.

Данная теория положена в основу диссертационной работы, в рамках которой исследуются вопросы статики и динамики как в теоретическом плане, так и с точки зрения численной реализации МКЭ.

Во второй главе рассматриваются вопросы статики тонкостенных стержней. Начинается она с того, что приводится аналитическое решение задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня в рамках полусдвиговой теории. В случае если угол закручивания $\theta(x)$ и мера деформации $\beta(x)$ являются независимыми функциями, система дифференциальных уравнений равновесия однородного тонкостенного стержня имеет вид:

$$\begin{cases} -GI_x\theta'' - GI_g(\theta'' - \beta') = m_x \\ EI_\omega\beta'' + GI_g(\theta' - \beta) = m_b \end{cases}, \quad (3)$$

где E — модуль Юнга; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; β — функция меры деформации; θ — угол закручивания; I_x — крутильный момент инерции; I_g — деформационный момент инерции; m_x — распределенный крутящий момент; m_b — распределенный бимомент.

Общим решением системы (3) является:

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{ch}(kx) + \alpha_3 \operatorname{sh}(kx) + \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{k^2} (\operatorname{ch}(ks - kx) - 1) ds \\ \theta(x) &= \int_{x_0}^x \left(\frac{m_b(\psi - 1)}{GI_x} + \beta - \frac{(\psi - 1)}{\psi k^2} \beta'' \right) dx + \alpha_4 \end{aligned}, \quad (4)$$

где $\alpha_1 \dots \alpha_4$ — произвольные постоянные; $k = \sqrt{\frac{GI_x}{\psi EI_w}}$; ψ — безразмерный геометрический параметр, введенный В.И. Сливкером.

Для выделения из общего решения (4) частного, необходимо знать граничные условия закрепления стержня. В связи с этим в работе были рассмотрены основные варианты закрепления и загрузки стержня. Полученные результаты были сопоставлены с известными выражениями для $\theta(x)$ и $\beta(x)$, полученными по теории Власова. В результате сравнения видно, что решения, полученные по полусдвиговой теории, и решения, полученные по классической теории Власова, отличаются только наличием у первых в некоторых из слагаемых в качестве множителя безразмерного коэффициента ψ (5). Кроме того, коэффициент ψ входит как множитель в выражение для k .

полусдвиговая теория Сливкера

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{m_x}{2GI_x k \psi} \left[kx\psi(L-x) - \frac{2L \operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2} - \frac{kx}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{kx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2}\right)} \right] \\ \beta(x) &= \frac{m_x}{GI_x} \left[\frac{L}{2} - x + \frac{L \operatorname{sh}\left(kx - \frac{kL}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{kL}{2}\right)} \right]\end{aligned}\tag{5}$$

бессдвиговая теория Власова ($k_1^2 = k^2 \psi$)

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{m_x}{2GI_x k_1} \left[k_1 x(L-x) - \frac{2L \operatorname{sh}\left(\frac{k_1 L}{2} - \frac{k_1 x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k_1 x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{k_1 L}{2}\right)} \right] \\ \beta(x) &= \frac{m_x}{GI_x} \left[\frac{L}{2} - x + \frac{L \operatorname{sh}\left(k_1 x - \frac{k_1 L}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{k_1 L}{2}\right)} \right]\end{aligned}$$

В связи с этим, проводится анализ степени влияния безразмерного коэффициента ψ на разницу в результатах расчета, полученных по обеим теориям. С учетом того что $\chi_1 = \frac{b}{h}$, $\chi_2 = \frac{t}{b}$ выражения для ψ имеют вид:

для двутавра	для швеллера
$\psi = 1 + \frac{2\chi_1 \chi_2^2 (2\chi_1 + 1)}{5}$	$\psi = 1 + \frac{\chi_2^2 (72\chi_1^4 + 120\chi_1^3 + 74\chi_1^2 + 22\chi_1 + 3)}{5(3\chi_1 + 2)^2}$

Так как на величину коэффициента ψ влияет лишь форма поперечного сечения стержня, проведен анализ возможных пределов изменения коэффициента ψ для величин, укладываемых в понятие тонкостенного стержня.

Анализ показал, что величина ψ не превышает значения 1.048 для двутавра и 1.093 для швеллера. Тот факт, что для стержней открытого профиля ψ оказывается близким к единице говорит нам о том, что уточнения получаемые за счет полусдвиговой теории в задачах статики оказываются незначительными. В связи с этим здесь уместно еще раз подчеркнуть, что значимость полусдвиговой теории заключается не в уточнении решения, а в возможности унифицировать расчет стержней открытого и замкнутого профилей.

Далее показано вычисление секториальных характеристик для тонкостенных стержней открытого профиля в виде двутавра и швеллера а также закрытого профиля в виде прямоугольной трубы. Особенное внимание уделяется безразмерным геометрическим параметрам ψ и $\mu_{\omega\omega}$, для которых получены общие выражения, позволяющие вычислить их значения для профилей в виде швеллера, двутавра или прямоугольной трубы.

Затем, основываясь на функционале Лагранжа (6), строятся матрицы жесткости конечных элементов тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории.

$$\mathfrak{L}(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI_{\omega} \beta'^2 + GI_x \theta'^2 + GI_g [\theta' - \beta]^2 - 2W \right) dx, \quad (6)$$

где W — работа внешних сил.

Для построения матриц жесткости используется несколько видов аппроксимаций для функций перемещений:

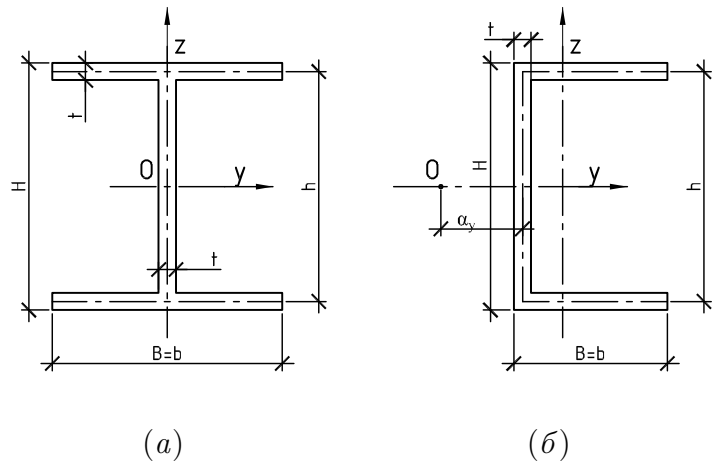


Рис. 1. Геометрические размеры поперечного сечения (а) двутавра; (б) швеллера;

1. Линейные функции формы на конечном элементе, как для угла закручивания $\theta(x)$, так и для меры депланации $\beta(x)$ (матрица $\mathcal{K}_{\text{лин}}$);
2. Линейные функции формы на конечном элементе для меры депланации $\beta(x)$ и квадратичные функции формы для угла закручивания $\theta(x)$ (матрица $\mathcal{K}_{\text{кв}}$);
3. Функции формы, полученные с помощью точного общего решения однородных уравнений равновесия тонкостенного стержня (матрица $\mathcal{K}_{\text{тип}}$).

Было установлено, что ситуация, когда функции, имеющие разные порядки производных, аппроксимируются полиномами одного и того же порядка, приводит к большим погрешностям при вычислении. Если же аппроксимировать функции, имеющие разный порядок производных, полиномами разного порядка, то это дает значительное увеличение скорости сходимости.

Наиболее быструю сходимость и наиболее удовлетворительный результат даже при небольшом количестве конечных элементов дает матрица жесткости $\mathcal{K}_{\text{тип}}$. Кроме того, матрица $\mathcal{K}_{\text{тип}}$ автоматически дает точное решение при любом количестве конечных элементов в том случае, если приложенная нагрузка является узловой.

В завершение первой главы проведен анализ конечных элементов на подверженность их эффекту запираания (locking-effect). Для этого функционал Лагранжа (6) был приведен к безразмерному виду:

$$\mathfrak{L}(\theta, \eta) = \frac{GI_x}{2} \int_0^1 \left[\epsilon \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{\psi - 1} \left(\frac{d\theta}{d\xi} - \eta \right)^2 - 2W \right] dx, \quad (7)$$

где $\xi = \frac{x}{L}$, $\eta = \beta L$, $\epsilon = \frac{EI_\omega}{GI_x L^2}$ — безразмерные переменные.

Было получено, что при уменьшении размера конечного элемента порядки коэффициентов ϵ и $\frac{1}{\psi-1}$ сближаются, тем самым сближаются вклады в общую энергию от энергии деформации и энергии сдвига, и, следовательно, запираания не происходит.

В третьей главе рассматриваются вопросы динамики тонкостенных стержней. За основу берутся выражения для потенциальной (8) и кинетиче-

ской (9) энергий тонкостенного стержня в рамках полусдвиговой теории:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EAU_{0x}'^2 + EI_y U_{0y}''^2 + EI_z U_{0z}''^2 + EI_\omega \beta'^2 + GI_x \theta'^2 + GI_g (\theta' - \beta)^2 \right] dx, \quad (8)$$

где U_{0x} , U_{0y} , U_{0z} — компоненты вектора перемещений.

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_L \left[\rho^* \dot{U}_{0x}^2 + \rho^* \dot{U}_{0y}^2 + \rho^* \dot{U}_{0z}^2 + \rho^* \dot{\theta}^2 (z_p^2 + y_p^2) + \rho \dot{\theta}^2 I_r + \rho \dot{\beta}^2 I_\omega + 2\rho^* z_p \dot{U}_{0y} \dot{\theta} - 2\rho^* y_p \dot{U}_{0z} \dot{\theta} \right] dx, \quad (9)$$

где ρ^* — линейная плотность; $I_r = I_x + I_y$ — полярный момент инерции; y_p , z_p — координаты центра изгиба..

Формула (8) установлена в работе В.И. Сливкера. Выражение для кинетической энергии (9) получено автором с использованием основных гипотез полусдвиговой теории тонкостенных стержней.

Из выражений (8)-(9), используя вариационный принцип Гамильтона, выводятся уравнения движения тонкостенного стержня в рамках полусдвиговой теории:

$$\left\{ \begin{array}{l} EAU_{0x}'' - \rho^* \ddot{U}_{0x} = 0 \\ -EI_y U_{0y}^{IV} - \rho^* \ddot{U}_{0y} + 2\rho^* z_p \ddot{\theta} = 0 \\ -EI_z U_{0z}^{IV} - \rho^* \ddot{U}_{0z} - 2\rho^* y_p \ddot{\theta} = 0 \\ EI_\omega \beta'' - \rho I_\omega \ddot{\beta} + GI_g (\theta' - \beta) = 0 \\ GI_x \theta'' - \rho I_r \ddot{\theta} + GI_g (\theta'' - \beta') - 2\rho^* (z_p^2 + y_p^2) \ddot{\theta} + \\ + 2\rho^* (z_p \ddot{U}_{0y} - y_p \ddot{U}_{0z}) = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

где ρ — объемная плотность.

Первое уравнение в (10) не зависит от остальных и описывает продольные колебания стержня. Остальные четыре совместных уравнения образуют систему, описывающую совместные изгибно-крутильно-депланационные колебания стержня.

В случае, если поперечное сечение симметрично относительно осей y и z (в этом случае $y_p = z_p = 0$), уравнения движения существенно упрощаются:

$$\begin{cases} EAU''_{0x} - \rho^* \ddot{U}_{0x} = 0 \\ \begin{cases} -EI_y U''_{0y} - \rho^* \ddot{U}_{0y} = 0 \\ -EI_z U''_{0z} - \rho^* \ddot{U}_{0z} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} EI_\omega \beta'' - \rho I_\omega \ddot{\beta} + GI_g (\theta' - \beta) = 0 \\ GI_x \theta'' - \rho I_r \ddot{\theta} + GI_g (\theta'' - \beta') = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

Как видно из (11), первое уравнение описывает продольные, второе и третье — изгибные, а четвертое и пятое — крутильно-депланационные колебания. Уравнения для продольных и поперечных колебаний совпадают с уравнениями для обычного (нетонкостенного стержня). Решение этих уравнений известно, по-этому в диссертации исследуется последняя система.

Было получено общее решение последней системы уравнений в (11):

$$\begin{aligned} \beta(x) &= C_1 \operatorname{ch}(\mu x) + C_2 \operatorname{sh}(\mu x) + C_3 \cos(\eta x) + C_4 \sin(\eta x) \\ \theta(x) &= \frac{\psi EI_\omega}{\rho I_r \varpi^2} \beta(x)''' + \left(\frac{\psi I_\omega}{I_r} - \frac{GI_x}{\rho I_r \varpi^2} \right) \beta(x)' \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{2\alpha_1^2 + 2\sqrt{\alpha_1^4 + 4\alpha_2^4}}$; $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{-2\alpha_1^2 + 2\sqrt{\alpha_1^4 + 4\alpha_2^4}}$;
 $\alpha_2^4 = \left(\frac{\rho I_r \varpi^2}{\psi EI_\omega} - \frac{\rho^2 I_r \varpi^4}{\psi GEI_g} \right)$; $\alpha_1^2 = \left(\frac{GI_x}{\psi EI_\omega} - \frac{\rho \varpi^2}{E} - \frac{\rho I_r \varpi^2}{\psi GI_g} \right)$;
 $C_1 \dots C_4$ — произвольные постоянные.

Для выделения из общего решения (12) частного, необходимо знать граничные условия закрепления стержня. Для частного случая с граничными условиями $\theta(0) = 0$, $\beta'(0) = 0$, $\theta(L) = 0$, $\beta'(L) = 0$ было получено аналитическое выражение, позволяющее получить спектр собственных частот колебаний:

$$\varpi = \sqrt{\frac{\zeta_2 \pm \sqrt{\zeta_2^2 - 4\zeta_1 \zeta_3}}{2\zeta_1}}, \quad (13)$$

где $\zeta_1 = \frac{\rho^2 I_r}{\psi GI_g E}$ $\zeta_2 = \frac{\rho \eta^2}{E} + \frac{\rho I_r \eta^2}{\psi GI_g} + \frac{\rho I_r}{\psi EI_\omega}$ $\zeta_3 = \frac{GI_x \eta^2}{\psi EI_\omega} + \eta^4$

В случае с другими граничными условиями, частотное уравнение получается более громоздким, и не имеет такого простого решения, поэтому поиск их решения производился численно с помощью метода Ньютона.

Далее приводятся результаты исследования дисперсионных свойств крутильно-депланационных волн в бисимметричном тонкостенном стержне по полусдвиговой теории Сливкера и дается сравнение полученных результатов с известными теориями Тимошенко и Власова. Необходимо отметить, что теории Тимошенко и Власова позволяют получить только акустическую дисперсионную ветвь.

Дисперсионное уравнение тонкостенного стержня по теории Сливкера представляет собой биквадратное уравнение относительно частоты ϖ :

$$\rho^2 I_\omega I_r \varpi^4 - (\rho G I_r I_g + G \rho \psi I_\omega I_g p^2 + E \rho I_\omega I_r p^2) \varpi^2 + G^2 I_g I_x p^2 + E G \psi I_\omega I_g p^4 = 0, \quad (14)$$

из которого была получена зависимость частоты волны ϖ от волнового числа p , а также фазовая скорость волны v_Φ :

$$\varpi = \sqrt{\frac{-(B + Cp^2) \pm \sqrt{(B + Cp^2)^2 - 4A(Dp^2 + Fp^4)}}{2A}}, \quad v_\Phi = \frac{\varpi}{p}, \quad (15)$$

где $A = \rho^2 I_\omega I_r$; $B = -\rho G I_r I_g$; $C = -G \rho \psi I_\omega I_g - E \rho I_\omega I_r$; $D = G^2 I_g I_x$; $F = E G \psi I_\omega I_g$.

Соотношение (15) дает две дисперсионные ветви. При этом знак минус соответствует акустической (первой), а знак плюс — оптической (второй) ветви дисперсии. Было установлено, что оптической ветви соответствуют чисто депланационные колебания.

В работе была произведена оценка предельных значений фазовой скорости в длинноволновом ($p \rightarrow 0$) и коротковолновом ($p \rightarrow \infty$) диапазонах для обеих ветвей дисперсии. Примеры дисперсионных кривых представлены на рис. 2. Для первой дисперсионной ветви при любом значении волнового числа p фазовая скорость распространения волны близка к скорости распространения крутильной волны стержня Сен-Венана. Для второй ветви дисперсии на

высоких частотах фазовая скорость распространения волны близка к скорости продольной волны в стержне Бернулли.

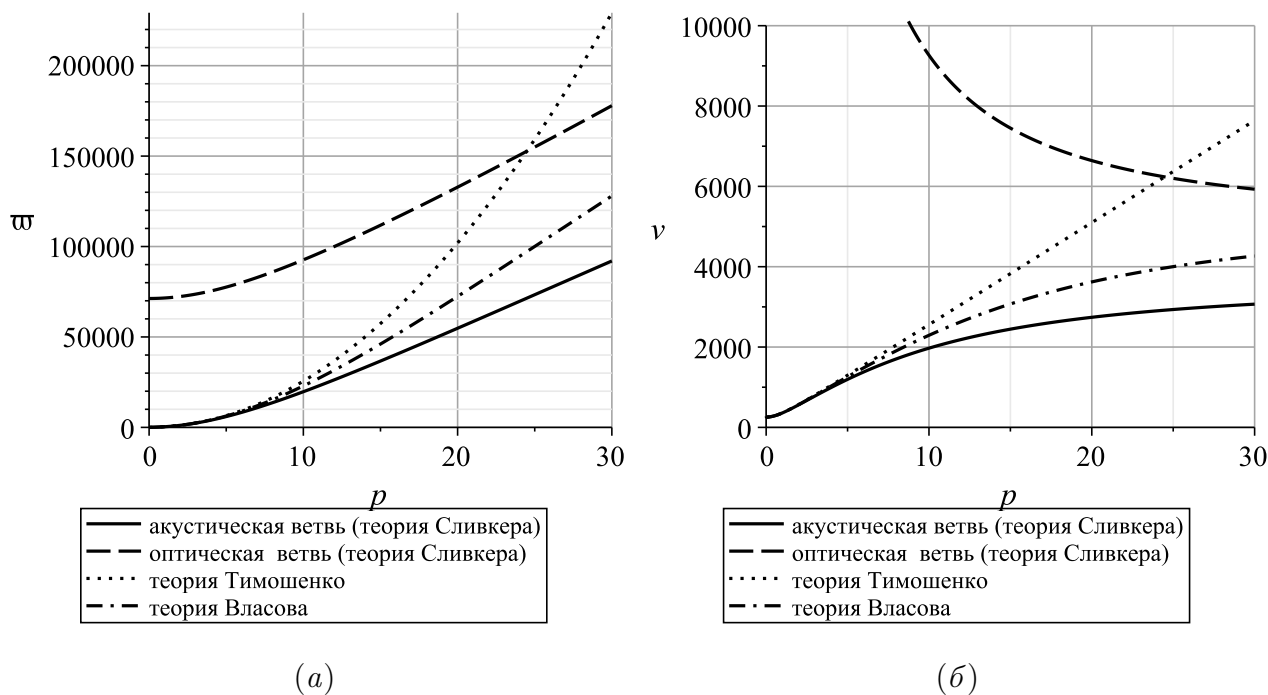


Рис. 2. (а) Дисперсионные кривые; (б) Зависимость фазовой скорости $v_{\text{ф}}$ от волнового числа p ;

Для построения матриц масс на основании выражения кинетической энергии (9) используются несколько видов функций формы, таких же, как и в случае с матрицами жесткости. По аналогии с матрицами жесткости, матрицы масс обозначены как $\mathcal{M}_{\text{лин}}$, $\mathcal{M}_{\text{кв}}$, $\mathcal{M}_{\text{гип}}$. С помощью полученных матриц масс и матриц жесткости определяются собственные частоты, и сравниваются с точным решением.

Сравнение показывает, что матрица масс $\mathcal{M}_{\text{лин}}$ обеспечивает самую медленную сходимость. Матрицы $\mathcal{M}_{\text{гип}}$ и $\mathcal{M}_{\text{кв}}$ обеспечивают примерно одинаковую скорость сходимости. В практических расчетах рекомендуется использовать $\mathcal{M}_{\text{кв}}$, т. к. элементы матрицы $\mathcal{M}_{\text{гип}}$ содержат гиперболические функции, что может стать причиной плохой обусловленности.

В четвертой главе приводится описание алгоритма программы, позволяющей выполнять статический и динамический расчеты пространственных стержневых конструкций, состоящих из тонкостенных стержней открытого и (или) закрытого профилей. Кроме того приводится пример расчета строи-

тельной конструкции на статические и динамические нагрузки.

В качестве примера рассмотрен первый блок третьей очереди производственного корпуса по производству растворимого кофе. Рассматриваемый корпус представляет здание из стального каркаса. Колонны установлены с шагом 6 м, пролеты 6 м. Перекрытие на отметке +6000 выполняется из двутавровых балок, по которым укладывается стальной решетчатый настил, рассчитываемый на равномерно распределенную нормативную нагрузку 2 кПа.

Покрытие здания имеет уклон 2%, выполняется из стальных балок с прогонами, по которым уложен профилированный настил, утеплитель из минеральной ваты и мембранное покрытие.

Стены здания выполняются из сэндвич панелей, располагаемых горизонтально. В качестве материала для несущих конструкций принята сталь С245.

В качестве расчетной схемы каркаса здания принята пространственная стержневая модель из тонкостенных стержней, нагруженная как статическими так и динамическими нагрузками. К статическим расчетным нагрузкам можно отнести:

1. вес покрытия — 0.81 кПа;
2. снеговая нагрузка — 1.80 кПа;
3. ветровая нагрузка — 1.56 кПа (для средней колонны);
4. решетчатый настил — 0.47 кПа;
5. полезная нагрузка — 2.40 кПа;
6. нагрузка от подвесного оборудования — 2.00 кПа;
7. вес стеновых панелей — 0.34 кПа;

Динамические нагрузки от технологического оборудования возникают из-за установленной на стальных балках перекрытия промышленной центрифуги. Согласно технологической карты амплитуда динамической нагрузки от вращения вала центрифуги из-за эксцентриситетов, вызванных зазором в подшипниках и погрешностью балансировки составляет 17 кН.

Был выполнен динамический расчет каркаса здания на нагрузку от вращения центрифуги. После проведения динамического расчета было определено наихудшее сочетание статических и динамических нагрузок и определены

внутренние силовые факторы для этого сочетания.

Было выполнено два вида расчета: с учетом бимоента (как рекомендует актуализированный СП 16.13330.2011) по формуле (2) и без учета бимоента (по старому СНиП II-23-81*). Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Из таблицы видно, что вклад бимоментной составляющей может быть довольно существенным: суммарные напряжения с учетом и без учета бимоента отличаются в 1.5 раза.

Таблица 1. Сопоставление напряжений

№	σ_N , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	σ_B , МПа	с учетом бимо- мента	без учета бимо- мента	$\frac{(6)-(7)}{(7)}\%$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.361	-11.599	+1.070	-5.282	17.59	12.31	43%
2	0.361	+11.599	+1.070	+5.282	16.17	10.89	49%
3	0.361	+11.599	-1.070	-5.282	7.75	13.03	41%
4	0.361	-11.599	-1.070	+5.282	4.89	10.17	52%

В приложении 1 даны матрицы, с помощью которых можно составить матрицу жесткости, в которой в качестве аппроксимирующих функций для перемещений выступает общее решение однородных уравнений равновесия.

В приложении 2 даны матрицы, с помощью которых можно составить матрицу масс стержня с бисимметричным поперечным сечением, в которой в качестве аппроксимирующих функций для перемещений выступает общее решение однородных уравнений равновесия.

В приложении 3 даны матрицы, с помощью которых можно составить матрицу масс стержня любого поперечного сечения, в которой в качестве аппроксимирующих функций для перемещений выступает общее решение однородных уравнений равновесия.

Заключение

1. Получены уравнения динамики тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории;
2. Построены и проанализированы дисперсионные зависимости и фазовые скорости крутильно-депланационных волн в бисимметричных тонкостенных стержнях по полусдвиговой теории;
3. Получены аналитические решения ряда динамических задач о стесненном кручении тонкостенных стержней в рамках полусдвиговой теории В.И. Сливкера, применимые для стержней замкнутого и открытого профилей;
4. Получены универсальные выражения для функции угла закручивания $\theta(x)$ и меры депланации $\beta(x)$, позволяющие получить решение статических задач для любых граничных условий;
5. Построена матрица жесткости конечного конечного элемента тонкостенного стержня открытого и замкнутого профилей по полусдвиговой теории с использованием общего решения однородных уравнений равновесия;
6. Построены согласованные матрицы масс конечных элементов тонкостенного стержня открытого и замкнутого профилей по полусдвиговой теории, основанные на различной аппроксимации функций перемещений;
7. Получены общие выражения для геометрических параметров ψ и $\mu_{\omega\omega}$, позволяющие вычислить их значения для любых профилей в виде швеллера, двутавра или прямоугольной трубы;
8. Разработан алгоритм и программа для решения задач статики и динамики пространственных стержневых конструкций, состоящих из тонкостенных стержней открытого и (или) закрытого профилей.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Дьяков, С.Ф. Сравнительный анализ задачи кручения тонкостенного стержня по моделям Власова и Сливкера/ С.Ф. Дьяков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. №1. - С.24-32
2. Дьяков, С.Ф. Дисперсия крутильной волны, распространяющаяся в тонкостенном стержне/ С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин //Интернет-журнал «Науковедение». 2013. №5(18) [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/24tvn513.pdf>, свободный
3. Дьяков, С.Ф. Построение и анализ конечного элемента тонкостенного стержня с учетом деформаций сдвига для решения задач динамики/ С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин //Интернет-журнал «Науковедение». 2013. №5(18) [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/95tvn513.pdf>, свободный

В других изданиях

1. Дьяков, С.Ф. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении / С.Ф.Дьяков, В.В. Лалин // Вестник Пермского государственного технического университета. 2011. №2. - С.130-140
2. Дьяков, С.Ф. Построение матрицы жесткости тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении/ С.Ф.Дьяков, В.В. Лалин //XXIV Международная конференция математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тезисы, СПбГАСУ, СПб, 2011.Т1. - С.42-43