

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Л. ГЕЛЬГОР

Т.Е. ГЕЛЬГОР

А.И. ГОРЛОВ

Е.А. ПОПОВ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ ВИНЕРОВСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому
политехническому образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению
подготовки бакалавров “Техническая физика”*

Санкт-Петербург

Издательство политехнического университета

2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Фильтрация непрерывных сигналов по критерию минимума среднеквадратической ошибки	8
1.1. Оптимальный физически не реализуемый фильтр	9
1.1.1. Параметрическая оптимизация идеального фильтра нижних частот	17
1.1.2. Оптимальная фильтрация сигнала с заданным энергетическим спектром	23
1.2. Оптимальный физически реализуемый фильтр	24
1.2.1. Сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией	35
1.2.2. Предсказывающий фильтр	40
Вопросы и задания к Главе 1	43
2. Принципы цифровой обработки сигналов	47
2.1. Основные понятия цифровой обработки сигналов	48
2.2. Дискретные случайные процессы и их характеристики	57
2.2.1. Случайное гармоническое колебание	61
2.2.2. Белый шум	62
2.2.3. Взаимно-коррелированные последовательности	63
2.2.4. Показательная автокорреляционная функция	70
2.2.5. Статистические характеристики случайных последовательностей	70
2.3. Моделирование последовательностей	76
2.3.1. Метод Падэ	80
2.3.2. Метод Прони	87
2.3.3. Метод Шанка	95
Вопросы и задания к Главе 2	102
3. Цифровая фильтрация случайных последовательностей	106
3.1. Корреляционная функция и спектр на выходе фильтра	106
3.1.1. Белый шум на входе фильтра	110
3.2. Факторизация спектра. Регулярные последовательности	110
3.2.1. Авторегрессионная последовательность	114
3.2.2. Последовательность авторегрессии — скользящего сред-	

него	121
3.2.3. Последовательность скользящего среднего	124
3.3. Моделирование регулярных последовательностей с заданными корреляционными свойствами	125
3.3.1. Моделирование последовательности авторегрессии — скользящего среднего	126
3.3.2. Моделирование авторегрессионной последовательности	131
3.3.3. Моделирование последовательности скользящего сред- него	133
3.4. Алгоритм Левинсона–Дурбина	135
Вопросы и задания к Главе 3	143
4. Цифровые фильтры Колмогорова–Винера	146
4.1. Реализация винеровского КИХ-фильтра	146
4.1.1. Последовательность с показательной автокорреляционной функцией	150
4.1.2. Линейное предсказание	153
4.1.3. Удаление шума	159
4.2. Реализация винеровского БИХ-фильтра	165
4.2.1. Нереализуемый фильтр Колмогорова–Винера	165
4.2.2. Реализуемый фильтр Колмогорова–Винера	170
4.2.3. Линейное предсказание на основе реализуемого БИХ- фильтра	178
Вопросы и задания к Главе 4	181
Библиографический список	185

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие посвящено рассмотрению одного из разделов теории связи — оптимальной линейной фильтрации по критерию минимума среднеквадратической ошибки, также известной как *винеровской фильтрации*.

В общем виде задачу фильтрации можно сформулировать следующим образом.

Пусть непосредственному наблюдению доступны непрерывные или дискретизированные реализации некоторого случайного процесса $\xi(t)$, являющегося детерминированной функцией G полезного сигнала $s(t)$ и шумового сигнала $n(t)$:

$$\xi(t) = G[s(t, \lambda), n(t)],$$

где полезный сигнал $s(t, \lambda)$ в качестве информационного сообщения содержит векторный случайный процесс

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)].$$

Функциональная связь между полезным и шумовым сигналом (аддитивная смесь, мультипликативная смесь и др.) определяется физическими условиями передачи информации.

Будем считать, что наблюдателю известны все необходимые вероятностные характеристики случайных процессов $\lambda(t)$ и $n(t)$. Тогда, располагая этими сведениями, а также статистическими наблюдениями над реализациями случайного процесса $\xi(t)$, необходимо сформировать в определённом смысле *наилучшую оценку* информационного сообщения:

$$\hat{\lambda}(t) = [\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t), \dots, \hat{\lambda}_m(t)].$$

Отметим, что задачи оценивания процесса $\lambda(t)$ при всём их разнообразии могут быть отнесены к двум общим случаям.

В первом случае наблюдения за реализациями $\xi(t)$ осуществляются на каком-то временном интервале, и вынос решения может быть отложен “на потом”. Примерами подобных задач — оценивание не в реальном времени — являются всевозможные задачи научного эксперимента, задачи радиомониторинга и т. п., когда обработка может осуществляться так долго, насколько это необходимо.

Во втором случае необходимо осуществлять *текущее оценивание* $\lambda(t)$ по результатам наблюдения за реализациями процесса $\xi(t)$ в предыдущие моменты времени, причём обработку необходимо производить в реальном (или близком к нему) масштабе времени. Примерами таких задач являются задачи экстраполяции процесса, т. е. предсказания его поведения в каком-то грядущем моменте времени, задачи автоматического регулирования и др.

Пионерскими работами, относящимися к линейной фильтрации процессов, являются работы А. Н. Колмогорова¹ и Н. Винера². Фундаментальные результаты по нелинейной фильтрации принадлежат Р. Л. Стратановичу³, который разработал общую теорию нелинейной фильтрации марковских процессов.

В процессе преподавания винеровской фильтрации как раздела общей теории связи зачастую ограничиваются достаточно академическим подходом, рассматривая основные результаты в рамках нереализуемых фильтров (максимум полезного в таких результатах — это получение потенциально возможных показателей, являющихся предельными для реальных устройств обработки сигналов). Такой подход представляется малопродуктивным, особенно, в свете практической реализации методов оптимальной фильтрации на современной программно-аппаратной базе, и представляется целесообразным не только изложить математическую основу, но и “привязать” полученные результаты к современным методам цифровой обработки сигналов.

В этой связи предлагаемое пособие можно условно разделить на две ярко выраженные части: теоретическую (первая глава), в которой последовательно и с достаточной математической строгостью излагается теория оптимальной винеровской фильтрации, и практическую (главы со второй по четвёртую), ориентированную на реализацию цифровых винеровских фильтров.

¹ Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполяция стационарных последовательностей // Изв. АН. СССР. Сер. Матем. — 1941, № 5.

² Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. — N.Y.: John Wiley, 1949.

³ Стратанович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1966. — 319 с.

К сожалению, в традиционных курсах теории вероятностей (применительно к инженерным направлениям) уделяется, как правило, недостаточное внимание изучению свойств случайных последовательностей, т. е. случайных процессов дискретного времени. В рамках данного пособия предпринята попытка восполнить этот пробел: рассмотрены методы анализа случайных последовательностей, методы моделирования случайных последовательностей с заданными корреляционными свойствами на основе цифровой фильтрации порождающих процессов; для типовых регулярных последовательностей (авторегрессионной последовательности, последовательности скользящего среднего и др.) получены различные варианты уравнений Юла-Уолкера, позволяющих определить параметры передаточных характеристик фильтра; предложен эффективный рекурсивный алгоритм Левинсона–Дурбина, обеспечивающий решение уравнений Юла-Уолкера с низкой вычислительной сложностью.

В конце каждой главы предложен набор вопросов и заданий, в том числе, практических, ориентированных на программную реализацию с использованием средств вычислительной техники. Реалии сегодняшнего дня таковы, что де-факто универсальной средой программирования, причём, как для учебных, так и для профессиональных целей является система MATLAB, и предполагается, что именно в этой системе осуществляется решение практических заданий.

Учебное пособие написано по материалам учебных дисциплин, преподаваемых авторами в течение многих лет в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров “Техническая физика”, “Инфокоммуникационные технологии и системы связи”, “Радиотехника”. Также оно может оказаться полезным для специалистов, занимающихся цифровой обработкой сигналов.

1. ФИЛЬТРАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Пусть на входе линейного фильтра с постоянными параметрами, описываемого импульсной характеристикой $h(t)$ или, эквивалентно, частотной характеристикой $H(\omega)$, наблюдается непрерывный сигнал $x(t)$.

Следуя общей концепции теории оптимальной фильтрации, будем полагать, что $x(t)$ представляет собой наблюдаемую реализацию случайного процесса $\xi(t)$, являющегося детерминированной функцией G полезного сигнала $s(t)$ и шумового сигнала $v(t)$:

$$\xi(t) = G[s(t, \lambda), v(t)],$$

где полезный сигнал $s(t, \lambda)$ в общем случае содержит в качестве параметра — информационного сообщения — векторный случайный процесс

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)].$$

Процессы $s(t)$ и $v(t)$ будем считать стационарными и стационарно-связанными¹ с известными энергетическими спектрами $G_s(\omega)$ и $G_v(\omega)$ или, что эквивалентно, корреляционными функциями $b_s(\tau)$ и $b_v(\tau)$, а также, возможно, взаимной корреляционной функцией $b_{sv}(\tau)$ или взаимным энергетическим спектром $G_{sv}(\omega)$, хотя в большинстве практических задач полезный и шумовой сигналы являются статистически независимыми. Кроме того, будем считать, что среднее значение шумового процесса $v(t)$ равно нулю, что, как правило, имеет место, исходя из физической сущности решаемых задач.

В зависимости от структуры и параметров фильтра выходной сигнал $y(t)$, трактуемый, в соответствии с предложенной концепцией, как реализация случайного процесса $\eta(t)$, может оказаться в большей или в меньшей степени “похожим” на полезный сигнал $s(t)$. В связи со случайным характером шумового сигнала $v(t)$, конечно, невозможно добиться того, что $y(t)$ в точности повторит сигнал $s(t)$, однако можно надеяться на то, что при

¹ Имеется в виду, что взаимно-корреляционная функция зависит только от разности временных аргументов.

надлежащем выборе фильтра различие между $s(t)$ и $y(t)$ будет в определённом смысле (т. е. согласно какому-то количественному критерию) небольшим. Развивая эту мысль, целесообразно поставить задачу о нахождении *наилучшего* (оптимального) фильтра, обеспечивающего *минимальное* различие между выходным и полезными сигналами.

1.1. ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕ РЕАЛИЗУЕМЫЙ ФИЛЬТР

В простейшем случае сигнал $\xi(t)$ на входе фильтра представляет собой сумму полезного сигнала $s(t)$ и шума $v(t)$:

$$\xi(t) = s(t) + v(t). \quad (1.1.1)$$

Поставим задачу найти такую структуру фильтра, при которой *ошибка фильтрации*, т. е. разность

$$\Delta(t) = \eta(t) - s(t)$$

между выходным (оценивающим) $\eta(t)$ и полезным (оцениваемым) $\xi(t)$ сигналами была бы в определённом смысле минимальна.

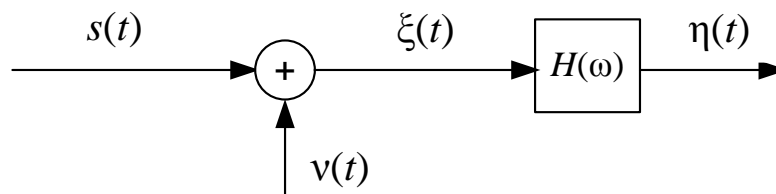


Рис. 1.1. К задаче оптимальной линейной фильтрации

В качестве критерия выберем *критерий минимума среднеквадратической ошибки* (СКО), когда математическое ожидание квадрата разности ошибки фильтрации минимально:

$$\mathbf{E}[\Delta^2(t)] = \mathbf{E}\left[(\eta(t) - s(t))^2\right] \rightarrow \min. \quad (1.1.2)$$

В такой постановке задача независимо друг от друга была решена российским математиком А.Н. Колмогоровым¹ (в 1939 г.) и американским

¹ Александр Николаевич Колмогоров (1903–1987) — выдающийся российский математик, создатель современной теории вероятностей. Им получены фундаментальные результаты практически во всех разделах математики и её приложениях.

математиком Н. Винером¹ (в 1942 г.), и поэтому фильтр, обеспечивающий минимальную среднеквадратическую ошибку, называют фильтром Колмогорова–Винера, а саму фильтрацию — винеровской.

Заметим, что некоторые другие критерии, отличающиеся от минимума СКО, также могут оказаться удовлетворительными, а в некоторых ситуациях — и более адекватными. Например, средняя абсолютная ошибка

$$\mathbf{E}[|\Delta(t)|] = \mathbf{E}[|\eta(t) - s(t)|]$$

или максимум абсолютной ошибки

$$\max |\eta(t) - s(t)|$$

в некоторых случаях могут представлять для наблюдателя больший интерес, чем СКО. Причина предпочтения критерия минимума СКО состоит, главным образом, в его удобстве. Возникающие при этом математические операции не являются чрезмерно громоздкими, а решение многих задач удаётся получить в явном, замкнутом виде. С практической точки зрения $\mathbf{E}[\Delta(t)]$ является дисперсией, т. е. мощностью сигнала ошибки и, таким образом, интуитивно должна быть “естественно используемой”.

Рассмотрим решение поставленной задачи (1.1.2), не обращая пока внимание на условие физической реализуемости фильтра.

Как известно [1], сигнал на выходе линейного устройства с постоянными параметрами представляет собой свёртку входного сигнала с импульсной характеристикой, описывающей работу этого устройства, т. е. для всех реализаций входного и выходного процессов справедливо.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')x(t-t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')x(t')dt'. \quad (1.1.3)$$

Следовательно, такое же соотношение можно написать и для самих случайных процессов:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\xi(t')dt'. \quad (1.1.3a)$$

Введём в рассмотрение корреляционную функцию

$$b_{\xi}(\tau) = \mathbf{E}[\xi(t)\xi(t+\tau)] \quad (1.1.4)$$

¹ Норберт Винер (1894–1964) — выдающийся американский математик, основоположник кибернетики. Получил основополагающие результаты во многих областях теории вероятностей, теории управления.

входного сигнала, корреляционную функцию

$$b_s(\tau) = \mathbf{E}[s(t)s(t + \tau)] \quad (1.1.5)$$

оцениваемого сигнала, а также взаимную корреляционную функцию

$$b_{\xi_s}(\tau) = \mathbf{E}[\xi(t)s(t + \tau)] \quad (1.1.6)$$

между входным и оцениваемым сигналами¹. Тогда СКО можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta^2(t)] &= \mathbf{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt' - s(t)\right)^2 = \\ &= \mathbf{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t')h(t'')x(t-t')\xi(t-t'')dt'dt'' - 2\mathbf{E}\int_{-\infty}^{\infty} h(t')\xi(t-t')s(t)dt' + \mathbf{E}[s^2(t)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t')h(t'')b_{\xi}(t'-t'')dt'dt'' - 2\int_{-\infty}^{\infty} h(t')b_{\xi_s}(t')dt' + b_s(0). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Из (1.1.7) уже видно, что СКО при линейной фильтрации зависит только от корреляционной и взаимно-корреляционной функций процессов и не зависит от их “более тонкой” структуры, например, фазовых составляющих².

Согласно теореме Винера–Хинчина, корреляционная функция $b(\tau)$ стационарного процесса связана с энергетическим спектром $G(\omega)$ парой преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau; \\ b(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega. \end{aligned}$$

¹ Приведённые выражения для корреляционных функций справедливы в том случае, когда рассматриваемые случайные процессы вещественны. Для комплексных процессов (рассматриваемых в следующих главах) корреляционная функция определяется с учётом комплексного сопряжения второго множителя, например,

$$b_{\xi}(t) = \mathbf{E}[\xi(t)\xi^*(t + \tau)].$$

² К примеру, если в качестве полезного сигнала используется речь, то она может быть оптимально обработана тем же фильтром, который используется для предсказания теплового шума, предварительно пропущенного через фильтр, который на выходе создаёт такой же энергетический спектр.

Это даёт возможность переписать соотношение (1.1.7) в спектральной области, поскольку, с учётом того, что $h(t)$ и $H(\omega)$ также связаны парой преобразований Фурье:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt;$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega,$$

имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') h(t'') b_{\xi}(t' - t'') dt' dt'' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') h(t'') G_{\xi}(\omega) \exp[j\omega(t' - t'')] d\omega dt' dt'' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} h(t') b_{\xi_s}(t') dt' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') G_{\xi_s}(\omega) \exp(j\omega t') d\omega dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi_s}(\omega) H^*(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

где $G_{\xi_s}(\omega)$ — взаимный энергетический спектр между сигналами $\xi(t)$ и $s(t)$. Если “обычный” энергетический спектр имеет ясный физический смысл спектральной плотности средней мощности процесса, то для $G_{\xi_s}(\omega)$ такой смысл указать затруднительно; лучше всего трактовать его как формальное преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции (для которой, конечно, физический смысл вполне прозрачен: мера вероятностной зависимости между отдельными значениями двух процессов). Важно понимать, что $G_{\xi_s}(\omega)$ — комплексная функция, вещественная часть которой чётна, а мнимая — нечётна, дающая при умножении на $H^*(\omega)$ вещественную функцию. При этом $G_{\xi_s}(\omega)$ и $G_{s\xi}(\omega)$ являются комплексно-сопряжёнными величинами, что позволяет записать

$$\begin{aligned}
2G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega) &= G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega) + \left(G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega)\right)^* = \\
&= G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega) + G_{\xi_s}^*(\omega)H(\omega) = G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega) + G_{s\xi}(\omega)H(\omega).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[\Delta^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega) - G_{s\xi}(\omega)H(\omega) + G_s(\omega) \right] d\omega. \quad (1.1.8)$$

Для того, чтобы получить выражение, связывающее характеристику фильтра с энергетическими или корреляционными характеристиками обрабатываемых сигналов, попытаемся преобразовать (1.1.8) к виду, в котором ясно просматривается возможность минимизации $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$.

Пусть $F(\omega)$ — комплексная функция, удовлетворяющая соотношению

$$|F(\omega)|^2 = G_{\xi}(\omega).$$

Прибавим и вычтем в подынтегральном выражении $|G_{\xi_s}(\omega) / F(\omega)|^2$ и затем преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\Delta^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|F(\omega)H(\omega)|^2 - G_{s\xi}(\omega)H(\omega) - G_{\xi_s}(\omega)H^*(\omega) + \right. \\
&\quad \left. + |G_{\xi_s}(\omega) / F(\omega)|^2 + G_s(\omega) - |G_{\xi_s}(\omega) / F(\omega)|^2 \right] d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| F(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{F^*(\omega)} \right|^2 + G_s(\omega) - \frac{|G_{\xi_s}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} \right) d\omega. \quad (1.1.8a)
\end{aligned}$$

В этом подынтегральном выражении только первое слагаемое зависит от характеристики фильтра, так что минимизация СКО обеспечивается приравнением его к нулю:

$$F(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{F^*(\omega)} = 0 \quad (1.1.9)$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям,

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{G_{\xi}(\omega)}. \quad (1.1.9a)$$

Получающаяся при этом минимальная (остаточная) СКО равна

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega)G_{\xi}(\omega) - |G_{\xi s}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} d\omega. \quad (1.1.10)$$

Выражение (1.1.9) в виде

$$G_{\xi}(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) = G_{\xi s}(\omega)$$

можно трактовать как уравнение, содержащее произведение Фурье-образов. Следовательно, вычислив от обеих его частей обратное преобразование Фурье, получим уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(t)b_{\xi}(\tau - t)dt = b_{\xi s}(\tau), \quad (1.1.11)$$

содержащее свёртку корреляционной функции сигнала $\xi(t)$ с импульсной характеристикой фильтра. Соотношение (1.1.11) известно в литературе под названием *уравнение Винера–Хопфа*. С позиции классификации интегральных уравнений это — интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

Частотная характеристика в (1.1.9) и минимальная СКО в (1.1.10) выражены через энергетический спектр суммарного сигнала $\xi(t)$ и взаимный энергетический спектр сигналов $\xi(t)$ и $s(t)$, в то время как при постановке задачи считались известными энергетические спектры полезного сигнала и помехи, поэтому попытаемся выразить $H(\omega)$ и Δ_{\min} через $G_s(\omega)$ и $G_v(\omega)$, учитывая, что в общем случае между $s(t)$ и $v(t)$ может существовать какая-то вероятностная связь.

Корреляционная функция $b_{\xi}(\tau)$ суммарного процесса $\xi(t) = s(t) + v(t)$ представляет собой сумму собственных и взаимных корреляционных функций:

$$\begin{aligned} b_{\xi}(\tau) &= \mathbf{E}[\xi(t)\xi(t + \tau)] = \mathbf{E}[(s(t) + v(t))(s(t + \tau) + v(t + \tau))] = \\ &= \mathbf{E}[s(t)s(t + \tau) + v(t)v(t + \tau) + s(t)v(t + \tau) + v(t)s(t + \tau)] = \\ &= b_s(\tau) + b_v(\tau) + b_{sv}(\tau) + b_{vs}(\tau). \end{aligned}$$

Следовательно, энергетический спектр $G_{\xi}(\omega)$ также будет содержать как собственные, так и взаимные составляющие:

$$G_{\xi}(\omega) = G_s(\omega) + G_v(\omega) + G_{sv}(\omega) + G_{vs}(\omega).$$

Рассуждая аналогично, легко видеть, что

$$G_{\xi s}(\omega) = G_s(\omega) + G_{vs}(\omega);$$

$$G_{s\xi}(\omega) = G_s(\omega) + G_{sv}(\omega).$$

Таким образом, частотная характеристика оптимального фильтра может быть представлена в следующем виде:

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_s(\omega) + G_{sv}(\omega)}{G_s(\omega) + G_v(\omega) + G_{sv}(\omega) + G_{vs}(\omega)}. \quad (1.1.12)$$

В том случае, когда полезный и шумовой сигналы вероятностно независимы, взаимная корреляционная функция $b_{sv}(\tau)$ представляет собой произведение математических ожиданий:

$$\begin{aligned} b_{sv}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)n(t+\tau)w^{(2)}(s,n)dsdn = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(s)ds \int_{-\infty}^{\infty} n(t+\tau)w(n)dn = \\ &= \mathbf{E}[s(t)] \mathbf{E}[v(t+\tau)]. \end{aligned}$$

Как было указано выше, математическое ожидание шумового процесса $v(t)$ предполагается равным нулю — такая ситуация, как правило, имеет место, исходя из физической сущности механизмов образования шумов. Таким образом, взаимная корреляционная функция независимых процессов $s(t)$ и $v(t)$ равна нулю, следовательно, равны нулю и соответствующие взаимные энергетические спектры. Это приводит к упрощению вида оптимальной частотной характеристики, которая оказывается равной

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_v(\omega)}. \quad (1.1.13)$$

Также при этом существенно упрощается выражения (1.1.9) для остаточной СКО, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{G_s(\omega)G_{\xi}(\omega) - |G_{\xi s}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} &= \frac{G_s(\omega)(G_s(\omega) + G_v(\omega)) - |G_s(\omega)|^2}{G_s(\omega) + G_v(\omega)} = \\ &= \frac{G_s(\omega)G_v(\omega)}{G_s(\omega) + G_v(\omega)} \end{aligned}$$

и

$$\Delta_{\text{min}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega)G_v(\omega)}{G_s(\omega) + G_v(\omega)} d\omega. \quad (1.1.14)$$

В вырожденном случае, когда спектры полезного сигнала и помехи не перекрываются (рис. 1.2, а), оптимальная характеристика имеет следующий вид:

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \begin{cases} 1, & G_s(\omega) \neq 0; \\ 0, & G_s(\omega) = 0. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

В этом случае, как следует из (1.1.13), остаточная СКО равна нулю:

$$\Delta_{\text{min}} = 0. \quad (1.1.16)$$

т. е. фильтрация производится без ошибок, и на выходе точно воспроизводится полезный сигнал $s(t)$.

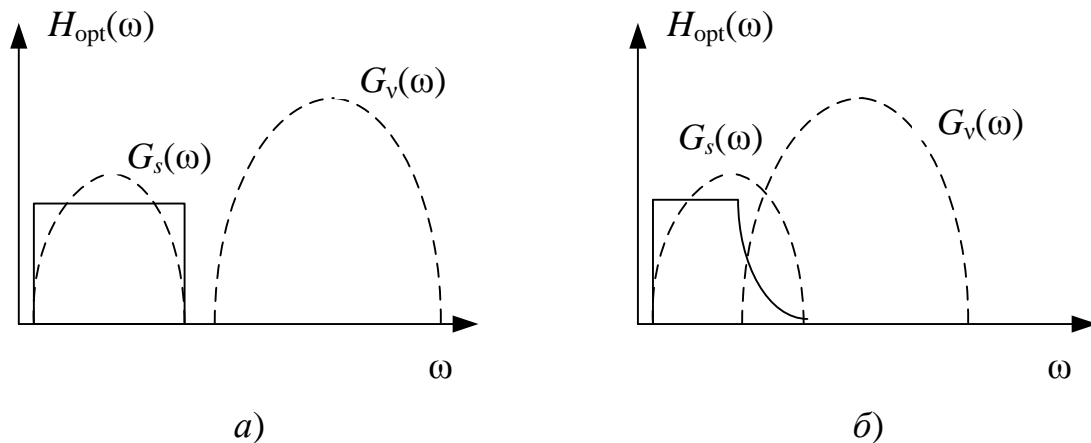


Рис. 1.2. Спектр сигнала и помехи не перекрываются (а); спектр сигнала и помехи частично перекрываются (б)

Если же спектры сигнала и помехи хотя бы частично перекрываются, то фильтрация происходит с некоторой ненулевой ошибкой. На рис. 1.2, б показан примерный вид оптимальной характеристики: $H(\omega) = 1$ при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, а при $\omega_2 < \omega \leq \omega_3$ $H(\omega)$ монотонно спадает до нуля. При этом остаточная СКО обусловлена как пропуском части помехи, так и искажением части полезного сигнала. Чем больше $G_v(\omega)$ в интервале перекрытия и чем меньше $G_s(\omega)$ в этом же интервале, тем в меньшей степени этот интервал должен пропускаться оптимальным фильтром.

Из (1.1.13) следует, что когда помеха превалирует над полезным сигналом, т. е. когда $G_v(\omega) \gg G_s(\omega)$, оптимальную характеристику приближённо можно записать как

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_v(\omega)}, \quad (1.1.17)$$

а остаточная СКО равна

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(\omega) d\omega = b_s(0), \quad (1.1.18)$$

т. е. средней мощности полезного сигнала. На основании этого можно сделать, казалось бы, логичный вывод о том, что оптимальный фильтр эффективно отделяет сигнал от сколь угодно интенсивной помехи (т. е., казалось бы, полезный сигнал малой мощности обеспечивает малую остаточную СКО). В действительности такой вывод является ошибочным, поскольку в этом случае сигнал $\eta(t)$ на выходе фильтра весьма слаб, фактически он равен нулю, а из условия $\eta(t) \approx 0$ следует, что $\Delta(t) \approx s(t)$, что и объясняет (1.1.18).

Дальнейшие упрощения синтеза оптимального фильтра Колмогорова–Винера связаны с моделью белого шума [4], имеющего постоянное значение энергетического спектра по всём спектральном диапазоне:

$$G_v(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (1.1.19)$$

В этом случае вид оптимальной частотной характеристики, по существу, определяется только энергетическим спектром полезного сигнала:

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + N_0 / 2}. \quad (1.1.20)$$

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие методику и характеристики винеровской фильтрации.

1.1.1. Параметрическая оптимизация идеального фильтра нижних частот

Несмотря на то, что соотношения (1.1.9) или (1.1.13) обеспечивают функциональный синтез оптимальной характеристики, рассмотрим вначале частный случай, когда структура фильтра задана, и требуется лишь оптимизировать его параметры.

Пусть полезный сигнал $s(t)$, энергетический спектр которого описывается выражением

$$G_s(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2}, \quad \alpha > 0, \gamma > 0, \quad (1.1.21)$$

поступает в аддитивной смеси с белым шумом вида (1.1.19) на вход идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с полосой $2\pi B$ и единичным усилением (рис. 1.3):

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi B; \\ 0, & |\omega| > 2\pi B. \end{cases}$$

Требуется определить значение B , обеспечивающее минимальную СКО воспроизведения полезного сигнала на выходе фильтра.

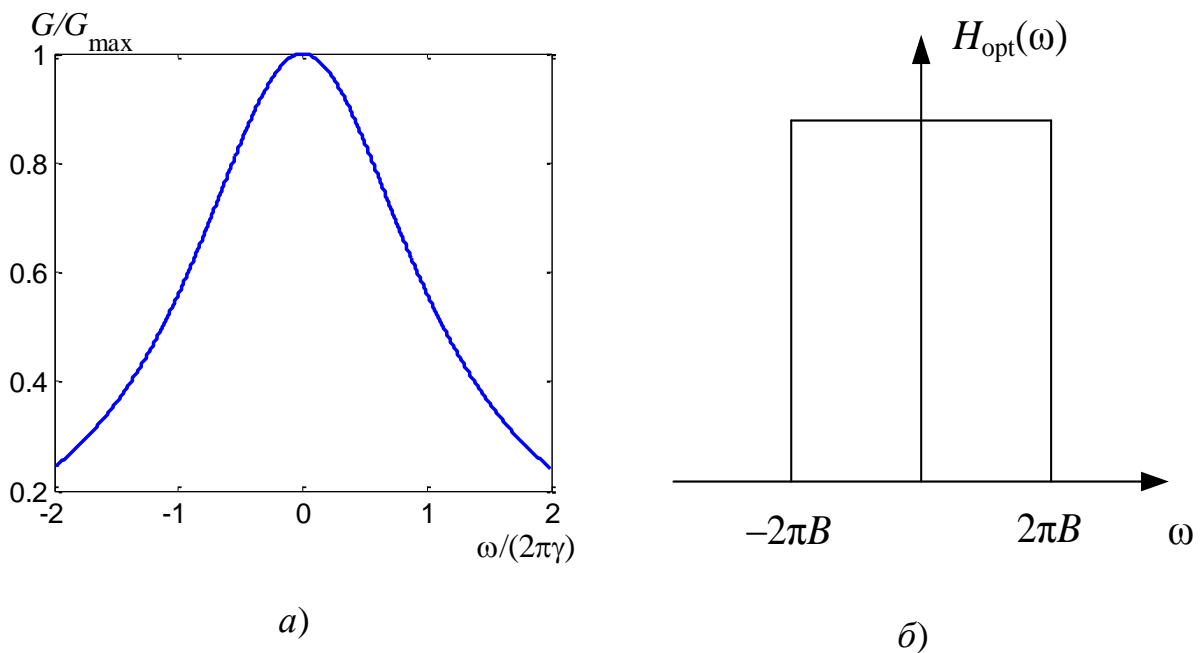


Рис. 1.3. Вид нормированного энергетического спектра полезного сигнала (а) и частотной характеристики идеального ФНЧ (б)

Отметим, что параметр γ определяет эффективную ширину спектра полезного сигнала по уровню 3 дБ.

При такой постановке задачи использование “готового решения”, даваемого соотношения (1.1.9), невозможно, так как вид частотной характеристики задан, и нет никакой гарантии того, что такой вид является оптимальным (как будет показано далее, он *не* является оптимальным). Поэтому придётся, по существу, повторить те же рассуждения, которые использовались для получения общего решения, но применительно к фиксированной прямоугольной форме частотной характеристики. Фактически, необходимо вернуться “на шаг назад” к соотношению (1.1.8), подставить в

него выражения $G_s(\omega)$ и $G_v(\omega)$, после чего найти значение B , минимизирующее полученную СКО. С учётом вещественности $H(\omega)$ и независимости $s(t)$ и $v(t)$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[\Delta^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(G_s(\omega) + G_v(\omega)) |H(\omega)|^2 - 2G_s(\omega)H(\omega) + G_s(\omega)] d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(G_v(\omega) - G_s(\omega))H(\omega) + G_s(\omega)] d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \\
 &= BN_0 + \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} - \frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma} \operatorname{arctg} \frac{B}{\gamma}. \tag{1.1.22}
 \end{aligned}$$

Предполагая наличие минимума в полученной зависимости $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$ от B , найдём производную и приравняем её к нулю:

$$\frac{\partial \mathbf{E}[\Delta^2(t)]}{\partial B} = N_0 - \frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma^2} \frac{1}{1 + (B/\gamma)^2} = 0,$$

отсюда

$$B_{\text{opt}} = \gamma \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma^2 N_0} - 1}. \tag{1.1.23}$$

Для большей ясности в трактовке полученного соотношения введём понятие *отношение сигнал-шум на входе фильтра*. Несмотря на то, что смысл этой характеристики вполне понятен (отношение некоторой энергетической характеристики полезного сигнала к некоторой энергетической характеристике шума), тем не менее, её количественное описание требует известной аккуратности, поскольку вся теория оптимальной фильтрации построена “на языке” случайных процессов, для которых понятие энергии не определено.

Определим входное отношение сигнал-шум

$$q = \left(\frac{P_s}{P_v} \right)_{\text{вх}}$$

как отношение средней мощности P_s входного полезного сигнала

$$P_{s \text{ вх}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

к средней мощности P_v шума на входе фильтра. Проблема усложняется тем, что для модели (1.1.19) белого шума, являющейся теоретической абстракцией, средняя мощность входного шума оказывается бесконечной:

$$P_{v \text{ вх}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} d\omega = \infty.$$

С практической точки зрения эта ситуация, однако, не является столь уж катастрофичной, поскольку обработка сигналов всегда производится в некоторой конечной полосе частот, что делает из абстрактной модели белого шума вполне физическую модель *белого шума в конечной полосе частот*, при которой средняя мощность

$$P_{v \text{ вх}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi F_0}^{2\pi F_0} \frac{N_0}{2} d\omega = N_0 F_0,$$

где $[-F_0; F_0]$ — эквивалентная шумовая полоса. Для определения значения F_0 нет чёткого критерия, но представляется логичным считать, что F_0 должна быть каким-то образом связана с (эффективной) полосой полезного сигнала (идея отождествить F_0 с частотой среза B оптимизируемого ФНЧ, очевидно, непродуктивна).

Определим эквивалентную шумовую полосу как основание прямоугольника (рис. 1.4), высота которого равна максимальному значению $G_s(0)$ энергетического спектра полезного сигнала, а площадь совпадает с площадью под кривой $G_s(\omega)$ ¹:

$$G_s(0)4\pi F_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G_s(\omega) d\omega.$$

В рассматриваемом случае $G_s(0) = \alpha^2 / (2\pi\gamma)^2$, поэтому

$$\frac{\alpha^2}{(2\pi\gamma)^2} 4\pi F_0 = \frac{\alpha^2}{2\pi\gamma} \pi,$$

¹ Площадь под кривой энергетического спектра не равна средней мощности и отличается множителем 2π .

откуда

$$F_0 = \frac{\pi\gamma}{2}, \quad (1.1.24)$$

и входное отношение сигнал-шум равно

$$q = \left(\frac{P_s}{P_v} \right)_{\text{вх}} = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} \frac{2}{\pi\gamma N_0} = \frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma^2 N_0}. \quad (1.1.25)$$

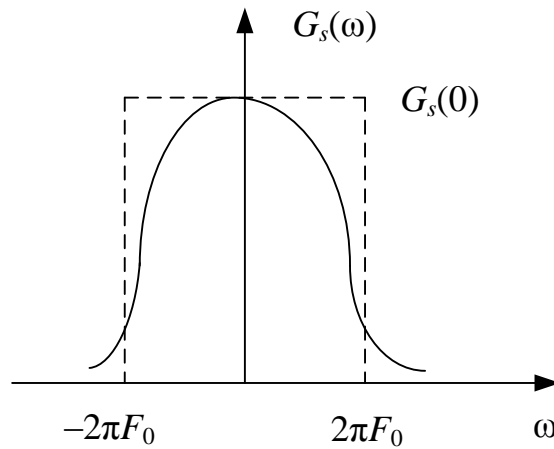


Рис. 1.4. К определению эквивалентной шумовой полосы

Теперь, возвращаясь к выражению (1.1.23) для оптимальной полосы фильтра, запишем её через значение q :

$$B_{\text{opt}} = \gamma\sqrt{q-1}. \quad (1.1.26)$$

На рис. 1.5 показана зависимость нормированной на γ оптимальной полосы ФНЧ в зависимости от отношения сигнал-шум на входе. При $q < 1$ под корнем образуются отрицательные значения, т. е. фильтра с отличной от нуля полосой пропускания не может существовать. В этом случае результатом оптимальной фильтрации является появление на выходе фильтра сигнала с нулевым значением.

Рассчитаем остаточную СКО при использовании фильтра с оптимальной полосой. Согласно (1.1.20),

$$\mathbf{E}[\Delta^2(t)] = N_0\gamma\sqrt{q-1} + \frac{\alpha^2}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg\sqrt{q-1} \right).$$

Удобнее и нагляднее представлять на абсолютное значение $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$, а нормировать его на среднюю мощность полезного сигнала, тогда

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{\mathbf{E}[\Delta^2(t)]}{P_s} = 1 + \frac{2\sqrt{q-1}}{\pi q} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{q-1}. \quad (1.1.27)$$

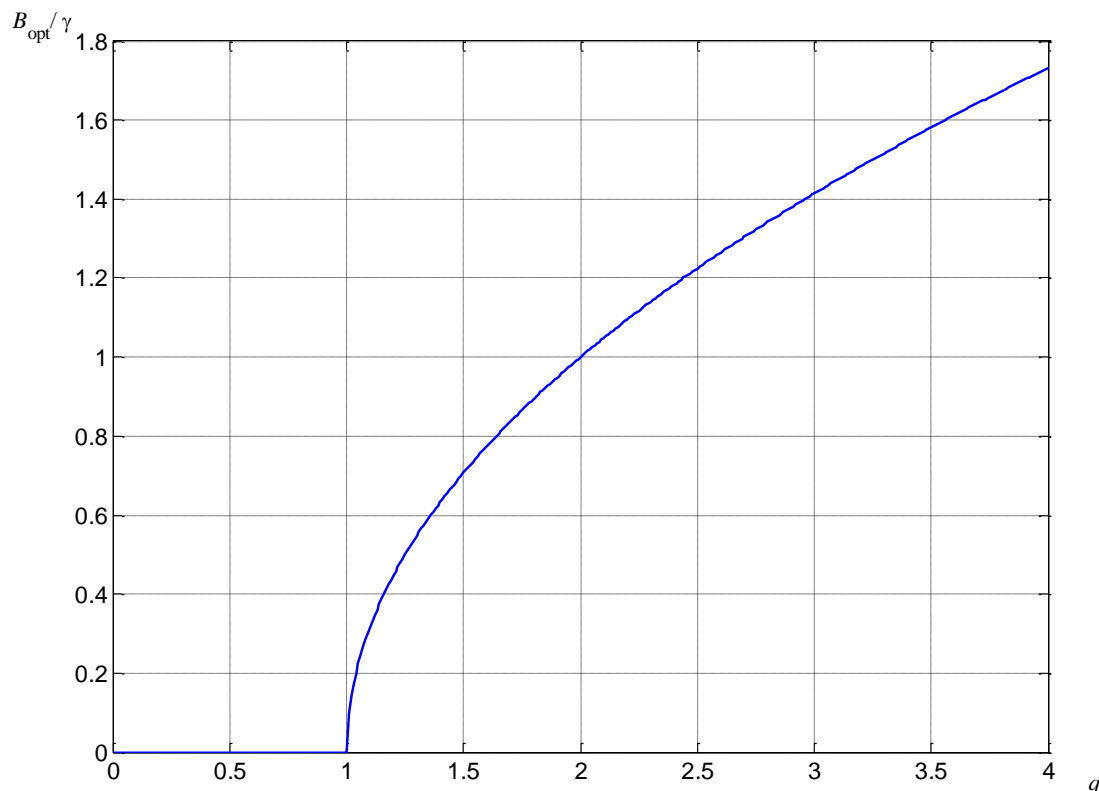


Рис. 1.5. Оптимальная полоса ФНЧ в зависимости от отношения сигнал-шум на входе

На рис. 1.6 (кривая 1) показан вид зависимости $\varepsilon_1(q)$. При $0 \leq q \leq 1$, когда оптимальный фильтр как таковой не существует, и сигнал на выходе равен нулю, нормированная остаточная ошибка имеет постоянное единичное значение (абсолютное её значение при этом равно средней мощности полезного сигнала). При увеличении q остаточная СКО начинает монотонно снижаться.

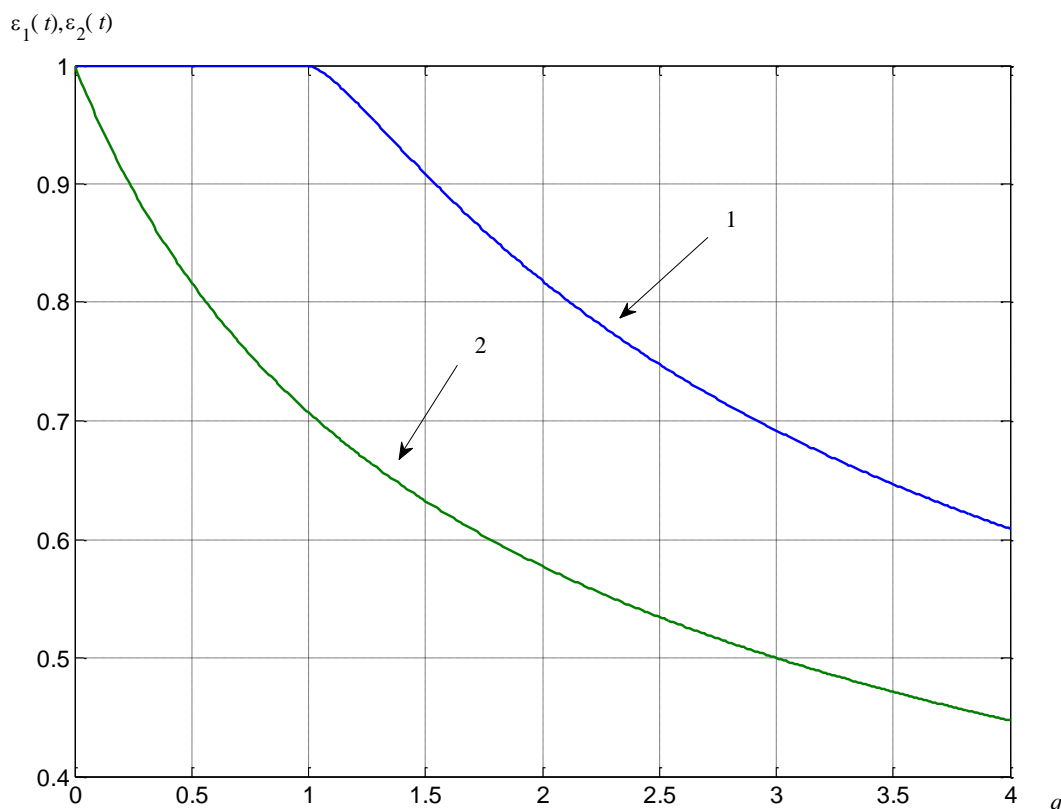


Рис. 1.6. Нормированная остаточная СКО в зависимости от отношения сигнал-шум на входе для идеального (1) и оптимального (2) фильтров

1.1.2. Оптимальная фильтрация сигнала с заданным энергетическим спектром

Напомним, что при решении предыдущей (в разд. 1.1.1) задачи структура фильтра — прямоугольная частотная характеристика — была задана, и речь шла об оптимизации полосы частот. Рассмотрим теперь “истинную” оптимизацию, когда по-прежнему полезный сигнал и шум задаются своими энергетическими спектрами (1.1.21) и (1.1.19) соответственно, при этом на структуру фильтра не накладывается никаких ограничений. В этом случае уже применимы результаты общей теории, и можно утверждать, что оптимальная характеристика задаётся соотношением (1.1.19) или, более конкретно, (1.1.20):

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{2\alpha^2}{2\alpha^2 + N_0 4\pi^2 \gamma^2 + N_0 \omega^2}. \quad (1.1.28)$$

При этом минимальная СКО, определяемая (1.1.14), равна

$$\begin{aligned}\Delta_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{2\alpha^2 + N_0 4\pi^2 \gamma^2 + N_0 \omega^2} d\omega = \\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2\pi^2 \gamma^2 N_0}}} = \frac{P_s}{\sqrt{1+q}}\end{aligned}$$

или в нормированном виде

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{\Delta_{\min}}{P_s} = \frac{1}{\sqrt{1+q}}. \quad (1.1.29)$$

Зависимость $\varepsilon_2(q)$ показана на рис. 1.6 (кривая 2). Видно, что она идёт заметно ниже, чем $\varepsilon_1(q)$. Кроме того, на интервале $0 \leq q \leq 1$, где идеальный фильтр с оптимизированной полосой не работает, “истинный” оптимальный фильтр вполне демонстрирует свою работоспособность.

1.2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫЙ ФИЛЬТР

В предыдущем разделе были получены основные соотношения, позволяющие синтезировать оптимальный по критерию минимума СКО линейный фильтр, а также рассчитать остаточную СКО на выходе такого фильтра. Однако при определении импульсной характеристики из уравнения Винера–Хопфа (1.1.11) или частотной характеристики из соотношения (1.1.9) никак не учитывалось условие физической реализуемости $h(t) = 0$ при $t < 0$ (фильтр не может реагировать на сигнал ещё до его возникновения). С практической точки зрения ценность полученных результатов заключается в том, что структура и характеристики физически не реализуемого фильтра можно рассматривать как потенциально достижимые, понимая, что характеристики реальных фильтров будут, скорее всего, заметно хуже.

Условие физической реализуемости предполагает, что для фильтрации используется только предыстория наблюдаемой реализации $\xi(t)$ до момента времени, когда производится оценка. Это означает, что вместо соотношения (1.1.3), с которого начиналось построение всей теории оптимальной линейной фильтрации, имеет место соотношение

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt' = \int_0^{\infty} h(t-t')\xi(t')dt'. \quad (1.2.1)$$

Для получения конструктивных результатов оптимального линейного оценивания с учётом условия физической реализуемости проведём рассуждения, аналогичные тем, что проведены при выводе уравнений (1.1.9) и (1.1.11). Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta^2(t)] &= \mathbf{E}\left(\int_0^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt' - s(t)\right)^2 = \\ &= \mathbf{E}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(t')h(t'')\xi(t-t')\xi(t-t'')dt'dt'' - 2\mathbf{E}\int_0^{\infty} h(t')\xi(t-t')s(t)dt' + \mathbf{E}[s^2(t)] = \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(t')h(t'')b_{\xi}(t'-t'')dt'dt'' - 2\int_0^{\infty} h(t')b_{\xi s}(t')dt' + b_s(0). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Покажем, что оптимальная импульсная характеристика $h_{\text{opt}}(t)$, минимизирующая (1.2.2), удовлетворяет модифицированному уравнению Винера–Хопфа

$$\int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t)b_{\xi}(\tau-t)dt = b_{\xi s}(\tau), \quad (1.2.3)$$

где, как и прежде, $b_{\xi}(\tau)$ — корреляционная функция входного сигнала $\xi(t)$, а $b_{\xi s}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция между входным и оцениваемым сигналами.

Остаточная СКО в случае, когда импульсная характеристика удовлетворяет уравнению (1.2.3), имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{\min} &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t')h_{\text{opt}}(t'')b_{\xi}(t'-t'')dt'dt'' - 2\int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t')b_{\xi s}(t')dt' + b_s(0) = \\ &= \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t')b_{\xi s}(t')dt' - 2\int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t')b_{\xi s}(t')dt' + b_s(0) = \\ &= b_s(0) - \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t')b_{\xi s}(t')dt'. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Для того, чтобы убедиться в оптимальности импульсной характеристики, удовлетворяющей условию (1.2.3), достаточно показать, что разность между $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$ и δ_{\min} неотрицательна. Действительно:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\Delta^2(t)] - \delta_{\min} = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty h(t')h(t'')b_\xi(t' - t'')dt'dt'' - 2 \int_0^\infty h(t')b_{\xi,s}(t')dt' + \int_0^\infty h_{\text{opt}}(t')b_{\xi,s}(t')dt'. \end{aligned}$$

Во втором и третьем интегралах с помощью (1.2.3) перейдем к двойному интегрированию, после чего объединим первый и третий интеграл:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\Delta^2(t)] - \delta_{\min} = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty [h(t')h(t'') + h_{\text{opt}}(t')h_{\text{opt}}(t'')] b_\xi(t' - t'')dt'dt'' - \\ & = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(t')h_{\text{opt}}(t'')b_\xi(t' - t'')dt'dt'' = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty [h(t') - h_{\text{opt}}(t')][h(t'') - h_{\text{opt}}(t'')] b_\xi(t' - t'')dt'dt''. \end{aligned}$$

В получившемся выражении выразим корреляционную функцию $b_x(\tau)$ по теореме Винера-Хинчина через энергетический спектр:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\Delta^2(t)] - \delta_{\min} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [h(t') - h_{\text{opt}}(t')][h(t'') - h_{\text{opt}}(t'')] G_\xi(\omega) \exp[j\omega(t' - t'')] dt'dt''. \end{aligned}$$

С учётом того, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [h(t') - h_{\text{opt}}(t')] \exp(j\omega t') d\omega = H(\omega) - H_{\text{opt}}(\omega), \\ & \int_0^\infty [h(t'') - h_{\text{opt}}(t'')] \exp(-j\omega t'') d\omega = H^*(\omega) - H_{\text{opt}}^*(\omega), \end{aligned}$$

окончательно получаем:

$$\mathbf{E}[\Delta^2(t)] - \delta_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |H(\omega) - H_{\text{opt}}(\omega)|^2 G_x(\omega) d\omega \geq 0.$$

Итак, импульсная характеристика фильтра, для которого СКО произведения выходного сигнала меньше, чем для любого другого, удо-

влетворяет модифицированному уравнению Винера–Хопфа (1.2.3), которое, по своей структуре такое же, как “основное” уравнению Винера–Хопфа (1.1.11): замена нижнего предела интегрирования нулём вместо $-\infty$ всё равно оставляет его уравнением типа свёртки. Однако его формальные решения (как, например, в рассмотренных выше задачах) не позволяют получить импульсную характеристику, равную нулю для отрицательных значений своего аргумента.

Для получения аналитических решений (1.2.3) в замкнутой форме предлагается сузить класс входных сигналов $\xi(t)$, ограничив их требованием на структуру энергетического спектра $G_\xi(\omega)$: он должен иметь вид рациональной функции, т. е. отношения двух многочленов. На первый взгляд такое требование кажется существенным ограничением, сильно обедняющим возможные типы обрабатываемых процессов. В действительности это не совсем так, поскольку любой энергетический спектр можно с той или иной степенью точности аппроксимировать рациональной функцией¹.

Любой рациональный энергетический спектр $G_\xi(\omega)$ может быть представлен в факторизованном виде:

$$G_\xi(\omega) = A^2 \frac{(\omega - \alpha_1) \cdots (\omega - \alpha_m)}{(\omega - \beta_1) \cdots (\omega - \beta_n)}, \quad (1.2.5)$$

где m и n — степень многочленов, стоящих в числителе и знаменателе соответственно.

Рассмотрим алгебраические свойства (1.2.5) (задание 1.1).

Так как $G_\xi(\omega)$ — энергетический спектр, он должен быть неотрицательной чётной функцией. Отсюда следует, что множитель A^2 вещественен. Далее, все вещественные полюсы и нули должны иметь чётную кратность (т. е. m и n — чётные числа), а все комплексные полюсы и нули, имеющие ненулевые мнимые части, могут присутствовать только в виде комплексно-сопряжённых пар. Следовательно, $G_\xi(\omega)$ можно представить в виде двух комплексно-сопряжённых множителей:

¹ Вообще, вопрос о функциональном виде энергетического спектра носит, скорее, академический интерес: он интересен для модельных процессов, у которых изначально аналитически (или в виде некоторых уравнений) заданы корреляционные или энергетические характеристики. Практические задачи по обработке реальных сигналов так или иначе приводят к необходимости аппроксимации различных характеристик.

$$G_{\xi}(\omega) = Q(\omega)Q^*(\omega) =$$

$$= A \frac{(\omega - \alpha_1) \cdots (\omega - \alpha_{m/2})}{(\omega - \beta_1) \cdots (\omega - \beta_{n/2})} A \frac{(\omega - \alpha_1^*) \cdots (\omega - \alpha_{m/2}^*)}{(\omega - \beta_1^*) \cdots (\omega - \beta_{n/2}^*)}, \quad (1.2.6)$$

при этом все полюсы и нули $Q(\omega)$ лежат в верхней полуплоскости, а полюсы и нули $Q^*(\omega)$ — в нижней полуплоскости комплексного аргумента ω .

Дополнительно по отношению к спектру $G_{\xi}(\omega)$ будем предполагать, что он, а, следовательно, и функции $Q(\omega)$ и $Q^*(\omega)$ не имеют полюсов на вещественной оси. Как правило, это имеет место для подавляющего большинства модельных процессов. Если они, всё же, есть (причём в чётном числе), то в процессе решения их можно сдвинуть с вещественной оси в виде комплексно-сопряжённых пар, придав им некоторую мнимую составляющую, которую в полученном решении устремить в пределе к нулю.

Для последующих рассуждений удобно ввести следующие обозначения. Пусть $u(t)$ и $U(\omega)$ — пара взаимно-обратных преобразований Фурье:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt;$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Определим функции

$$u_+(t) = \begin{cases} u(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad u_-(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0; \\ u(t), & t < 0, \end{cases}$$

так что

$$u(t) = u_+(t) + u_-(t).$$

Пусть теперь $U_+(\omega)$ — преобразование Фурье $u_+(t)$, а $U_-(\omega)$ — преобразование Фурье $u_-(t)$:

$$U_+(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$U_-(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_-(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Тогда, очевидно,

$$U(\omega) = U_+(\omega) + U_-(\omega).$$

Фактически $U_+(\omega)$ и $U_-(\omega)$ являются односторонними преобразованиями Фурье:

$$U_+(\omega) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$U_-(\omega) = \int_{-\infty}^0 u(t) \exp(-j\omega t) dt;$$

их суть состоит в том, что при выполнении “полного цикла” преобразования Фурье “обратное преобразование (F^{-1}) \rightarrow прямое преобразование (F)” на промежуточном этапе обнуляется часть $u(t)$, соответствующая отрицательной или положительной временной полуоси. В результате вместо тождественного преобразования

$$U(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} u(t) \xrightarrow{F} U(\omega)$$

получается преобразование

$$U(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} u(t) \rightarrow u_+(t) \xrightarrow{F} U_+(\omega).$$

Аналогично тому, как это делалось для физически нереализуемого фильтра, представим $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$ в частотной области, выразив входящие в (1.1.31) корреляционные функции через соответствующие энергетические спектры:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') h(t'') G_{\xi}(\omega) \exp[j\omega(t' - t'')] d\omega dt' dt'' - \\ &\quad - \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') G_{\xi_s}(\omega) \exp(j\omega t') d\omega dt' + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - G_{\xi_s}(\omega) H^*(\omega) - G_{s\xi}(\omega) H(\omega) + G_s(\omega) \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| Q(\omega) H(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right|^2 + G_s(\omega) - \frac{|G_{\xi_s}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} \right) d\omega. \end{aligned}$$

Это соотношение в точности повторяет (1.1.8).

Обратимся непосредственно к решению уравнения (1.2.3) с учётом требования физической реализуемости. Его формальное решение, получаемое посредством преобразования Фурье обеих частей (свёртка соответствует произведению Фурье-образов) совпадает с (1.1.9)

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} = 0,$$

где, согласно (1.2.6), $|Q(\omega)|^2 = G_{\xi}(\omega)$. Положим

$$\begin{aligned} U(\omega) &= Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} = U_+(\omega) + U_-(\omega) = \\ &= \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ + \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_-, \end{aligned}$$

где плюсы и минусы в нижних индексах, как уже было сказано, означают, что перед выполнением второго (прямого) преобразования Фурье будут обнулены составляющие, относящиеся к области $t \geq 0$ или к области $t \leq 0$ соответственно.

Отметим, что операции $[]_+$ и $[]_-$ обладают свойством линейности — это следует из линейности самого преобразования Фурье, поэтому

$$\left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_+ - \left[\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+$$

и

$$\left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_- = \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_- - \left[\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_-.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|U(\omega)|^2 + G_s(\omega) - \frac{|G_{\xi_s}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|U_+(\omega)|^2 + |U_-(\omega)|^2 + U_+(\omega)U_-^*(\omega) + U_+^*(\omega)U_-(\omega) \right) d\omega + \Delta_{\min}, \end{aligned}$$

где Δ_{\min} — минимальная СКО физически нереализуемого оптимального фильтра, определяемая (1.1.10), которая не зависит от вида частотной характеристики и, тем самым, не участвует в минимизации $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$.

Покажем, что в получившемся подынтегральном выражении слагаемые, соответствующие перекрёстным членам, обнуляются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\omega)U_-^*(\omega)d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t)\exp(-j\omega t)dtU_-^*(\omega)d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t)\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_-^*(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t)u_-(t)dt = 0 \end{aligned}$$

и аналогично для второго перекрёстного члена.

Далее, заметим, что составляющая

$$U_-(\omega) = \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_- - \left[\frac{G_{\xi y}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_-$$

в действительности не зависит от $H_{\text{opt}}(\omega)$. Это можно показать следующими рассуждениями.

Обратное преобразованию Фурье от произведения $Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega)$ равно свёртке $h_{\text{opt}}(t)$ и $q(t)$, где $q(t)$ — обратное преобразование Фурье от $Q(\omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega &= \\ &= h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(t)q(\tau-t)dt. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Следовательно, операция $\left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_-$ получается по схеме

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \rightarrow \left[h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \right]_- \xrightarrow{F} \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_-,$$

в которой

$$\left[h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \right]_- = 0$$

в силу требования физической реализуемости $h_{\text{opt}}(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$.

Аналогичным образом операция $\left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_+$ получается по схеме

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \rightarrow \left[h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \right]_+ \xrightarrow{F} \left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_+,$$

в которой, как легко понять

$$\left[h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \right]_+ = \left[h_{\text{opt}}(\tau) * q(\tau) \right].$$

Отсюда следует вывод, что

$$\left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_+ = Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega). \quad (1.2.8)$$

Приведённые рассуждения приводят к выводу о том, что единственным слагаемым, зависящим от вида частотной характеристики и, тем самым, влияющим на значение $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$, является $|U_+(\omega)|^2$. Минимизация $\mathbf{E}[\Delta^2(t)]$ будет достигнута, если $U_+(\omega) = 0$, т. е.

$$\left[Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \right]_+ - \left[\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = 0$$

или, с учётом (1.2.8),

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \left[\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = 0$$

откуда

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+. \quad (1.2.9)$$

При этом минимальная СКО δ_{\min} физически реализуемого фильтра оказывается равной минимальной СКО Δ_{\min} физически не реализуемого фильтра, определяемой соотношением (1.1.10).

Итак, общая схема получения частотной характеристики оптимального физически реализуемого фильтра, согласно (1.2.9), выглядит следующим образом.

- Энергетический спектр $G_{\xi}(\omega)$ входного сигнала разлагается на два комплексно сопряжённых множителя $Q(\omega)$ и $Q^*(\omega)$, имеющих все полюсы и нули в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

- Вычисляется взаимный энергетический спектр $G_{\xi}(\omega)$ и отношение

$$\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)}.$$

- Выполняется обратное преобразование Фурье

$$r(t) = F^{-1} \left[\frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \exp(j\omega t) d\omega.$$

Поскольку преобразованию подвергается рациональная функция, такой интеграл без труда вычисляется вычетами:

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi j \sum_{(k)} \text{Res}_{z=z_k} \frac{G_{\xi_s}(z)}{Q^*(z)} \exp(jzt).$$

Из общих свойств преобразования Фурье следует, что для пары $u(t)$ и $U(\omega)$ взаимно-обратных преобразований Фурье, таких, что $U(\omega)$ имеет рациональный вид, функция $u(t)$ будет отлична от нуля в области $t \geq 0$, если все полюсы $U(\omega)$ будут располагаться в верхней полуплоскости. И наоборот: $u(t)$ будет отлична от нуля в области $t \leq 0$, если все полюсы $U(\omega)$ будут располагаться в нижней полуплоскости. Таким образом, в свете последующего обнуления части $r(t)$, соответствующей $t \leq 0$, в сумме достаточно оставить только те полюсы, которые находятся в верхней полуплоскости.

• Производится (если это гарантированно не обеспечено предыдущим пунктом) обнуление части функции $r(t)$, соответствующей отрицательной области значений аргумента:

$$\rho(t) = \begin{cases} r(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

• Функция $\rho(t)$ подвергается прямому преобразованию Фурье, после чего искомая характеристика $H_{\text{opt}}(\omega)$ получается делением на $Q(\omega)$:

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{Q(\omega)} \int_0^{\infty} \rho(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (1.2.10)$$

Выразим частотную характеристику (1.2.9) через энергетические спектры полезного сигнала $s(t)$ и шума $v(t)$, сразу полагая их независимость. Учитывая, что в этом случае

$$G_{\xi_s}(\omega) = G_s(\omega),$$

$$G_{\xi}(\omega) = G_s(\omega) + G_v(\omega),$$

получаем оптимальную частотную характеристику в виде

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(\omega) &= \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{G_s(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{G_{\xi}(\omega) - G_v(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = \\ &= \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{Q(\omega)Q^*(\omega) - G_v(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = \frac{1}{Q(\omega)} \left[Q(\omega) - \frac{G_v(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ = \\ &= 1 - \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{G_v(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

В частности, когда шум $v(t)$ — белый со спектральной плотностью средней мощности $G_v(\omega) = N_0/2$, соотношение (1.2.11) ещё более упрощается. Запишем

$$\begin{aligned} \left[\frac{G_v(\omega)}{Q^*(\omega)} \right]_+ &= \left[\frac{N_0/2}{Q^*(\omega)} \right]_+ \equiv \left[\sqrt{N_0/2} - \sqrt{N_0/2} \frac{Q^*(\omega) - \sqrt{N_0/2}}{Q^*(\omega)} \right]_+ = \\ &= \sqrt{N_0/2} - \sqrt{N_0/2} \left[\frac{Q^*(\omega) - \sqrt{N_0/2}}{Q^*(\omega)} \right]_+. \end{aligned}$$

Поскольку энергетический спектр $G_s(\omega)$ полезного сигнала стремится к нулю с ростом ω (это определяется конечностью средней мощности), справедливо

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q(\omega)Q^*(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_\xi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [G_s(\omega) + N_0/2] = N_0/2$$

и, отсюда,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q(\omega) = \sqrt{N_0/2}.$$

Следовательно, вся дробь, стоящая в квадратных скобках, стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Это означает, что её разложение на простые дроби содержит только члены вида

$$\frac{a}{(\omega + b)^k},$$

где k — натуральное. А так как все нули $Q^*(\omega)$ лежат в нижней полуплоскости, вычисление от неё (обратного) преобразования Фурье будет давать нулевое значение:

$$\left[\frac{Q^*(\omega) - \sqrt{N_0/2}}{Q^*(\omega)} \right]_+ = 0.$$

Таким образом, при белом шуме оптимальная частотная характеристика физически реализуемого фильтра имеет следующий вид:

$$H_{\text{opt}}(\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_0/2}}{Q(\omega)}. \quad (1.2.12)$$

Рассмотрим некоторые примеры.

1.2.1. Сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией

В разд. 1.1.2 рассматривалась задача вычисления оптимальной частотной характеристики физически нереализуемого фильтра, когда на его вход поступает аддитивная смесь полезного сигнала, энергетический спектр которого

$$G_s(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2},$$

с белым шумом (1.1.19). Посмотрим, как меняется решение, если на фильтр накладывается условие физической реализуемости.

Прежде всего, найдём корреляционную функцию полезного сигнала. Вычисление интеграла

$$b_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (1.2.13)$$

проведём методом вычетов (это всё равно необходимо для определения функций $Q(\omega)$ и $Q^*(\omega)$). Для этого от вещественной переменной ω перейдём к комплексной переменной $z = \omega + j\sigma$. Комплекснозначная функция

$$G_s(z) = \frac{\alpha^2}{z^2 + (2\pi\gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{(z + j2\pi\gamma)(z - j2\pi\gamma)}$$

имеет два полюса $z_1 = j2\pi\gamma$ и $z_2 = -j2\pi\gamma$, лежащих на мнимой оси. Построим два контура интегрирования на комплексной плоскости (рис. 1.7), выбор которых определяется поведением комплекснозначной экспоненты

$$\exp[j\tau z] = \exp[j\tau(\omega + j\sigma)] = \exp[j\tau\omega] \exp[-\tau\sigma].$$

Для $\tau \geq 0$ условие¹ $|\exp[j\tau z]| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ обеспечивается выбором $\sigma \geq 0$, т. е. замыканием контура в верхнюю полуплоскость (рис. 1.7, а). При этом

$$\begin{aligned} b_s(\tau) &= \frac{1}{2\pi} 2\pi j \operatorname{Res}_{z=z_1} G_s(z) \exp(j\tau z) = \\ &= j \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\alpha^2 \exp(j\tau z)}{(z + j2\pi\gamma)(z - j2\pi\gamma)} (z - j2\pi\gamma) = \frac{\alpha^2 \exp(-2\pi\gamma\tau)}{4\pi\gamma}. \end{aligned}$$

¹ Напомним, что стремление к нулю подынтегральной функции обеспечивает, согласно лемме Жордана, обнуление интеграла по полуокружности. Более подробные сведения о применении вычетов к вычислению интегралов можно найти, например, в [3].

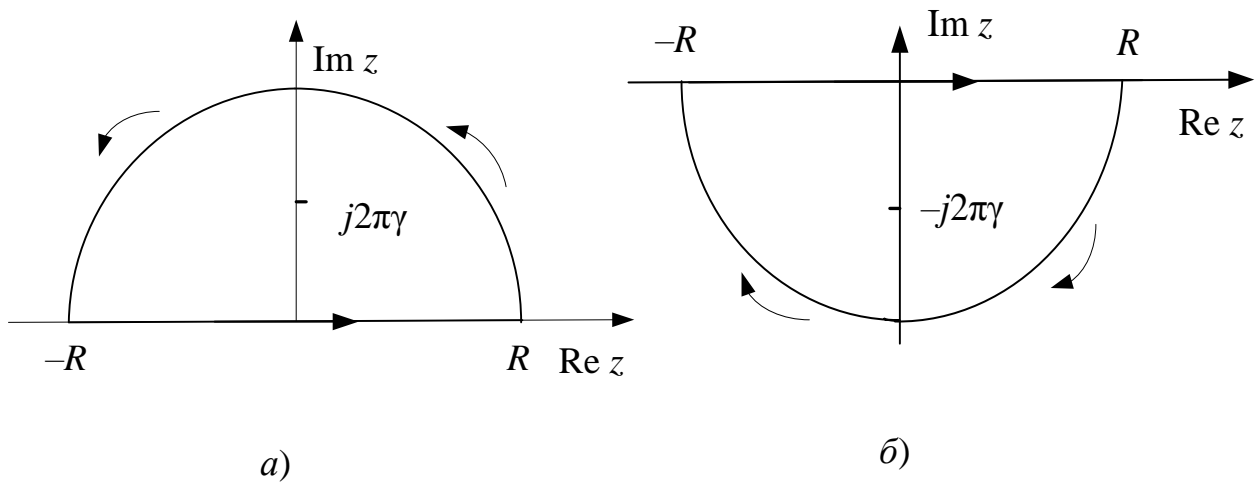


Рис. 1.7. Контуры интегрирования на комплексной плоскости при $\tau \geq 0$ (а) и $\tau \leq 0$ (б)

Для $\tau \leq 0$ условие $|\exp[j\tau z]| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ обеспечивается выбором $\sigma \leq 0$, т. е. замыканием контура в нижнюю полуплоскость (рис. 1.7, б), и при этом

$$\begin{aligned}
 b_s(\tau) &= -\frac{1}{2\pi} 2\pi j \operatorname{Res}_{z=z_2} G_s(z) \exp(j\tau z) = \\
 &= j \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{\alpha^2 \exp(j\tau z)}{(z + j2\pi\gamma)(z - j2\pi\gamma)} (z + j2\pi\gamma) = \frac{\alpha^2 \exp(2\pi\gamma\tau)}{4\pi\gamma}.
 \end{aligned}$$

Объединяя оба случая, окончательно запишем корреляционную функцию:

$$b_s(\tau) = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} \exp(-2\pi\gamma |\tau|). \quad (1.2.14)$$

Итак, полезный сигнал с энергетическим спектром (1.1.19) имеет экспоненциальную корреляционную функцию вида (1.2.14). При этом значение корреляционной функции в нуле даёт среднюю мощность процесса:

$$b_s(0) = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} \equiv P_s,$$

что уже было найдено при определении входного отношения сигнал-шум. Таким образом, $G_s(\omega)$ можно выразить через среднюю мощность:

$$G_s(\omega) = 4\pi\gamma \frac{\alpha^2 / (4\pi\gamma)}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} = \frac{4\pi\gamma P_s}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2}.$$

Получим, следуя предложенной выше общей схеме, оптимальную частотную характеристику физически реализуемого фильтра, когда на его входе присутствует полезный сигнал с корреляционной функцией (1.2.14) и аддитивным белым шумом (1.1.21).

Разложим энергетический спектр входного сигнала

$$G_{\xi}(\omega) = \frac{4\pi\gamma P_s}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} + \frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2} \frac{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2 \left(1 + \frac{2P_s}{N_0\pi\gamma}\right)}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2}$$

на произведение комплексно-сопряжённых множителей:

$$G_x(\omega) = Q(\omega)Q^*(\omega),$$

где

$$Q(\omega) = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \frac{\omega - j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}}{\omega - j2\pi\gamma};$$

$$Q^*(\omega) = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \frac{\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}}{\omega + j2\pi\gamma}$$

и введён параметр $\mu = 2P_s / (N_0\pi\gamma)$.

Далее, учитывая, что в силу независимости полезного сигнала и шума, когда $G_{\xi_s}(\omega) = G_s(\omega)$, необходимо найти обратное преобразование Фурье от отношения

$$\begin{aligned} \frac{G_s(\omega)}{Q^*(\omega)} &= \frac{4\pi\gamma P_s}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\omega + j2\pi\gamma}{\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{4\pi\gamma P_s (\omega + j2\pi\gamma)}{(\omega - j2\pi\gamma)(\omega + j2\pi\gamma)(\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{4\pi\gamma P_s}{(\omega - j2\pi\gamma)(\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{4\pi\gamma P_s}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t) d\omega}{(\omega - j2\pi\gamma)(\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})} = \\ &= \frac{4\pi\gamma P_s}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{N_0}} 2\pi j \operatorname{Res}_{z=j2\pi\gamma} \frac{\exp(jzt)}{(z - j2\pi\gamma)(z + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})} = \end{aligned}$$

$$= 2P_s \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\exp(-2\pi\gamma t)}{(1 + \sqrt{1 + \mu})},$$

причём временной аргумент принимает только положительные значения, поэтому в данном случае гарантированно $r(t) = \rho(t)$.

От полученной функции $\rho(t)$ необходимо вычислить прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} r(t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \int_0^{\infty} \exp(-2\pi\gamma t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{1}{j\omega + 2\pi\gamma}. \end{aligned}$$

Наконец, оптимальная частотная характеристика, согласно (1.2.10), равна

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(\omega) &= \frac{1}{Q(\omega)} \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{1}{j\omega + 2\pi\gamma} = \\ &= \frac{\sqrt{2/N_0}(\omega - j2\pi\gamma)}{(\omega - j2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})} \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{1}{j\omega + 2\pi\gamma} = \\ &= \frac{2}{N_0} \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \frac{1}{(j\omega + 2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Это решение можно было получить сразу, воспользовавшись выражением (1.2.12):

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(\omega) &= 1 - \frac{\sqrt{N_0/2}}{Q(\omega)} = 1 - \sqrt{\frac{N_0}{2}} \frac{\omega - j2\pi\gamma}{\sqrt{N_0/2}(\omega - j2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})} = \\ &= \frac{2\pi\gamma(\sqrt{1 + \mu} - 1)}{(j\omega + 2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})} = 2\pi \frac{2P_s}{N_0\pi\mu} \frac{(\sqrt{1 + \mu} - 1)(\sqrt{1 + \mu} + 1)}{(\sqrt{1 + \mu} + 1)} \frac{1}{(j\omega + 2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})} = \\ &= \frac{2}{N_0} \frac{2P_s}{(\sqrt{1 + \mu} + 1)} \frac{1}{(j\omega + 2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})}. \end{aligned}$$

Полученная характеристика описывает простой фильтр нижних частот, полоса пропускания которого зависит от сигнальных параметров α и γ , а также от спектральной плотности $N_0/2$ средней мощности шума. Вспомним, что γ определяет эффективную ширину спектра полезного сигнала по уровню 3 дБ (рис. 1.3, а). Следовательно, физический смысл введенного параметра μ — это отношение сигнал-шум в эффективной полосе частот.

На рис. 1.8 показано семейство модулей нормированной частотной характеристики (т. е. нормированной АЧХ), определяемой соотношением (1.1.42), при различных значениях параметра μ .

При фиксированной полосе частот полезного сигнала увеличение μ приводит к возрастанию ширины полосы АЧХ оптимального фильтра, и при $\mu \rightarrow \infty$ АЧХ стремится к единице на всех частотах, т. е. фильтр пропускает все спектральные компоненты сигнала без искажений, и наличие шума фактически никак не проявляется.

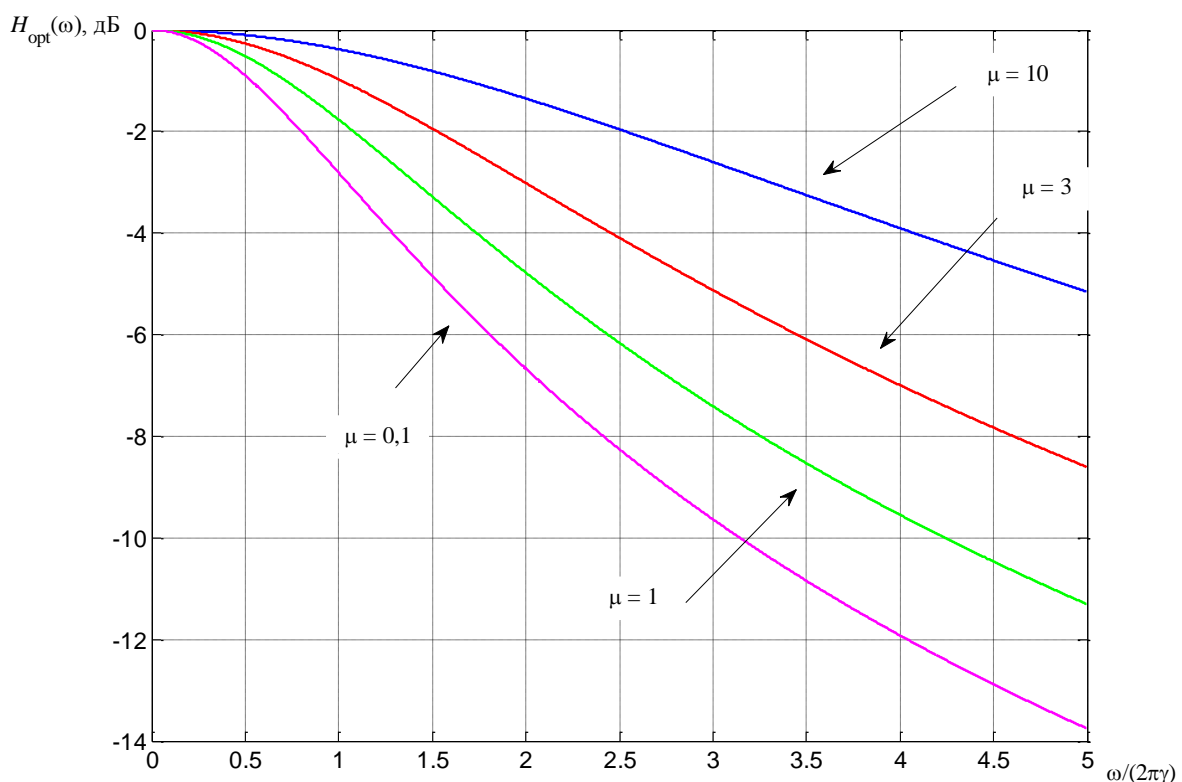


Рис. 1.8. Нормированная амплитудная частотная характеристика оптимального физически реализуемого фильтра

При уменьшении μ частота среза (точка уменьшения максимума АЧХ на 3 дБ) стремится к значению γ , однако само абсолютное значение АЧХ стремится при этом к нулю. Возникает ситуация, уже рассмотренная для случая оптимальной характеристики нереализуемого фильтра: превалирование шума над сигналом столь велико, что согласно критерию минимума СКО наилучшим выходным значением фильтра будет нулевое.

1.2.2. Предсказывающий фильтр

Рассмотренный выше оптимальный фильтр обеспечивает “мгновенную” (т. е. с нулевой задержкой) фильтрацию, выдавая на выходе текущую оценку $\eta(t)$ полезного сигнала $s(t)$, искажённого аддитивным шумом $v(t)$. Зачастую интерес представляет *задача оптимального предсказания*, когда по текущей наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо обеспечить оценку “в будущее” $\eta(t + t_0)$, $t_0 > 0$.

Для получения результатов оптимального предсказания достаточно повторить те же рассуждения, что и для “обычной” оптимальной фильтрации, учитывая временной сдвиг t_0 в выходном сигнале, что соответствует появлению множителя $\exp(-j\omega t_0)$ в Фурье-образах. Кратко рассмотрим, как при этом изменяется схема решения.

Сигнал на выходе фильтра определяется свёрткой

$$\eta(t + t_0) = \int_0^{\infty} h(t + t_0 - t') \xi(t') dt'.$$

Минимизация СКО обеспечивается, если импульсная характеристика удовлетворяет уравнению Винера–Хопфа в виде

$$\int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t) b_{\xi}(\tau - t) dt = b_{\xi_s}(\tau - t_0),$$

что соответствует уравнению для импульсной характеристики

$$H_{\text{opt}}(\omega) G_{\xi}(\omega) = G_{\xi_s}(\omega) \exp(j\omega t_0).$$

Следовательно, процедура получения физически реализуемого решения начинается с выражения

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{G_{\xi}(\omega)} \exp(j\omega t_0).$$

Свойства комплексно-сопряжённых множителей $Q(\omega)$ и $Q^*(\omega)$, обеспечивающих энергетический спектр $G_{\xi}(\omega)$ входного сигнала не меняются, но при вычислении обратного преобразования Фурье возникает дополнительный множитель:

$$r_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{\xi_s}(\omega)}{Q^*(\omega)} \exp(j\omega t_0) \exp(j\omega t) d\omega.$$

В полученной функции обнуляется составляющая области отрицательного аргумента функции $r_1(t)$:

$$\rho_1(t) = \begin{cases} r_1(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

после чего производится прямое преобразование Фурье и деление на $Q(\omega)$.

Рассмотрим эту схему на конкретном примере. Пусть по-прежнему полезный сигнал задаётся энергетическим спектром (1.1.21) или корреляционной функцией (1.2.14), а оценка производится в условиях аддитивного белого шума. Проводя выкладки, аналогичные тем, что были сделаны в предыдущем примере, получим

$$\frac{G_s(\omega)}{Q^*(\omega)} = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{4\pi\gamma P_s \exp(j\omega t_0)}{(\omega - j2\pi\gamma)(\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})}.$$

Тогда

$$r_1(t) = \frac{4\pi\gamma P_s}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t_0) \exp(j\omega t) d\omega}{(\omega - j2\pi\gamma)(\omega + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})}.$$

Наличие в подынтегральной функции параметра t_0 приводит к тому, что невозможно для всех значений комплексного аргумента $z = \omega + j\sigma$ замкнуть контур интегрирования вверх, охватывая только полюс $j2\pi\gamma$, и, тем самым, гарантировать, что $r_1(t)$ будет отлична от нуля только при $t > 0$.

Действительно, для комплекснозначной функции

$$f(z) = \frac{4\pi\gamma P_s}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\exp[jz(t+t_0)]}{(z - j2\pi\gamma)(z + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})}$$

замыкание контура в верхнюю или в нижнюю полуплоскость (так же, как на рис. 1.7) определяется поведением экспоненты, а именно, её убыванием к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

Для $t + t_0 \geq 0$ условие $|\exp[j(t + t_0)z]| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ обеспечивается выбором $\sigma \geq 0$, т. е. замыканием контура в верхнюю полуплоскость. При этом

$$\begin{aligned} r_1(t) &= 2\pi j \operatorname{Res}_{z=j2\pi\gamma} f(z) = \\ &= 4\pi\gamma P \sqrt{\frac{2}{N_0}} j \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\exp[jz(t + t_0)]}{(z - j2\pi\gamma)(z + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})} (z - j2\pi\gamma) = \\ &= 2P_s \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\exp[-2\pi\gamma(t + t_0)]}{(1 + \sqrt{1+\mu})}. \end{aligned}$$

Для $t + t_0 < 0$ условие $|\exp[j(t + t_0)z]| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ обеспечивается выбором $\sigma \leq 0$, т. е. замыканием контура в нижнюю полуплоскость. При этом

$$\begin{aligned} r_1(t) &= 2\pi j \operatorname{Res}_{z=-j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}} f(z) = \\ &= 4\pi\gamma P_s \sqrt{\frac{2}{N_0}} j \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\exp[jz(t + t_0)]}{(z - j2\pi\gamma)(z + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu})} (z + j2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}) = \\ &= 2P_s \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\exp[2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}(t + t_0)]}{(1 + \sqrt{1+\mu})}. \end{aligned}$$

Итак:

$$r_1(t) = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{2P}{(1 + \sqrt{1+\mu})} \begin{cases} \exp[-2\pi\gamma(t + t_0)], & t \geq -t_0; \\ \exp[2\pi\gamma\sqrt{1+\mu}(t + t_0)], & t < -t_0. \end{cases}$$

Поскольку t_0 — положительное значение, обнуление части $r_1(t)$ осуществляется на ветви, соответствующей области $t \geq -t_0$, так что

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \rho_1(t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1+\mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \int_0^{\infty} \exp[-2\pi\gamma(t + t_0)] \exp(-j\omega t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\exp(-2\pi\gamma t_0)}{j\omega + 2\pi\gamma},$$

и оптимальная характеристика имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(\omega) &= \frac{1}{Q(\omega)} \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\exp(-2\pi\gamma t_0)}{j\omega + 2\pi\gamma} = \\ &= \frac{2}{N_0} \frac{2P_s}{1 + \sqrt{1 + \mu}} \frac{\exp(-2\pi\gamma t_0)}{(j\omega + 2\pi\gamma\sqrt{1 + \mu})}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Сравнение (1.2.16) и (1.2.15) показывает, что оптимальный предсказывающий фильтр представляет собой “обычный” оптимальный фильтр, умноженный на постоянный коэффициент $\exp(-j2\pi\gamma t_0)$. Такая простая модификация обусловлена стационарностью полезного сигнала, а также тем, что шум является белым. Для более сложных моделей сигнала и шума получение оптимальной характеристики предсказывающего фильтра является более сложной задачей.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 1

1.1. Пусть энергетический спектр $G_\xi(\omega)$ стационарного процесса $\xi(t)$ может быть представлен в рациональном виде:

$$G_\xi(\omega) = c \frac{(\omega - \alpha_1) \cdots (\omega - \alpha_m)}{(\omega - \beta_1) \cdots (\omega - \beta_n)}.$$

Доказать следующие утверждения.

- а) $G_\xi(\omega) = G_\xi^*(\omega)$.
- б) Константа c — вещественная.
- в) Все корни числителя и знаменателя, имеющие ненулевые мнимые части, входят в $G_\xi(\omega)$ в виде комплексно-сопряжённых пар.
- г) Любой вещественный корень числителя имеет чётную кратность.
- д) Ни один корень знаменателя не может быть вещественным.

1.2. Найти минимально возможную дисперсию ошибки выделения стационарного сигнала $s(t)$ с корреляционной функцией

$$b_s(\tau) = \sigma_s^2 \exp(-\alpha |\tau|)$$

из аддитивной смеси с белым гауссовским шумом $n(t)$, имеющего постоянный энергетический спектр $N_0/2$. Привести численный результат для $N_0/2 = 10^{-15}$ Вт/Гц, $\sigma_s^2 = 1$ мкВт, $\alpha = 10^6$ с⁻¹.

1.3. На вход простейшей интегрирующей RC -цепи поступает аддитивная смесь $\xi(t)$ стационарного сигнала $s(t)$, имеющего энергетический спектр вида $G_s(\omega) = a^2/(\omega^2 + b^2)$ и белого гауссовского шума $v(t)$, с постоянной односторонней спектральной плотностью $N_0/2$.

а) При каком значении постоянной времени цепи $T = RC$ минимизируется среднеквадратическая ошибка

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E} \left[(\eta(t) - s(t))^2 \right]$$

между входным полезным сигналом $s(t)$ и выходным сигналом $\eta(t)$? Найти это минимальное значение ε^2 .

б) Найти оптимальное значение постоянной времени, минимизирующее среднеквадратическую ошибку прогнозирования:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E} \left[(\eta(t) - s(t + \Delta))^2 \right].$$

1.4. Энергетические спектры полезного сигнала $G_c(f)$ и аддитивного шума $G_{ш}(f)$ в области положительных частот определены соотношениями

$$\begin{aligned} \text{а) } G_c(f) &= \begin{cases} G_0 f / F_0, & 0 \leq f < F_0; \\ 0, & f \geq F_0; \end{cases} & G_{ш}(f) &= \begin{cases} G_0 (1 - f / F_0), & 0 \leq f < F_0; \\ 0, & f \geq F_0; \end{cases} \\ \text{б) } G_c(f) &= \begin{cases} G_0 \sqrt{f / F_0}, & 0 \leq f < F_0; \\ 0, & f \geq F_0; \end{cases} & G_{ш}(f) &= \begin{cases} G_0 (1 - f / F_0), & 0 \leq f < F_0; \\ 0, & f \geq F_0; \end{cases}; \\ \text{в) } G_c(f) &= \begin{cases} G_0 (f / F_0)^{3/2}, & 0 \leq f < F_0; \\ 0, & f \geq F_0; \end{cases} & G_{ш}(f) &= \begin{cases} G_0 (1 - f / F_0), & 0 \leq f < F_0; \\ 0, & f \geq F_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Определить частотную характеристику оптимального винеровского фильтра и найти энергетические спектры шума, полезного сигнала и сигнала ошибки, а также отношение сигнал-шум на выходе фильтра.

1.5. На вход фильтра поступает аддитивная смесь независимых процессов

$$\xi(t) = s(t) + v(t),$$

где $v(t)$ — белый шум, со спектральной плотностью средней мощности $N_0/2$, а полезный сигнал $s(t)$ характеризуется энергетическим спектром вида

$$G_s(\omega) = \begin{cases} A \frac{\omega + \omega_c}{\omega_c}, & -\omega_c \leq \omega \leq 0; \\ A \frac{\omega_c - \omega}{\omega_c}, & 0 < \omega \leq \omega_c; \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

Найти характеристику нереализуемого фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку.

1.6. На вход фильтра поступает аддитивная смесь независимых процессов

$$\xi(t) = s(t) + v(t),$$

энергетические спектры которых

$$G_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

и

$$G_n(\omega) = \frac{Nb^2}{b^2 + \omega^2}$$

соответственно. Найти характеристику реализуемого фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку.

1.7. Наблюдается стационарный полезный сигнал $s(t)$, с энергетическим спектром

$$G_s(\omega) = \frac{A^2}{\beta^2 + \omega^2}$$

в аддитивной смеси

$$\xi(t) = s(t) + v(t)$$

с белым шумом $v(t)$, имеющим спектральную плотность средней мощности, равную $N_0/2$.

а) Определить характеристику оптимального физически реализуемого сглаживающего фильтра и найти минимальную среднеквадратическую ошибку.

б) Определить характеристику физически реализуемого прогнозирующего фильтра, выходное значение $\eta(t)$ которого обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E} \left[(\eta(t) - s(t + \Delta))^2 \right].$$

1.8. Полезный сигнал $s(t)$ характеризуется корреляционной функцией

$$b_s(\tau) = \exp(-|\tau|).$$

Найти импульсную характеристику физически реализуемого прогнозирующего фильтра, если сигнал наблюдается в аддитивной смеси с шумом $v(t)$, имеющим энергетический спектр

$$G_s(\omega) = \frac{4}{4 + \omega^2}.$$

1.9. На вход оптимального прогнозирующего фильтра воздействует аддитивная смесь

$$\xi(t) = s(t) + v(t)$$

коррелированных сигнала $s(t)$ и шума $v(t)$. Определить взаимный энергетический спектр процессов на входе и выходе фильтра.

2. ПРИНЦИПЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

В предыдущей главе рассматривалось решение задач оптимальной винеровской фильтрации применительно к непрерывным процессам. Современные методы передачи информации связаны с цифровой обработкой сигналов, когда анализу подвергаются не непрерывные реализации, а конечные выборки дискретных отсчётов. В этой связи целесообразно “перевести в цифровую форму” методику отыскания оптимальной характеристики.

Дискретная или, как сейчас принято говорить, цифровая¹ обработка случайных процессов имеет ряд специфических особенностей, связанных как с переходом от непрерывных реализаций к последовательностям, т. е. собственно с цифровой обработкой, так и с необходимостью использования корректных статистических оценок.

При рассмотрении цифровых методов винеровской фильтрации целесообразно придерживаться “дискретно-непрерывной дуальности”, сопоставляя понятия, характеристики непрерывных реализаций и их дискретных аналогов.

Непрерывный сигнал $x(t)$ — вещественная или, в более общем случае, комплексная функция непрерывной вещественной переменной t , в качестве которой обычно выступает физическое время. Иногда в качестве аргумента фигурируют какие-либо иные физические объекты, например, пространственная координата; такие сигналы называют *полями*.

Дискретный сигнал $x[k]$ — последовательность вещественных или комплексных чисел, определённая для целочисленных значений k .

Непрерывный сигнал $x(t)$, равномерно дискретизируемый с шагом Δt секунд, и, возможно, квантуемый в аналого-цифровом преобразователе

¹ Строго говоря, понятие “цифровой сигнал”, всё же, отличается от понятия “дискретный сигнал” тем, что значения цифрового сигнала квантуются по разрешённым уровням. Однако современные программно-аппаратные комплексы обработки информации имеют настолько большое число разрешённых уровней, что можно говорить о квазинепрерывном представлении. В этой связи термины “дискретный” и “цифровой” часто используют как синонимы.

(АЦП), порождает дискретный сигнал $x[k] \equiv x(k\Delta t)$. Для отличия обозначений непрерывных и дискретных сигналов используются соответственно круглые () и квадратные [] скобки.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

В методах цифровой обработки сигналов аналогом непрерывных линейных цепей с постоянными параметрами являются *дискретные линейные инвариантные во времени цепи* (ЛИВ-цепи)¹.

Пусть результирующее действие цепи описывается оператором L , т. е. если $x[k]$ — входной, а $y[k]$ — выходной сигналы, то $y[k] = L(x[k])$. Тогда линейность дискретной цепи означает, что для двух входных сигналов $x_1[k]$, $x_2[k]$ и произвольных чисел c_1 , c_2 выполняется свойство

$$L(c_1x_1[k] + c_2x_2[k]) = c_1L(x_1[k]) + c_2L(x_2[k]). \quad (2.1.1)$$

Пусть k_0 — произвольный сдвиг дискретного времени во входном сигнале. Тогда свойство инвариантности к сдвигу означает, что такой же временной сдвиг появится в выходном сигнале:

$$L(x[k - k_0]) = y[k - k_0].$$

Прежде, чем приступить к решению задачи цифровой винеровской фильтрации, введём набор базовых понятий, используемых при цифровой обработке сигналов. Разд. 2.1 носит сугубо обзорный характер; для сколь-нибудь глубокого изучения методов цифровой обработки следует обратиться к соответствующей учебной литературе, например, [6].

Простейшим дискретным сигналом является *единичный импульсный сигнал* $\delta[k]$, называемый также *дискретным дельта-импульсом*:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

В отличие от непрерывной дельта-функции, которая, как известно, относится к классу так называемых *обобщённых функций*, определение (2.1.2) не налагает каких-либо дополнительных требований типа условия нормировки или предъявления дельта-образующей последовательности.

¹ В англоязычной литературе такие цепи обозначают аббревиатурой LSI (Linearity and Shift-Invariance).

Используя единичный сигнал $\delta[k]$, произвольный дискретный сигнал $x[k]$ может быть представлен в виде взвешенной суммы единичных сигналов:

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[k-n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k-n]\delta[n]. \quad (2.1.3)$$

Пусть $h[k]$ — дискретная импульсная характеристика, определяемая как отклик дискретной линейной цепи на воздействие в виде единичного сигнала. Тогда выходной сигнал $y[k]$ на произвольное входное воздействие $x[k]$ может быть записан в виде *дискретной свёртки* входного сигнала и импульсной характеристики:

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k-n]h[n]. \quad (2.1.4)$$

Для дискретных цепей также имеет место принцип физической реализуемости, согласно которому выходное значение не может наступить раньше входного, следовательно, для таких цепей

$$h[k] \equiv 0, \quad k < 0. \quad (2.1.5)$$

Важным требованием, предъявляемым к линейным дискретным цепям, является *устойчивость*, означающее, что для ограниченного (по своей величине) входного воздействия выходной сигнал также ограничен. Нетрудно показать [6], что устойчивость линейной цепи гарантируется, если для дискретной свёртки выполняется свойство *абсолютной сходимости*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty. \quad (2.1.6)$$

Наконец, ещё одним требованием, обычно предъявляемым к линейным дискретным цепям, является *обратимость*. Данное свойство означает возможность однозначного определения входного воздействия на цепь посредством наблюдения выходных значений.

Примером дискретной последовательности является *дискретная экспонента*:

$$x[k] = \begin{cases} a^k, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

В зависимости от величины и знака основания a такая последовательность имеет различные свойства. При $0 < a < 1$ возникает знакопостоянная убы-

вающая последовательность; при $-1 < a < 0$ — знакопеременная убывающая последовательность; при $|a| > 1$ — возрастающая последовательность; при $a = 1$ — единичный скачок (не путать с дельта-импульсом):

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0; \end{cases} \quad (2.1.8)$$

наконец, при $a = -1$ возникает знакопеременная последовательность единиц (так называемая “единичная волна”). Отметим, что при анализе линейных устройств часто используется единичный скачок для произвольного временного индекса:

$$u[k - k_0] = \begin{cases} 1, & k \geq k_0; \\ 0, & k < k_0. \end{cases} \quad (2.1.8a)$$

Другим примером дискретной последовательности является *дискретное гармоническое колебание*:

$$x[k] = A \cos(2\pi f k T) = A \cos(\omega k T), \quad (2.1.9)$$

где T — период дискретизации, A — амплитуда, ω — круговая частота, связанная с линейной частотой f соотношением $\omega = 2\pi f$.

Важным классом ЛИВ-цепей являются такие дискретные цепи (дискретные фильтры), для которых входной $x[k]$ и выходной $y[k]$ сигналы связаны *линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами*:

$$y[k] = \sum_{n=0}^Q b_n x[k - n] - \sum_{n=1}^P a_n y[k - n], \quad (2.1.10)$$

в котором a_1, \dots, a_P и b_1, \dots, b_Q являются коэффициентами фильтра, а числа P и Q определяют порядок этого фильтра.

В уравнении (2.1.10), имеющим наиболее общий вид, текущее выходное значение $y[k]$ определяется P предыдущими выходными значениями, а также текущим и Q предыдущими входными значениями. В частном случае, когда $P = 0$, уравнение упрощается:

$$y[k] = \sum_{n=0}^Q b_n x[k - n]. \quad (2.1.11)$$

Это означает, что текущее выходное значение определяется только набором входных значений. Как результат, импульсная характеристика имеет конечную длительность:

$$h[k] = \sum_{n=0}^Q b_n \delta[k-n], \quad (2.1.12)$$

поэтому такие фильтры называют *фильтрами с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-фильтрами). В противоположность этому, при $P \neq 0$ импульсная характеристика имеет бесконечную длительность, и такие фильтры называют *фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-фильтрами)¹.

Если для непрерывных линейных цепей основным инструментом анализа является интегральное преобразование Фурье, то для дискретных линейных цепей таким инструментом является *дискретное преобразование Фурье*, а также связанное с ним *z-преобразование*.

Дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ), осуществляемым над последовательностью $\{x[k]\}$, содержащей, вообще говоря, бесконечное число членов, называется комплекснозначная функция $X(\omega)$ непрерывного аргумента ω (частоты), определяемая следующим образом:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k). \quad (2.1.13)$$

Достаточным условием существования преобразования (2.1.13) является абсолютная суммируемость членов последовательности $\{x[k]\}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty.$$

Примерами дискретных сигналов, для которого ДВПФ не существует, являются единичный скачок (1.2.7) или комплексная экспонента

$$x[k] = \exp(j\omega_0 k), \quad (2.1.14)$$

хотя в последнем случае, всё же, можно определить ДВПФ, используя (непрерывную) дельта-функцию:

$$X(\exp(j\omega_0 k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(j\omega_0 k) \exp(-j\omega k) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0).$$

ДВПФ импульсной характеристики называется *дискретной частотной характеристикой*:

¹ В англоязычной литературе КИХ-фильтры обозначают аббревиатурой FIR (Finite length Impulse Response), а БИХ-фильтры — IIR (Infinite length Impulse Response).

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \exp(-j\omega k). \quad (2.1.15)$$

Укажем некоторые свойства ДВПФ.

- Функция $X(\omega)$ является периодической с периодом 2π (это следует из периодичности образующих её комплексных экспонент).

- Если последовательность $\{x[k]\}$ вещественна, то для $X(\omega)$ выполняется свойство *сопряжённой симметричности*:

$$X(\omega) = X^*(-\omega).$$

- Как уже было сказано, ДВПФ является, в общем случае, комплекснозначной функцией, и её можно представить в показательной форме:

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp[j\varphi(\omega)].$$

При этом для вещественных сигналов модуль $X(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика — является чётной функцией, а её аргумент — фазо-частотная характеристика — нечётной:

$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= |X(-\omega)|; \\ \varphi(-\omega) &= -\varphi(\omega). \end{aligned}$$

- ДВПФ имеет обратное преобразование — *обратное дискретно-временное преобразование Фурье* (ОДВПФ), позволяющее по известной непрерывной функции частоты $X(\omega)$ определить значения дискретной последовательности $x[k]$:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp(j\omega k) d\omega. \quad (2.1.16)$$

- Если сигнал $y[k]$ представляет собой дискретную свёртку сигналов $x_1[k]$ и $x_2[k]$:

$$y[k] = x_1[k] * x_2[k],$$

то ДВПФ результирующего сигнала есть произведение ДВПФ сигналов $x_1[k]$ и $x_2[k]$:

$$Y(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega).$$

- Имеет место *соотношение Парсеваля*, связывающее энергетические характеристики во временной и частотной областях:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.1.17)$$

Основные свойства ДВПФ представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Основные свойства ДВПФ

Свойство	Временная область	Спектральная область
Обозначение	$x[k]$	$X(\omega)$
Определение	$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp(j\omega k) d\omega$	$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k)$
Временной сдвиг	$x[k - k_0]$	$X(\omega) \exp(-j\omega k_0)$
Перенос по частоте (модуляция)	$x[k] \exp(-j\omega_0 k)$	$X(\omega - \omega_0)$
Комплексное сопряжение	$x^*[k]$	$X^*(-\omega)$
Временная инверсия (зеркалирование)	$x[-k]$	$X(-\omega)$
Свёртка сигналов	$x_1[k] * x_2[k]$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Умножение сигналов	$x_1[k] x_2[k]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\theta) X_2(\omega - \theta) d\theta$
Умножение на k	$kx[k]$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Соотношение Парсеваля	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2^*[k]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$

z -преобразование последовательности $\{x[k]\}$, которое в дальнейшем будем обозначать как $Z[x[k]]$, можно рассматривать как обобщение ДВПФ, когда в (2.1.13) вместо комплексной экспоненты (т. е. комплексного числа с единичным модулем и произвольным аргументом) используется комплексное число $z = r \exp(j\omega)$ с произвольным модулем и произвольным аргументом:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}. \quad (2.1.18)$$

Видно, что при $r = 1$ соотношения (2.1.15) и (2.1.18) совпадают.

Как и для ДВПФ, z -преобразование существует в том случае, когда ряд (2.1.18) сходится. Если z -преобразованию подвергается конечная последовательность, то в сумме остаётся конечное число слагаемых, так что $H(z)$ сходится для всех конечных значений z , исключая специальный случай существенно особой точки $z = 0$. В общем случае сходимость ряда обеспечивается не для всех z , а лишь для определённой области:

$$R_1 < |z| < R_2.$$

Свойства z -преобразования, по существу, не отличаются от аналогичных свойств ДВПФ (табл. 2.2).

Таблица 2.2. Основные свойства z -преобразования

Свойство	Временная область	z -область
Обозначение	$x[k]$	$X(z)$
Определение	$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$, где C — любой замкнутый контур в области сходимости, охватывающий все полюсы и начало координат	$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$
Временной сдвиг	$x[k - k_0]$	$X(z) z^{-k_0}$
Комплексное сопряжение	$x^*[k]$	$X^*(z^*)$
Умножение на последовательность c^k	$c^k x[k]$	$X(z/c)$
Временная инверсия (зеркалирование)	$x[-k]$	$X(z^{-1})$
Свёртка сигналов	$x_1[k] * x_2[k]$	$X_1(z) X_2(z)$
Умножение сигналов	$x_1[k] x_2[k]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(y) X_2(z - y) dy$
Умножение на k	$kx[k]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
Соотношение Парсеваля	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2^*[k]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(z) X_2^*(z) dz$

z -преобразование $H(z)$ импульсной характеристики (т. е. z -аналог частотной характеристики)

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}. \quad (2.1.19)$$

называют *системной функцией* или *передаточной характеристикой* линейной цепи.

Для КИХ-фильтра системная функция представляет собой полином относительно z^{-1} :

$$H(z) = \sum_{k=0}^Q b_k z^{-k} = b_0 \prod_{k=1}^Q (1 - \beta_k z^{-1}), \quad (2.1.20)$$

где корни β_k полинома называют *нулями* фильтра. Поскольку в передаточной характеристике, описываемой (2.1.20), нет полюсов, такой КИХ-фильтр называют *бесполюсным* (all-zero filter).

Для БИХ-фильтра передаточная характеристика представляет собой рациональную функцию относительно z^{-1} :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^Q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^P (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (2.1.21)$$

где корни β_k и α_k полиномов числителя и знаменателя называют соответственно *нулями* и *полюсами* фильтра.

В частном случае, когда порядок полинома, находящегося в числителе, равен нулю, получаем передаточную характеристику вида

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^P (1 - \alpha_k z^{-1})}. \quad (2.1.22)$$

Такой фильтр называют *полюсным* (all-pole filter).

Если коэффициенты a_k и b_k системной функции вещественны, то

$$H(z) = H^*(z^*),$$

и в этом случае все полюсы и нулю могут существовать только в виде комплексно-сопряжённых пар.

Можно показать, что для устойчивой цепи все полюсы должны лежать внутри единичной окружности, т. е. должно удовлетворяться условие

$$|\alpha_k| < 1.$$

Перечислим некоторые наиболее часто используемые типы фильтров.

Линейно-фазовый фильтр (linear phase filter) имеет частотную характеристику вида

$$H(\omega) = A(\omega) \exp[j(\gamma - \mu\omega)], \quad (2.1.23)$$

где $A(\omega)$ — вещественная функция, а γ и μ — вещественные числа.

Фазовый фильтр (all-pass filter) — это фильтр, пропускающий все частоты и изменяющий только фазовые соотношения между спектральными компонентами. Частотная характеристика фазового фильтра характеризуется тем свойством, что

$$|H(\omega)| = \text{const}.$$

Минимально-фазовый фильтр (minimum phase filter) характеризуется тем, что все его нули и полюсы лежат внутри единичной окружности.

Как уже было отмечено выше, системные функции КИХ- и БИХ-фильтров имеют рациональный вид. Как будет показано далее, также рациональный вид имеет энергетический спектр входных сигналов. Таким образом, в большинстве практических задач (в частности, при вычислении прямого и обратного z -преобразований) приходится иметь дело с последовательностями, имеющими рациональный спектр. Как известно, любую рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 1$$

или

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 1.$$

Следовательно, при вычислении обратного z -преобразования необходимо будет оперировать с дробями указанного вида, где в качестве аргумента x фигурирует z^{-1} .

В табл. 2.3 представлены некоторые парные соответствия для z -преобразований (задание 2.1).

Таблица 2.3. Некоторые пары z-преобразований

Последовательность $x[k]$	z-преобразование $X(z)$	Область сходимости
$\delta[k]$	1	Все значения z
$\delta[k - k_0]$	$1/z^{k_0}$	$z \neq 0$
$u[k]$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$\alpha^k u[k], \alpha > 0$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha$
$\alpha^{k-1} u[k-1], \alpha > 0$	$\frac{z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha$
$k\alpha^k u[k]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$\alpha^k (u[k] - u[k-n])$	$\frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > 0$
$-\alpha^k u[-k-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
$-k\alpha^k u[-k-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
α^k	$\frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$	$\alpha < z < 1/\alpha$
$r^k \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin \varphi}, r > 0$	$\frac{1}{1+\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}},$ $-2r \cos \varphi = a_1, r^2 = a_2$	$ z > r$

2.2. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как следует из результатов разд. 1.1, импульсная или частотная характеристики оптимального фильтра определяются корреляционными (энергетическими) характеристиками полезного сигнала и шума, исходя из решения интегрального уравнения Винера–Хопфа в виде (1.1.11) или (1.2.3).

Практическая реализация фильтра Колмогорова–Винера на основе методов цифровой обработки сигналов предполагает использование вместо непрерывных характеристик (корреляционной функции, энергетического

спектра и др.) их дискретных аналогов. При этом интегральные и дифференциальные уравнения переходят в алгебраические, что существенно упрощает реализацию алгоритмов оптимальной обработки.

В данном разделе производится “перевод” основных понятий и характеристик, относящихся к случайным процессам, на язык их дискретных аналогов, т. е. случайных последовательностей (дискретных наборов случайных величин). Отметим, что переход от случайных процессов к случайным последовательностям фактически никак не изменяет вероятностные свойства возникающих сигнальных конструкций. Действительно, случайный процесс определяется посредством своего многомерного распределения, задаваемого в произвольные моменты времени t_1, \dots, t_n . Например, n -мерная интегральная функция распределения процесса $\xi(t)$ имеет следующий вид:

$$F_{\xi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n).$$

Переход к случайным величинам означает, что вместо произвольных моментов времени t_1, \dots, t_n рассмотрение многомерных распределений возможно лишь в той временной сетке, которая определяется условием дискретизации. Такое ограничение не является существенным; более того, во многих случаях оно приводит к заметному упрощению анализа вследствие тех специфических свойств, которыми обладают дискретизированные аналоги вероятностных характеристик.

Итак, при рассмотрении случайных последовательностей вместо множества непрерывных реализаций $x(t)$ — проявлений случайного процесса $\xi(t)$, анализу подвергаются отсчётные значения $x[k]$ — проявления (реализации) случайной последовательности $\xi[k]$. В дальнейшем, чтобы не загромождать запись, отсчётное значение часто будем указывать не в квадратных скобках, а в нижнем индексе: $\xi[k] \equiv \xi_k, x[k] \equiv x_k$ и т. п.

Будем считать, что известны необходимые вероятностные распределения, описывающие поведение процесса. Тогда можно определить набор стандартных вероятностных характеристик, наиболее часто используемых при описании и анализе случайных явлений. При этом, имея в виду дальнейшие приложения, будем считать, что рассматриваемые случайные величины являются, в общем случае, комплексными.

• *Математическое ожидание* (среднее по ансамблю) случайной последовательности ξ_k :

$$m_\xi[k] \equiv \mathbf{E}[\xi_k], \quad (2.2.1)$$

которое для стационарных последовательностей не зависит от времени.

• *Дисперсия* случайной последовательности ξ_k :

$$\sigma_\xi^2[k] \equiv \mathbf{D}[\xi_k] = \mathbf{E}\left[\left(\xi_k - m_\xi[k]\right)^2\right], \quad (2.2.2)$$

которое для стационарных последовательностей также не зависит от времени.

• *Ковариационная (автоковариационная) функция*¹ случайной последовательности ξ_k :

$$\begin{aligned} B_\xi[k, n] &\equiv \text{Cov}[\xi_k, \xi_n] = \mathbf{E}\left[\left(\xi_k - m_\xi[k]\right)\left(\xi_n - m_\xi[n]\right)^*\right] = \\ &= \mathbf{E}\left[\xi_k \xi_n^*\right] - m_\xi[k]m_\xi^*[n]. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Для стационарных последовательностей ковариационная функция зависит только от разности временных отсчётов:

$$B_\xi[k, n] = B_\xi[k - n] = B_\xi[m].$$

При $k = n$ ковариационная функция равна дисперсии, являющейся максимальным значением:

$$\left|B_\xi[m]\right| \leq \left|B_\xi[0]\right| = \mathbf{D}[\xi_k].$$

• *Корреляционная (автокорреляционная) функция* случайной последовательности ξ_k :

$$b_\xi[k, n] = \mathbf{E}\left[\xi_k \xi_n^*\right]. \quad (2.2.4)$$

Видно, что корреляционная функция отличается от ковариационной слагаемым $m_\xi[k]m_\xi^*[n]$, так что в случае, когда анализируемая последовательность имеет нулевое среднее, эти функции совпадают.

Если последовательность ξ_k стационарна, то корреляционная функция обладает свойством сопряжённой симметричности:

¹ B_ξ , b_ξ , $B_{\xi\eta}$ и $b_{\xi\eta}$ также являются дискретными последовательностями, а не функциями непрерывного аргумента, как это получается для случайных процессов. Однако удобства ради, а также, чтобы, по-возможности, отличать их от значений обрабатываемых последовательностей, будем, всё же, называть их функциями.

$$b_{\xi}[m] = b_{\xi}^*[-m].$$

В частности, для вещественных последовательностей корреляционная функция чётна:

$$b_{\xi}[m] = b_{\xi}[-m].$$

• Взаимная¹ ковариационная функция случайных последовательностей ξ_k и η_k :

$$\begin{aligned} B_{\xi\eta}[k, n] &\equiv \text{Cov}[\xi_k, \eta_n] = \mathbf{E}\left[\left(\xi_k - m_{\xi}[k]\right)\left(\eta_n - m_{\eta}[n]\right)^*\right] = \\ &= \mathbf{E}\left[\xi_k \eta_n^*\right] - m_{\xi}[k]m_{\eta}^*[n]. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Для стационарно связанных последовательностей взаимная ковариационная функция зависит только от разности временных отсчётов. При этом

$$\left|B_{\xi\eta}[m]\right|^2 \leq b_{\xi}[0]b_{\eta}[0].$$

• Взаимная корреляционная функция случайных последовательностей ξ_k и η_k :

$$b_{\xi\eta}[k, n] = \mathbf{E}\left[\xi_k \eta_n^*\right], \quad (2.2.6)$$

отличающаяся от взаимной ковариационной функции слагаемым $m_{\xi}[k]m_{\eta}^*[n]$, так что в случае, когда хотя бы одна из анализируемых последовательностей имеет нулевое среднее, эти функции совпадают.

Последовательности, для которых взаимная ковариационная функция равна нулю, называются *некоррелированными*. Последовательности, для которых взаимная корреляционная функция равна нулю, называются *ортгональными*. Отметим, что ортогональные последовательности не обязательно должны быть некоррелированы, но некоррелированные последовательности, имеющие нулевые средние, являются ортогональными.

¹ Собственные и взаимные ковариационные (корреляционные) функции обозначаются одинаковыми буквами, но с различающимся нижним индексом: для собственных функций указывается обозначение одной последовательности, для взаимных функций — двух последовательностей.

2.2.1. Случайное гармоническое колебание

В качестве иллюстрации получения представленных характеристик рассмотрим случайную последовательность, получаемую путём дискретизации случайного гармонического колебания:

$$\xi_k = A_0 \sin(k\omega_0 + \varphi). \quad (2.2.7)$$

Здесь A_0 и ω_0 — детерминированные числа (амплитуда и частота колебания), а φ — случайная начальная фаза, равномерно распределённая на интервале $[0; 2\pi)$:

$$w(\varphi) = \begin{cases} 1/(2\pi), & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ 0, & 0 > \varphi \geq 2\pi. \end{cases}$$

Математическое ожидание последовательности (2.2.7), как нетрудно видеть, равно нулю:

$$m_\xi[k] \equiv \mathbf{E}[A_0 \sin(k\omega_0 + \varphi)] = \frac{1}{2\pi} A_0 \int_0^{2\pi} \sin(k\omega_0 + \varphi) d\varphi = 0.$$

Найдём корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} b_\xi[k, n] &= \mathbf{E}[A_0 \sin(k\omega_0 + \varphi) A_0 \sin(n\omega_0 + \varphi)] = \\ &= \frac{A_0^2}{2} \mathbf{E}[\cos((k-n)\omega_0) - \cos((k+n)\omega_0 + 2\varphi)] = \\ &= \frac{A_0^2}{2} \cos((k-n)\omega_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((k+n)\omega_0 + 2\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен нулю, так что корреляционная функция есть

$$b_\xi[k, n] = \frac{A_0^2}{2} \cos((k-n)\omega_0).$$

При $k = n$ получаем дисперсию последовательности:

$$\mathbf{D}[\xi_k] = A_0^2 / 2.$$

Видно, что математическое ожидание и дисперсия не зависят от отсчётных значений, а корреляционная функция зависит лишь от их разно-

сти. Это говорит о том, что последовательность (2.2.7) обладает свойством стационарности, как минимум, в широком смысле¹.

Обобщением рассмотренного примера является комплексная гармоническая последовательность:

$$\xi_k = A_0 \exp[j(k\omega_0 + \varphi)]. \quad (2.2.8)$$

Математическое ожидание ξ_k также равно нулю, а корреляционная функция определяется соотношением

$$\begin{aligned} b_\xi[k, n] &= \mathbf{E} \left[A_0 \exp[j(k\omega_0 + \varphi)] A_0 \exp[-j(n\omega_0 + \varphi)] \right] = \\ &= A_0^2 \mathbf{E} \left[\exp[j(k - n)\omega_0] \right] = A_0^2 \exp[j(k - n)\omega_0]. \end{aligned}$$

2.2.2. Белый шум

“Истинный” белый шум — это не существующий в природе непрерывный стационарный случайный процесс с нулевым средним, имеющий постоянное значение энергетического спектра во всей полосе частот или, что эквивалентно, корреляционную функцию в виде дельта-функции (по этой причине белый шум часто называют дельта-коррелированным процессом). Невозможность физического существования такого процесса обусловлена тем, что постоянное (во всей полосе) значение спектральной плотности должно приводить к бесконечной средней мощности. С другой стороны, дельта-коррелированность процесса также физически неосуществима, поскольку значения реальных физических процессов (например, температура или влажность воздуха) в сколь угодно близкие моменты времени будут зависимы.

Белый шум как случайная последовательность — гораздо более реалистичный объект, представляющий собой дискретный набор некоррелированных случайных величин, имеющих одинаковую дисперсию σ^2 . Ковариационная функция такой последовательности есть

¹ Напомним [2], что стационарность в узком смысле (строгая стационарность) предполагает инвариантность к произвольному временному сдвигу всех многомерных распределений. Для стационарности в широком смысле (слабой стационарности) достаточно того, чтобы математическое ожидание и дисперсия не зависели от времени, а корреляционная функция зависела лишь от разности временных аргументов.

$$B_{\xi}[m] = \sigma^2 \delta[m], \quad (2.2.9)$$

где $\delta[m]$ — дискретная дельта-функция (2.1.2).

При таком определении белого шума ничего не говорится о законе распределения его отсчётных значений. Задаваясь различными распределениями, как дискретными, так и непрерывными, можно получить последовательности с разными вероятностными характеристиками отсчётных значений, но для всех будет выполняться условие (2.2.8) некоррелированности. Чаще всего рассматривают белый гауссовский шум, когда отсчётные значения подчиняются нормальному (гауссовскому) распределению:

$$w_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}} \exp\left[-\frac{(x - a_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right], \quad (2.2.10)$$

в котором a_{ξ} — математическое ожидание, а σ_{ξ}^2 — дисперсия.

2.2.3. Взаимно-коррелированные последовательности

Рассмотрим ещё один простой пример, иллюстрирующий взаимные корреляционные свойства последовательностей. Пусть ξ_k и η_k связаны следующим соотношением:

$$\eta[k] = \xi[k - 1]. \quad (2.2.11)$$

Взаимная корреляционная функция таких последовательностей

$$b_{\xi\eta}[k, n] = \mathbf{E}\left[\xi_k \eta_n^*\right] = \mathbf{E}\left[\xi_k \xi_{k-1}^*\right] = b_{\xi}[k, k - 1]$$

определяется автокорреляционной функцией последовательностей.

Вернёмся к рассмотрению вероятностных характеристик случайных последовательностей. Обобщением понятий собственной и взаимной ковариационной (корреляционной) функций является понятие *ковариационной (корреляционной) матрицы*.

Рассмотрим M -элементный вектор-строку (символ T в верхнем индексе означает операцию транспонирования, т. е. перестановку местами строк и столбцов)

$$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_M]^T, \quad (2.2.12)$$

для которого можно определить вектор математических ожиданий

$$\mathbf{m}_{\xi} = [m_{\xi_1} \ m_{\xi_2} \ \dots \ m_{\xi_M}]^T \quad (2.2.13)$$

и вектор дисперсий

$$\boldsymbol{\sigma}_{\xi}^2 = [\sigma_{\xi_1}^2 \ \sigma_{\xi_2}^2 \ \dots \ \sigma_{\xi_M}^2]^T. \quad (2.2.14)$$

Определим матрицу Ξ размерности $M \times M$, являющуюся эрмитовым произведением¹ векторов:

$$\Xi = \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^H = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & \xi_1 \xi_2^* & \dots & \xi_1 \xi_M^* \\ \xi_2 \xi_1^* & |\xi_2|^2 & \dots & \xi_2 \xi_M^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_M \xi_1^* & \xi_M \xi_2^* & \dots & |\xi_M|^2 \end{pmatrix}$$

и на её основе автоковариационную матрицу:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\xi} &\equiv \begin{pmatrix} B_{\xi_{11}} & B_{\xi_{12}} & \dots & B_{\xi_{1M}} \\ B_{\xi_{21}} & B_{\xi_{22}} & \dots & B_{\xi_{2M}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{\xi_{1M}} & B_{\xi_{2M}} & \dots & B_{\xi_{MM}} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{E} [(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{m}_{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{m}_{\xi})^H] = \mathbf{E} [\Xi] - \mathbf{m}_{\xi} \mathbf{m}_{\xi}^H = \mathbf{b}_{\xi} - \mathbf{m}_{\xi} \mathbf{m}_{\xi}^H = \\ &= \begin{pmatrix} \text{Cov}[\xi_1, \xi_1] & \text{Cov}[\xi_1, \xi_2] & \dots & \text{Cov}[\xi_1, \xi_M] \\ \text{Cov}[\xi_2, \xi_1] & \text{Cov}[\xi_2, \xi_2] & \dots & \text{Cov}[\xi_2, \xi_M] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}[\xi_M, \xi_1] & \text{Cov}[\xi_M, \xi_2] & \dots & \text{Cov}[\xi_M, \xi_M] \end{pmatrix}, \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

в которой на главной диагонали находятся дисперсии случайных величин, а на остальных местах — их ковариации (2.2.5). Слагаемое \mathbf{b}_{ξ} представляет собой автокорреляционную матрицу:

$$\mathbf{b}_{\xi} \equiv \begin{pmatrix} b_{\xi_{11}} & b_{\xi_{12}} & \dots & b_{\xi_{1M}} \\ b_{\xi_{21}} & b_{\xi_{22}} & \dots & b_{\xi_{2M}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\xi_{1M}} & b_{\xi_{2M}} & \dots & b_{\xi_{MM}} \end{pmatrix} = \mathbf{E} [\Xi] =$$

¹ Эрмитовое сопряжение (обозначается символом H в верхнем индексе) — это операция одновременного комплексного сопряжения и транспонирования.

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{E}[|\xi_1|^2] & \mathbf{E}[\xi_1 \xi_2^*] & \cdots & \mathbf{E}[\xi_1 \xi_M^*] \\ \mathbf{E}[\xi_2 \xi_1^*] & \mathbf{E}[|\xi_2|^2] & \cdots & \mathbf{E}[\xi_2 \xi_M^*] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}[\xi_M \xi_1^*] & \mathbf{E}[\xi_M \xi_2^*] & \cdots & \mathbf{E}[|\xi_2|^2] \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Автокорреляционная матрица стационарной последовательности обладает замечательным свойством: поскольку составляющие её корреляции зависят только от разности своих временных отсчётов и, кроме того, имеет место сопряжённая симметричность $b_\xi[m] = b_\xi^*[-m]$, можно перейти к одноиндексной нумерации элементов:

$$\mathbf{b}_\xi = \begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \cdots & b_\xi^*[M-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi^*[M-2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[M-1] & b_\xi[M-2] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi[-1] & \cdots & b_\xi[-M+1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi[-M+2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[M-1] & b_\xi[M-2] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix}. \quad (2.2.17)$$

Матрицы такого вида, в которой на всех диагоналях, параллельной главной, находятся одинаковые элементы, называется *тёплицевой*¹. Введём для тёплицевых матриц обозначение

$$\mathbf{b}_\xi = \text{Тоер}[b_{\xi 1}, b_{\xi 2}, \dots, b_{\xi M}].$$

Для вещественной последовательности $b_\xi[m] = b_\xi[-m]$, и автокорреляционная матрица ещё более упрощается:

$$\mathbf{b}_\xi = \begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi[1] & \cdots & b_\xi[M-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi[M-2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[M-1] & b_\xi[M-2] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix}. \quad (2.2.17a)$$

¹ В честь германского математика Отто Тёплица (1881–1940).

Ещё одним замечательным свойством автокорреляционной матрицы является её положительная полуопределённость (задание 2.2), означающее, что для произвольного M -элементного вектора $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_M]$ квадратичная форма, построенная на элементах \mathbf{b}_ξ , неотрицательна:

$$\mathbf{a}^H \mathbf{b}_\xi \mathbf{a} = \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M a[k] a^*[n] b_\xi[k-n] \geq 0.$$

Следствием положительной полуопределённости автокорреляционной матрицы является то, что все её собственные числа вещественны и неотрицательны.

Аналогичным образом определяются взаимно-ковариационная

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} B_{\xi\eta 11} & B_{\xi\eta 12} & \cdots & B_{\xi\eta 1M} \\ B_{\xi\eta 21} & B_{\xi\eta 22} & \cdots & B_{\xi\eta 2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{\xi\eta 1M} & B_{\xi\eta 2M} & \cdots & B_{\xi\eta MM} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{E}[(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{m}_\xi)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{m}_\eta)^H] = \mathbf{E}[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}^H] - \mathbf{m}_\xi \mathbf{m}_\eta^H = \mathbf{b}_{\xi\eta} - \mathbf{m}_\xi \mathbf{m}_\eta^H = \\ &= \begin{pmatrix} \text{Cov}[\xi_1, \eta_1] & \text{Cov}[\xi_1, \eta_2] & \cdots & \text{Cov}[\xi_1, \eta_M] \\ \text{Cov}[\xi_2, \eta_1] & \text{Cov}[\xi_2, \eta_2] & \cdots & \text{Cov}[\xi_2, \eta_M] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{Cov}[\xi_M, \eta_1] & \text{Cov}[\xi_M, \eta_2] & \cdots & \text{Cov}[\xi_M, \eta_M] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

и взаимно-корреляционная

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} b_{\xi\eta 11} & b_{\xi\eta 12} & \cdots & b_{\xi\eta 1M} \\ b_{\xi\eta 21} & b_{\xi\eta 22} & \cdots & b_{\xi\eta 2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\xi\eta 1M} & b_{\xi\eta 2M} & \cdots & b_{\xi\eta MM} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}[\xi_1 \eta_1] & \mathbf{E}[\xi_1 \eta_2] & \cdots & \mathbf{E}[\xi_1 \eta_M] \\ \mathbf{E}[\xi_2 \eta_1] & \mathbf{E}[\xi_2 \eta_2] & \cdots & \mathbf{E}[\xi_2 \eta_M] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}[\xi_M \eta_1] & \mathbf{E}[\xi_M \eta_2] & \cdots & \mathbf{E}[\xi_M \eta_M] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

матрицы для векторов

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_M]^T$$

и

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_M]^T.$$

Если векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ стационарно связаны, то взаимные корреляции зависят только от разности своих временных отсчётов, так что матрица (2.2.19) также может быть представлена в тёплицевой форме.

Вновь в качестве иллюстрирующего примера обратимся к случайному гармоническому колебанию (2.2.7), для которого корреляционная функция равна

$$b_{\xi}[m] = \frac{A_0^2}{2} \cos(m\omega_0).$$

Рассмотрим двухэлементный вектор $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]$. Автокорреляционная матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{b}_{\xi} = \begin{pmatrix} A_0^2/2 & A_0^2/2 \cos \omega_0 \\ A_0^2/2 \cos \omega_0 & A_0^2/2 \end{pmatrix} = \frac{A_0^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega_0 \\ \cos \omega_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в её положительной полуопределённости:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 a_k a_n^* b_{\xi k-n} = \frac{A_0^2}{2} |a_1 + a_2 \cos \omega_0|^2 \geq 0.$$

Найдём собственные числа этой матрицы из уравнения

$$\det(\mathbf{b}_{\xi} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (2.2.20)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица соответствующей размерности. Имеем:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \cos \omega_0 \\ \cos \omega_0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)^2 - \cos^2 \omega_0 = \\ &= (1-\lambda - \cos \omega_0)(1-\lambda + \cos \omega_0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда собственные числа

$$\lambda_1 = 1 - \cos \omega_0 \geq 0;$$

$$\lambda_2 = 1 + \cos \omega_0 \geq 0.$$

Обобщим пример: рассмотрим сумму двух комплексных случайных колебаний с различными частотами:

$$\xi_k = A_0 \exp[j(k\omega_1 + \varphi_1)] + A_0 \exp[j(k\omega_2 + \varphi_2)],$$

где φ_1 и φ_2 — некоррелированные случайные величины, равномерно распределённые на интервале $[0; 2\pi)$.

Корреляционная функция для такой последовательности равна

$$\begin{aligned}
 b_{\xi}[k, n] &= A_0^2 \mathbf{E} \left[\left(\exp[j(k\omega_1 + \varphi_1)] + \exp[j(k\omega_2 + \varphi_2)] \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\exp[-j(n\omega_1 + \varphi_1)] + \exp[-j(n\omega_2 + \varphi_2)] \right) \right] = \\
 &= A_0^2 \exp[j(k-n)\omega_1] + A_0^2 \exp[j(k-n)\omega_2] + \\
 &+ A_0^2 \mathbf{E} \left[\exp[j(k\omega_1 + \varphi_1)] \exp[-j(n\omega_2 + \varphi_2)] \right] + \\
 &+ A_0^2 \mathbf{E} \left[\exp[j(k\omega_2 + \varphi_2)] \exp[-j(n\omega_1 + \varphi_1)] \right].
 \end{aligned}$$

Математические ожидания от перекрёстных членов дают нулевые значения (интеграл от тригонометрических функций по периоду), поэтому

$$b_{\xi}[k, n] = b_{\xi}[k - n] \equiv b_{\xi}[m] = A_0^2 \exp[jm\omega_1] + A_0^2 \exp[jm\omega_2].$$

Будем по-прежнему рассматривать двухэлементный вектор $\xi = [\xi_1, \xi_2]$, для которого автокорреляционная функция имеет вид

$$\mathbf{b}_{\xi} = A_0^2 \begin{pmatrix} 2 & \exp[-jm\omega_1] + \exp[-jm\omega_2] \\ \exp[jm\omega_1] + \exp[jm\omega_2] & 2 \end{pmatrix}.$$

Вновь решая уравнение (1.2.42), получаем собственные числа

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 2 - 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \geq 0; \\
 \lambda_2 &= 2 + 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \geq 0.
 \end{aligned}$$

При анализе непрерывных сигналов одним из наиболее часто используемых “инструментов” является теорема Винера–Хинчина, связывающая корреляционную функцию и энергетический спектр стационарного процесса парой взаимобратных преобразований Фурье. Определим аналог этой теоремы применительно к дискретным сигналам.

Пусть для стационарной случайной последовательности ξ_k известна корреляционная функция $b_{\xi}[m]$. Определим *спектральную плотность мощности* (СПМ), или *энергетический спектр* последовательности как ДВПФ от $b_{\xi}[m]$:

$$P_{\xi}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{\xi}[m] \exp(-jm\omega). \quad (2.2.21)$$

Тогда, выполняя обратное ДВПФ, можно выразить корреляционную функцию через заданную СПМ:

$$b_{\xi}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\xi}(\omega) \exp(jm\omega) d\omega. \quad (2.2.22)$$

Соотношение (2.2.21) определяет СПМ в спектральной области. Переходя к комплексной величине $z = r \exp(j\omega)$, можно получить представление СПМ в z -области:

$$P_{\xi}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{\xi}[m] z^{-m}. \quad (2.2.21a)$$

СПМ обладает рядом интересных свойств, вытекающих из свойств корреляционной функции, по которой она построена. Перечислим наиболее важные из них (задание 2.3).

- Поскольку корреляционная функция стационарной последовательности сопряжённо-симметрична, соответствующая ей СПМ является вещественной функцией:

$$P_{\xi}(\omega) = P_{\xi}^*(\omega).$$

В частности, если последовательность ξ_k вещественна, то СПМ чётна:

$$P_{\xi}(\omega) = P_{\xi}(-\omega).$$

- В z -области свойство вещественности СПМ может быть записано в виде

$$P_{\xi}(z) = P_{\xi}^*(1/z^*).$$

В частности, если последовательность ξ_k вещественна, то

$$P_{\xi}(z) = P_{\xi}^*(z^*).$$

- СПМ неотрицательна. Данное свойство вытекает из положительной полуопределённости автокорреляционной матрицы.

- Имеет место соотношение Парсеваля:

$$\mathbf{E} \left[|\xi_k|^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (2.2.23)$$

В частности, если последовательность ξ_k имеет нулевое среднее, то правая часть (2.2.24) определяет среднюю мощность последовательности.

• Максимальное и минимальное значения СПМ являются границами для собственных чисел λ_i автокорреляционной матрицы:

$$\min_{\omega} P_{\xi}(\omega) \leq \lambda_i \leq \max_{\omega} P_{\xi}(\omega). \quad (2.2.24)$$

Помимо СПМ — собственной спектральной характеристики последовательности — часто приходится иметь дело со *взаимной спектральной плотностью мощности* $P_{\xi\eta}(\omega)$, определяемой как ДВПФ от взаимной корреляционной функции между последовательностями ξ_k и η_k :

$$P_{\xi\eta}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}[m] \exp(-jm\omega). \quad (2.2.25)$$

2.2.4. Показательная автокорреляционная функция

В качестве примера рассмотрим вычисление СПМ случайной последовательности, корреляционная функция которой равна

$$b_{\xi}[m] = \alpha^{|m|}, \quad |\alpha| < 1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} P_{\xi}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^0 \alpha^k \exp(-jm\omega) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-k} \exp(-jm\omega) = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha \exp(-j\omega)} + \frac{1}{1 - \alpha \exp(j\omega)} - 1 = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Очевидно, что СПМ вещественна, чётна и неотрицательна.

Введённые выше определения и характеристики касались теоретических понятий, когда изначально задаётся какое-либо одномерное или многомерное распределение, и на его основе определяются моменты распределения, корреляционные и энергетические характеристики и т. п.

2.2.5. Статистические характеристики случайных последовательностей

При решении практических задач исходное распределение неизвестно. В некоторых случаях, можно задаться каким-нибудь приемлемым модельным распределением, исходя из физического смысла анализируемых явлений. Например, адекватным будет использование гауссовского распределения для описания процесса, являющегося результатом суммарного

воздействия большого числа отдельных независимых процессов; при отсутствии априорной информации о каком-то параметре целесообразно привлечь равномерное распределение; потоки редких событий достаточно хорошо описываются пуассоновским распределением и др. Однако в общем случае, когда нет никаких предпосылок для выбора какого-то модельного распределения, приходится привлекать *методы статистического анализа*, основанные на наблюдении *выборочных значений* и построении *статистических оценок* соответствующих теоретических характеристик.

Круг задач современной математической статистики чрезвычайно широк: от математических до социально-экономических наук, и для их сколь-нибудь глубокого понимания требуется изучение достаточно большого числа разделов этой дисциплины [5]. В рамках данного пособия ограничимся кратким перечислением основных статистических понятий и характеристик и их отношению к решаемым задачам.

При теоретическом исследовании случайных процессов обычно оперируют с ансамблем реализаций; получение большинства вероятностных характеристик осуществляется посредством усреднения по ансамблю. Например, при построении конструкции энергетического спектра ключевой является операция усреднения по ансамблю величин. Однако на практике за ограниченный промежуток времени, как правило, можно получить лишь одну реализацию, и то усечённую. В этой связи ставится вопрос о возможности работы с аналогами “ансамблевых” характеристик, но полученных на основе временного усреднения по одной реализации. Для этих целей в теории случайных процессов выделяют специальный класс стационарных процессов, называемых *эргодическими*, которые обладают свойством идентичности характеристик, полученных усреднением по ансамблю и по времени. Более строго эргодичность определяют по отношению к конкретным вероятностным характеристикам: эргодичность по отношению к среднему, эргодичность по отношению к дисперсии и т. п.

Главное требование, предъявляемое к статистической оценке, — это её *точность*: желательно получить оценку, как можно близкую к тому “идеально точному” значению измеряемой величины, которое лишь мыслится в воображении исследователя или существует в виде каких-то теоретических конструкций. При проведении того или иного измерения появляется *статистическая выборка* — набор случайных величин, каким-то об-

разом связанных с измеряемой величиной, который является исходным “сырьём” для последующего анализа, в частности, для построения оценок, или, как говорят, *статистик*.

Существуют разнообразные характеристики, дающие количественное описание статистических оценок с тех или иных позиций. В частности, *состоятельная оценка* характеризуется тем, что её дисперсия стремится к нулю при неограниченном увеличении интервала наблюдения T (для непрерывных процессов) или объёма выборки N (для дискретных последовательностей). Следовательно, выбирая конечные, но достаточно большие значения T или N , можно добиться приемлемо малых значений дисперсии.

Многие *точечные оценки*, такие, как выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочная корреляционная функция оказываются состоятельными при условии, что какие-то теоретические характеристики процесса удовлетворяют определённым требованиям. Например, критерием эргодичности процесса по отношению к математическому ожиданию является требование на корреляционную функцию $b_\xi(\tau)$ — так называемое *условие Слуцкого*¹:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) b_\xi(\tau) d\tau = 0.$$

Однако не все точечные оценки характеристик, представляющих практический интерес, оказываются состоятельными. В частности, *периодограммная оценка энергетического спектра* имеет ненулевую дисперсию при произвольном интервале наблюдения и, таким образом, оказывается несостоятельной. В этой связи для более корректного измерения энергетического спектра требуются дополнительные механизмы, такие, как *оконное усреднение*.

Итак, будем считать, что наблюдению доступна N -элементная последовательность (N -элементный вектор-столбец)

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]^T \quad (2.2.27)$$

значений случайной последовательности ξ_k .

¹ Слуцкий Евгений Евгеньевич (1880–1948) — российский математик.

Для наблюдаемых значений \mathbf{x} можно определить *выборочные характеристики*, являющиеся статистическими аналогами введённых выше вероятностных характеристик¹.

- *Выборочное среднее* (аналог математического ожидания):

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k. \quad (2.2.28)$$

- *Выборочная дисперсия* (аналог дисперсии):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m_x)^2. \quad (2.2.29)$$

- *Выборочная корреляционная функция* (аналог корреляционной функции):

$$bu_x[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_{k+m} x_k^*. \quad (2.2.30)$$

Выражение (2.2.30) применимо только при неотрицательных значениях временного индекса $0 \leq m \leq N-1$; корреляционные оценки при $m > N-1$ невозможны из-за конечности объёма статистических данных. Для отрицательных значений $-(N-1) \leq m < 0$ выражение для оценки должно быть модифицировано:

$$bu_x[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} x_{k+|m|}^* x_k. \quad (2.2.30a)$$

Выборочная корреляционная функция является сопряжённо-симметричной:

$$bu_x[m] = bu_x^*[-m],$$

т. е. обладает тем же свойством, которое присуще и “истинной” корреляционной функции. Следовательно, при построении оценки (2.2.30) достаточно вместо всех $2N-1$ индексов использовать только неотрицательные

¹ Теоретические и выборочные характеристики могут обозначаться одинаковой буквой, но для теоретической характеристики в нижнем индексе указывается греческий символ (обозначающий случайную последовательность), а для выборочной — латинский аналог (обозначающий значения случайной последовательности). Например: m_ξ — математическое ожидание (среднее по ансамблю); m_x — выборочное среднее.

m , а соответствующие значения при отрицательных m получаются из свойства сопряжённой симметрии.

Альтернативной оценкой автокорреляционной функции является оценка, определяемая следующим образом:

$$bb_x[m] = \frac{1}{N} \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_{k+m} x_k^*, & 0 \leq m \leq N-1; \\ \sum_{k=0}^{N-|m|-1} x_{k+|m|}^* x_k, & -(N-1) \leq m < 0. \end{cases} \quad (2.2.31)$$

Разница между (2.2.30) и (2.2.31) состоит лишь в нормирующем множителе:

$$bb_x[m] = \frac{N-|m|}{N} bu_x[m],$$

и это различие сказывается на *свойстве несмещённости* оценки: соотношение (2.2.30) порождают *несмещённую оценку*, т. е. такую, для которой математическое ожидание оценки совпадает с самой оцениваемой характеристикой:

$$\mathbf{E}[bu_x[m]] = b_\xi[m],$$

в то время как оценка (1.2.31) оказывается смещённой¹:

$$\mathbf{E}[bb_x[m]] = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) b_\xi[m].$$

Казалось бы, несмещённость является дополнительным преимуществом использования (2.2.30) на практике, однако такая оценка имеет существенный недостаток: её использование в автокорреляционных матрицах может привести к потере важного свойства положительной полуопределённости, в то время как оценка (2.2.31) заведомо сохраняет это свойство. По этой причине на практике, как правило, предпочтение отдаётся именно оценке (2.2.31), тем более, что при больших объёмах выборки смещение оказывается весьма малым.

¹ Свойство смещённости отражается вторым символом в обозначении оценки: u (unbiased — англ. несмещённый) или b (biased — англ. смещённый).

Аналогичным образом можно определить точечные оценки взаимной корреляционной функции. Например, смещённая оценка взаимной корреляционной функции двух векторов

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]^T,$$

$$\mathbf{y} = [y_0 \ y_2 \ \dots \ y_{N-1}]^T$$

имеет вид

$$bb_{xy}[m] = \frac{1}{N} \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_{k+m} y_k^*, & 0 \leq m \leq N-1; \\ \sum_{k=0}^{N-|m|-1} x_k^* y_{k+|m|}, & -(N-1) \leq m < 0. \end{cases} \quad (2.2.32)$$

В отличие от оценок (2.2.30) или (2.2.31), вычисление оценки взаимной корреляции должно осуществляться для всех значений индексов, поскольку для (2.2.32) не выполняется свойство взаимной симметричности:

$$bu_{xy}[m] \neq bu_{xy}^*[-m].$$

- Выборочные оценки энергетического спектра.

Задача оценивание энергетического спектра на основе дискретной выборки является заметно более трудной и интересной задачей.

“Прямой” путь оценивания связан с самой конструкцией, определяющей энергетический спектр, и предполагает вычисление *периодограммы*, т. е. нормированного квадрата дискретно-временного преобразования Фурье одной наблюдаемой реализации:

$$GP_x[\omega] = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-jk\omega T) \right|^2. \quad (2.2.33)$$

Нетрудно показать [2], что *периодограмма даёт статистически несостоятельную оценку*: её дисперсия отлична от нуля даже при бесконечно большом объёме выборки. Одним из способов преодоления этого недостатка является квазиусреднение по отдельным интервалам реализации на основе временных или частотных окон: так появляются *метод Бартлетта, метод Уэлча* и др.

Другой путь оценки энергетического спектра — это *коррелограммный метод*, основанный на определении спектральной плотности мощности

как дискретно-временного преобразования Фурье корреляционной функции. Фактически речь идёт о подстановке в выражение (2.2.21) вместо “истинной” корреляционной функции её точечной оценки:

$$GK_x(\omega) = \sum_{m=-L}^L bb_x[m] \exp(-jm\omega). \quad (2.2.34)$$

При этом максимальный временной индекс, как правило, много меньше объёма выборки — это делается для того, чтобы снизить достаточно большие значения дисперсии, которые возникают, если вычислять (2.2.34) для всех значений $bb_s[m]$. Обычно берут $L \approx N / 10$.

2.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При решении разнообразных задач передачи и обработки информации важное место занимают методы моделирования сигналов, когда, опираясь на совокупность априорных данных, необходимо получить реализации, которые были бы в определённом смысле близки к изучаемым или желаемым сигналам.

В рамках методов цифровой обработки сигналов проблематика моделирования, как правило, ограничивается задачами параметрической оптимизации: при заданных отсчётных значениях реализаций, либо при заданных отсчётных значениях корреляционных функций требуется определить параметры выбранного типа фильтра, обеспечивающего на выходе последовательность, обладающую “нужными” свойствами, когда на входе действует возбуждающая последовательность (детерминированная или случайная).

В наиболее общем случае передаточная функция фильтра

$$H(z) = \frac{B_Q(z)}{A_P(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}$$

содержит $Q + 1$ коэффициентов b_0, \dots, b_Q в числителе и P коэффициентов a_1, \dots, a_P в знаменателе.

В качестве возбуждающей последовательности v_k используется либо взвешенная совокупность из N сдвинутых дельта-импульсов:

$$v_k = \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta[k - ik_0],$$

либо какая-либо “простая” случайная последовательность, например, белый шум.

В данном разделе будут предложены некоторые подходы к моделированию детерминированных последовательностей; особенности моделирования случайных последовательностей рассмотрены в разд. 3.3.

Пусть x_k — “желаемая” (аппроксимируемая) последовательность, а \hat{x}_k — моделирующая (аппроксимирующая) последовательность, которая воспроизводит x_k с некоторой ошибкой

$$e_k = x_k - \hat{x}_k.$$

Выбирая различные параметры фильтра, можно получить те или иные значения ошибки воспроизведения. Следуя стратегии, предложенной ещё в Главе 1, будем оптимизировать параметры по критерию минимума среднеквадратической ошибки:

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - \hat{x}_k|^2 \rightarrow \min_{a_k, b_k}. \quad (2.3.1)$$

Заметим, что, в отличие от аналогичного подхода при решении задачи Винерской фильтрации для непрерывных сигналов, соотношение (2.3.1) не содержит операцию вероятностного усреднения, поскольку, как уже было сказано, речь будет идти о детерминированных последовательностях.

Как известно [7], стандартным методом поиска экстремума функций (вещественных или комплексных) является нахождение *стационарных точек*, т. е. таких, в которых производная (или частные производные — в случае нескольких переменных) обращается в нуль и их последующий анализ на максимум, минимум или “седлообразность”.

Однако такой метод затруднён, если анализируемая функция не обладает свойством аналитичности в области анализа. В частности, подобные затруднения возникают при анализе функции вида

$$f(z) = |z|^2,$$

где z — комплексная переменная. Хотя очевидно, что точка $z = 0$ является глобальным минимумом, найти его традиционным методом невозможно по причине недифференцируемости функции в окрестности нуля.

Существуют, по меньшей степени, два подхода к преодолению этой проблемы. Первый подход заключается в том, что $f(z)$ рассматривается как функция вещественной и мнимой частей комплексной переменной, после чего производится поиск её экстремума как функции двух переменных.

Второй подход состоит в том, что $f(z)$ трактуется как сложная функция и комплексной переменной, и его сопряжения:

$$f(z) \equiv f(z, z^*) = zz^*.$$

При дифференцировании $f(z)$ по z её сопряжение z^* считается константой:

$$\frac{df(z)}{dz} = z^*;$$

аналогично, при дифференцировании $f(z)$ по z^* сама переменная z считается константой:

$$\frac{df(z)}{dz^*} = z.$$

Далее, производные приравниваются к нулю, и после этого возникает пара условий

$$z = 0;$$

$$z^* = 0,$$

из которых вытекает, что нуль является точкой глобального минимума анализируемой функции.

Применим второй подход для получения условий, при которых минимизируется СКО.

Для удобства записи введём векторные обозначения коэффициентов передаточной функции:

$$\mathbf{a}_P = (a_1, \dots, a_P)^T;$$

$$\mathbf{b}_Q = (b_1, \dots, b_Q)^T.$$

Аппроксимирующая последовательность и, следовательно, ошибка воспроизведения зависит от значений этих коэффициентов. Для нахождения оптимальных значений \mathbf{a}_P и \mathbf{b}_Q приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q)}{\partial a_i} = 0, i = 1, \dots, P;$$

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q)}{\partial b_j} = 0, j = 1, \dots, Q.$$

С целью получения соотношений, позволяющих определить оптимальные значения параметров, выразим среднеквадратическую ошибку в спектральной области. Пусть $E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q)$ — z -преобразование ошибки воспроизведения $e_k(\mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q)$. Тогда, используя соотношение Парсеваля, запишем

$$\varepsilon(\mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q)|^2 dz,$$

на основании чего уравнения имеют вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial a_i} E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) E^*(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) dz = 0, \quad i = 1, \dots, P$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial b_j} E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) E^*(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) dz = 0, \quad j = 1, \dots, Q.$$

Далее для определённости будем считать, что в качестве возбуждающей последовательности используется одиночный дельта-импульс:

$$v_k = \delta[k],$$

тогда аппроксимирующий сигнал — это импульсная характеристика фильтра h_k , так что

$$e_k = x_k - h_k$$

или, беря от обеих частей z -преобразование,

$$E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) = X(z) - H(z) = X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_P(z)}.$$

Следуя вышеизложенной методике отыскания экстремума, при дифференцировании $|E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q)|^2$ вычисляем производную и по самим коэффициентам, и по их сопряжению; при вычислении $\partial / \partial a_i$ и $\partial / \partial b_j$ первый множитель считается константой, а при вычислении $\partial / \partial a_i^*$ и $\partial / \partial b_j^*$ второй множитель считается константой. Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial a_i} \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_P(z)} \right] \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_P(z)} \right]^* dz = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_P(z)} \right]^* \frac{B_Q(z)}{A_P^2(z)} \frac{\partial A_P(z)}{\partial a_i} dz. \end{aligned}$$

Поскольку

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k},$$

$$B_Q(z) = \sum_{k=0}^P b_k z^{-k},$$

частная производная по любому из коэффициентов даёт z^{-k} . Таким образом, получаем уравнение

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_p(z)} \right]^* \frac{B_Q(z)}{A_p^2(z)} z^k dz = 0, \quad i = 1, \dots, P. \quad (2.3.2a)$$

Аналогичным образом получаем следующие уравнения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_p(z)} \right] \frac{B_Q(z)}{(A_p^*(z))^2} z^k dz = 0, \quad i = 1, \dots, P; \quad (2.3.2б)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_p(z)} \right]^* \frac{z^k dz}{A_p(z)} = 0, \quad j = 1, \dots, Q; \quad (2.3.2в)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_p(z)} \right] \frac{z^k dz}{A_p^*(z)} = 0, \quad j = 1, \dots, Q. \quad (2.3.2г)$$

Видно, что возникает система нелинейных (интегральных) уравнений, решение которой возможно только численными методами и сопряжено со значительными вычислительными затратами. В этой связи прямой путь получения оптимальных коэффициентов, связанный с вычислением частных производных, следует признать бесперспективным, и необходим поиск других методов, более простых, эффективных и менее сложных в вычислительном аспекте.

2.3.1. Метод Падэ

Запишем передаточную характеристику в виде

$$H(z)A_p(z) = B_Q(z),$$

что во временной области эквивалентно соотношению

$$h_k + \sum_{i=1}^P a_i h_{k-i} = b_k,$$

причём $h_k = 0$ при $k < 0$, исходя из принципа реализуемости фильтра, а $b_k = 0$ при $k < 0$ и $k > Q$, исходя из конечности набора коэффициентов b_0, \dots, b_Q . Таким образом, с учётом того, что $h_k = x_k$ при возбуждающей после-

довательности в виде дельта-импульса, получаем следующую систему уравнений:

$$x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} = \begin{cases} b_k, & k = 0, \dots, Q; \\ 0, & k < 0, k > Q. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Выберем из системы (2.3.3) уравнения, соответствующие значениям индекса $k = 0, \dots, P + Q + 1$:

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0; \\ x_1 + a_1 x_0 &= b_1; \\ &\dots \\ x_Q + a_1 x_{Q-1} + \dots + a_P x_{Q-P} &= b_Q; \\ x_{Q+1} + a_1 x_Q + \dots + a_P x_{Q-P+1} &= 0; \\ &\dots \\ x_{Q+P} + a_1 x_{Q+P-1} + \dots + a_P x_Q &= 0, \end{aligned}$$

которые можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_Q & x_{Q-1} & x_{Q-2} & \dots & x_{Q-P} \\ x_{Q+1} & x_Q & x_{Q-1} & \dots & x_{Q-P+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{Q+P} & x_{Q+P-1} & x_{Q+P-2} & \dots & x_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_Q \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Метод Падэ (Padé method) заключается в двухшаговом решении системы (2.3.4) путём её разделения на две подсистемы.

На первом шаге решается подсистема

$$\begin{pmatrix} x_{Q+1} & x_Q & \dots & x_{Q-P+1} \\ x_{Q+2} & x_{Q+1} & \dots & x_{Q-P+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{Q+P} & x_{Q+P-1} & \dots & x_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

относительно коэффициентов a_1, \dots, a_P . Причём, исходя из особенностей структуры трёхдиагональной матрицы, возможно рекуррентное решение (2.3.5). Действительно, представим левую часть в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_{Q+1} & x_Q & \cdots & x_{Q-P+1} \\ x_{Q+2} & x_{Q+1} & \cdots & x_{Q-P+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{Q+P} & x_{Q+P-1} & \cdots & x_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_{Q+1} \\ x_{Q+2} \\ \cdots \\ x_{Q+P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q & x_{Q-1} & \cdots & x_{Q-P+1} \\ x_{Q+1} & x_Q & \cdots & x_{Q-P+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{Q+P-1} & x_{Q+P-2} & \cdots & x_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} x_Q & x_{Q-1} & \cdots & x_{Q-P+1} \\ x_{Q+1} & x_Q & \cdots & x_{Q-P+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{Q+P-1} & x_{Q+P-2} & \cdots & x_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{Q+1} \\ x_{Q+2} \\ \cdots \\ x_{Q+P} \end{pmatrix}, \quad (2.3.6a)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{X}_Q \mathbf{a}_P = -\mathbf{x}_{Q+1}, \quad (2.3.6b)$$

где P -элементный вектор-столбец

$$\mathbf{x}_{Q+1} = (x_{Q+1}, x_{Q+2}, \dots, x_{Q+P})^T,$$

а матрица

$$\mathbf{X}_Q = \begin{pmatrix} x_Q & x_{Q-1} & \cdots & x_{Q-P+1} \\ x_{Q+1} & x_Q & \cdots & x_{Q-P+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{Q+P-1} & x_{Q+P-2} & \cdots & x_Q \end{pmatrix}$$

является несимметричной трёхдиагональной матрицей размерности $P \times P$. Нижний индекс указывает на начало нумерации значений последовательности.

Если матрица \mathbf{X}_Q невырождена, то существует обратная матрица \mathbf{X}_Q^{-1} , и решение (2.3.6), т. е. набор коэффициентов a_1, \dots, a_P есть

$$\mathbf{a}_P = -\mathbf{X}_Q^{-1} \mathbf{x}_{Q+1}. \quad (2.3.7)$$

На втором шаге метода Падэ решается подсистема

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_Q & x_{Q-1} & \cdots & x_{Q-P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_Q \end{pmatrix} \quad (2.3.8a)$$

относительно коэффициентов b_0, \dots, b_Q при уже известном векторе \mathbf{a}_P . В матричной форме

$$\mathbf{X}_0 \mathbf{a}_P = \mathbf{b}_Q. \quad (2.3.8b)$$

Рассмотрим примеры использования метода Падэ для моделирования последовательностей с заданными свойствами (в литературе его часто называют *Падэ-аппроксимацией*).

Пусть заданы шесть вещественных значений “желаемой” последовательности:

$$\mathbf{x} = (1,00 \ 1,50 \ 0,75 \ 0,38 \ 0,19 \ 0,09)^T,$$

и требуется осуществить аппроксимацию этой последовательности, используя полюсный фильтр второго порядка ($P = 2, Q = 0$), бесплюсный фильтр второго порядка ($P = 0, Q = 2$), а также фильтр, передаточная характеристика которого содержит один ноль и один полюс ($P = 1, Q = 1$).

Отметим, что, поскольку общий порядок передаточной характеристики не превышает двух, члены аппроксимирующей последовательности с индексами $k \geq 3$ никак не связаны с соответствующими членами заданной последовательности, так что при моделировании они, предположительно, будут давать неадекватные значения.

При реализации полюсного фильтра с характеристикой

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

имеем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

распадающуюся на две подсистемы:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

и

$$(x_0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_0.$$

Подставляя в первую подсистему заданные числовые значения:

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 \\ 1,50 & 0,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1,50 \\ 0,75 \end{pmatrix},$$

получаем

$$a_1 = -1,50; \quad a_2 = 1,50.$$

Из второй подсистемы непосредственно следует, что

$$b_0 = 1,00.$$

Таким образом, передаточная характеристика полюсного фильтра, обеспечивающего аппроксимацию заданной последовательности, есть

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1,50z^{-1} + 1,50z^{-2}}.$$

Найдём для такой функции импульсный отклик, значения которого являются значениями выходной последовательности, когда на вход подаётся дельта импульс. Используя табл. 2.3 для взаимно-обратных z -преобразований, получаем, что

$$h_k = 1,22^k \frac{\sin 0,91(k+1)}{\sin 0,91} = 1,27 \cdot 1,22^k \sin 0,91(k+1),$$

и первые шесть членов аппроксимирующей последовательности равны

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,00 \quad 1,50 \quad 0,75 \quad -1,10 \quad -2,77 \quad -2,51)^T.$$

Как и следовало ожидать, начиная с x_3 аппроксимирующая последовательность существенно отличается от желаемой.

При реализации бесполосного фильтра с характеристикой

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}$$

имеем тривиальную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

из которой сразу получаем коэффициенты

$$b_0 = x_0 = 1,00;$$

$$b_1 = x_1 = 1,50;$$

$$b_2 = x_2 = 0,75,$$

т. е. передаточную характеристику

$$H(z) = 1,00 + 1,50z^{-1} + 0,75z^{-2},$$

и соответствующую импульсную характеристику

$$h_k = \delta[k] + 1,50\delta[k-1] + 0,75\delta[k-2].$$

Первые шесть членов аппроксимирующей последовательности равны

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,00 \ 1,50 \ 0,75 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Наконец, при реализации фильтра с характеристикой

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1}}$$

имеем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

распадающуюся на подсистемы

$$x_2 + a_1x_1 = 0,$$

и

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

решение которых есть

$$a_1 = -0,50;$$

$$b_0 = 1,00; \quad b_1 = 1,00.$$

Передаточная и импульсная характеристики имеет вид

$$H(z) = \frac{1,00 + z^{-1}}{1 - 0,50z^{-1}},$$

и

$$h_k = 0,50^k u_k + 0,50^{k-1} u_{k-1}.$$

соответственно.

Первые шесть членов аппроксимирующей последовательности равны

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,00 \ 1,50 \ 0,75 \ 0,38 \ 0,19 \ 0,09)^T.$$

Сравнение аппроксимирующей последовательности с заданной показывает их полную идентичность, однако это не означает, что такая же ситуация будет иметь место для любой другой последовательности.

Особенностью рассмотренных примеров было невырожденность матрицы \mathbf{X}_Q , фигурирующей в уравнениях (3.2.6). Посмотрим, что получается в случае невырожденной матрицы.

Пусть задана последовательность

$$\mathbf{x} = (1,00 \ 4,00 \ 2,00 \ 1,00 \ 3,00 \ 4,00)^T,$$

и требуется осуществить Падэ-аппроксимацию для фильтра второго порядка, когда $P = 2$, $Q = 2$, т. е. когда передаточная характеристика имеет вид

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Для соответствующей системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 4,00 & 1,00 & 0,00 \\ 2,00 & 4,00 & 1,00 \\ 1,00 & 2,00 & 4,00 \\ 3,00 & 1,00 & 2,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

подсистема

$$\begin{pmatrix} 2,00 & 4,00 \\ 1,00 & 2,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1,00 \\ 3,00 \end{pmatrix}$$

оказывается вырожденной, поскольку определитель матрицы равен нулю. Этот означает, что заданная структура передаточной функции не в состоянии обеспечить аппроксимацию.

Попробуем изменить структуру, оставляя по-прежнему два нуля и два полюса, но полагая $a_0 = 0$. В этом случае получаем подсистему

$$\begin{pmatrix} 2,00 & 4,00 \\ 1,00 & 2,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix},$$

решение которой есть

$$a_1 = 2,00; \ a_2 = -1,00.$$

Тогда, решая вторую подсистему

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 4,00 & 1,00 & 0,00 \\ 2,00 & 4,00 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,00 \\ 2,00 \\ -1,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

получаем передаточную характеристику

$$H(z) = \frac{2,00z^{-1} + 7,00z^{-2}}{2,00z^{-1} - z^{-2}} = \frac{2,00 + 7,00z^{-1}}{2,00 - z^{-1}} = \frac{1 + 3,50z^{-1}}{1 - 0,50z^{-1}},$$

которой соответствует импульсная характеристика

$$h_k = 0,50^k u_k + 3,50 \cdot 0,50^{k-1} u_{k-1}.$$

Первые шесть членов аппроксимирующей последовательности равны

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,00 \ 4,00 \ 2,00 \ 1,00 \ 0,50 \ 0,25)^T.$$

2.3.2. Метод Прони

Рассмотренный в разд. 2.3.1 метод Падэ обеспечивает великолепную аппроксимацию желаемого сигнала для индексов $k \leq P + Q$, однако за пределами этого интервала качество аппроксимации падает до неприемлемо низкого уровня. Можно, даже, сказать, что метод Падэ использует все свои ресурсы для избыточно хорошей аппроксимации для $k \leq P + Q$, не оставляя никаких возможностей для приемлемой аппроксимации в интервале $k > P + Q$. Причина этого вполне очевидна: для определения коэффициентов фильтров использовались простые линейные соотношения, описывающие фильтрацию лишь с учётом физической реализуемости фильтра и конечности набора коэффициентов. Фактически, никакой оптимизации не проводилось, что и повлекло за собой, в целом, неудовлетворительные результаты аппроксимации.

В этой связи целесообразен поиск таких методов, ориентированные именно на оптимизацию коэффициентов по какому-либо критерию (традиционно — по критерию минимума СКО) которые были бы, возможно, более сложными, обеспечивали бы чуть менее хорошую аппроксимацию для $k \leq P + Q$, но, зато, работали бы удовлетворительно при $k > P + Q$. Одним из таких методов является *метод Прони* (Prony method).

По-прежнему будем считать, что аппроксимирующая последовательность формируется на выходе фильтра, передаточная характеристика

$$H(z) = \frac{B_Q(z)}{A_P(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}$$

которого имеет P полюсов и Q нулей, когда на его вход подаётся дельта-импульс. При этом коэффициенты фильтра выбираются, исходя из минимизации ошибки аппроксимации

$$e_k(\mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) = x_k - \hat{x}_k, \quad k \geq 0,$$

или, в z -области,

$$E(z, \mathbf{a}_P, \mathbf{b}_Q) = X(z) - \frac{B_Q(z)}{A_P(z)}.$$

Поступим следующим образом. Сформируем новую ошибку аппроксимации

$$E_1(z) = E(z)A_P(z) = X(z)A_P(z) - B_Q(z). \quad (2.3.9a)$$

С физической точки зрения соотношение (2.3.9) означает, что аппроксимируемый сигнал x_k пропустили через фильтр с характеристикой $A(z)$, сформировав последовательность \hat{b}_k , а затем из полученной последовательности вычли последовательность коэффициентов b_0, \dots, b_Q (рис. 2.1). Во временной области это эквивалентно следующему соотношению:

$$e_{1k} = \hat{b}_k - b_k = x_k * a_k - b_k. \quad (2.3.9б)$$

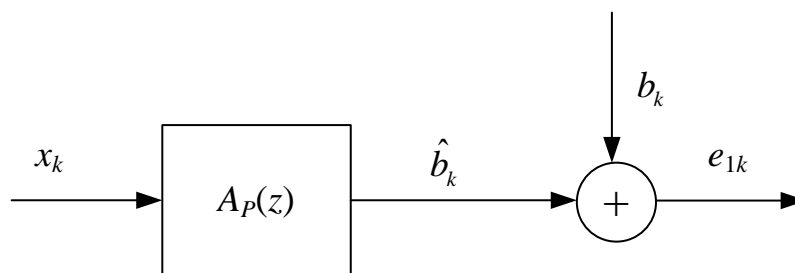


Рис. 2.1. К иллюстрации метода Прони

Поскольку $b_k = 0$ для $k > Q$, из (2.3.9) получается следующая система уравнений (напомним, что $A(z)$ — нормированный многочлен, у которого $a_1 = 1$):

$$e_{1k} = \begin{cases} x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} - b_k, & k = 0, 1, \dots, Q; \\ x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i}, & k > Q. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Как показал анализ работы метода Падэ, при $k \leq P + Q$ хорошая (фактически — идеальная) аппроксимация обеспечивается “естественным образом” из уравнений, аналогичных (2.3.10), без какой-либо оптимизации, в то время как в “остаточной области” — на интервале $k > P + Q$ сколь-нибудь приемлемая аппроксимация отсутствует. В этой связи попробуем реализовать идею, направленную на минимизацию среднеквадратической ошибки именно в остаточной области. При этом, так как $b_k = 0$, оптимизация проводится только по коэффициентам \mathbf{a}_P :

$$\varepsilon_1(\mathbf{a}_P) = \sum_{k=Q+1}^{\infty} |e_{1k}|^2 = \sum_{k=Q+1}^{\infty} \left| x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} \right|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{a}_P}.$$

Беря частные производные по коэффициентам a_k , аналогично тому, как это делалось выше, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1(\mathbf{a}_P)}{\partial a_i} &= \sum_{k=Q+1}^{\infty} \frac{\partial (e_{1k} e_{1k}^*)}{\partial a_i} = \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k}^* \frac{\partial (e_{1k})}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, P; \\ \frac{\partial \varepsilon_1(\mathbf{a}_P)}{\partial a_i^*} &= \sum_{k=Q+1}^{\infty} \frac{\partial (e_{1k} e_{1k}^*)}{\partial a_i^*} = \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} \frac{\partial (e_{1k}^*)}{\partial a_i^*} = 0, \quad i = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial (e_{1k})}{\partial a_i} = x_{k-i}, \quad \frac{\partial (e_{1k}^*)}{\partial a_i^*} = x_{k-i}^*,$$

получаем комплексно-сопряжённые семейства уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k}^* x_{k-i} &= 0; \\ \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} x_{k-i}^* &= 0. \end{aligned}$$

Как показывает дальнейший анализ, для нахождения соотношений, позволяющих получить оптимальные значения коэффициентов, вполне можно обойтись либо верхними, либо нижними уравнениями. Выбрав, например,

нижнее семейство, получим уравнения, называемые *проекционной теоремой*:

$$\sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} x_{k-i}^* = 0, \quad i = 1, \dots, P. \quad (2.3.11)$$

Они отражают принцип ортогональности аппроксимируемого (оцениваемого) сигнала и ошибки аппроксимации.

Подставляя (2.3.10) в (2.3.11), имеем:

$$\sum_{k=Q+1}^{\infty} \left(x_k + \sum_{j=1}^P a_j x_{k-j} \right) x_{k-i}^* = 0,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^P a_j \left(\sum_{k=Q+1}^{\infty} x_{k-j} x_{k-i}^* \right) = - \sum_{k=Q+1}^{\infty} x_k x_{k-i}^*.$$

Для упрощения записи введём функцию двух переменных (двухиндексную последовательность)

$$r_x[i, j] = - \sum_{k=Q+1}^{\infty} x_{k-j} x_{k-i}^*, \quad (2.3.12)$$

которая представляет собой автокорреляционную функцию (не в вероятностном смысле) последовательности x_k . Хотя $r_x[i, j]$ свободна от каких-либо теоретико-вероятностных трактовок, тем не менее, она обладает свойствами, во многом схожими со свойствами вероятностной корреляционной функции. В частности, для неё справедливо условие сопряжённой симметричности:

$$r_x[i, j] = r_x^*[j, i].$$

С учётом введённых обозначений запишем уравнения для определения оптимальных значений коэффициентов \mathbf{a}_P :

$$\sum_{j=1}^P a_j r_x[i, j] = -r_x[i, 0], \quad i = 1, \dots, P, \quad (2.3.13a)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} r_x[1,1] & r_x[1,2] & \cdots & r_x[1,P] \\ r_x[2,1] & r_x[2,2] & \cdots & r_x[2,P] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_x[P,1] & r_x[P,2] & \cdots & r_x[P,P] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_x[1,0] \\ r_x[2,0] \\ \cdots \\ r_x[P,0] \end{pmatrix}. \quad (2.3.13b)$$

Введём матричные обозначения: P -элементный вектор столбец

$$\mathbf{r}_x = (r_x[1,0], r_x[2,0], \dots, r_x[P,0])^T$$

и автокорреляционную эрмитову¹ $(P \times P)$ -матрицу

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} r_x[1,1] & r_x[1,2] & \dots & r_x[1,P] \\ r_x[2,1] & r_x[2,2] & \dots & r_x[2,P] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_x[P,1] & r_x[P,2] & \dots & r_x[P,P] \end{pmatrix},$$

тогда уравнения можно записать в виде

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a}_P = -\mathbf{r}_x. \quad (2.3.13e)$$

Если матрица \mathbf{R}_x невырождена, то существует обратная матрица \mathbf{R}_x^{-1} , и решение (2.3.13) получается умножением на \mathbf{R}_x^{-1} слева:

$$\mathbf{a}_P = -\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_x. \quad (2.3.14)$$

Найдём минимальное значение $\min \varepsilon_1$, которое обеспечивается, если коэффициенты фильтра удовлетворяют уравнению (2.3.13). Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{a}_P) &= \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} e_{1k}^* = \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} \left(x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} \right)^* = \\ &= \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} x_k^* + \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} \left(\sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} \right)^*. \end{aligned}$$

Для оптимальных значений коэффициентов выполняется условие проекционной теоремы:

$$\sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} \left(\sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} \right)^* = 0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \min \varepsilon_1 &= \sum_{k=Q+1}^{\infty} e_{1k} x_k^* = \sum_{k=Q+1}^{\infty} \left(x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} \right) x_k^* = \\ &= r_x(0,0) + \sum_{i=1}^P a_i r_x(0,i). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

¹ Матрица \mathbf{A} называется эрмитовой, если она равна матрице \mathbf{A}^H , которая получается путём эрмитового сопряжения, т. е. одновременным транспонированием и комплексным сопряжением элементов.

Итак, решая систему (2.3.13), получаем оптимальные значения коэффициентов \mathbf{a}_P , определяющих знаменатель передаточной характеристики. После этого остаётся найти коэффициенты \mathbf{b}_Q , образующие числитель передаточной характеристики. Согласно методу Прони, для этого в верхнее семейство уравнений (2.3.10)

$$e_{1k} = x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} - b_k$$

подставляются найденные из (2.3.14) оптимальные значения \mathbf{a}_P , а все значения e_{1k} полагаются нулевыми. Таким образом, получаем следующие уравнения для определения \mathbf{b}_Q :

$$b_k = x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i}, \quad k = 0, 1, \dots, Q. \quad (2.3.16)$$

Легко видеть, что соотношения (2.3.16) полностью совпадают с аналогичными соотношениями (2.3.3) в методе Падэ. Однако в методе Падэ оптимальные коэффициенты \mathbf{a}_P определяются из уравнений (2.3.7), в которых фигурирует матрица \mathbf{X}_Q , содержащая значения аппроксимируемой последовательности, а в методе Прони оптимальные коэффициенты \mathbf{a}_P определяются из уравнений (2.3.14), в которых фигурирует автокорреляционная матрица \mathbf{R}_x .

Рассмотрим пример использования метода Прони.

Пусть аппроксимируемая последовательность представляет собой прямоугольный импульс длительностью N :

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ 0, & k < 0, k \geq N, \end{cases}$$

и требуется обеспечить Прони-аппроксимацию с использованием фильтра, передаточная функция которого содержит один ноль ($Q = 1$) и один полюс ($P = 1$).

Для рассматриваемого случая система (2.3.13) содержит только одно уравнение:

$$a_1 r_x[1,1] = -r_x[1,0],$$

где, согласно (2.3.12),

$$r_x[1,0] = \sum_{k=2}^{\infty} x_k x_{k-1} = N - 2;$$

$$r_x[1,1] = \sum_{k=2}^{\infty} x_k^2 = N - 1.$$

Отсюда получаем оптимальное значение

$$a_1 = -\frac{r_x[1,0]}{r_x[1,1]} = -\frac{N-2}{N-1},$$

т. е. знаменатель передаточной функции есть

$$A_p(z) = 1 + a_1 z^{-1} = 1 - \frac{N-2}{N-1} z^{-1}.$$

Найдём коэффициенты b_0 и b_1 , стоящие в числителе передаточной функции. Из системы (2.3.16) получаем два уравнения:

$$b_0 = x_0 = 1;$$

$$b_1 = x_1 + a_1 x_0 = 1 - \frac{N-2}{N-1} = \frac{1}{N-1},$$

так что

$$B_Q(z) = b_0 + b_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{N-1} z^{-1},$$

и передаточная функция фильтра есть

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{N-1} z^{-1}}{1 - \frac{N-2}{N-1} z^{-1}},$$

что соответствует импульсной характеристике

$$h_k = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^k u_k + \frac{1}{N-1} \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{k-1} u_{k-1}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \min \varepsilon_1 &= r_x(0,0) + a_1 r_x(0,1) = \sum_{k=2}^{\infty} x_k^2 - \frac{N-2}{N-1} \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} x_k = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} x_k^2 - \frac{N-2}{N-1} \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} x_k = N-2 - \frac{N-2}{N-1} (N-2) = \frac{N-2}{N-1}. \end{aligned}$$

Например, при использовании 16-элементного единичного импульса ($N = 16$) получаем:

$$H(z) = \frac{1 + 0,07z^{-1}}{1 - 0,93z^{-1}},$$

$$h_k = 0,93^k u_k + 0,07 \cdot 0,93^{k-1} u_{k-1}$$

и

$$\min \varepsilon_1 = 0,97.$$

На рис. 2.2 показаны ошибки аппроксимации

$$e_k = x_k - h_k$$

отдельных членов последовательности x_k .

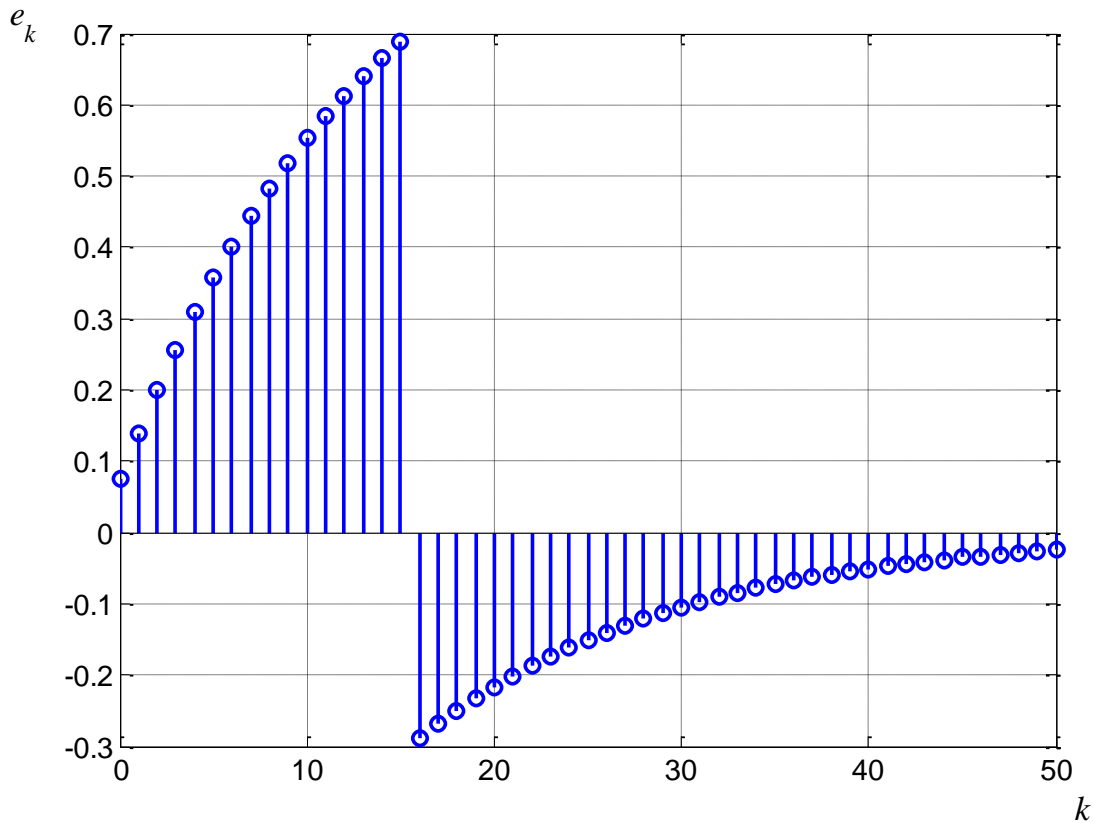


Рис. 2.2. Ошибки аппроксимации членов последовательности x_k

СКО аппроксимации всей последовательности равна¹

¹ При числовых расчётах СКО обычно представляют в нормированном (на число элементов) виде, т. е. в данном случае более корректным было бы значение

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N |e_k|^2 = 0,26.$$

Однако, цель пособия — дать представление об основных методах винеровской фильтрации, и, чтобы не загромождать изложение излишними числовыми аспектами, для

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \approx 4,18.$$

Интересно сравнить аппроксимацию единичного импульса по методу Прони с аппроксимацией того же импульса по методу Падэ, согласно которому передаточная характеристика для $Q = 2$ и $P = 1$ ищется из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

и

$$h_k = u_k.$$

Это означает, что аппроксимирующая последовательность представляет собой постоянное значение в неотрицательной области индексов (без формирования, собственно, импульса), что, конечно же, нельзя признать удовлетворительной аппроксимацией. При этом ошибка аппроксимации отдельных членов равна

$$e_k = x_k * a_k - b_k = x_k - x_{k-1} - \delta[k] = \begin{cases} -1, & k = N; \\ 0, & k \neq N; \end{cases}$$

т. е. СКО аппроксимации всей последовательности равна 1, что парадоксальным образом оказывается существенно лучше аналогичного значения в методе Прони.

2.3.3. Метод Шанка

Согласно рассмотренному в разд. 2.3.2 методу Прони, коэффициенты \mathbf{b}_Q , находящиеся в числителе передаточной характеристики, определяются из уравнений

$$e_{1k} = x_k + \sum_{i=1}^P a_i x_{k-i} - b_k, \quad k = 0, 1, \dots, Q$$

непрерывных процессов, и для последовательностей рассматривается абсолютное значение СКО.

посредством обнуления значений e_{1k} . Это означает, что акцент в оптимизации коэффициентов делается на диапазон $k = 0, 1, \dots, Q$, в то время, как область $k > Q$ никак не принимается во внимание. Следовательно, существуют ресурсы улучшения аппроксимации, связанные с оптимизацией коэффициентов во всём диапазоне индексов аппроксимируемой последовательности. Одним из таких методов является *метод Шанка* (Shank method).

Отправной точкой в получении уравнений, определяющих оптимальные значения \mathbf{a}_p и \mathbf{b}_Q по методу Шанка, является рассмотрение фильтра с передаточной характеристикой $H(z)$ в виде каскада из двух фильтров, передаточные характеристики которых есть $B_Q(z)$ и $1 / A_p(z)$ (рис. 2.3).

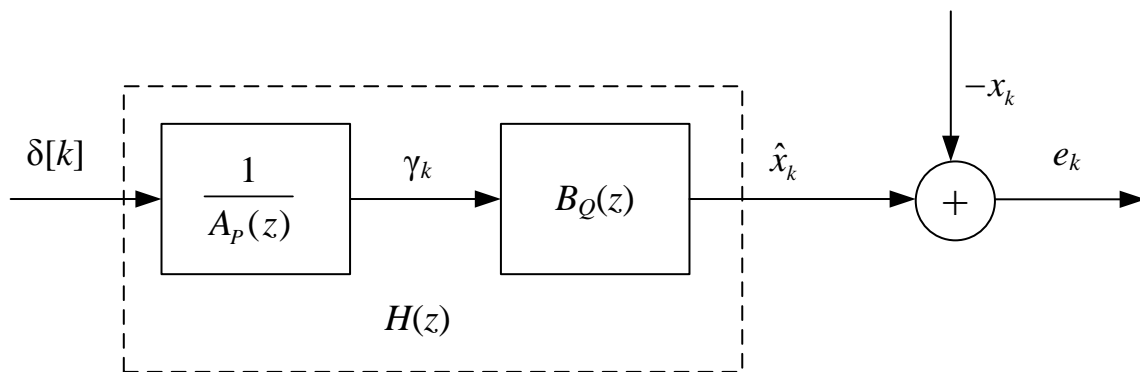


Рис. 2.3. К иллюстрации метода Шанка

Поскольку коэффициенты \mathbf{a}_p определяются из уравнений (2.3.13) до момента определения коэффициентов \mathbf{b}_Q , в каскадной передаточной характеристике

$$H(z) = B_Q(z) \frac{1}{A_p(z)}$$

функция $A_p(z)$ считается заданной, так что последовательность γ_k есть свёртка возбуждающего дельта-импульса с последовательностью, определяемой функцией $1 / A_p(z)$. Из соотношения

$$\Gamma(z) = \Delta(z) \frac{1}{A_p(z)} = \frac{1}{A_p(z)},$$

т. е.

$$A_p(z)\Gamma(z) = 1$$

где $\Gamma(z)$ — z -преобразование последовательности γ_k , а $\Delta(z) = 1$ — z -преобразование дельта-импульса, имеем

$$\delta[k] = \sum_{i=0}^P a_i \gamma_{k-i} = \gamma_k + \sum_{i=1}^P a_i \gamma_{k-i},$$

откуда следует, что последовательность на выходе фильтра $1 / A_P(z)$ может быть определена рекурсивно:

$$\gamma_k = \delta[k] - \sum_{i=1}^P a_i \gamma_{k-i}.$$

Таким образом, на выходе фильтра $B_Q(z)$ образуется аппроксимирующая последовательность

$$\hat{x}_k = \sum_{j=1}^Q b_j \gamma_{k-j},$$

обеспечивающая ошибку аппроксимации

$$e_k(\mathbf{b}_Q) = x_k - \hat{x}_k = x_k - \sum_{j=1}^Q b_j x_{k-j}.$$

Для нахождения оптимальных значений коэффициентов \mathbf{b}_Q выберем критерием оптимальности минимум среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon(\mathbf{b}_Q) = \sum_{k=0}^{\infty} |e_k(\mathbf{b}_Q)|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{b}_Q},$$

вычисляемой с учётом всех значений индексов.

Уравнения для определения \mathbf{b}_Q получаются стандартным способом, посредством вычисления частных производных по каждому из коэффициентов и последующим приравнением к нулю. Например, дифференцируя по b_j^* , получаем проекционную теорему для метода Шанка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{b}_Q)}{\partial b_j^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k(\mathbf{b}_Q) \frac{\partial e_k^*(\mathbf{b}_Q)}{\partial b_j^*} = - \sum_{k=0}^{\infty} e_k(\mathbf{b}_Q) \gamma_{k-j}^* = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k - \sum_{n=1}^Q b_n x_{k-n} \right) \gamma_{k-j}^* = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{n=0}^Q b_n \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k-n} \gamma_{k-j}^* = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \gamma_{k-j}^*, \quad j = 0, 1, \dots, Q.$$

Как и в методе Прони, введём (детерминированную) автокорреляционную функцию для последовательности γ_k :

$$r_\gamma[n, j] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k-n} \gamma_{k-j}^*, \quad (2.3.17)$$

а также (детерминированную) взаимную корреляционную функцию между последовательностями γ_k и x_k :

$$r_{x\gamma}[j] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \gamma_{k-j}^*. \quad (2.3.18)$$

Функция $r_\gamma[n, j]$ обладает замечательным свойством своих индексов.

Рассмотрим

$$r_\gamma[n+1, j+1] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k-n-1} \gamma_{k-j-1}^* = \sum_{k=-1}^{\infty} \gamma_{k-n} \gamma_{k-j}^* = r_\gamma[n, j] + \gamma_{-n-1} \gamma_{-j-1}^*.$$

Но, в силу физической реализуемости процесса фильтрации, $\gamma_k = 0$ при $k < 0$, следовательно,

$$\gamma_{-n-1} = 0, \quad \gamma_{-j-1}^* = 0$$

и

$$r_\gamma[n+1, j+1] = r_\gamma[n, j].$$

Обобщая это свойство на произвольное положительное число L , получаем, что

$$r_\gamma[n+L, j+L] = r_\gamma[n, j].$$

Другими словами, $r_\gamma[n, j]$ не зависит от произвольного временного сдвига (аналог вероятностного свойства стационарности). Следовательно, реальная индексная зависимость проявляется только в виде разностного аргумента:

$$r_\gamma[n, j] = r_\gamma[n-j].$$

Кроме того, из определения (2.3.17) функции $r_\gamma[n, j]$ вытекает её сопряжённая симметричность:

$$r_\gamma^*[j-n] = r_\gamma[n-j].$$

С учётом установленных свойств, уравнения проекционной теоремы можно записать в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^Q b_n r_\gamma[n-j] = r_{x\gamma}[j], \quad j = 0, 1, \dots, Q, \quad (2.3.19a)$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} r_\gamma[0] & r_\gamma^*[1] & \cdots & r_\gamma^*[Q] \\ r_\gamma[1] & r_\gamma[0] & \cdots & r_\gamma^*[Q-1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_\gamma[Q] & r_\gamma[Q-1] & \cdots & r_\gamma[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_Q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{x\gamma}[0] \\ r_{x\gamma}[1] \\ \cdots \\ r_{x\gamma}[Q] \end{pmatrix}. \quad (2.3.19б)$$

Введём матричные обозначения: P -элементный вектор столбец

$$\mathbf{r}_{x\gamma} = (r_{x\gamma}[0], r_{x\gamma}[1], \dots, r_{x\gamma}[Q])^T$$

и автокорреляционную эрмитову ($P \times P$)-матрицу

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{pmatrix} r_\gamma[0] & r_\gamma^*[1] & \cdots & r_\gamma^*[Q] \\ r_\gamma[1] & r_\gamma[0] & \cdots & r_\gamma^*[Q-1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_\gamma[Q] & r_\gamma[Q-1] & \cdots & r_\gamma[0] \end{pmatrix},$$

тогда уравнения можно записать в виде

$$\mathbf{R}_\gamma \mathbf{b}_Q = -\mathbf{r}_{x\gamma}. \quad (2.3.19в)$$

Если матрица \mathbf{R}_γ невырождена, то существует обратная матрица \mathbf{R}_γ^{-1} , и решение (2.3.19) есть

$$\mathbf{b}_Q = -\mathbf{R}_\gamma^{-1} \mathbf{r}_{x\gamma}. \quad (2.3.20)$$

Найдём минимальное значение ошибки аппроксимации $\min \varepsilon$, реализуемое в методе Шанка. Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{b}_Q) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k e_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} e_{1k} \left(x_k - \sum_{j=0}^Q b_j \gamma_{k-j} \right)^* = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k x_k^* + \sum_{j=0}^Q b_j^* \sum_{k=0}^{\infty} e_k \gamma_{k-j}. \end{aligned}$$

Для оптимальных значений коэффициентов выполняется условие проекционной теоремы:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k \gamma_{k-j}^* = 0,$$

следовательно,

$$\min \varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} e_k x_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k - \sum_{j=0}^Q b_j \gamma_{k-j} \right) x_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 - \sum_{j=0}^Q b_j \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k-j} x_k^* =$$

$$= r_x[0] + \sum_{j=0}^Q b_j r_{xy}[-j] = r_x[0] + \sum_{j=0}^Q b_j r_{xy}^*[j]. \quad (2.3.21)$$

Посмотрим, как работает метод Шанка применительно к задаче аппроксимации прямоугольного импульса

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ 0, & k < 0, k \geq N, \end{cases}$$

при использовании фильтра, передаточная функция которого содержит один ноль и один полюс.

Функция $A(z)$ остаётся такой же, что была в методе Прони:

$$A_p(z) = 1 - \frac{N-2}{N-1} z^{-1}.$$

Следовательно, первый фильтр в каскаде на рис. 2.3 имеет передаточную характеристику

$$\Gamma(z) = \frac{1}{A_p(z)} = \frac{1}{1 - \frac{N-2}{N-1} z^{-1}},$$

и ей соответствует импульсная характеристика

$$\gamma_k = \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^k u_k.$$

Зная γ_k , можно найти значения автокорреляционной и взаимной корреляционных функций для $Q = 1$ и $P = 1$:

$$\begin{aligned} r_\gamma[0] &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{2k} u_k = \frac{1}{1 - \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^2}; \\ r_\gamma[1] &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \gamma_{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^k \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{k-1} u_k u_{k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^k \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{k-1} u_k u_{k-1} = \frac{N-1}{N-2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^{2k} = \\ &= \frac{N-1}{N-2} \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^2} = \frac{\frac{N-2}{N-1}}{1 - \left(\frac{N-2}{N-1} \right)^2}; \end{aligned}$$

$$r_{xy}[0] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \gamma_k = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k = \frac{1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^N}{1 - \frac{N-2}{N-1}} = (N-1) \left[1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^N \right];$$

$$r_{xy}[1] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \gamma_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1}}{1 - \frac{N-2}{N-1}} = (N-1) \left[1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1} \right].$$

Следовательно, автокорреляционная матрица \mathbf{R}_γ имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_\gamma = \frac{1}{1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{N-2}{N-1} \\ \frac{N-2}{N-1} & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор значений взаимной корреляционной функции —

$$\mathbf{r}_{xy} = (N-1) \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^N \\ 1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, согласно (2.3.20), получаем решение:

$$b_0 = 1;$$

$$b_1 = 1 + (N-1) \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N-1} + (N-1) \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{N+1}.$$

Выбирая такое же значение $N = 16$, что и в методе Прони, получаем оптимальную передаточную характеристику

$$H(z) = \frac{1 + 0,31z^{-1}}{1 - 0,93z^{-1}},$$

которой соответствует импульсная характеристика

$$h_k = 0,93^k u_k + 0,31 \cdot 0,93^{k-1} u_{k-1}.$$

Вычислим среднеквадратическую ошибку аппроксимации. На основании (2.3.21) имеем:

$$\min \varepsilon = r_x[0] - b_0 r_{xy}[0] - b_1 r_{xy}[1] =$$

$$= 16 - 1 \cdot 15 \cdot \left[1 - \left(\frac{14}{15} \right)^{16} \right] - 0,31 \cdot 15 \cdot \left[1 - \left(\frac{14}{15} \right)^{15} \right] = 2,98.$$

Сравнивая полученное значение с аналогичным значением 4,18 в методе Прони, видим, что метод Шанка даёт заметно лучшую аппроксимацию.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 2

2.1. Получить выражения для z -преобразования последовательностей, представленных в табл. 2.3.

2.2. Докажите свойство положительной полуопределённости автокорреляционной матрицы: для произвольного M -элементного вектора

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_M]$$

квадратичная форма, построенная на элементах \mathbf{b}_ξ , неотрицательна:

$$\mathbf{a}^H \mathbf{b}_\xi \mathbf{a} = \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^M a[k] a^*[n] b_\xi[k-n] \geq 0.$$

2.3. Докажите ряд свойств спектральной плотности мощности, определяемой соотношением

$$P_\xi(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_\xi[m] \exp(-jm\omega).$$

а) $P_\xi(\omega)$ является неотрицательной функцией.

б) Пусть λ_i — собственные числа автокорреляционной матрицы. Тогда

$$\min_{\omega} P_\xi(\omega) \leq \lambda_i \leq \max_{\omega} P_\xi(\omega).$$

в) Имеет место соотношение Парсеваля (2.2.23).

2.4. Докажите или опровергните каждое из следующих утверждений.

а) Произведение двух верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной матрицей.

б) Произведение двух тёплицевых матриц является тёплицевой матрицей.

в) Произведение двух центрально-симметричных матриц является центрально-симметричной матрицей

2.5. Определить, является ли выборочная дисперсия, определяемая (2.2.29), смещённой оценкой. Найти дисперсию выборочной дисперсии.

2.6. Пусть ξ_k — стационарная последовательность с нулевым средним и известной дисперсией $b_\xi[m]$. Формируется последовательность

$$\eta_k = \xi_k + d_k,$$

где d_k — известная детерминированная последовательность. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию последовательности η_k .

2.7. Случайная последовательность ξ_k задана в виде

$$\xi_k = \sum_{m=1}^P a_m \xi_{k-m} + v_m,$$

где a_m — заданные коэффициенты, а v_k — белый шум с известной дисперсией σ_v^2 . Формируется последовательность

$$\eta_k = \xi_k + \mu_k,$$

в которой μ_k — белый шум с известной дисперсией σ_μ^2 , не коррелированный с v_k . Найти СПМ последовательностей ξ_k и η_k .

2.8. На вход фильтра с системной функцией

$$H(z) = \frac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 - (1/3)z^{-1}}$$

подаётся стационарная последовательность ξ_k с корреляционной функцией

$$b_\xi[m] = (1/2)^{|m|}.$$

Для выходной последовательности η_k найти:

- а) СПМ и корреляционную функцию;
- б) взаимную корреляционную функцию и взаимную СПМ (т. е. z -преобразование от взаимной корреляционной функции) между ξ_k и η_k .

2.9. Найти СПМ стационарной последовательности ξ_k , заданной своей корреляционной функцией:

а) $b_\xi[m] = 2\delta[m] + j2\delta[m-1] - j2\delta[m+1];$

б) $b_\xi[m] = \delta[m] + 2(1/2)^{|m|};$

в) $b_\xi[m] = 2\delta[m] + \cos(\pi k / 4);$

г) $b_\xi[m] = \begin{cases} 10 - |k|, & |k| \leq 10; \\ 0, & |k| > 10. \end{cases}$

2.10. Найти корреляционную функцию последовательности ξ_k , заданной своей СПМ:

а) $P_\xi(\omega) = 3 + 2\cos\omega$;

б) $P_\xi(\omega) = \frac{1}{5 + 3\cos\omega}$;

в) $P_\xi(z) = \frac{-2z^2 + 5z - 2}{3z^2 + 10z + 3}$;

2.11. Пусть ξ_k — стационарная последовательность с нулевым средним и корреляционной матрицей \mathbf{b}_ξ размерности $N \times N$. Справедливы ли следующие утверждения:

а) если все собственные числа матрицы \mathbf{b}_ξ равны:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_N,$$

то $b_\xi[m] = 0$ для $m = 1, \dots, N$;

б) если $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_m = 0$, $m = 2, \dots, N$, то

$$b_\xi[m] = A \exp(jk\omega_0) ?$$

2.12. Рассматривается случайная последовательность

$$\xi_k = A \cos(k\omega_0 + \varphi) + v_k,$$

где v_k — белый шум с дисперсией σ_v^2 . Найти корреляционную функцию и СПМ для следующих случаев:

а) A — гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ_A^2 , ω_0 и φ — детерминированные величины;

б) A и ω_0 — детерминированные величины, φ — случайная величина, равномерно распределённая на интервале $[0; 2\pi)$;

в) A и φ — детерминированные величины, ω_0 — случайная величина, равномерно распределённая на интервале $[\omega_0 - \Delta; \omega_0 + \Delta]$.

2.13. Определить, могут ли являться следующие матрицы автокорреляционными:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1+j \\ 1-j & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{b}_5 = \begin{pmatrix} 2 & j & 1 \\ -j & 4j & -j \\ 1 & j & 2 \end{pmatrix}.$$

2.14. Определить, какие из представленных детерминированных последовательностей могут являться корреляционными функциями стационарных случайных последовательностей. Описать метод получения таких последовательностей:

a) $f[m] = \delta[m-1] + \delta[m+1];$

б) $f[m] = 3\delta[m] + 2\delta[m-1] + 2\delta[m+1];$

в) $f[m] = \exp(jm\pi/4);$

г) $f[m] = \begin{cases} 1, & |m| \leq N; \\ 0, & |m| > N; \end{cases}$

д) $f[m] = \begin{cases} 1 - |m|/N, & |m| \leq N; \\ 0, & |m| > N; \end{cases}$

e) $f[m] = a^{-m^2}, a > 0.$

2.15. На вход фильтра с импульсной характеристикой

$$h_k = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{4}\delta[k-2]$$

воздействует стационарная последовательность ξ_k с корреляционной функцией

$$b_\xi[m] = (1/2)^{|m|}.$$

Найти корреляционную функцию и дисперсию последовательности на выходе фильтра.

3. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В Главе 2 были рассмотрены основные принципы цифровой обработки сигналов преимущественно к детерминированным последовательностям. Однако, согласно общей концепции теории оптимальной фильтрации, наблюдаемые сигналы (непрерывные или дискретные) рассматриваются как отдельные реализации случайных процессов (последовательностей), задаваемых своими корреляционными функциями или энергетическими спектрами. В этой связи очевидной становится необходимость вычисления вероятностных характеристик случайных последовательностей, подвергаемых цифровой фильтрации, а также методов получения модельных случайных последовательностей, свойства которых “привязаны” к характеристикам порождающих их фильтров.

3.1. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА

Пусть стационарная дискретная последовательность ξ_k с математическим ожиданием m_ξ и корреляционной функцией $b_\xi[m]$ поступает на вход фильтра с импульсной характеристикой $h[m]$. Тогда выходная последовательность η_k определяется свёрткой

$$\eta_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_{k-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{k-n} h_n. \quad (3.1.1)$$

Соотношение (3.1.1) понимается в смысле реализаций, т. е. каждая реализация выходной последовательности есть свёртка реализации входной последовательности с импульсной характеристикой фильтра. Следовательно, от реализации к реализации на выходе фильтра будут появляться случайные значения. Математическое ожидание выходных значений равно

$$\mathbf{E}[\eta_k] = \mathbf{E}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{k-n} h_n\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[\xi_{k-n}] h_n =$$

$$= m_\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n = m_\xi H(0), \quad (3.1.2)$$

где $H(0)$ — значение передаточной характеристики (2.1.15) при нулевом аргументе. Таким образом, $\mathbf{E}[\eta_k]$ определяется средним значением выходной последовательности, а также “масштабирующим множителем” $H(0)$.

Найдём корреляционную функцию $b_\eta[m]$ выходной последовательности. Поскольку входная последовательность стационарна, а фильтр — линейный и инвариантный во времени, выходная последовательность также будет стационарной. Имеем:

$$\begin{aligned} b_\eta[k+m, k] &\equiv b_\eta[m] = \mathbf{E}[\eta_{k+m} \eta_k^*] = \mathbf{E}\left[\eta_{k+m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^* h_{k-n}^*\right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[\eta_{k+m} \xi_n^*] h_{k-n}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{\eta\xi}[k+m-n] h_{k-n}^*, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где $b_{\eta\xi}[m]$ — взаимная корреляционная функция между входной и выходной последовательностями, равная

$$\begin{aligned} b_{\eta\xi}[k+m, k] &\equiv b_{\eta\xi}[m] = \mathbf{E}[\eta_{k+m} \xi_k^*] = \mathbf{E}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \xi_{k+m-n} \xi_k^*\right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \mathbf{E}[\xi_{k+m-n} \xi_k^*] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n b_\xi[m-n]. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Для того, чтобы увидеть в явном виде, что корреляционная функция выходного сигнала зависит только от m , достаточно сделать замену в (3.1.4) индекса суммирования $i = k - n$:

$$b_\eta[m] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{\eta\xi}[i+m] h_i^*.$$

Это выражение имеет структуру обычной дискретной свёртки с той лишь разницей, что индекс m входит с обратным знаком. Поэтому $b_\eta[m]$ можно записать в следующем символическом виде¹:

$$b_\eta[m] = b_{\eta\xi}[m] * h_{-m}^*.$$

¹ В этом выражении два символа “звёздочка”: один из них обозначает операцию свёртки, а другой — знак комплексного сопряжения.

Теперь, комбинируя (3.1.3) и (3.1.4), получаем связь между корреляционными функциями входной и выходной последовательностями в виде “двойной свёртки”:

$$b_{\eta}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_n h_i^* b_{\xi}[n-i+m] = b_{\eta}[m] * h_m * h_{-m}^*. \quad (3.1.5)$$

Физическая трактовка выражения (3.1.5) достаточно прозрачна: дискретная последовательность в виде значений корреляционной функции $b_{\xi}[m]$ подаётся на дискретный фильтр с импульсной характеристикой h_k (рис. 3.1). На выходе фильтра образуются значения взаимной корреляционной функции $b_{\eta\xi}[m]$.

Далее значения $b_{\eta\xi}[m]$ поступают на вход второго, последовательно соединённого дискретного фильтра, импульсная характеристика которого есть h_{-k}^* . На выходе второго фильтра образуются значения корреляционной функции $b_{\eta}[m]$.

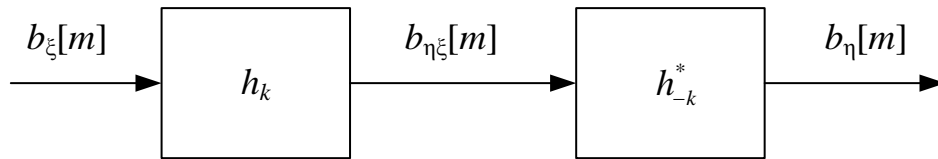


Рис. 3.1. Физическая трактовка корреляционных функций на входе и выходе фильтра

Соотношению (3.1.5) можно дать и другую трактовку. Определим функцию

$$r_h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k h_{k+m}^* = h_k * h_{-k}^*,$$

которая свободна от каких-либо вероятностных понятий. Тогда выходную корреляционную функцию можно трактовать как свёртку входной корреляционной функции с $r_h[m]$:

$$b_{\eta}[m] = b_{\xi}[m] * r_h[m]. \quad (3.1.6)$$

Рассматривая корреляционную функцию $b_{\eta}[m]$ в нуле, получаем выражение для дисперсии (точнее, среднего квадрата) случайной последовательности на выходе фильтра:

$$b_{\eta}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_n h_i^* b_{\xi}[n-i]. \quad (3.1.7)$$

В частности, когда импульсная характеристика имеет конечную длительность, соотношение (3.1.7) может быть записано в матричной форме:

$$b_{\eta}[0] = \mathbf{h}^H \mathbf{b}_{\xi} \mathbf{h}. \quad (3.1.7a)$$

Согласно свойствам ДВПФ, свёртке двух последовательностей соответствует произведение их ДВПФ. Тогда можно выписать соотношение, связывающее СПМ входной и выходной последовательностей:

$$P_{\eta}(\omega) = P_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2. \quad (3.1.8)$$

В z -области спектральное соотношение имеет вид

$$P_{\eta}(z) = P_{\xi}(z) H(z) H^*(1/z^*). \quad (3.1.8a)$$

В частности, если входной процесс вещественный, то $H(z) = H^*(z^*)$, и

$$P_{\eta}(z) = P_{\xi}(z) H(z) H(1/z). \quad (3.1.8b)$$

Если передаточная характеристика имеет полюс в точке $z = z_0$, то этот полюс, а также сопряжённый полюс $z = 1/z_0^*$ будут присутствовать в СПМ выходного сигнала. Аналогично, если передаточная характеристика имеет ноль в точке $z = z_1$, то этот ноль, а также сопряжённый ноль $z = 1/z_1^*$ будут присутствовать в СПМ выходного сигнала.

Выражения, аналогичные (3.1.8), можно получить и для взаимных спектров. Так, если $P_{\xi\eta}(z)$ — взаимная СПМ между входной и выходной последовательностями, то в z -области имеют место следующие соотношения (задание 3.1):

$$\begin{aligned} P_{\xi\eta}(z) &= P_{\xi}(z) H^*(1/z^*); \\ P_{\eta}(z) &= P_{\xi\eta}(z) H(z). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Если рассматриваются взаимная СПМ $P_{\zeta\xi}(z)$ между последовательностями ζ_k и ξ_k и взаимная СПМ $P_{\zeta\eta}(z)$ между последовательностями ζ_k и η_k , причём η_k является откликом фильтра с передаточной характеристикой $H(z)$ когда на его входе действует ξ_k , то

$$P_{\zeta\eta}(z) = P_{\zeta\xi}(z) H^*(1/z^*). \quad (3.1.10)$$

3.1.1. Белый шум на входе фильтра

Пусть, к примеру, белый шум с дисперсией σ^2 подаётся на фильтр первого порядка, передаточная характеристика которого есть

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,25z^{-1}}. \quad (3.1.11)$$

СПМ такого процесса имеет постоянное значение:

$$P_{\xi}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{\xi}[m] \exp(-jm\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma^2 \delta[m] \exp(-jm\omega) = \sigma^2.$$

Тогда СПМ на выходе фильтра

$$P_{\eta}(z) = \sigma^2 \frac{1}{1 - 0,25z^{-1}} \frac{1}{1 - 0,25z}.$$

Видно, что системная функция имеет пару комплексно-сопряжённых полюсов $z = 0,25$ и $z = 4,00$.

Корреляционная функция на выходе фильтра может быть найдена посредством обратного z -преобразования. Разложим $P_{\eta}(z)$ на простейшие дроби:

$$P_{\eta}(z) = \frac{16\sigma^2 / 15}{1 - 0,25z^{-1}} - \frac{16\sigma^2 / 15}{1 - 4z^{-1}}.$$

Тогда, используя пары взаимно-обратных z -преобразований, представленных в табл. 2.3, получаем:

$$b_{\eta}(m) = \frac{16\sigma^2}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^k u[k] + \frac{16\sigma^2}{15} 4^k u[-k - 1] = \frac{16\sigma^2}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}. \quad (3.1.12)$$

3.2. ФАКТОРИЗАЦИЯ СПЕКТРА. РЕГУЛЯРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

При нахождении оптимальной характеристики физически реализуемого фильтра непрерывных сигналов одной из ключевых операций являлась факторизация энергетического спектра, т. е. его представления в виде двух комплексно-сопряжённых множителей. Проведём аналогичную операцию для дискретных последовательностей.

Рассмотрим СПМ стационарной последовательности ξ_k , определяемую либо в виде ДВПФ $P_{\xi}(\omega)$, либо в виде z -преобразования $P_{\xi}(z)$. Будем

полагать, что функция $\ln P_\xi(z)$ является аналитической в некотором кольце $\rho < |z| < 1/\rho$, содержащем единичную окружность. Аналитичность функции означает, что все её производные непрерывны, а сама функция может быть разложена в ряд Лорана:

$$\ln P_\xi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad (3.2.1)$$

который одновременно является z -преобразованием для коэффициентов разложения c_k . Заметим, что набор коэффициентов $\{c_k\}$ является *кепстром* для корреляционной функции $b_\xi[m]$.

В спектральной области соотношение (3.2.1) имеет вид

$$\ln P_\xi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-jk\omega), \quad (3.2.2)$$

а коэффициенты c_k являются коэффициентами Фурье для периодической последовательности $\ln P_\xi(\omega)$ и, согласно (2.1.16), равны

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_\xi(\omega) \exp(jk\omega) d\omega.$$

Поскольку функция $P_\xi(\omega)$ вещественна, коэффициенты c_k обладают свойством сопряжённой симметричности:

$$c_{-k} = c_k^*,$$

причём

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_\xi(\omega) d\omega.$$

Используя разложение (3.2.1), представим $P_\xi(z)$ в следующем виде:

$$P_\xi(z) = \exp\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k}\right) = \exp(c_0) \exp\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^{-k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}\right).$$

Определим функцию

$$H(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}\right), \quad |z| > \rho.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$$

является аналитической функцией в указанной области $|z| > \rho$, её непрерывное преобразование (т. е. экспоненциальное отображение) также будет аналитической функцией в этой же области. Следовательно, $H(z)$ выражена в виде ряда

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k},$$

Представляющего собой z -преобразование для некоторой последовательности h_k , обладающей свойством причинности ($h_k = 0$ при $k < 0$).

Будем теперь трактовать $H(z)$ как передаточную характеристику некоторого реализуемого фильтра; тогда h_k — импульсная характеристика этого же фильтра. Поскольку $H(\infty) = 1$, необходимо, чтобы $h_0 = 1$, а так как и сама функция, и её логарифм аналитичны в области $|z| > \rho$, это означает, что все её полюсы и нули не могут находиться за пределами единичного круга; следовательно, такой фильтр является минимально-фазовым, он стабилен, и его системная функция имеет инверсию $1/H(z)$.

Используя сопряжённую симметричность коэффициентов c_k , запишем

$$\exp\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^{-k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^* z^k\right) = \exp\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k (1/z^*)^{-k}\right)^*\right] = H^*(1/z^*).$$

Теперь, обозначая

$$\sigma_0^2 = \exp(c_0) = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_{\xi}(\omega) d\omega\right],$$

можем записать выражение для СПМ в следующем виде:

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 H(z) H^*(1/z^*). \quad (3.2.3)$$

При этом для вещественных последовательностей

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 H(z) H(z^{-1}). \quad (3.2.3a)$$

Последовательность ξ_k , СПМ которой может быть записана в форме (3.2.3), называют *регулярной*. Перечислим основные свойства регулярных последовательностей.

- Любая регулярная последовательность может быть получена с выхода реализуемого фильтра с передаточной характеристикой $H(z)$, на вход которого поступает белый шум v_k с дисперсией σ_0^2 (рис. 3.2, а).

- Фильтр, инверсный к $H(z)$, т. е. передаточная характеристика которого равна $1/H(z)$, является *обеляющим*. Это означает, что если на вход такого фильтра подаётся последовательность со СПМ, определяемой соотношением (3.2.3), то на выходе фильтра окажется белый шум с дисперсией σ_0^2 (рис. 3.2, б).

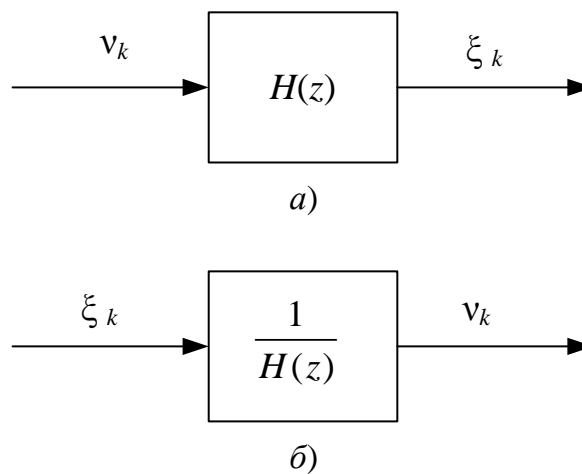


Рис. 3.2. Фильтрация случайных последовательностей: получение (а) и обеливание (б) регулярной последовательности

Видно, что ξ_k и v_k связаны взаимно-обратными преобразованиями, т. е. каждая из последовательностей может быть получена из другой. В этом смысле они содержат одинаковую информацию.

В случае, когда СПМ представляет собой рациональную функцию, т. е.

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 \frac{D(z)}{G(z)},$$

факторизация может быть представлена в следующем виде:

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 \left[\frac{B(z)}{A(z)} \right] \left[\frac{B^*(1/z^*)}{A^*(1/z^*)} \right], \quad (3.2.4)$$

где $A(z)$ и $B(z)$ — нормированные¹ полиномы относительно z^{-1} :

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p},$$

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q},$$

все корни которых находятся за пределами единичной окружности. При этом каждый ноль (полюс) встречается только в виде комплексно-сопряжённой пары.

В выражении (3.2.4) отношение двух полиномов $B(z)$ и $A(z)$ определяет конкретный вид передаточной характеристики фильтра, на выходе которого формируется регулярная последовательность, так что, задавая различные коэффициенты полиномов $A(z)$ и $B(z)$, можно получить регулярные последовательности с заданными корреляционными (энергетическими) свойствами.

Рассмотрим факторизацию спектра для некоторых модельных регулярных последовательностей, являющихся вполне корректной аппроксимацией многих встречающихся на практике детерминированных и случайных процессов.

3.2.1. Авторегрессионная последовательность

Пусть на вход фильтра, передаточная характеристика которого имеет вид полюсного фильтра

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}, \quad (3.2.5)$$

поступает белый шум v_k с дисперсией σ_0^2 . Стационарная последовательность ξ_k на выходе фильтра (3.2.5) называется *авторегрессионной последовательностью P -го порядка* и обозначается символами $AR(P)$ (от англ. autoregressive process). СПМ такой последовательности, согласно (3.2.3), равна в z -области

$$P_\xi(z) = \sigma_0^2 \frac{|b_0|^2}{A_p(z)A_p^*(1/z^*)} \quad (3.2.6)$$

¹ Полином называется нормированным, если коэффициент при нулевой степени равен единице.

или, в спектральной области,

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 \frac{|b_0|^2}{|A_P(\omega)|^2}.$$

Видно, что СПМ $AR(P)$ -последовательность имеет $2P$ полюсов и не имеет нулей (за исключением особого случая $z = 0$).

Вспомним, что для линейных инвариантных к сдвигу цепей входная и выходная последовательности связаны между собой разностным уравнением вида (2.1.10). В данном случае

$$\xi_k + \sum_{n=1}^P a_n \xi_{k-n} = b_0 v_k. \quad (3.2.6)$$

Умножим обе части этого уравнения на ξ_{k-m}^* и усредним его по всем реализациям, т. е. возьмём от его обеих частей математическое ожидание:

$$\mathbf{E}[\xi_k \xi_{k-m}^*] + \sum_{n=1}^P a_n \mathbf{E}[\xi_{k-n} \xi_{k-m}^*] = b_0 \mathbf{E}[v_k \xi_{k-m}^*].$$

В левой части равенства образуются автокорреляционные, а в правой — взаимные корреляционные функции:

$$b_{\xi}[m] + \sum_{n=1}^P a_n b_{\xi}[m-n] = b_0 b_{v\xi}[m].$$

Выразим взаимную корреляционную функцию $b_{v\xi}[m]$ через параметры фильтра, предполагая его реализуемость и устойчивость. Используя соотношение

$$\xi_k = v_k * h_k = \sum_{i=0}^{\infty} h_i v_{k-i},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} b_{v\xi}[m] &= \mathbf{E}[v_k \xi_{k-m}^*] = \mathbf{E}\left[v_k \left(h_0^* v_{k-m}^* + \sum_{i=1}^{\infty} h_i^* v_{k-m-i}^* \right)\right] = \\ &= h_0^* \mathbf{E}[v_k v_{k-m}^*] + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[v_k v_{k-m-i}^*] h_i^* = h_0^* b_v[m] + \sum_{i=1}^{\infty} b_v[m+i] h_i^*, \end{aligned}$$

где h_0 представляет собой не что иное, как числитель передаточной характеристики b_0 .

Поскольку последовательность v_k является белым шумом,

$$b_v[m+i] = \sigma_0^2 \delta[m+i].$$

Очевидно, что при $m > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_v[m+i] h_i^* = 0,$$

отсюда

$$b_{v\xi}[m] = \sigma_0^2 \begin{cases} 0, & m > 0; \\ h_0^*, & m = 0; \\ h_{-m}^* & m < 0; \end{cases} \quad (3.2.7)$$

и

$$b_\xi[m] + \sum_{n=1}^P a_n b_\xi[m-n] = b_0 \sigma_0^2 \begin{cases} 0, & m > 0; \\ b_0^*, & m = 0; \\ h_{-m}^* & m < 0; \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Выпишем из этого множества соотношений те, для которых индекс временного сдвига m находится в диапазоне $0 \leq m \leq P$:

$$b_\xi[0] + a_1 b_\xi[-1] + a_2 b_\xi[-2] + \dots + a_p b_\xi[-P] = \sigma_0^2 |b_0|^2;$$

$$b_\xi[1] + a_1 b_\xi[0] + a_2 b_\xi[-1] + \dots + a_p b_\xi[-P+1] = 0;$$

...

$$b_\xi[P] + a_1 b_\xi[P-1] + a_2 b_\xi[P-2] + \dots + a_p b_\xi[0] = 0.$$

С учётом свойства сопряжённой симметричности $b_\xi[-m] = b_\xi^*[m]$ запишем их в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & b_\xi^*[2] & \dots & b_\xi^*[P] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \dots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[2] & b_\xi[1] & b_\xi[0] & \dots & b_\xi^*[P-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_\xi[P] & b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & \dots & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b_0|^2 \sigma_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

Соотношения (3.2.9), позволяющие определить параметры формирующего фильтра по заданной дисперсии входного белого шума и корреля-

ционной функции желаемого вида, называются *уравнениями Юла–Уолкера* (Yule-Walker equations) для AR-последовательности.

Решение уравнений (3.2.9) позволяет получить значения параметров фильтра по заданным значениям корреляционной функции. Подобным образом можно решить и обратную задачу¹: получения значений корреляционной функции при заданных коэффициентах фильтра. При этом из системы вначале получаются значения $b_\xi[0], \dots, b_\xi[P]$, а последующие значения $b_\xi[m], m > 0$, могут быть найдены рекурсивно.

Простейшим случаем AR-последовательности является вещественная последовательность первого порядка AR(1), для которой передаточная характеристика имеет вид простейшей дроби:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

Система Юла-Уолкера для AR(1)-последовательности состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned} b_\xi[0] + a_1 b_\xi[1] &= \sigma_0^2 b_0^2; \\ b_\xi[1] + a_1 b_\xi[0] &= 0, \end{aligned}$$

решение которых есть

$$a_1 = -\frac{b_\xi[1]}{b_\xi[0]}, \quad b_0^2 = \frac{b_\xi^2[0] - b_\xi^2[1]}{\sigma_0^2 b_\xi[0]}.$$

Подставив эти значения в (3.2.5), получим выражение для передаточной характеристики фильтра, порождающего на своём выходе AR(1)-последовательность, когда на входе действует белый шум с дисперсией σ_0^2 :

$$H(z) = \sigma_0 \frac{\sqrt{b_\xi[0](b_\xi^2[0] - b_\xi^2[1])}}{b_\xi[0] - b_\xi[1]z^{-1}}. \quad (3.2.10)$$

Найдём значения корреляционной функции при заданных коэффициентах фильтра, решая систему (в матричном виде)

¹ Исходя из сложившейся терминологии обратной, скорее, следует называть задачу вычисления коэффициентов фильтра по заданной корреляционной функции, а прямой — вычисление корреляционной функции на выходе заданного фильтра.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\xi[0] \\ b_\xi[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

относительно $b_\xi[0]$ и $b_\xi[1]$. Имеем

$$b_\xi[0] = \frac{b_0^2}{1-a_1^2}, \quad b_\xi[1] = -a_1 \frac{b_0^2}{1-a_1^2}.$$

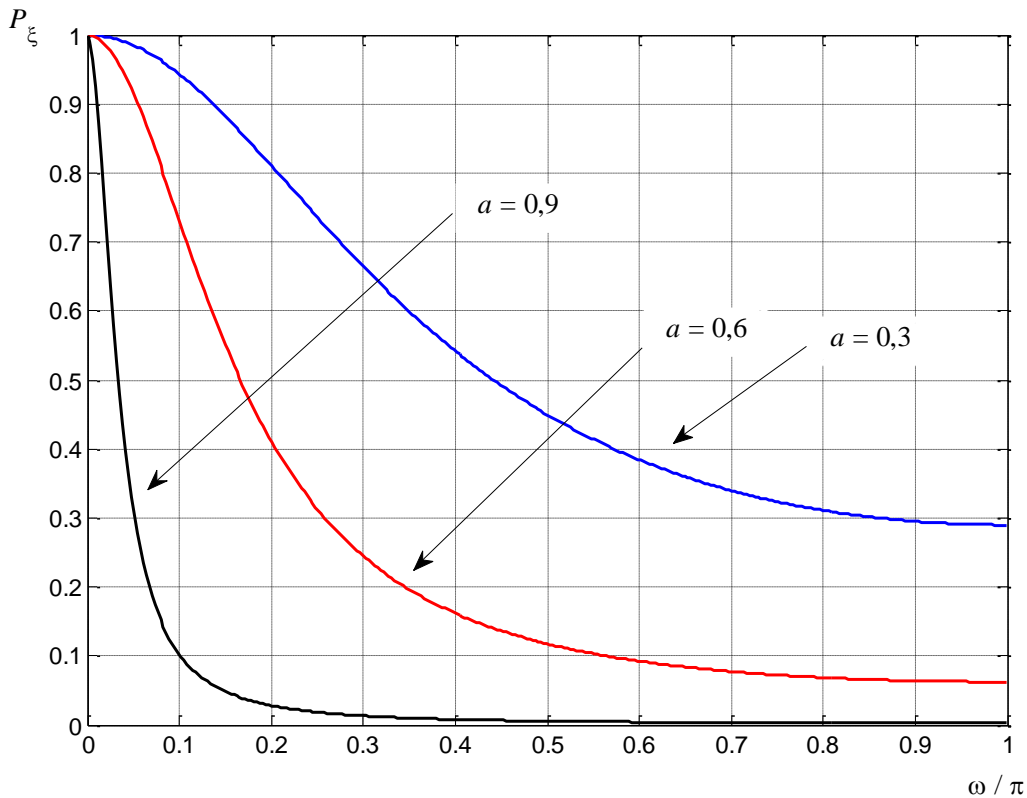
Теперь, из первого уравнения получаем простую рекурсию

$$b_\xi[m] = -a_1 b_\xi[m-1],$$

которая при найденных начальных условиях даёт следующие значения корреляционной функции:

$$b_\xi[m] = \frac{b_0^2}{1-a_1^2} (-a_1)^{|k|}. \quad (3.2.11)$$

Таким образом, AR(1)-последовательность имеет показательную корреляционную функцию.



a)

Рис. 3.3. Спектральная плотность мощности AR(1)-последовательности при $a_1 > 0$ (a) и $a_1 < 0$ (б)

Найдём СПМ AR(1)-последовательности. Из (3.2.6) имеем:

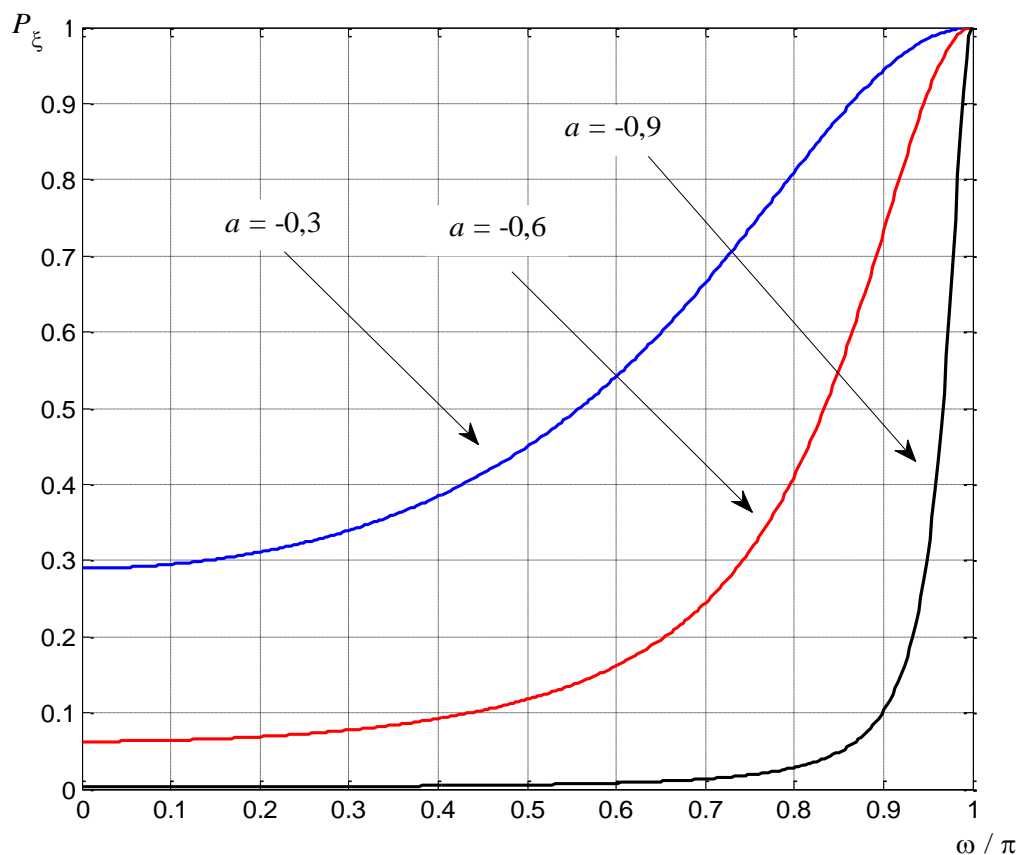
$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 \frac{b_0^2}{(1 - a_1 z^{-1})(1 - a_1 z)} = \sigma_0^2 \frac{b_0^2}{1 + a_1^2 - a_1(z + z^{-1})} \quad (3.2.12a)$$

в z -области и

$$\begin{aligned} P_{\xi}(\omega) &= \sigma_0^2 \frac{b_0^2}{(1 - a_1 \exp(-j\omega))(1 - a_1 \exp(j\omega))} = \\ &= \sigma_0^2 \frac{b_0^2}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega} \end{aligned} \quad (3.2.12b)$$

в спектральной области.

На рис. 3.3 показан вид нормированной СПМ AR(1)-последовательности при различных значениях a_1 .



б)

Рис. 3.3. Продолжение

При положительных значениях a_1 СПМ концентрируется вблизи нижних частот, так что AR(1)-последовательность можно назвать низкочастотной; при отрицательных a_1 СПМ концентрируется вблизи верхних частот, и такую AR(1)-последовательность можно назвать высокочастотной.

AR(2)-последовательность генерируется фильтром второго порядка, передаточная функция которого содержит два комплексно-сопряжённых полюса:

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha^* z^{-1})}.$$

Следовательно, СПМ такой последовательности есть

$$P_\xi(\omega) = \sigma_0^2 \frac{b_0^2}{\left| (1 - \alpha \exp(-j\omega))(1 - \alpha^* \exp(j\omega)) \right|^2}.$$

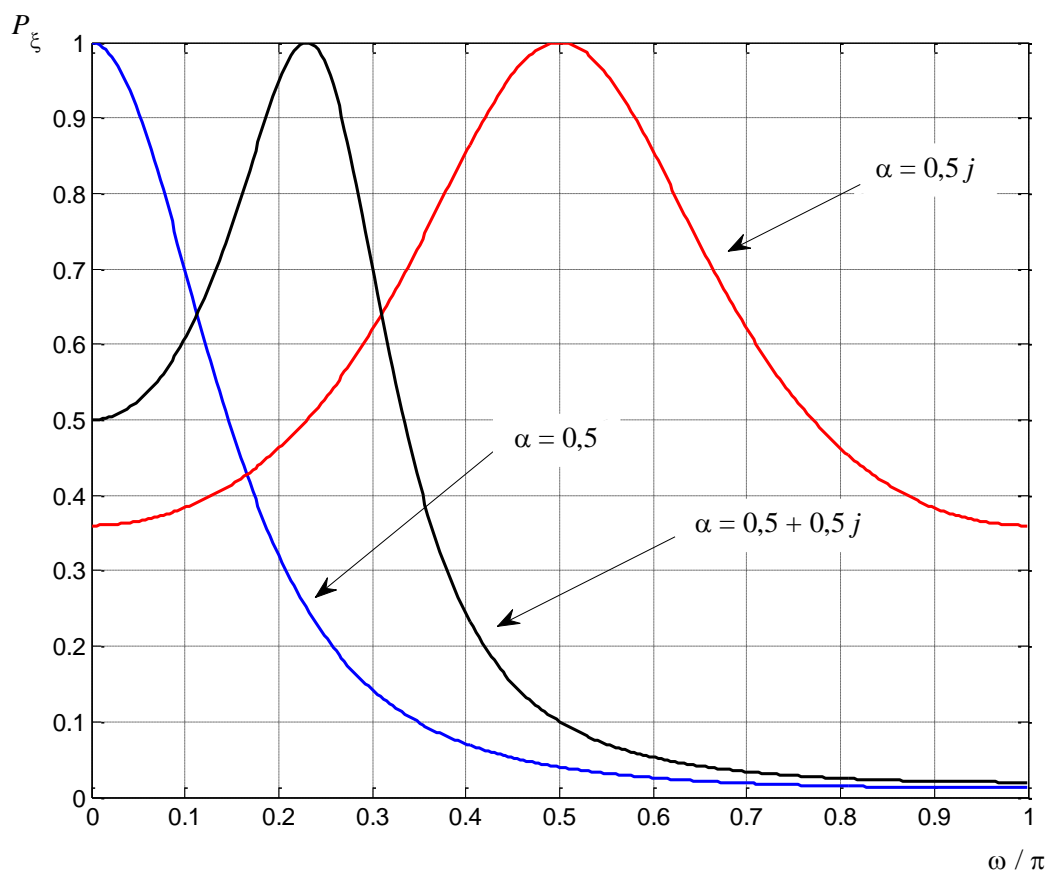


Рис. 3.4. Спектральная плотность мощности AR(4)-последовательности

На рис. 3.4 представлен вид нормированной СПМ AR(2)-последовательности для трёх наборов полюсов:

$$\alpha = \alpha^* = 0,5;$$

$$\alpha = 0,5j, \alpha^* = -0,5j;$$

$$\alpha = 0,5 + 0,5j, \alpha^* = 0,5 - 0,5j.$$

3.2.2. Последовательность авторегрессии — скользящего среднего

Обобщением модели AR(P) является модель авторегрессии – скользящего среднего порядков P и Q , обозначается ARMA(P, Q) (от англ. autoregressive moving average process). Эта модель характеризуется тем, что в числителе передаточной характеристики находится не константа b_0 , а полный полином $B(z)$ порядка Q :

$$H(z) = \frac{B_Q(z)}{A_P(z)} = \frac{\sum_{k=1}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}, \quad (3.2.12)$$

так что $H(z)$ имеет $2P$ полюсов и $2Q$ нулей.

Спектральная плотность мощности ARMA(P, Q)-последовательности равна

$$P_\xi(z) = \sigma_0^2 \frac{B_Q(z)B_Q^*(1/z^*)}{A_P(z)A_P^*(1/z^*)}$$

в z -области или

$$P_\xi(\omega) = \sigma_0^2 \frac{|B_Q(\omega)|^2}{|A_P(\omega)|^2}$$

в спектральной области.

Как и в предыдущем примере, найдём соотношения, которыми определяются отсчётные значения корреляционной функции.

Входная и выходная последовательности связаны разностным уравнением

$$\xi_k + \sum_{n=1}^P a_n \xi_{k-n} = \sum_{n=0}^Q b_n v_{k-n}, \quad (3.2.13)$$

в котором, в отличие от (3.2.6), правая часть содержит сумму слагаемых.

Умножая обе части на ξ_{k-m}^* и усредняя, получаем:

$$b_\xi[m] + \sum_{n=1}^P a_n b_\xi[m-n] = \sum_{n=0}^Q b_n b_{v\xi}[m-n].$$

Вновь попытаемся выразить взаимно-корреляционную функцию через параметры фильтра. Аналогично тому, как это делалось для AR(P)-последовательности, имеем:

$$\begin{aligned} b_{v\xi}[m-n] &= \mathbf{E} [v_{k-n} \xi_{k-m}^*] = \\ &= \mathbf{E} \left[v_{k-n} \sum_{i=0}^{\infty} h_i^* v_{k-m-i}^* \right] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i^* \mathbf{E} [v_{k-n} v_{k-m-i}^*] = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} h_i^* b_v[m+i-n] = \begin{cases} 0, & m > n \\ \sigma_0^2 h_{n-m}^*, & m \leq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

В этом выражении условие $m > n$ (временной индекс больше индекса суммирования) должно трактоваться как $m > Q$ (временной индекс больше максимального индекса суммирования); условие $m \leq n$ — как $0 \leq m \leq Q$, поскольку именно в этом диапазоне лежат значения n . Для отрицательных m , как и в случае AR(P)-последовательности, значения корреляционной функции могут быть получены, исходя из свойства сопряжённой симметричности. С учётом этих пояснений имеем

$$b_\xi[m] + \sum_{n=1}^P a_n b_\xi[m-n] = \begin{cases} 0, & m > Q; \\ \sigma_0^2 \sum_{n=0}^Q b_n h_{n-m}^*, & 0 \leq m \leq Q. \end{cases}$$

Поскольку фильтр предполагается реализуемым,

$$h_{n-m}^* = 0 \text{ при } n < m,$$

Тогда получаем следующее семейство соотношений:

$$b_\xi[m] + \sum_{n=1}^P a_n b_\xi[m-n] = \begin{cases} 0, & m > Q; \\ \sigma_0^2 \sum_{n=m}^Q b_n h_{n-m}^*, & 0 \leq m \leq Q. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Выберем соотношения, отвечающие значениям $m = 0, \dots, Q + P$:

$$\begin{aligned} b_\xi[0] + a_1 b_\xi[-1] + \dots + a_p b_\xi[-P] &= \sigma_0^2 (b_0 h_0^* + b_1 h_1^* + \dots + b_Q h_Q^*); \\ b_\xi[1] + a_1 b_\xi[0] + \dots + a_p b_\xi[-P+1] &= \sigma_0^2 (b_1 h_0^* + b_2 h_1^* + \dots + b_Q h_{Q-1}^*); \\ &\dots \\ b_\xi[Q] + a_1 b_\xi[Q-1] + \dots + a_p b_\xi[Q-P] &= \sigma_0^2 b_Q h_0^*; \\ b_\xi[Q+1] + a_1 b_\xi[Q] + \dots + a_p b_\xi[Q+1-P] &= 0; \\ &\dots \\ b_\xi[Q+P] + a_1 b_\xi[Q+P-1] + \dots + a_p b_\xi[Q] &= 0, \end{aligned}$$

которые можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi[-1] & b_\xi[-2] & \dots & b_\xi[-P] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi[-1] & \dots & b_\xi[-P+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_\xi[Q] & b_\xi[Q-1] & b_\xi[Q-2] & \dots & b_\xi[Q-P] \\ b_\xi[Q+1] & b_\xi[Q] & b_\xi[Q-1] & \dots & b_\xi[Q+1-P] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_\xi[Q+P] & b_\xi[Q+P-1] & b_\xi[Q+P-2] & \dots & b_\xi[Q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} b_0 h_0^* + \dots + b_Q h_Q^* \\ b_1 h_0^* + \dots + b_Q h_{Q-1}^* \\ \dots \\ b_Q h_0^* \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Соотношения (3.2.16) представляют *систему уравнений Юла–Уолкера для ARMA(P, Q)-последовательности*. Коэффициенты h_k выражаются через параметры фильтра a_1, \dots, a_p и b_1, \dots, b_Q , которые затем находятся из системы Юла–Уолкера.

Как и в случае AR-последовательности, система позволяет находить как параметры фильтра при заданных значениях корреляционной матрицы, так и, наоборот — значения корреляционной матрицы при заданных параметрах фильтра (сначала $Q + P + 1$ первых значений, а затем по рекурсии — все остальные). Однако отметим, что, в отличие от (3.2.9), система (3.2.16) оказывается нелинейной относительно коэффициентов фильтра, и это существенно повышает сложность решения.

3.2.3. Последовательность скользящего среднего

Частным случаем¹ ARMA(P, Q)-последовательности, когда $P = 0$, является *последовательность скользящего среднего порядка Q* , которая обычно обозначается как MA(Q) (от англ. moving average).

Для MA(Q)-последовательности системная функция порождающего фильтра имеет вид

$$H(z) = B_Q(z) = \sum_{k=1}^Q b_k z^{-k}, \quad (3.2.17)$$

т. е. не имеет полюсов (исключая специальный случай $z = 0$) и имеет $2Q$ нулей.

Спектральная плотность мощности MA(Q)-последовательности равна

$$P_\xi(z) = \sigma_0^2 B_Q(z) B_Q^*(1/z^*)$$

в z -области или

$$P_\xi(\omega) = \sigma_0^2 |B_Q(\omega)|^2$$

в спектральной области, где σ_0^2 — дисперсия белого шума, поступающего на вход формирующего фильтра.

Заметим, что из (3.2.17) следует, что коэффициенты b_k одновременно являются коэффициентами в z -представлении импульсной характеристики, т. е.

$$h_k = b_k.$$

Уравнения Юла–Уолкера для MA(Q)-последовательности могут быть получены из (3.2.16), если в них положить $a_1 = \dots = a_P = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} b_\xi[0] &= \sigma_0^2 (b_0 b_0^* + \dots + b_Q b_Q^*); \\ b_\xi[1] &= \sigma_0^2 (b_1 b_0^* + \dots + b_Q b_{Q-1}^*); \quad 0 \leq m \leq Q, \\ &\dots \\ b_\xi[Q] &= \sigma_0^2 b_Q h_Q^*; \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

и

$$b_\xi[m] = 0, \quad m > Q.$$

¹ Исходя из определений рассматриваемых типов регулярных последовательностей, наиболее общей является ARMA-последовательность, а AR- и MA-последовательности получаются как её частные случаи.

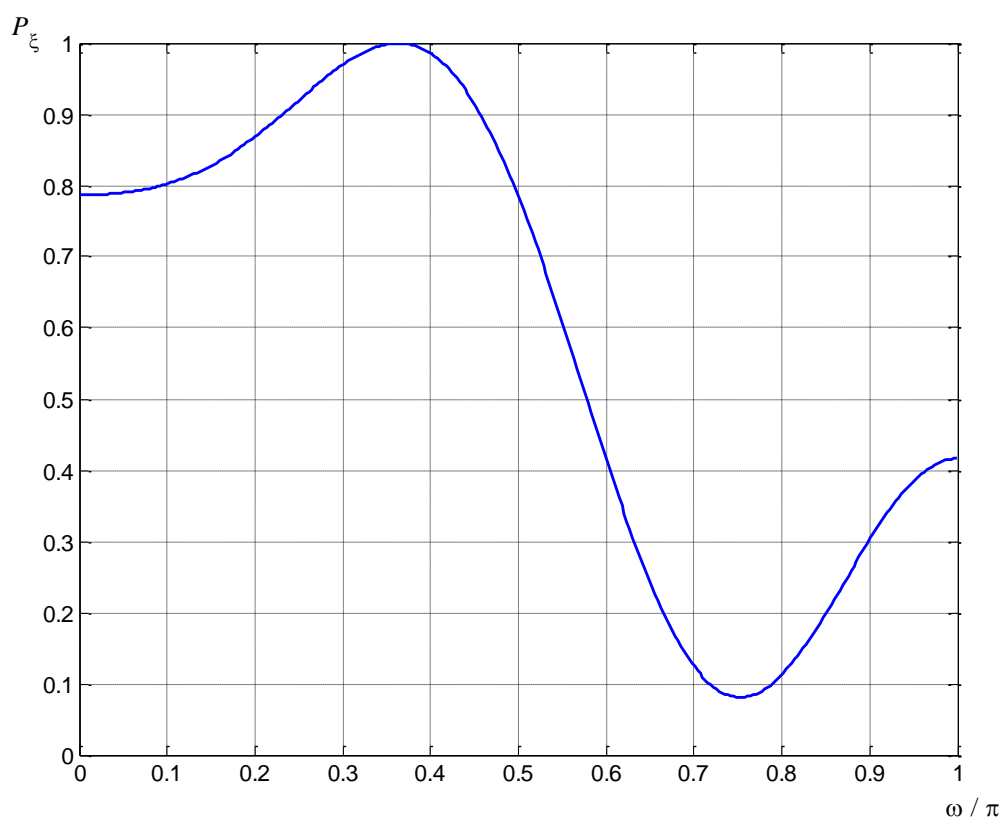


Рис. 3.5. Спектральная плотность мощности MA(4)-последовательности

К примеру, на рис. 3.5 представлена спектральная плотность мощности MA(4)-последовательности, порождаемой фильтром, системная функция которого имеет две пары комплексно-сопряжённых нулей: $0,8\exp(\pm j\pi/6)$ и $0,8\exp(\pm j3\pi/4)$. Корреляционная функция такой последовательности равна нулю при $|m| > 4$.

3.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ЗАДААННЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В разд. 3.2 были изучены основные модели регулярных случайных последовательностей. Коэффициенты фильтров для таких последовательностей определяются, исходя из решения соответствующих систем уравнений Юла–Уолкера. Для наиболее общей модели ARMA-последовательности уравнения Юла–Уолкера оказываются нелинейными, и их реше-

ния для автоковариационной матрицы достаточно большой размерности может привести к существенным трудностям.

Рассмотрим более подробно методику стохастического моделирования, т. е. получения системных характеристик фильтров при заданных значениях корреляционных функций регулярных последовательностей.

3.3.1. Моделирование последовательности авторегрессии — скользящего среднего

Как было указано в разд. 3.2.2, ARMA-последовательность получается с выхода фильтра с характеристикой

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^P a_k z^{-k}},$$

когда на его вход подаётся последовательность v_k в виде белого шума. Для определённости будем считать, что дисперсия v_k равна единице. Тогда для коэффициентов a_k и b_k оказывается справедливой система уравнений Юла–Уолкера (3.2.15). Если выбрать значения $m = 0, \dots, Q + P$, то возникает система (3.2.16), которая, как уже было сказано, оказывается нелинейной, что существенно повышает сложность решения.

Изменим методику отыскания коэффициентов фильтра, отказываясь от решения сразу всей системы и разбивая её на две части с отдельным решением каждой из частей — аналогично тому, как это делалось при моделировании детерминированных последовательностей.

Положим в системе (3.2.15) значения индексов $m = Q + 1, Q + 2, \dots, Q + P$. Тогда, с учётом единичной дисперсии возбуждающей последовательности, получим следующую систему модифицированных уравнений Юла–Уолкера для ARMA-последовательности:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[Q] & b_\xi[Q-1] & \cdots & b_\xi[Q-P+1] \\ b_\xi[Q+1] & b_\xi[Q] & \cdots & b_\xi[Q-P+2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[Q-P+1] & b_\xi[Q-P-2] & \cdots & b_\xi[Q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_\xi[Q+1] \\ b_\xi[Q+2] \\ \cdots \\ b_\xi[Q+P] \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

которые оказываются линейными относительно неизвестных коэффициентов a_k .

Дополнительным преимуществом (3.3.1) является то, что в качестве корреляционной функции (например, когда она неизвестна) можно использовать её статистическую оценку.

В матричной форме уравнения (3.3.1) имеют вид

$$\mathbf{b}_{\xi Q} \mathbf{a}_P = -\mathbf{b}_{\xi Q+1}, \quad (3.3.1a)$$

где P -элементный вектор неизвестных коэффициентов

$$\mathbf{a}_P = (a_1, a_2, \dots, a_P)^T;$$

тёплицева автокорреляционная матрица размерности $P \times P$

$$\mathbf{b}_{\xi Q} = \begin{pmatrix} b_{\xi}[Q] & b_{\xi}[Q-1] & \dots & b_{\xi}[Q-P+1] \\ b_{\xi}[Q+1] & b_{\xi}[Q] & \dots & b_{\xi}[Q-P+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\xi}[Q-P+1] & b_{\xi}[Q-P-2] & \dots & b_{\xi}[Q] \end{pmatrix}$$

и стоящий в правой части P -элементный вектор значений автокорреляционной функции

$$\mathbf{b}_{\xi Q+1} = (b_{\xi}[q+1], b_{\xi}[q+2], \dots, b_{\xi}[q+P])^T.$$

Значение Q в нижнем индексе необходимо для указания на то, с какого отсчётного значения формируется автокорреляционная матрица.

Если матрица $\mathbf{b}_{\xi Q}$ невырождена, то существует обратная матрица $\mathbf{b}_{\xi Q}^{-1}$.

Тогда, умножая уравнение (3.3.1) на $\mathbf{b}_{\xi Q}^{-1}$ слева, получаем решение в виде

$$\mathbf{a}_P = -\mathbf{b}_{\xi Q}^{-1} \mathbf{b}_{\xi Q+1}. \quad (3.3.2)$$

Сравнивая систему модифицированных уравнений Юла-Уолкера (3.3.1) для ARMA-последовательности с системой уравнений (3.2.6) отыскания коэффициентов \mathbf{a}_P по методу Падэ, можно убедиться в их идентичности. Разница лишь в том, что в методе Падэ фигурирует матрица \mathbf{X}_Q , содержащая значения детерминированной последовательности, а в системе (3.3.1) — автокорреляционная матрица $\mathbf{b}_{\xi Q}$.

Следующим шагом, после того, как найдены коэффициенты a_1, \dots, a_P , является нахождение коэффициентов b_0, \dots, b_Q .

Вновь обратимся к уравнениям Юла-Уолкера (3.2.15), в которых положим $t = 0, 1, \dots, Q$. Тогда получим систему

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi[2] & \cdots & b_\xi[-P] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi[-P+1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[Q] & b_\xi[Q-1] & \cdots & b_\xi[Q-P] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 h_0^* + \cdots + b_Q h_Q^* \\ b_1 h_0^* + \cdots + b_Q h_{Q-1}^* \\ \cdots \\ b_Q h_0^* \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{b}_{\xi Q} \mathbf{a}_P = \mathbf{c}_Q, \quad (3.3.3a)$$

где

$$\mathbf{c}_Q = (b_0 h_0^* + \cdots + b_Q h_Q^*, b_1 h_0^* + \cdots + b_Q h_{Q-1}^*, \dots, b_Q h_0^*)^T,$$

причём каждая компонента вектора \mathbf{c}_Q представляет собой свёртку набора коэффициентов b_0, \dots, b_Q и сопряжённой импульсной характеристики h_{-m}^* :

$$c_m = \sum_{n=m}^Q b_n h_{n-m}^* = \sum_{i=0}^{Q-m} b_{i+m} h_i^* \equiv b_m * h_{-m}^*, \quad m = 0, \dots, Q.$$

Расширим последовательность c_k до бесконечного числа членов, добавив $c_m = 0$ при $m > Q$. Члены с отрицательными индексами будем считать произвольными, поскольку, как будет показано далее, их значения не влияют на окончательный результат.

Пусть $C(z)$ — z -преобразование последовательности c_k :

$$C(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^{-m}.$$

В этой последовательности присутствуют коэффициенты как с неотрицательными индексами, фигурирующими в системе (3.3.3) (их число конечно, ибо $c_m = 0$ при $m > Q$), так и с отрицательными индексами (в системе (3.3.3) не присутствуют).

Следуя принятым обозначениям, обозначим через $[C(z)]_+$ “реализуемую” часть z -преобразования, содержащую слагаемые с неотрицательными индексами или, что эквивалентно, с неположительными степенями z :

$$[C(z)]_+ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

Аналогично, обозначим через $[C(z)]_-$ “нереализуемую” часть z -преобразования, содержащую слагаемые с отрицательными индексами или (с положительными степенями z):

$$[C(z)]_- = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m z^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^k.$$

Поскольку последовательность c_m является свёрткой набора коэффициентов b_0, \dots, b_Q с сопряжённой импульсной характеристикой h_{-m}^* , в z -области справедливо соотношение

$$C(z) = B_Q(z)H^*(1/z^*) = B_Q(z) \frac{B_Q^*(1/z^*)}{A_P^*(1/z^*)},$$

или, умножая обе части на $A_P^*(1/z^*)$,

$$C(z)A_P^*(1/z^*) = B_Q(z)B_Q^*(1/z^*). \quad (3.3.4)$$

Используем тот факт, что если ξ_k является ARMA(P, Q)-последовательностью со спектральной плотностью мощности

$$C(z) = B_Q(z)H^*(1/z^*),$$

то посредством фильтрации ξ_k фильтром с характеристикой $A_P(z)$ образуется выходная MA(Q)-последовательность η_k , СПМ которой есть

$$P_\eta(z) = B_Q(z)B_Q^*(1/z^*). \quad (3.3.5)$$

Таким образом, если найти СПМ выходной последовательности и затем привести её к факторизованному виду, то можно будет сразу выписать функцию $B_Q(z)$, являющуюся числителем передаточной характеристики.

Рассмотрим методику факторизации СПМ.

Основная проблема заключается в том, что в соотношениях (3.3.4)–(3.3.5) фигурируют коэффициенты c_{-k} , не входящие в систему (3.3.3). Следовательно, приходится оперировать только с “реализуемыми” составляющими z -преобразований, получая решение только для неотрицательных степеней, а затем, используя свойство сопряжённой симметричности

Функция $A_P^*(1/z^*)$ как z -преобразование содержит только слагаемые с неотрицательными индексами:

$$A_P^*(1/z^*) = \sum_{k=0}^P a_k^* (z^*)^k.$$

Это говорит о том, что $A_P^*(1/z^*)$ совпадает со своей “реализуемой” составляющей:

$$A_P^*(1/z^*) = [A_P^*(1/z^*)]_+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{\eta}(z) &= ([C(z)]_{-} + [C(z)]_{+}) A_p^*(1/z^*) = \\ &= [C(z)]_{-} A_p^*(1/z^*) + [C(z)]_{+} A_p^*(1/z^*). \end{aligned}$$

В первом слагаемом заведомо присутствуют слагаемые с положительными степенями, так что “реализуемая” составляющая СПМ $[P_{\eta}(z)]_{+}$ может находиться только во втором слагаемом:

$$[P_{\eta}(z)]_{+} = [[C(z)]_{+} A_p^*(1/z^*)]_{+}. \quad (3.3.6)$$

Таким образом, из (3.3.6) получаем составляющие СПМ с неотрицательными степенями z , а затем, используя свойство сопряжённой симметричности, дополняем составляющими с положительными степенями z .

Рассмотрим пример. Требуется получить ARMA(1, 1)-последовательность, являющуюся стохастической моделью вещественной последовательности ξ_k , для которой начальные значения корреляционной функции равны

$$b_{\xi}(0) = 26,0; b_{\xi}(1) = 7,0; b_{\xi}(2) = 3,5.$$

Система уравнений Юла-Уолкера для ковариационной матрицы размерностью 3×2 ($P + Q + 1 = 3, P + 1 = 2$) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} b_{\xi}[0] & b_{\xi}[1] \\ b_{\xi}[1] & b_{\xi}[0] \\ b_{\xi}[2] & b_{\xi}[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем одно модифицированное уравнение:

$$b_{\xi}[2] + a_1 b_{\xi}[1] = 0,$$

решение которого есть

$$a_1 = -\frac{b_{\xi}[2]}{b_{\xi}[1]} = -\frac{3,5}{7,0} = -0,5.$$

Таким образом, знаменатель передаточной характеристики есть

$$A_1(z) = 1 - 0,5z^{-1}.$$

Далее, вычисляем коэффициенты для соответствующей MA(1)-последовательности из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} b_{\xi}[0] & b_{\xi}[1] \\ b_{\xi}[1] & b_{\xi}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Подставив числовые значения:

$$\begin{pmatrix} 26,0 & 7,0 \\ 7,0 & 26,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

получим

$$c_0 = 22,5; c_1 = -6,0.$$

“Реализуемая” часть z -преобразования

$$[C(z)]_+ = c_0 + c_1 z^{-1} = 22,5 - 6,0 z^{-1}.$$

Тогда

$$[C(z)]_+ A_1^*(1/z^*) = (22,5 - 6z^{-1})(1 - 0,5z) = 25,5 - 6,0z^{-1} + 11,25z.$$

В этой сумме первые два слагаемые соответствуют “реализуемой части”, а третье — “нереализуемой” части, так что

$$[P_\eta(z)]_+ = [[C(z)]_+ A_1^*(1/z^*)]_+ = 25,5 - 6,0z^{-1}.$$

Исходя из свойства сопряжённой симметричности, слагаемому $-6,0z^{-1}$ в “нереализуемой” области соответствует слагаемое $-6,0z$. Таким образом, полная СПМ есть

$$P_\eta(z) = -6,0z + 25,5 - 6,0z^{-1} = B_1(z)B_1^*(1/z^*).$$

Осталось выполнить факторизацию спектра. Имеем:

$$\begin{aligned} -6,0z + 25,5 - 6,0z^{-1} &= -6,0z^1 \left(z^{-2} - \frac{25,5}{6,0} z^{-1} + 1 \right) = \\ &= -6,0z(z^{-1} - 4,00)(z^{-1} - 0,25) = 2\sqrt{6}(1 - 0,25z^{-1})2\sqrt{6}(1 - 0,25z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_1(z) = 2\sqrt{6}(1 - 0,25z^{-1}).$$

Окончательно имеем передаточную характеристику фильтра, моделирующего ARMA(1, 1)-последовательность:

$$H(z) = 2\sqrt{6} \frac{1 - 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

3.3.2. Моделирование авторегрессионной последовательности

Как было указано в разд. 3.2, авторегрессионную последовательность (AR) можно рассматривать как частный случай последовательности авторегрессии — скользящего среднего (ARMA), когда в числитель передаточной характеристики представляет собой константу:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=0}^P a_k z^{-k}},$$

а уравнения (3.2.9) для определения коэффициентов получаются из уравнений (3.2.16), путём подстановки в правую часть значения $|b_0|^2 \sigma_0^2 \delta[m]$.

Получим соотношения, обеспечивающие возможность моделирования AR-последовательности, когда в качестве возбуждающей последовательности используется белый шум с единичной дисперсией. Для AR-последовательности это удаётся сделать прямым решением уравнений Юла-Уолкера, поскольку их правая часть имеет очень простой вид.

Выпишем из системы (3.2.9) уравнения для $m = 1, 2, \dots, P$:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & b_\xi^*[2] & \cdots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \cdots & b_\xi^*[P-2] \\ b_\xi[2] & b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi^*[P-3] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & b_\xi[P-3] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ a_P \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_\xi[1] \\ b_\xi[2] \\ b_\xi[3] \\ \cdots \\ b_\xi[P] \end{pmatrix}. \quad (3.3.7)$$

Задавая значения корреляционной функции и решая систему (3.3.7), получаем значения коэффициентов a_1, \dots, a_P , определяющих знаменатель передаточной характеристики.

Отметим, что система уравнений (3.3.7) для моделирования случайных AR-последовательностей идентична системе уравнений (2.3.13) для моделирования детерминированных последовательностей по методу Прони. Причём, отличие между ними — “в пользу” системы (3.3.7), поскольку значения корреляционной функции $b_\xi[m]$ уже заданы (или легко оцениваются на основе статистических оценок), в то время как в системе (2.3.13) необходимо рассчитывать значения детерминированной автокорреляционной функции $r_x[i, j]$.

Далее, имея значения коэффициентов \mathbf{a}_P , нетрудно найти единственный коэффициент b_0 числителя передаточной функции. Выписывая из системы (3.2.9) уравнение для $m = 0$, получаем

$$|b_0|^2 = b_\xi[0] + \sum_{i=1}^P a_i b_\xi[i]. \quad (3.3.8)$$

3.3.3. Моделирование последовательности скользящего среднего

Последовательность МА скользящего среднего также можно трактовать как частный случай ARMA-последовательности, когда все коэффициенты $\mathbf{a}_p = 0$, и передаточная характеристика представляет собой полином Q -го порядка:

$$H(z) = B_Q(z) = \sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}.$$

Следовательно МА-последовательность может быть получена с выхода КИХ-фильтра при его возбуждении белым шумом v_k с единичной дисперсией:

$$\xi_k = \sum_{j=1}^Q b_j v_{k-j}. \quad (3.3.9)$$

Уравнения Юла-Уолкера для МА-последовательности задаются системой (3.2.18), которые, как в случае ARMA-последовательности и в отличие от случая AR-последовательности, являются нелинейными, так что их прямое решение затруднительно.

Рассмотрим метод получения значений коэффициентов b_1, \dots, b_Q , обеспечивающих моделирование МА-последовательности при заданной корреляционной функции, основанный, как и для ARMA-последовательности, на факторизации спектра.

Запишем передаточную характеристику в факторизованном виде, т. е. в виде произведения комплексно-сопряжённых множителей:

$$H(z) = B_Q(z) = b_0 \prod_{j=1}^Q (1 - \beta_j z^{-1}),$$

где β_1, \dots, β_Q — нули передаточной функции.

Поскольку фильтр возбуждается белым шумом с единичной дисперсией, СПМ на выходе фильтра есть

$$P_\xi(z) = B_Q(z) B_Q^*(1/z^*) = |b_0|^2 \prod_{j=1}^Q (1 - \beta_j z^{-1})(1 - \beta_j^* z), \quad (3.3.10)$$

С другой стороны, в разд. 3.2, где рассматривалось обоснование факторизации спектра, было указано, что СПМ любой регулярной последовательности может быть, согласно (3.2.3), представлена в виде

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*) = \sigma_0^2 \prod_{j=1}^Q (1 - \mu_j z^{-1})(1 - \mu_j^* z), \quad (3.3.11)$$

где $Q(z)$ — нормированный минимально-фазовый полином, все нули и полюсы которого лежат внутри единичной окружности, а

$$\sigma_0^2 = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_{\xi}(\omega) d\omega \right].$$

Из сравнения (3.3.10) и (3.3.11) следует, что

$$b_0 = \sigma_0,$$

а $Q(z)$ — это “минимально-фазовая версия” $B_Q(z)$, которая получается, если те нули β_j , $j = 1, \dots, Q$, которые лежат за пределами единичной окружности, заменяются на сопряжённо-обратные значения.

Таким образом, методика моделирования МА-последовательности состоит в следующем. По заданной корреляционной функции вычисляется СПМ, которая представляется в виде произведения двух нормированных сопряжённо-обратных полиномов: минимально-фазового $Q(z)$ и максимально-фазового $Q^*(1/z^*)$. Коэффициент перед $Q(z)$ (или перед $Q^*(1/z^*)$) равен b_0 . Тогда передаточная характеристика моделирующего фильтра есть

$$H(z) = b_0 Q(z).$$

Например, рассмотрим моделирование вещественной МА-последовательности с корреляционной функцией

$$b_{\xi}[m] = 17\delta[k] + 4\delta[k-1] + 4\delta[k+1],$$

которой соответствует СПМ

$$P_{\xi}(z) = 17 + 4z^{-1} + 4z.$$

Приведём $P_{\xi}(z)$ стандартной методикой к факторизованному виду:

$$\begin{aligned} P_{\xi}(z) &= z(17 + 4z^{-1} + 4z) = z(4 + z^{-1})(1 + 4z^{-1}) = \\ &= 4 \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right) 4 \left(1 + \frac{1}{4} z \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем передаточную характеристику моделирующего фильтра:

$$H(z) = 4 \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1} \right) = (4 + z^{-1}).$$

3.4. АЛГОРИТМ ЛЕВИНСОНА–ДУРБИНА

При нахождении значений коэффициентов передаточной функций, обеспечивающих моделирование детерминированных или случайных последовательностей, требуется решать системы уравнений вида

$$\mathbf{R}\mathbf{a}_p = \mathbf{b}, \quad (3.4.1)$$

где \mathbf{R} — тёплицева матрица, составленная либо из отсчётных значений детерминированных последовательностей, либо из отсчётных значений корреляционных функций случайных последовательностей. Рассмотренные в разд. 2.3 и 3.3 примеры определения коэффициентов были достаточно просты, так что решение соответствующих систем уравнений не вызывало сколь-нибудь значительных трудностей.

В реальных задачах, относящихся к различным областям (обработка речи, спектральное оценивание, цифровая фильтрация и др.) приходится решать уравнения типа (3.4.1), когда матрица \mathbf{R} содержит десятки и сотни строк и столбцов, что порождает существенные вычислительные сложности. В 1947 г. Н. Левинсон, основываясь на специфических свойствах тёплицевых матриц, предложил рекурсивный алгоритм¹ решения уравнений (3.4.1), значительно снижающий вычислительные затраты при реализации алгоритмов Винеровской фильтрации. В 1960 г. Дж. Дурбин улучшил² алгоритм Левинсона для случая, когда в правой части (3.4.1) находится единичный вектор, и с тех пор рекурсивный алгоритм с низкой вычислительной сложностью решения систем вида (3.4.1) называют *алгоритмом Левинсона–Дурбина*. В данном разделе будут рассмотрены основные особенности этого алгоритма применительно к решению задач моделирования последовательностей.

Семейство уравнений вида

$$r[m] + \sum_{i=1}^P a_i r[m-i] = 0, \quad m = 1, \dots, P, \quad (3.4.2)$$

возникает, например, при моделировании детерминированных последовательностей по методу Прони или случайных авторегрессионных последо-

¹ N. Levinson. The Wiener rms error criterion in filter design and prediction. J. Math. Phys., vol. 25, pp. 261-278, 1947.

² J. Durbin. The fitting of time series models. Rev. Internat. Statist. Inst., vol. 23, pp. 233–244, 1960.

вательностей P -го порядка. При использовании указанных методов обеспечивается минимальная среднеквадратическая ошибка моделирования, равная

$$\varepsilon_p = r[0] + \sum_{i=1}^P a_i r[i]. \quad (3.4.3)$$

Комбинируя соотношения (3.4.2) и (3.4.3), запишем в матричной форме систему из $(P + 1)$ линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов \mathbf{a}_p и СКО ошибки ε_p :

$$\begin{pmatrix} r[0] & r^*[1] & \cdots & r^*[P] \\ r[1] & r[0] & \cdots & r^*[P-1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r[P] & r[P-1] & \cdots & r[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_p \end{pmatrix} = \varepsilon_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.4a)$$

или

$$\mathbf{r}_p \mathbf{a}_p = \varepsilon_p \mathbf{u}_p, \quad (3.4.4b)$$

где вектор

$$\mathbf{a}_p = (1, a_1, a_2, \dots, a_p)^T$$

содержит искомый набор коэффициентов, матрица

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} r[0] & r^*[1] & \cdots & r^*[P] \\ r[1] & r[0] & \cdots & r^*[P-1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r[P] & r[P-1] & \cdots & r[0] \end{pmatrix}$$

является эрмитовой и тёплицевой, а

$$\mathbf{u}_p = (1, 0, \dots, 0)^T$$

представляет собой P -элементный единичный вектор, в котором первым компонентом является единица, все остальные — равны нулю.

При решении систем уравнений вида (3.4.1), например, методом Пронни нижний индекс P в обозначении \mathbf{a}_p набора коэффициентов указывал лишь на то, что в наборе содержится P коэффициентов a_1, \dots, a_p , и в процессе решения этот индекс никак не менялся, оставаясь константой для задачи.

В алгоритме Левинсона–Дурбина, основанном на рекурсии, коэффициенты определяются итерационно, при заданных начальных условиях: на

первом шаге определяется “первичное” значение $a_1^{(1)}$ коэффициента a_1 ; на втором шаге определяется “модифицированное” значение $a_1^{(2)}$ коэффициента a_1 и первичное значение $a_2^{(2)}$ коэффициента a_2 ; и т. д. до заключительного P -го шага, на котором определяются модифицированные и, одновременно, окончательные значения $a_1^{(P)}, \dots, a_{P-1}^{(P)}$ коэффициентов a_1, \dots, a_{P-1} и первичное и, одновременно, окончательное значение $a_P^{(P)}$ коэффициента a_P . Это означает, что индекс P в обозначении набора коэффициентов становится переменным, обозначающим шаг рекурсии:

$$\mathbf{a}_i = (1, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_i^{(i)})^T.$$

Как и для любого другого рекурсивного алгоритма, суть алгоритма Левинсона–Дурбина состоит в установлении правила рекурсии, согласно которому коэффициенты \mathbf{a}_{i+1} на $(i+1)$ -м шаге получаются из коэффициентов \mathbf{a}_i на i -м шаге при заданных начальных условиях. Найдём это правило.

Решение на i -м шаге есть

$$\begin{pmatrix} r[0] & r^*[1] & \cdots & r^*[i] \\ r[1] & r[0] & \cdots & r^*[i-1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r[i] & r[i-1] & \cdots & r[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \cdots \\ a_i^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.5)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{r}_i \mathbf{a}_i = \varepsilon_i \mathbf{u}_i.$$

Для того, чтобы получить решение \mathbf{a}_{i+1} на i -м шаге, удовлетворяющее уравнению

$$\mathbf{r}_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} = \varepsilon_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}, \quad (3.4.6)$$

добавим в вектор \mathbf{a}_i нулевой компонент на $(i+1)$ -й позиции и умножим его на матрицу \mathbf{r}_{i+1} :

$$\begin{pmatrix} r[0] & r^*[1] & \cdots & r^*[i] & r^*[i+1] \\ r[1] & r[0] & \cdots & r^*[i-1] & r^*[i] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r[i] & r[i-1] & \cdots & r[0] & r^*[1] \\ r[i+1] & r[i] & \cdots & r[1] & r[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(i)} \\ \cdots \\ a_i^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix}, \quad (3.4.7a)$$

где

$$\gamma_i = r[i+1] + \sum_{k=1}^i a_k^{(i)} r[i+1-k].$$

Перепишем (3.4.7a), поменяв порядок следования уравнений, в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} r[0] & r[1] & \cdots & r[i] & r[i+1] \\ r^*[1] & r[0] & \cdots & r[i-1] & r[i] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r^*[i] & r^*[i-1] & \cdots & r[0] & r[1] \\ r^*[i+1] & r^*[i] & \cdots & r^*[1] & r^*[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_i^{(i)} \\ \cdots \\ a_1^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}. \quad (3.4.7b)$$

В этом выражении матрица, стоящая слева, является комплексно-сопряжённой по отношению к аналогичной матрице \mathbf{r}_{i+1} в (3.4.7a), так что

$$\mathbf{r}_{i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ a_i^{(i)} \\ \cdots \\ a_1^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}^*.$$

Тогда

$$\mathbf{r}_{i+1} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(i)} \\ \cdots \\ a_i^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\gamma_i}{\varepsilon_i^*} \begin{pmatrix} 0 \\ a_i^{(i)} \\ \cdots \\ a_1^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix}^* \right] = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix} - \frac{\gamma_i}{\varepsilon_i^*} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}^*.$$

Если теперь положить

$$\mathbf{a}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(i)} \\ \cdots \\ a_i^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\gamma_i}{\varepsilon_i^*} \begin{pmatrix} 0 \\ a_i^{(i)} \\ \cdots \\ a_1^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix}^*, \quad (3.4.8)$$

то можно утверждать: вектор (3.4.8) является решением на $(i+1)$ -м шаге уравнения (3.4.6), в котором

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - \frac{|\gamma_i|^2}{\varepsilon_i^*} \quad (3.4.9)$$

представляет собой ошибку на $(i + 1)$ -м шаге.

Заметим, что в выражении (3.4.8) стоящий в правой части второй вектор образован из первого вектора посредством сопряжения и смещения нумерации: индекс k ($k = 0, 1, \dots, i + 1$), отражающий позицию коэффициента в векторе, заменяется на индекс $i - k + 1$. Отсюда можно заключить, что соотношения (3.4.8) и (3.4.9) обеспечивают вычисление на текущем $(i + 1)$ -м шаге рекурсии значений коэффициентов, найденных на предыдущем i -м шаге рекурсии по следующему правилу:

$$a_k^{(i+1)} = a_k^{(i)} - \frac{\gamma_i}{\varepsilon_i^*} a_{i-k+1}^{*(i)}, \quad k = 0, \dots, i + 1, \quad (3.4.10)$$

в котором $a_0^{(i)} = 1$, $a_{i+1}^{(i)} = 0$. Отметим, что, поскольку ε_i — вещественное число, знак комплексного сопряжения можно опустить.

Для выполнения рекурсии необходимо задать начальные (инициализирующие) значения. Как легко видеть, такими значениями являются

$$a_0^{(0)} = 1$$

и

$$\varepsilon_0 = r[0].$$

Итак, алгоритм Левинсона-Дурбина нахождения коэффициентов моделирующего фильтра по известным значениям корреляционной функции имеет следующий вид.

Задаются инициализирующие значения

$$a_0^{(0)} = 1, \quad \varepsilon_0 = r[0].$$

Цикл по i от 0 до $P - 1$:

Вычисляется

$$\gamma_i = r[i + 1] + \sum_{k=1}^i a_k^{(i)} r[i + 1 - k];$$

Цикл по k от 1 до i :

$$a_k^{(i+1)} = a_k^{(i)} - \frac{\gamma_i}{\varepsilon_i} a_{i-k+1}^{*(i)};$$

Конец цикла по k .

Вычисляются

$$a_{i+1}^{(i+1)} = -\frac{\gamma_{i+1}}{\varepsilon_{i+1}};$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - \frac{|\gamma_i|^2}{\varepsilon_i};$$

Конец цикла по i .

Коэффициент

$$\Gamma_{i+1} = -\frac{\gamma_{i+1}}{\varepsilon_{i+1}} \quad (3.4.11)$$

в литературе называют *коэффициентом отражения* (reflection coefficient).

Отметим, что в процессе работы алгоритма могут образовываться несуществующие или невозможные объекты; в этом случае их необходимо обнулить. К примеру, на первом шаге, когда $i = 0$, внутренний цикл выполняется со значениями k от 1 до i , что невозможно, поэтому полагаем $a_1^{(0)} = 0$. На втором шаге образуется $a_2^{(1)}$ — третий компонент двухкомпонентного вектора, поэтому полагаем $a_2^{(1)} = 0$. И т. д.

Рассмотрим пример работы алгоритма Левинсона–Дурбина при моделировании полюсным фильтром третьего порядка

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=0}^3 a_k z^{-k}}$$

случайной последовательности ξ_k , заданной следующим набором отсчётных значений корреляционной функции:

$$r_\xi[0] = 1,00; \quad r_\xi[1] = 0,50; \quad r_\xi[2] = 0,50; \quad r_\xi[3] = 0,25.$$

Решим вначале задачу прямым способом, описанным в разд. 3.3.2. Система уравнений для нахождения коэффициентов a_1, a_2, a_3 , согласно (3.3.7), имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,00 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,50 \\ 0,25 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем следующие значения:

$$a_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -0,50 & 0,50 & 0,50 \\ -0,50 & 1,00 & 0,50 \\ -0,25 & 0,50 & 1,00 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,00 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & 1,00 \end{pmatrix}} = -0,38;$$

$$a_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1,00 & -0,50 & 0,50 \\ 0,50 & -0,50 & 0,50 \\ 0,50 & -0,25 & 1,00 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,00 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & 1,00 \end{pmatrix}} = -0,38;$$

$$a_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & -0,50 \\ 0,50 & 1,00 & -0,50 \\ 0,50 & 0,50 & -0,25 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,00 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & 1,00 \end{pmatrix}} = 0,13.$$

Рассмотрим теперь решение этой же задачи с использованием алгоритма Левинсона–Дурбина, для которого система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,50 & 0,25 \\ 0,50 & 1,00 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & 1,00 & 0,50 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задаём инициализирующие значения:

$$a_0^{(0)} = 1, \quad \varepsilon_0 = r[0] = 1,00.$$

Первый шаг ($i = 0$):

$$\gamma_0 = r[1] + a_1^{(0)} r[0] = 0,50 + 0 \cdot 1,00 = 0,50;$$

$$a_1^{(1)} = a_1^{(0)} - \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} a_0^{*(0)} = 0 - \frac{0,50}{1,00} \cdot 1 = -0,50,$$

так что на первом шаге вектор решений

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1,00 \\ -0,50 \end{pmatrix}.$$

Модифицируем значение ошибки:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \frac{|\gamma_0|^2}{\varepsilon_0} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Второй шаг ($i = 1$):

$$\gamma_1 = r[2] + a_1^{(1)}r[1] = 0,50 - 0,50 \cdot 0,50 = 0,25;$$

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} - \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} a_1^{*(1)} = -0,5 - \frac{0,25}{0,75}(-0,50) = -0,33,$$

$$a_2^{(2)} = a_2^{(1)} - \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} a_0^{*(1)} = 0 - \frac{0,25}{0,75} \cdot 1 = -0,33,$$

так что на втором шаге вектор решений

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1,00 \\ -0,33 \\ -0,33 \end{pmatrix}.$$

Модифицируем значение ошибки:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{|\gamma_1|^2}{\varepsilon_1} = 0,75 - \frac{0,25^2}{0,75} = 0,66.$$

Третий шаг ($i = 2$):

$$\gamma_2 = r[3] + a_1^{(2)}r[2] + a_2^{(2)}r[1] = 0,25 - 0,33 \cdot 0,50 - 0,33 \cdot 0,50 = -0,08;$$

$$a_1^{(3)} = a_1^{(2)} - \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} a_1^{*(2)} = -0,33 - \frac{-0,08}{0,66}(-0,33) = -0,38,$$

$$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} - \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} a_1^{*(2)} = -0,33 - \frac{-0,08}{0,66}(0,33) = -0,38,$$

$$a_3^{(3)} = a_3^{(2)} - \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} a_0^{*(2)} = 0 - \frac{-0,08}{0,66}(1,00) = 0,12,$$

так что на третьем шаге вектор решений

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1,00 \\ -0,38 \\ -0,38 \\ 0,12 \end{pmatrix}.$$

Модифицируем значение ошибки:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - \frac{|\gamma_2|^2}{\varepsilon_2} = 0,66 - \frac{(-0,08)^2}{0,66} = 0,65.$$

Итак, на основе алгоритма Левинсона–Дурбина получены значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 , совпадающие со значениями, полученными прямым способом, путём решения системы линейных уравнений (различие значений коэффициента a_3 , обусловлено погрешностью округления).

Для полного решения задачи необходимо ещё найти коэффициент b_0 . Согласно (3.3.8),

$$|b_0|^2 = b_\xi[0] + \sum_{i=1}^P a_i b_\xi[i],$$

что, очевидно, совпадает с финальным значением ошибки. Имеем:

$$b_0 = \sqrt{\varepsilon_3} = \sqrt{1,00 + (-0,38) \cdot 0,5 + (-0,38) \cdot 0,5 + 0,12 \cdot 0,25} = 0,81$$

Теперь можно выписать передаточную характеристику:

$$H(z) = \frac{0,81}{1 - 0,38z^{-1} - 0,38z^{-2} + 0,12z^{-3}}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 3

3.1. Пусть $P_\xi(z)$ и $P_\eta(z)$ — собственные СПМ последовательностей ξ_k и η_k , являющихся входом и выходом фильтра с характеристикой $H(z)$, а $P_{\xi\eta}(z)$ — взаимная СПМ между этими последовательностями. Получить следующие соотношения:

а) $P_\eta(z) = P_{\xi\eta}(z)H(z)$;

б) $P_{\xi\eta}(z) = P_\xi(z)H^*(1/z^*)$.

3.2. Случайная последовательность ξ_k с нулевым средним имеет корреляционную функцию

$$b_\xi[m] = 10(1/2)^{|m|} + 3(1/2)^{|m-1|} + 3(1/2)^{|m+1|}.$$

а) Найти фильтр, порождающий последовательность ξ_k , когда на его вход поступает белый шум.

б) Найти стабильный реализуемый фильтр, который, будучи возбуждён последовательностью ξ_k , породит на выходе белый шум с единичной дисперсией.

3.3. СПМ стационарной последовательности ξ_k имеет вид

$$P_{\xi}(\omega) = \frac{25 - 24 \cos \omega}{26 - 10 \cos \omega}.$$

Найти обеляющий фильтр, который порождает белый шум с единичной дисперсией, когда на его вход воздействует последовательность ξ_k .

3.4. Данное задание посвящено исследованию точности оценки корреляционной функции на основе статистического аналога.

а) Сгенерировать 1 000 отсчётов v_k белого гауссовского шума с единичной дисперсией.

б) Оценить первые 100 отсчётов корреляционной функции $b_v[m]$, используя статистическую оценку

$$\hat{b}_v[m] = \frac{1}{1000} \sum_{k=0}^{999} v_k v_{k-m}, \quad k = 0, \dots, 99.$$

Насколько полученная оценка близка к истинной корреляционной функции $b_v[m] = \delta[m]$?

в) Произвести сегментацию всей последовательности на 10 непрерывающихся сегментов, содержащих по 100 отсчётов, и провести оценку корреляционной функции на основе “двойного усреднения”:

$$\hat{b}_v[m] = \frac{1}{1000} \sum_{n=0}^9 \sum_{k=0}^{999} v_{k+100n} v_{k-m+100n}, \quad k = 0, \dots, 99.$$

Сравнить эту оценку с аналогичной оценкой, полученной в п. б и с истинной корреляционной функцией $b_v[m] = \delta[m]$.

г) Сгенерировать 10 000 отсчётов v_k белого гауссовского шума с единичной дисперсией и оценить первые 100 отсчётов корреляционной функции, используя функцию

$$\hat{b}_v[m] = \frac{1}{10000} \sum_{k=0}^{9999} v_k v_{k-m}, \quad k = 0, \dots, 99.$$

Сравнить эту оценку с аналогичной оценкой, полученной в п. б.

Какие общие выводы можно сделать из проведённого моделирования?

3.5. Рассматривается AR(2)-последовательность

$$\xi_k = a_1 \xi_{k-1} + a_2 \xi_{k-2} + b_0 v_k,$$

где v_k — белый шум с единичной дисперсией.

а) Найти корреляционную функцию и спектральную плотность мощности последовательности.

б) Для значений коэффициентов

$$a_1 = 0,0; a_2 = -0,81; b_0 = 1,0$$

сгенерировать 64 отсчёта последовательности.

в) Оценить корреляционную функцию на основе различных статистических оценок и сравнить результат с тем, что был получен в п. а.

г) Имея полученную в п. в) оценку корреляционной функции, получить оценку спектральной плотности и сравнить результат с тем, что был получен в п. а.

д) Имея полученную в п. в) оценку корреляционной функции, найти значения коэффициентов и сравнить результат с заданными значениями.

3.6. Заданы значения корреляционной функции

$$r[0] = 1,00; r[1] = 0,80; r[2] = 0,50; r[3] = 0,10.$$

Найти для алгоритма Левинсона–Дурбина правило рекурсии, значения коэффициентов и ошибки для трёх шагов вычислений.

3.7. Пусть $A_{P-1}(z)$ — полином $(P-1)$ -го порядка, записанный в виде

$$A_{P-1}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{P-1} a_k z^{-k}.$$

Пусть далее $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_P$ — коэффициенты отражения, полученные на P шагах алгоритма Левинсона–Дурбина. Образует полином P -го порядка:

$$A_P(z) = A_{P-1}(z) + \Gamma_P z^{-P} A_{P-1}^*(1/z^*).$$

а) Если $|\Gamma_i| < 1$ для $i = 1, \dots, P-1$ и $|\Gamma_P| = 1$, то что можно сказать о расположении нулей полинома $A_P(z)$?

б) Предположим, что полином $A_P(z)$ может быть факторизован:

$$A_P(z) = \prod_{k=1}^P (1 - \alpha_k z^{-1}),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P$ — нули полинома. Если

$$\tilde{A}_P(z) = A_{P-1}(z) + \frac{1}{\Gamma_P^*} z^{-P} A_{P-1}^*(1/z^*),$$

то как связаны нули полинома $\tilde{A}_P(z)$ с нулями полинома $A_P(z)$?

4. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ КОЛМОГОРОВА–ВИНЕРА

Обратимся непосредственно к решению задачи реализации цифрового фильтра Колмогорова–Винера.

Напомним постановку задачи, теперь уже, в терминах дискретного времени.

На вход КИХ-фильтра поступает случайная последовательность ξ_k , являющаяся суммой полезной s_k и шумовой v_k составляющих:

$$\xi_k = s_k + v_k.$$

На выходе фильтра формируется последовательность η_k , обладающая тем свойством, что среднеквадратическая разность между выходной и полезной последовательностями минимальна:

$$\mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \mathbf{E} \left[|\eta_k - s_k|^2 \right] \rightarrow \min.$$

Как обычно, будем считать, что ξ_k и v_k являются стационарными и стационарно связанными последовательностями, так что их автокорреляционные $b_\xi[m]$, $b_v[m]$ и взаимная корреляционная функция $b_{v\xi}[m]$ (и, следовательно, взаимная корреляционная функция $b_{\xi s}[m]$) зависят только от одного временного индекса.

4.1. РЕАЛИЗАЦИЯ ВИНЕРОВСКОГО КИХ-ФИЛЬТРА

В данном разделе эта задача будет решена для фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра).

Пусть $h[k]$ — конечная импульсная характеристика винеровского фильтра, так что $H(z)$ содержит конечное число P слагаемых:

$$H(z) \equiv Z(h[k]) = \sum_{k=0}^{P-1} h[k]z^{-k}.$$

Реализация на выходе фильтра представляет собой свёртку реализации¹ x_k входной последовательности с импульсной характеристикой:

¹ Напомним, что сами случайные последовательности, по возможности, обозначаются греческими символами, а их реализации — латинскими аналогами.

$$y_k = x_k * h_k = \sum_{m=0}^{P-1} h_m x_{k-m}.$$

Следовательно, аналогичное соотношение будет иметь место и для самих случайных последовательностей:

$$\eta_k = \xi_k * h_k = \sum_{m=0}^{P-1} h_m \xi_{k-m}.$$

При нахождении оптимальной характеристики винеровского фильтра для непрерывных сигналов (разд. 1.1) задача решалась посредством преобразования остаточной СКО к тому виду, в котором явно прослеживались условия, которым должна удовлетворять импульсная характеристика, ведущие к минимизации СКО. При решении аналогичной задачи для дискретных сигналов воспользуемся другой методикой, подробно рассмотренной в предыдущих главах и основанной на дифференцировании СКО.

Будем рассматривать

$$\mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \mathbf{E} \left[\Delta_k \Delta_k^* \right]$$

как функцию импульсной характеристики. Тогда условием минимума СКО (то, что это будет минимум — очевидно) является равенство нулю каждой из производной

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \frac{\partial}{\partial h_i} \mathbf{E} \left[\Delta_k \Delta_k^* \right] = \mathbf{E} \left[\frac{\partial \Delta_k}{\partial h_i} \Delta_k^* \right] = 0, \quad i = 0, \dots, P-1.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial h_i} = \frac{\partial}{\partial h_i} (\eta_k - s_k) = \frac{\partial}{\partial h_i} \left(\sum_{m=0}^{P-1} h_m \xi_{k-m} - s_k \right) = \xi_{k-i},$$

получаем

$$\mathbf{E} \left[\xi_{k-i} \Delta_k^* \right] = \mathbf{E} \left[\xi_{k-i}^* \Delta_k \right] = 0, \quad i = 0, \dots, P-1. \quad (4.1.1)$$

Соотношения (4.1.1) известны как *проекционная теорема для КИХ-фильтра*; они отражают ортогональность входного сигнала и ошибки воспроизведения.

Далее имеем:

$$\mathbf{E} \left[\frac{\partial \Delta_k}{\partial h_i} \Delta_k^* \right] = \mathbf{E} \left[\xi_{k-i} \Delta_k^* \right] = \mathbf{E} \left[\xi_{k-i} (\eta_k^* - s_k^*) \right] = \mathbf{E} \left[\xi_{k-i} \left(\sum_{m=0}^{P-1} h_m^* \xi_{k-m}^* - s_k^* \right) \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{P-1} h_m^* \mathbf{E}[\xi_{k-i} \xi_{k-m}^*] - \mathbf{E}[\xi_{k-i} s_k^*] = 0.$$

Видно, что образуются автокорреляционные и взаимные корреляционные функции:

$$\sum_{m=0}^{P-1} h_m^* b_\xi[m-i] = b_{\xi_s}[-i], \quad i = 0, \dots, P-1, \quad (4.1.2a)$$

или, беря комплексное сопряжение от обеих частей, и используя свойство сопряжённой симметричности корреляционных функций,

$$\sum_{m=0}^{P-1} h_m b_\xi[i-m] = b_{s\xi}[i], \quad i = 0, \dots, P-1. \quad (4.1.2б)$$

Запишем уравнения (4.1.2) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & b_\xi^*[2] & \dots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \dots & b_\xi^*[P-2] \\ b_\xi[2] & b_\xi[1] & b_\xi[0] & \dots & b_\xi^*[P-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & b_\xi[P-3] & \dots & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{s\xi}[0] \\ b_{s\xi}[1] \\ b_{s\xi}[2] \\ \dots \\ b_{s\xi}[P-1] \end{pmatrix} \quad (4.1.2в)$$

или, используя матричные обозначения

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_{P-1})^T$$

для вектора-столбца импульсной характеристики,

$$\mathbf{b}_{\xi_s} = (b_{\xi_s}[0], b_{\xi_s}[1], \dots, b_{\xi_s}[P-1])^T$$

для вектора-столбца взаимной корреляционной функции и

$$\mathbf{b}_\xi = \begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & b_\xi^*[2] & \dots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \dots & b_\xi^*[P-2] \\ b_\xi[2] & b_\xi[1] & b_\xi[0] & \dots & b_\xi^*[P-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & b_\xi[P-3] & \dots & b_\xi[0] \end{pmatrix}$$

для автокорреляционной матрицы,

$$\mathbf{b}_\xi \mathbf{h} = \mathbf{b}_{s\xi}. \quad (4.1.2з)$$

Соотношения (4.1.2) представляют собой уравнения Винера-Хопфа для КИХ-фильтра, и они являются дискретным аналогом для интегрального уравнения Винера-Хопфа (1.1.11).

Для нахождения минимального значения СКО

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[|\Delta_k|^2\right] &= \mathbf{E}\left[(\eta_k - s_k)^* \Delta_k\right] = \mathbf{E}\left[\left(\sum_{m=0}^{P-1} h_m^* \xi_{k-m}^* - s_k^*\right) \Delta_k\right] = \\ &= \sum_{m=0}^{P-1} h_m \mathbf{E}\left[\xi_{k-m}^* \Delta_k\right] - \mathbf{E}\left[s_k^* \Delta_k\right]\end{aligned}$$

учтём выполнение условия (4.1.1) проекционной теоремы. Тогда

$$\begin{aligned}\min \mathbf{E}\left[|\Delta_k|^2\right] &= -\mathbf{E}\left[s_k^* \Delta_k\right] = -\mathbf{E}\left[s_k^* \left(\sum_{m=0}^{P-1} h_m \xi_{k-m} - s_k\right)\right] = \\ &= \mathbf{E}\left[s_k s_k^*\right] - \sum_{m=0}^{P-1} h_m \mathbf{E}\left[\xi_{k-m} s_k^*\right] = b_s[0] - \sum_{m=0}^{P-1} h_m b_{s\xi}[-m] = \\ &= b_s[0] - \sum_{m=0}^{P-1} h_m b_{s\xi}^*[m]\end{aligned}\quad (4.1.3a)$$

или, в матричной записи,

$$\min \mathbf{E}\left[|\Delta_k|^2\right] = b_s[0] - \mathbf{b}_{s\xi}^H \mathbf{h}.\quad (4.1.3б)$$

Минимальную СКО также можно выразить через автокорреляционную матрицу, поскольку, как следует из уравнения Винера-Хопфа,

$$\mathbf{h} = \mathbf{b}_{s\xi}^{-1} \mathbf{b}_{s\xi},$$

тогда

$$\min \mathbf{E}\left[|\Delta_k|^2\right] = b_s[0] - \mathbf{b}_{s\xi}^H \mathbf{b}_{s\xi}^{-1} \mathbf{b}_{s\xi}.\quad (4.1.3в)$$

Рассмотрим решение некоторых задач, в основе которых лежит винеровская фильтрация КИХ-фильтром. При этом, если не оговорено другого, будем считать, что шумовая последовательность v_k не коррелирована с полезным сигналом и имеет нулевое среднее. Тогда

$$b_{s\xi}[m] = \mathbf{E}\left[s_k \xi_{k-m}^*\right] = \mathbf{E}\left[s_k \left(s_{k-m}^* + v_{k-m}^*\right)\right] = \mathbf{E}\left[s_k s_{k-m}^*\right] = b_s[m]$$

и

$$\begin{aligned}b_{\xi\xi}[m] &= \mathbf{E}\left[\xi_k \xi_{k-m}^*\right] = \mathbf{E}\left[(s_k + v_k) \left(s_{k-m}^* + v_{k-m}^*\right)\right] = \\ &= \mathbf{E}\left[s_k s_{k-m}^*\right] + \mathbf{E}\left[s_k v_{k-m}^*\right] + \mathbf{E}\left[v_k s_{k-m}^*\right] + \mathbf{E}\left[v_k v_{k-m}^*\right] =\end{aligned}$$

$$= \mathbf{E}[s_k s_{k-m}^*] + \mathbf{E}[v_k v_{k-m}^*] = b_s[m] + b_v[m].$$

Следовательно, автокорреляционная матрица \mathbf{b}_ξ представляет собой сумму автокорреляционных матриц полезного сигнала и шума:

$$\mathbf{b}_\xi[m] = \mathbf{b}_s[m] + \mathbf{b}_v[m],$$

и уравнение Винера-Хопфа может быть записано в виде

$$(\mathbf{b}_s + \mathbf{b}_v)\mathbf{h} = \mathbf{b}_s. \quad (4.1.4)$$

4.1.1. Последовательность с показательной корреляционной функцией

Рассмотрим винеровскую фильтрацию КИХ-фильтром последовательности s_k с показательной корреляционной функцией:

$$b_s[m] = \alpha^{|m|}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

которая поступает на вход фильтра в аддитивной смеси с белым шумом v_k , имеющим дисперсию σ_v^2 .

СПМ рассматриваемой последовательности, согласно (2.2.26), равна

$$P_s(\omega) = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}.$$

Заметим, что показательную корреляционную функцию имеет AR(1)-последовательность.

Рассмотрим простейший фильтр первого порядка, передаточная характеристика которого равна

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1}.$$

Уравнения Винера-Хопфа для такого фильтра имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} b_s[0] + b_v[0] & b_s[1] + b_v[1] \\ b_s[1] + b_v[1] & b_s[0] + b_v[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_s[0] \\ b_s[1] \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$b_s[m] + b_v[m] = \alpha^{|m|} + \sigma_v^2 \delta[m],$$

имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 + \sigma_v^2 & \alpha \\ \alpha & 1 + \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Решая эту простейшую систему, получаем значения импульсной характеристики фильтра, выраженные через параметры полезного сигнала и шума:

$$h_0 = \frac{1 + \sigma_v^2 - \alpha^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2};$$

$$h_1 = \frac{\alpha \sigma_v^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2}.$$

Таким образом, передаточная характеристика винеровского фильтра имеет следующий вид:

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2} (1 + \sigma_v^2 - \alpha^2 + \alpha \sigma_v^2 z^{-1}). \quad (4.1.5)$$

Единственный нуль $H(z)$ находится в точке

$$z_0 = \frac{-\alpha \sigma_v^2}{1 + \sigma_v^2 - \alpha^2}.$$

Передаточная характеристика (4.1.5) определяет фильтр нижних частот, частотная характеристика которого есть

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2} (1 + \sigma_v^2 - \alpha^2 + \alpha \sigma_v^2 \exp(-j\omega)). \quad (4.1.5a)$$

Для иллюстрации рассмотрим числовые значения. Пусть дисперсия белого шума $\sigma_v^2 = 1$, а основание показательной функции $\alpha = 0,8$. Тогда

$$H(z) = 0,40 + 0,24z^{-1}$$

или

$$H(\omega) = 0,40 + 0,24 \exp(-j\omega). \quad (4.1.6)$$

При этих значениях параметров СПМ полезного сигнала есть

$$P_s(\omega) = \frac{0,36}{1,64 - 1,60 \cos \omega}. \quad (4.1.7)$$

На рис. 4.1 показан вид нормированной АЧХ оптимального винеровского фильтра первого порядка, определяемой соотношением (4.1.6). На этом же рисунке показан вид нормированной СПМ полезного сигнала, построенный на основе (4.1.7). Частота по оси абсцисс нормирована на π .

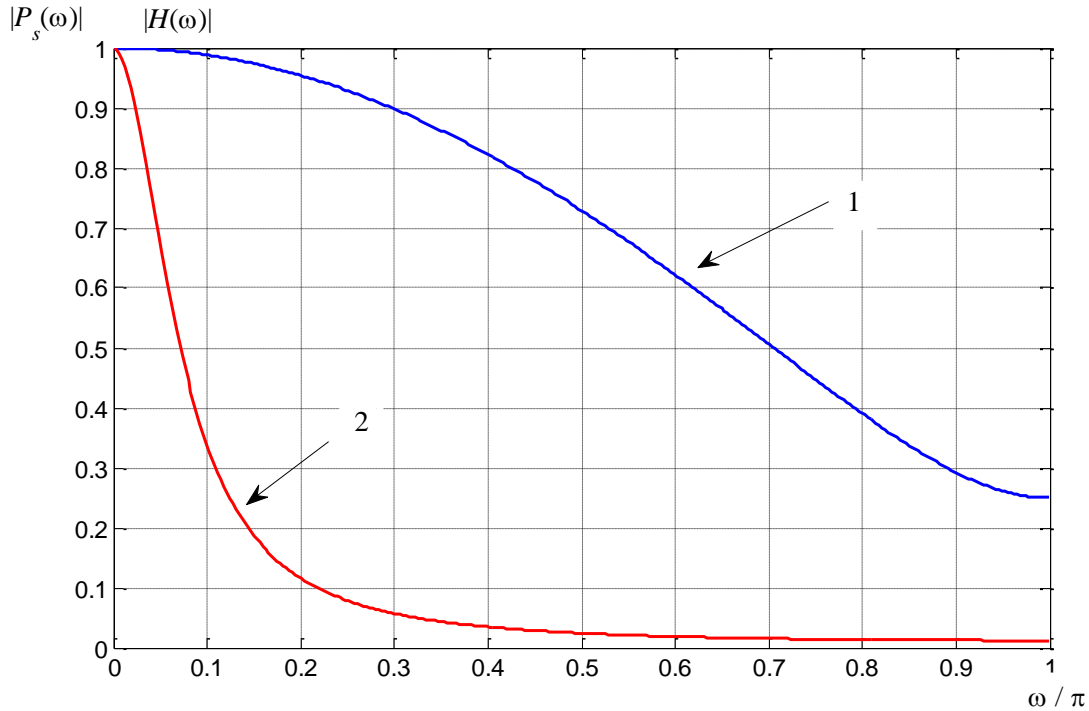


Рис. 4.1. АЧХ винеровского фильтра первого порядка (1) и спектральная плотность мощности полезного сигнала (2)

Минимальная СКО винеровского фильтра первого порядка, согласно (41.3), равна

$$\begin{aligned} \min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] &= b_s[0] - h_0 b_{s\xi}^*[0] - h_1 b_{s\xi}^*[1] = b_s[0] - h_0 b_s^*[0] - h_1 b_s^*[1] = \\ &= \sigma_v^2 \frac{1 + \sigma_v^2 - \alpha^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

и при указанных значениях параметров сигнала и шума она составляет 0,40.

Поскольку спектр полезного сигнала убывает с ростом частоты, а спектр шума имеет постоянное значение, отношение сигнал-шум на входе фильтра убывает с ростом частоты. Следовательно, АЧХ оптимального фильтра должна убывать с ростом частоты, чтобы обеспечить соответствующее убывание спектра шума и, тем самым, выровнять удельную (на единицу частоты) зависимость отношения сигнал-шум от частоты, а также, желательно, повысить отношение сигнал-шум на выходе по отношению к аналогичному входному значению.

Средняя мощность полезного сигнала на входе фильтра равна

$$b_s[0] = 1.$$

Средняя мощность шума на входе фильтра равна

$$b_v[0] = \sigma_v^2 = 1;$$

следовательно, отношение сигнал-шум на входе составляет 0 дБ.

Значение средней мощности и сигнала, и шума после фильтрации трудно сосчитать, пользуясь соотношением (3.1.7), справедливым для произвольной стационарной последовательности. Пусть s'_k и v'_k — профильтрованные значения полезного сигнала и шума соответственно. Тогда

$$\mathbf{E}[|s'_k|^2] = \mathbf{h}^H \mathbf{b}_s \mathbf{h} = (h_0 \ h_1) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = 0,37;$$

$$\mathbf{E}[|v'_k|^2] = \mathbf{h}^H \mathbf{b}_v \mathbf{h} = (h_0 \ h_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = 0,22.$$

Следовательно, отношение сигнал-шум на выходе фильтра равно

$$10 \lg \frac{0,37}{0,22} = 2,30 \text{ дБ.}$$

Очевидно, произошло увеличение отношения сигнал-шум более, чем на 2 дБ.

4.1.2. Линейное предсказание

Линейное предсказание является одной из наиболее часто используемых конструкций в очень широкой области приложений и представляет собой оценку \hat{x}_{k+1} текущего отсчёта x_{k+1} на основе линейной комбинации ряда предыдущих отсчётов x_k, x_{k-1}, \dots (рис. 4.2).

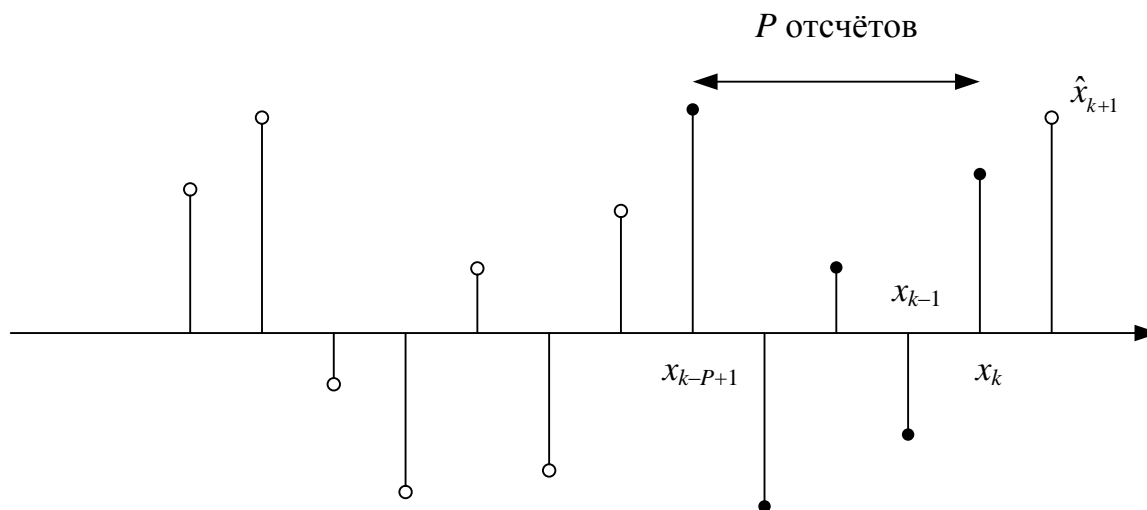


Рис. 4.2. Линейное предсказание на основе P предыдущих отсчётов

Рассмотрим вначале случай, когда шумовая компонента мала, и ей можно пренебречь.

Определим *линейный предсказатель порядка P* следующим образом:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{n=0}^{P-1} c_n x_{k-n}, \quad (4.1.9)$$

где c_n — коэффициенты линейного предсказания, которые должны быть определены, исходя из каких-то дополнительных предположений.

Если считать, что критерием определения коэффициентов c_n является минимум среднеквадратической ошибки предсказания, то при такой постановке задача совпадает с задачей винеровской фильтрации, когда $v_k \equiv 0$, а полезным сигналом является текущий отсчёт, т. е. $s_k \equiv x_{k+1}$.

Взаимная корреляционная функция $b_{s\xi}$ для данного случая есть

$$b_{s\xi}[m] = \mathbf{E}[s_k x_{k-m}^*] = \mathbf{E}[x_{k+1} x_{k-m}^*] = b_\xi[m+1],$$

Тогда уравнения Винера-Хопфа принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & b_\xi^*[2] & \cdots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \cdots & b_\xi^*[P-2] \\ b_\xi[2] & b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi^*[P-2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & b_\xi[P-3] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\xi[1] \\ b_\xi[2] \\ b_\xi[3] \\ \cdots \\ b_\xi[P] \end{pmatrix}, \quad (4.1.10)$$

а минимальная СКО равна

$$\min \mathbf{E}[\Delta_k^2] = b_\xi[0] - \sum_{n=0}^{P-1} c_n b_\xi^*[n+1]. \quad (4.1.11)$$

Пусть, к примеру, рассматривается линейное предсказание второго порядка:

$$\hat{x}_{k+1} = c_0 x_k + c_1 x_{k-1}$$

для AR(1)-последовательности с показательной корреляционной функцией

$$b_s[m] = \alpha^{|m|}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Имеем уравнения Винера-Хопфа

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix},$$

решение которых есть

$$c_0 = \alpha;$$

$$c_1 = 0.$$

Таким образом, линейный предсказатель второго порядка для AR(1)-последовательности имеет вид

$$\hat{x}_{k+1} = \alpha x_k,$$

откуда следует, что слагаемое $c_1 x_{k-1}$ никак не участвует в предсказании. Этот, несколько неожиданный на первый взгляд, результат можно понять, исходя из следующих рассуждений.

Вспомним, что AR(1)-последовательность удовлетворяет разностному уравнению

$$x_k = \alpha x_{k-1} + v_k$$

или, эквивалентно,

$$x_{k+1} = \alpha x_k + v_{k+1}.$$

Поскольку v_{k+1} — шумовая компонента, не зависящая от полезного сигнала, она не может быть предсказана ни по предыдущему значению x_k , ни по предыдущему значению v_k . Тогда интуитивно понятно, что наилучшая оценка x_{k+1} получается в том случае, когда v_{k+1} будет заменена своим средним значением:

$$\hat{x}_{k+1} = \alpha x_k + \mathbf{E}[v_{k+1}].$$

Но

$$\mathbf{E}[v_{k+1}] = 0,$$

отсюда получаем

$$\hat{x}_{k+1} = \alpha x_k,$$

т. е. решение Винера–Хопфа.

Минимальная СКО, образующаяся при таком предсказании, равна

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = b_\xi[0] - c_0 b_\xi[1] - c_0 b_\xi[2] = 1 - \alpha^2.$$

При увеличении α возрастают корреляционные связи между последовательными значениями последовательности, при этом минимальная СКО уменьшается, стремясь к нулю. Наоборот, уменьшение α приводит к уменьшению корреляционных связей между отсчётами. В пределе, для последовательности некоррелированных отсчётов (при $\alpha = 0$) минимальная СКО равна своему максимальному единичному значению. В этом случае оптимальным предсказателем является нулевое значение:

$$\hat{x}_{k+1} = 0.$$

Обратимся теперь к более реалистичному случаю линейного предсказания s_{k+1} отсчёта полезного сигнала в присутствии шумов:

$$\hat{s}_{k+1} = \sum_{n=0}^{P-1} c_n (s_{k-n} + v_{k-n}). \quad (4.1.12)$$

Поскольку полезный сигнал и шум независимы, взаимная корреляционная функция $b_{s\xi}$ по-прежнему определяется корреляционной функцией полезного сигнала:

$$b_{s\xi}[m] = \mathbf{E} \left[s_k (s_{k-m}^* + v_{k-m}^*) \right] = b_\xi[m+1],$$

а автокорреляционная матрица — в отличие от случая предсказания без шума — распадается на сумму двух матриц:

$$b_\xi[m] = \mathbf{E} \left[\xi_k \xi_{k-m}^* \right] = \mathbf{E} \left[(s_k + v_k) (s_{k-m}^* + v_{k-m}^*) \right] = b_s[m] + b_v[m].$$

Тогда получаем уравнение Винера-Хопфа, аналогичное (4.1.10), с той лишь разницей, что в левой части находится два слагаемых:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \cdots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi^*[P-2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_{P-1} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} b_v[0] & b_v^*[1] & \cdots & b_v^*[P-1] \\ b_v[1] & b_v[0] & \cdots & b_v^*[P-2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_v[P-1] & b_v[P-2] & \cdots & b_v[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\xi[1] \\ b_\xi[2] \\ \cdots \\ b_\xi[P] \end{pmatrix}. \quad (4.1.13) \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера линейное предсказание второго порядка для AR(1)-последовательности в присутствии белого шума.

Имеем уравнения Винера-Хопфа

$$\begin{pmatrix} 1 + \sigma_v^2 & \alpha \\ \alpha & 1 + \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix},$$

решение которых есть:

$$c_0 = \frac{\alpha(1 + \sigma_v^2 - \alpha^2)}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2};$$

$$c_1 = \frac{\alpha^2 \sigma_v^2}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2}.$$

Видно, что при $\sigma_v^2 \rightarrow 0$ получается решение для случая отсутствия шума.

Дальнейшим обобщением задачи линейного предсказания является *многошаговое предсказание*, когда по наблюдению за рядом предыдущих значений требуется получить оценку на $k_0 > 1$ шагов вперёд. Например, при отсутствии шума требуется получить

$$\hat{x}_{k+k_0} = \sum_{n=0}^{P-1} c_n x_{k-n}. \quad (4.1.14)$$

Отличие решаемой задачи от (4.1.9) в том, что взаимная корреляционная функция есть

$$b_{s\xi}[m] = \mathbf{E}[x_{k+k_0} x_{k-m}^*] = b_\xi[k_0 + m],$$

тогда уравнения Винера–Хопфа принимают вид

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & b_\xi^*[2] & \cdots & b_\xi^*[P-1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] & b_\xi^*[1] & \cdots & b_\xi^*[P-2] \\ b_\xi[2] & b_\xi[1] & b_\xi[0] & \cdots & b_\xi^*[P-2] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_\xi[P-1] & b_\xi[P-2] & b_\xi[P-3] & \cdots & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\xi[k_0] \\ b_\xi[k_0+1] \\ b_\xi[k_0+2] \\ \cdots \\ b_\xi[k_0+P-1] \end{pmatrix}, \quad (4.1.15)$$

а минимальная СКО равна

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = b_\xi[0] - \sum_{n=0}^{P-1} c_n b_\xi^*[n+k_0]. \quad (4.1.16)$$

Рассмотрим пример многошагового предсказания для сигнала с вещественной корреляционной функцией

$$b_\xi[m] = \delta[m] - (0,90)^{|m|} \cos(\pi m / 4), \quad (4.1.17)$$

вид которой показан на рис. 4.3.

Вначале получим решение задачи одношагового линейного предсказания второго порядка:

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi[1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\xi[1] \\ b_\xi[2] \end{pmatrix}.$$

Подставляя (4.1.17) в (4.1.15), получаем

$$c_0 = 0,35;$$

$$c_1 = -0,11.$$

Таким образом, одношаговый предсказатель имеет следующий вид:

$$\hat{x}_{k+1} = 0,35x_k - 0,17x_{k-1}.$$

При этом минимальная СКО равна

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = b_\xi[0] - c_0 b_\xi[1] - c_1 b_\xi[2] = 1,77.$$

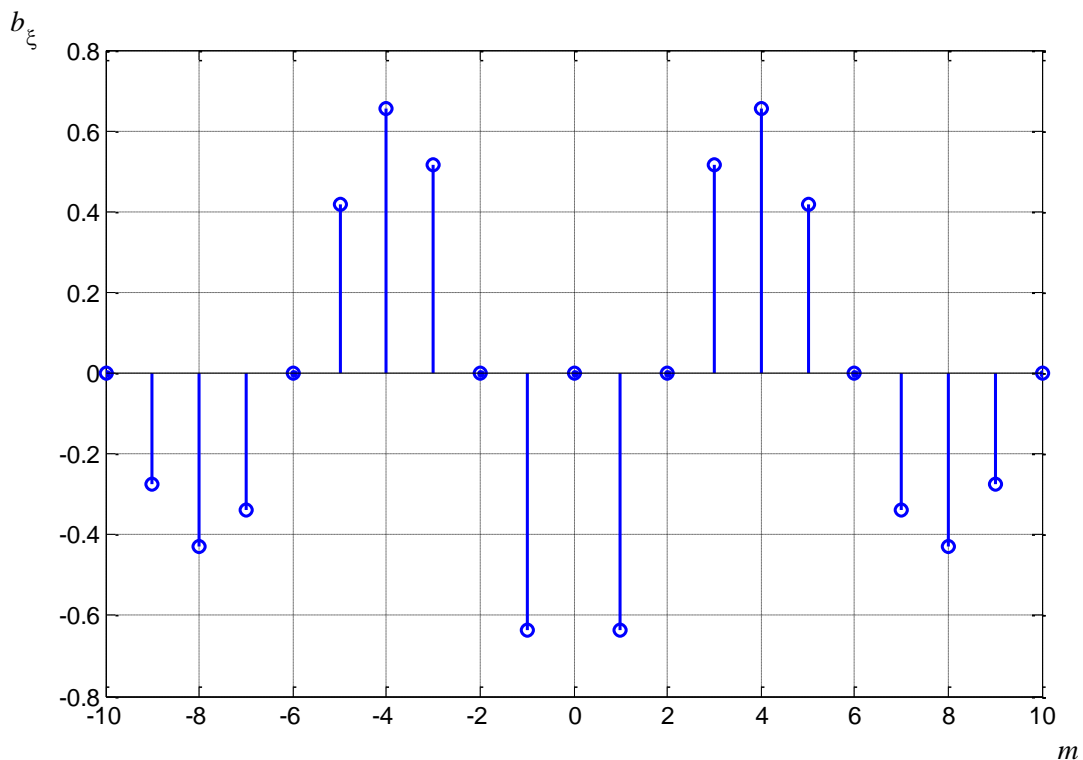


Рис. 4.3. Пример корреляционной функции

Пусть теперь требуется получить трёхшаговый предсказатель. Имеем уравнения Винера–Хопфа

$$\begin{pmatrix} b_\xi[0] & b_\xi[1] \\ b_\xi[1] & b_\xi[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\xi[3] \\ b_\xi[4] \end{pmatrix},$$

решение которых

$$c_0 = -0,17,$$

$$c_1 = -0,27$$

дают трёхшаговый предсказатель:

$$\hat{x}_{k+3} = -0,17x_k - 0,27x_{k-1}.$$

Минимальная СКО для такого предсказателя, равная

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = b_\xi[0] - c_0 b_\xi[3] - c_1 b_\xi[4] = 1,73,$$

оказывается меньше, чем для одношагового предсказателя.

Возникает несколько парадоксальная ситуация, когда выгоднее предсказывать на три шага вперёд, чем на один. Причина этой ситуации — в гармоническом характере автокорреляционной функции сигнала (рис. 4.3). Абсолютные значения корреляционной функции, отстоящие на 1 и 2 отсчёта, заметно более различаются, чем значения, отстоящие на 3 и 4 отсчёта. Следовательно, значения x_{k+3} , x_k и x_{k-1} , используемые в трёхшаговом предсказателе, будут более коррелированы, чем значения x_{k+1} , x_k и x_{k-1} , используемые в одношаговом предсказателе, что и предопределяет меньшую (правда, совсем не на много) среднеквадратическую ошибку.

4.1.3. Удаление шума

Ещё одной актуальной задачей, относящейся к винеровской фильтрации, является *задача удаления шума*.

Как и в задаче фильтрации, целью является получение оценки полезного сигнала s_k при его наблюдении в аддитивной смеси с шумом v_k . Отличие заключается в физическом (с точки зрения устройств) сопровождении задачи.

В традиционной постановке задачи фильтрации предполагается наличие *одного* регистрирующего прибора, записывающего отсчётные значения смеси сигнала с шумом:

$$x_k = s_k + v_k.$$

При этом, для успешного решения задачи необходимо знание корреляционных (энергетических) характеристик и сигнала, и шума.

В задаче удаления шума предполагается наличие *двух* регистрирующих приборов (рис. 4.4), один из которых (Π_1), по-прежнему, записывает отсчётные значения смеси сигнала с шумом, а второй (Π_2) — отсчётные значения v_{1k} шума.

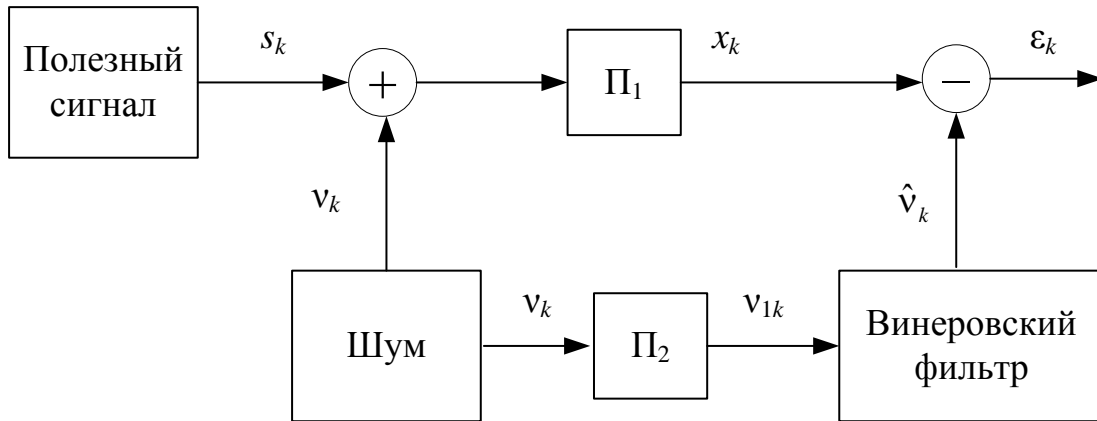


Рис. 4.4. К задаче удаления шума

В идеале прибор Π_2 должен записывать шумовые значения того же самого процесса, который, в смеси с полезным сигналом, записывается прибором Π_1 . Тогда можно было бы вычесть эти значения, полученные в параллельной ветви эксперимента, из значений v_k и получить “чистые” отсчёты s_k полезного сигнала.

Однако ввиду различных неконтролируемых факторов (неидентичность характеристик приборов Π_1 и Π_2 , наличие “дополнительного” шума в приборе Π_2 и др.) отсчётные значения процессов $v(t)$ и $v_1(t)$ оказываются хотя и коррелированными, но, всё же, не идентичными. Следовательно, при вычитании v_{1k} из v_k возникает *ошибка удаления шума*

$$\epsilon_k = v_k - v_{1k},$$

приводящая к тому, что при вычитании v_{1k} из x_k вместо “очищения” искажённого сигнала появляется его дополнительное зашумление.

Для минимизации ошибки удаления предлагается проводить винеровскую фильтрацию отсчётов v_{1k} , трактуя выходные отсчёты \hat{v}_k как оптимальную оценку отсчётов v_k .

Уравнения Винера-Хопфа для данной задачи имеют вид

$$\mathbf{b}_{v_1} \mathbf{h} = \mathbf{b}_{v,v_1},$$

где \mathbf{b}_{v_1} — автокорреляционная матрица отсчётов v_{1k} , а \mathbf{b}_{v,v_1} — вектор взаимной корреляционной функции между v_k и v_{1k} :

$$\begin{aligned} b_{v,v_1}[m] &= \mathbf{E}[v_k, v_{1k-m}^*] = \mathbf{E}[(x_k - s_k), v_{1k-m}^*] = \\ &= \mathbf{E}[x_k, v_{1k-m}^*] - \mathbf{E}[s_k, v_{1k-m}^*]. \end{aligned}$$

Если предположить (и это обосновано физически), что шумовые отсчёты v_{1k} не коррелированы с полезным сигналом s_k , то

$$\mathbf{E}[s_k, v_{1k-m}^*] = 0,$$

и

$$b_{v_1, v_1}[m] = \mathbf{E}[x_k, v_{1k-m}^*] = b_{x, v_1}[m].$$

Таким образом, уравнения Винера-Хопфа принимают вид

$$\mathbf{b}_{v_1} \mathbf{h} = \mathbf{b}_{x, v_1}. \quad (4.1.18)$$

Существенной особенностью задачи удаления шума является возможность непосредственного доступа к шумовой компоненте v_1 . Это означает, что в качестве корреляционных матриц, фигурирующих в (4.1.18), могут использоваться их статистические оценки на основе соотношений (2.2.30)–(2.2.32).

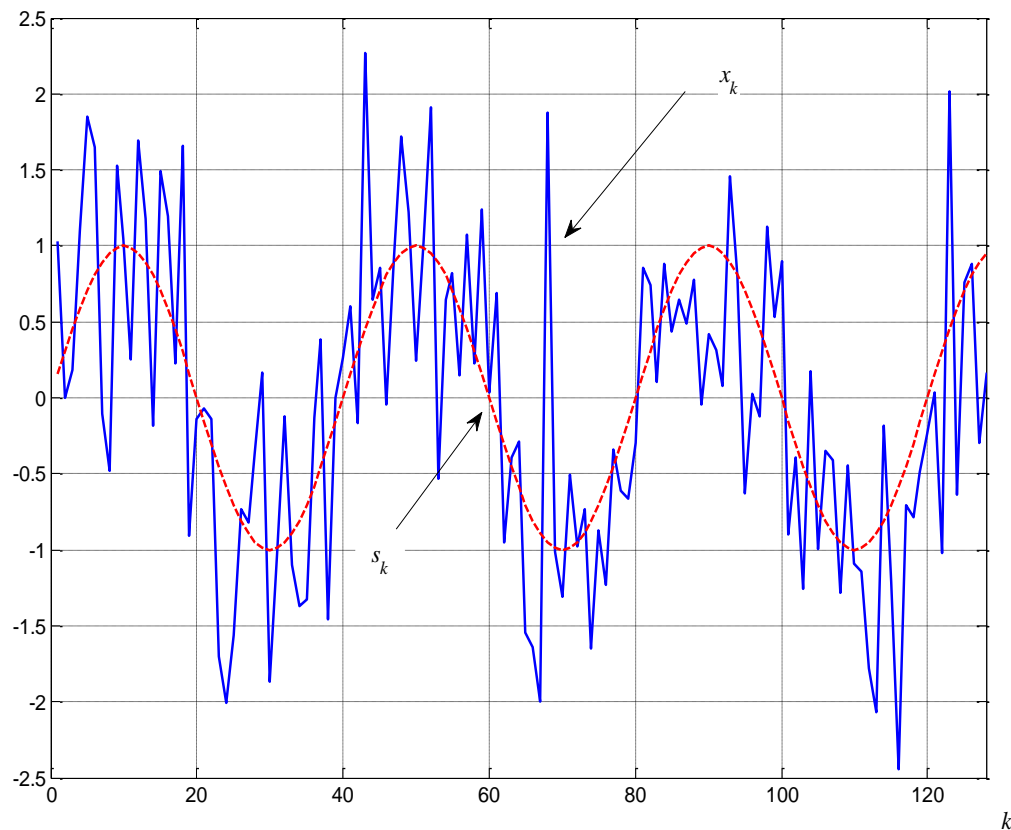


Рис. 4.5. Полезный сигнал s_k и его аддитивная смесь с белым гауссовским шумом v_k

Рассмотрим следующий пример. Полезным сигналом является гармоническое колебание

$$s_k = A_0 \sin(k\omega_0 + \varphi_0),$$

искажённое белым шумом v_k , а на выходе прибора Π_2 появляются отсчёты AR(1)-последовательности, порождаемой белым шумом v_k и описываемой разностным уравнением

$$v_k = av_{k-1} + v_k.$$

На рис. 4.5 показана 128-элементная реализация полезного сигнала (пунктирная линия) при амплитуде $A_0 = 1,00$, частоте $\omega_0 = 0,05\pi$ и нулевой начальной фазе ($\varphi_0 = 0,00$), а также аддитивная смесь полезного сигнала с белым гауссовским шумом, имеющим нулевое среднее и дисперсию, равную 0,70.

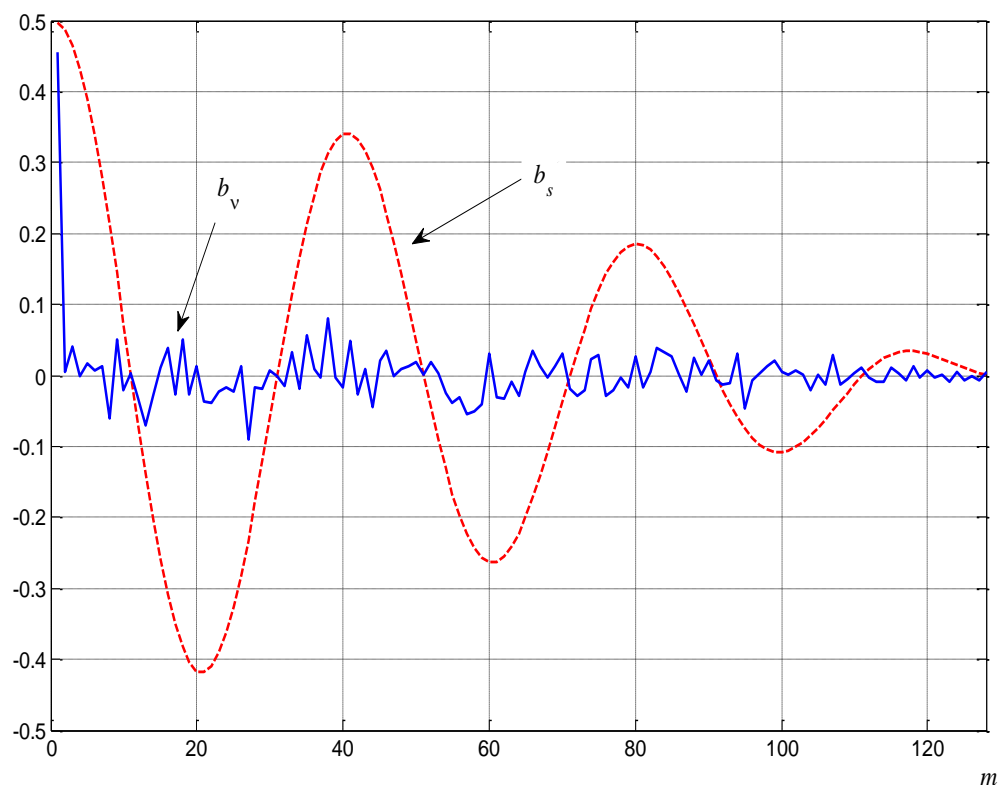


Рис. 4.6. Оценки корреляционных функций полезного сигнала и шума

Используем в качестве корреляционной функции её (смещённую) статистическую оценку. Например, для последовательности v_k оценка корреляционной функции имеет вид

$$b_v^*[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} v_{m+n} v_n,$$

и аналогично для всех других последовательностей.

На рис. 4.6 показаны оценки корреляционных функций полезного сигнала и аддитивного шума, а на рис. 4.7 — Взаимная корреляционная функция зашумлённого сигнала x_k и AR-последовательности v_{1k} . Отметим, что получившаяся оценка корреляционной функции белого шума заметно далека от идеальной (дельта-образной): выбросы боковых пиков достигают 15%.

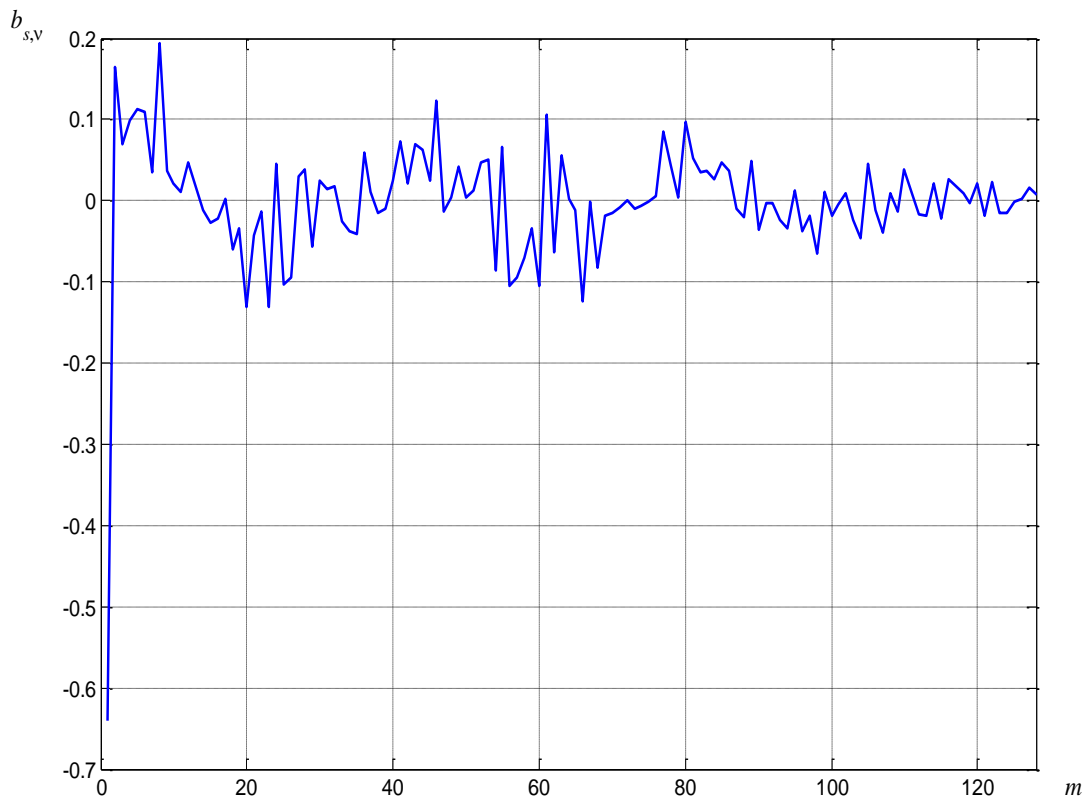


Рис. 4.7. Взаимная корреляционная функция зашумлённого сигнала x_k и AR-последовательности v_{1k}

Построим для оценки последовательности v_{1k} винеровский КИХ-фильтр различных порядков: $P = 2, 6$ и 10 .

На рис. 4.8 представлены графики “очищенного” сигнала, т. е. значения разностной последовательности

$$\hat{x}_k = x_k - \hat{v}_{1k}.$$

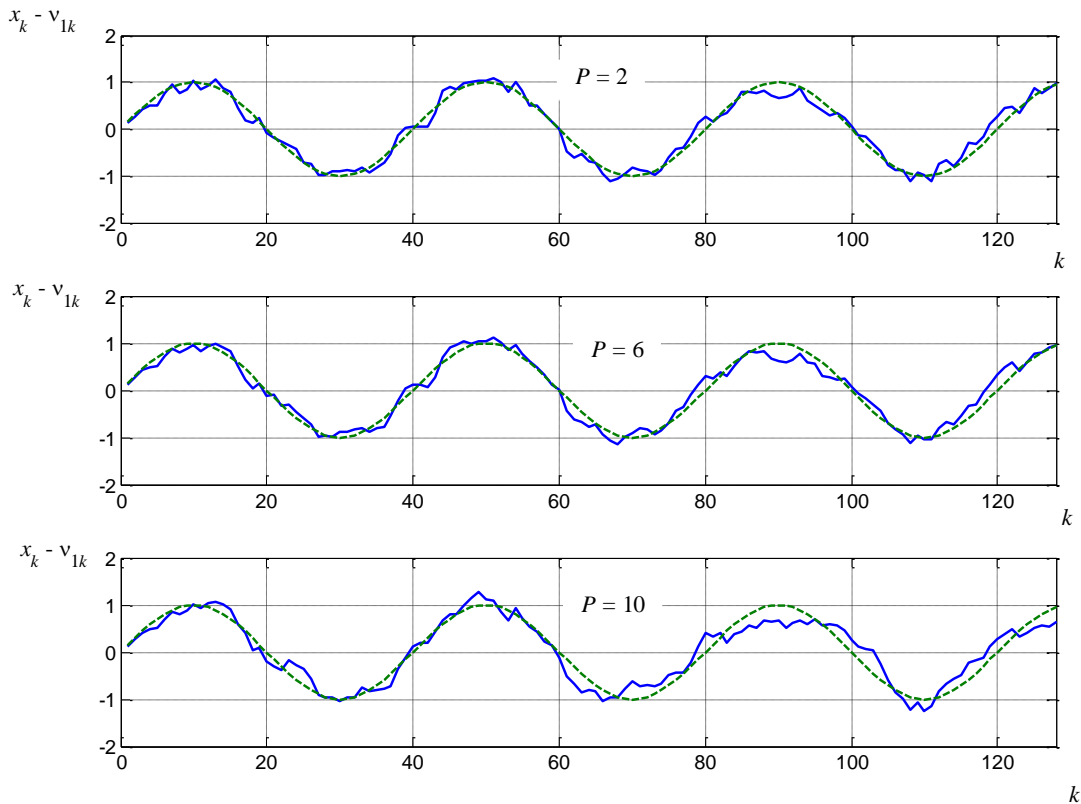


Рис. 4.8. Результаты удаления шума для разных порядков фильтра

Несмотря на кажущуюся идентичность “качества очищения” (визуально даже может показаться, что фильтр 10-го порядка очищает хуже, чем фильтр 2-го и 6-го порядков), среднеквадратическая ошибка очищения уменьшается с ростом порядка фильтра:

$$\sum_{k=1}^{128} (s_k - \hat{x}_k)^2 = 61,9 \text{ для } P = 2;$$

$$\sum_{k=1}^{128} (s_k - \hat{x}_k)^2 = 60,5 \text{ для } P = 6;$$

$$\sum_{k=1}^{128} (s_k - \hat{x}_k)^2 = 59,6 \text{ для } P = 10.$$

По поводу соответствия количественных (объективных) показателей и визуального (субъективного) восприятия результатов обработки сигнала уместно сделать следующие замечания.

Во-первых, специфический (как в данном случае — гармонический) характер обрабатываемых сигналов может оказаться причиной того, что увеличение “мощности” обрабатывающего устройства, например, порядка фильтра, не приведёт к ожидаемому улучшению результата.

Во-вторых, существует известный “парадокс субъективного восприятия”, заключающийся в том, что зачастую приборы, обладающие худшими характеристиками, обеспечивают лучше субъективное восприятие (например, звука или изображения) по сравнению с теми приборами, которым они уступают по “объективным” показателям.

4.2. РЕАЛИЗАЦИЯ ВИНЕРОВСКОГО БИХ-ФИЛЬТРА

Формулировка задачи винеровской фильтрации для БИХ-фильтра остаётся такой же: для входной последовательности ξ_k найти импульсную характеристику h_k , такую, что сигнал η_k на выходе фильтра будет иметь минимальную среднеквадратическую ошибку. Разница состоит в том, что передаточная характеристика БИХ-фильтра содержит бесконечное число слагаемых. При этом возможны случаи реализуемого фильтра, когда

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

и нереализуемого фильтра, когда

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$

4.2.1. Нереализуемый БИХ-фильтр Колмогорова–Винера

Уравнения Винера–Хопфа, определяющие наилучшую, в смысле минимума СКО, оценку

$$\eta_k = \xi_k * h_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \xi_{k-m} \quad (4.2.1)$$

полезного сигнала s_k в его аддитивной смеси

$$\xi_k = s_k + v_k$$

с шумом v_k , можно получить на основе ортогонального принципа.

Повторив дословно те же рассуждения, которые проводились для КИХ-фильтра, получим формулировку *проекционной теоремы для нереализуемого БИХ-фильтра*:

$$\mathbf{E}[\xi_{k-i}\Delta_k^*] = \mathbf{E}[\xi_{k-i}^*\Delta_k] = 0, \quad -\infty < i < \infty, \quad (4.2.2)$$

где

$$\Delta_k = \eta_k - s_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \xi_{k-i} - s_k. \quad (4.2.3)$$

Отсюда подстановкой (4.2.3) в (4.3.3) имеем уравнения Винера–Хопфа:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m b_{\xi}[i-m] = b_{s_{\xi}}[i], \quad -\infty < i < \infty \quad (4.2.4a)$$

или

$$h_i * b_{\xi}[i] = b_{s_{\xi}}[i], \quad -\infty < i < \infty \quad (4.2.4b)$$

Матричная форма уравнений (4.2.4) не очень удобна, поскольку в этом случае придётся иметь дело с матрицами, имеющими бесконечное число строк и столбцов.

Как уже было показано, в том случае, когда полезный сигнал и шум некоррелированы,

$$b_{\xi}[i] = b_s[i] + b_v[i]$$

и

$$b_{s_{\xi}}[i] = b_s[i].$$

Используя теорему о свёртке, соотношения (4.2.4) можно переписать в спектральной области:

$$H(\omega) = \frac{P_{s_{\xi}}(\omega)}{P_{\xi}(\omega)}, \quad (4.2.5a)$$

и в z -области:

$$H(z) = \frac{P_{s_{\xi}}(z)}{P_{\xi}(z)}, \quad (4.2.5b)$$

где в знаменателе находится собственный спектр (спектральная плотность мощности) входного сигнала, а в числителе — взаимный спектр входного и полезного сигналов.

Для некоррелированных последовательностей s_k и v_k спектр входной последовательности представляет собой сумму спектров полезного сигнала и помехи:

$$P_{\xi}(\omega) = P_s(\omega) + P_v(\omega),$$

а взаимный спектр определяется спектром полезного сигнала:

$$P_{s\xi}(\omega) = P_s(\omega),$$

так что

$$H(\omega) = \frac{P_s(\omega)}{P_s(\omega) + P_v(\omega)}, \quad (4.2.6a)$$

или

$$H(z) = \frac{P_s(z)}{P_s(z) + P_v(z)}. \quad (4.2.6б)$$

Соотношения (4.2.5) и (4.2.6) полностью идентичны соотношению (1.1.9), описывающему характеристику оптимального нереализуемого фильтра непрерывных сигналов. Разница лишь в том, что в (1.1.9) фигурируют энергетические спектры, полученные непрерывным преобразованием Фурье, а в (4.2.5) — дискретно-временные преобразования Фурье.

Как и для непрерывных сигналов, в том случае, когда

$$P_s(\omega) \gg P_v(\omega),$$

т. е. при больших отношениях сигнал-шум, можно считать, что частотная характеристика фильтра имеет постоянное значение:

$$|H(\omega)| \approx 1.$$

Такой фильтр пропускает практически без искажений все спектральные составляющие.

С другой стороны, когда

$$P_s(\omega) \ll P_v(\omega),$$

значения частотной характеристики весьма малы:

$$|H(\omega)| \approx 0.$$

В этом случае задача фильтра — подавить шумовой процесс, обеспечивая на входе значения, близкие (в пределе — равные) нулю.

Фильтр, характеристики которого удовлетворяют уравнениям (4.2.4) и (4.2.5), обеспечивает минимальную СКО, равную

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = b_s[0] - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m b_{s\xi}^*[i]. \quad (4.2.7)$$

Используя соотношение Парсеваля, фигурирующую в (4.2.7) сумму можно представить в интегральной форме. С учётом того, что

$$b_s[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega) d\omega,$$

имеем

$$\begin{aligned}\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] &= b_s[0] - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) P_{s\xi}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[P_s(\omega) - H(\omega) P_{s\xi}^*(\omega) \right] d\omega, \quad (4.2.7a)\end{aligned}$$

или, эквивалентно, в z -области

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[P_s(z) - H(z) P_{s\xi}^*(1/z^*) \right] z^{-1} dz, \quad (4.2.7б)$$

где C — любой замкнутый контур в области сходимости подынтегральной функции, охватывающий все полюсы и начало координат.

Для независимых последовательностей, когда $P_{s\xi}(\omega) = P_s(\omega)$, причём $P_s(\omega)$ — вещественная функция, имеем

$$\begin{aligned}\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[P_s(\omega) - H(\omega) P_s(\omega) \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega) \left[1 - \frac{P_s(\omega)}{P_s(\omega) + P_v(\omega)} \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_s(\omega) \frac{P_v(\omega)}{P_s(\omega) + P_v(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\omega) H(\omega) d\omega. \quad (4.2.8)\end{aligned}$$

Рассмотрим пример определения оптимальной характеристики нереализуемого БИХ-фильтра. Пусть полезным сигналом является вещественная AR(1)-последовательность со спектром

$$P_s(z) = \frac{b_0^2}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)},$$

и он поступает на вход фильтра в аддитивной смеси с не зависимым от него белым шумом, имеющим дисперсию σ_v^2 .

Согласно (4.2.6), сразу получаем выражение для передаточной характеристики оптимального фильтра:

$$H(z) = \frac{b_0^2}{b_0^2 + \sigma_v^2 (1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}.$$

При этом минимальная СКО равна

$$\begin{aligned}\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\omega) H(\omega) d\omega = \\ &= \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} h_0,\end{aligned}$$

где составляющая h_0 импульсной характеристики может быть найдена из $H(z)$ обратным z -преобразованием после подстановки в неё числовых значений α , b_0 и σ_v^2 , определяющих конкретный вид сигнала и шума.

Выберем для определённости следующие числовые значения:

$$\alpha = 0,5; b_0 = 0,5; \sigma_v^2 = 0,25.$$

Тогда передаточная характеристика имеет вид

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{0,25}{0,25 + 0,25(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5z)} = \\ &= \frac{1}{2,25 - 0,5z - 0,5z^{-1}} = \frac{z}{-0,5z^2 + 2,25z - 0,5} = \\ &= \frac{-2z^{-1}}{(1 - 0,23z^{-1})(1 - 4,27z^{-1})}.\end{aligned}$$

Для того, чтобы воспользоваться таблицей обратных z -преобразований представим $H(z)$ в виде суммы простейших дробей:

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - 0,23z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 4,27z^{-1}}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем:

$$H(z) = \frac{0,50}{1 - 0,23z^{-1}} - \frac{0,50}{1 - 4,27z^{-1}}.$$

Результат обратного z -преобразования от функции

$$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

зависит от абсолютного значения α . Если $|\alpha| < 1$, то соответствующий оригинал (последовательность во временной области) есть

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \right] = \alpha^m u_m,$$

где, как обычно, u_k — функция единичного скачка:

$$u_m = \begin{cases} 1, & m \geq 0; \\ 0, & m < 0. \end{cases}$$

Если же $|\alpha| > 1$, то

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \right] = -\alpha^m u_{-m-1}.$$

Учитывая, что¹ $0,23 = 1 / 4,27$, запишем результирующее обратное z -преобразование:

$$h_m = 0,50 \left(0,23^m u_m + \frac{1}{0,23^m} u_{-m-1} \right) = 0,50 \cdot 0,23^{|m|}.$$

Минимальная СКО равна

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \sigma_v^2 h_0 = 0,25 \cdot 0,50 = 0,13.$$

Сравним это значение со значением СКО, которое имеет место в отсутствие фильтрации, т. е. когда в качестве “оптимальной” оценки фигурирует сама последовательность ξ_k . В этом случае

$$\Delta_k = \xi_k - s_k = s_k - v_k - s_k = -v_k,$$

и

$$\mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \mathbf{E} \left[|v_k|^2 \right] = 0,25.$$

Видно, что применение² БИХ-фильтра по сравнению с КИХ-фильтром снижает СКО в два раза.

4.2.2. Реализуемый БИХ-фильтр Колмогорова–Винера

Импульсная характеристика реализуемого БИХ-фильтра равна нулю при отрицательных индексах:

$$h_k = 0, k < 0.$$

Следовательно, в свёртке, определяющей выходной сигнал, должна фигурировать сумма с неотрицательными индексами:

$$\eta_k = \xi_k * h_k = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \xi_{k-m}. \quad (4.2.9)$$

Также сумма с неотрицательными индексами будет фигурировать в уравнениях Винера–Хопфа:

¹ Взаимно-обратность корней следует из свойств квадратного уравнения (теорема Виета).

² В данном случае — умозрительное применение, поскольку фильтр нереализуем.

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m b_{s\xi}[i-m] = b_{s\xi}[i], \quad 0 \leq i < \infty. \quad (4.2.10)$$

При решении уравнений (4.2.10) возникает ситуация, уже знакомая по аналогичной задаче для непрерывных сигналов: получить формальное решение (4.2.10) нетрудно (это всё та же свёртка), но для такого решения не выполняется принцип реализуемости.

В разд. 1.2 был рассмотрен один из возможных методов решения этой задачи, заключающийся в факторизации спектра входного сигнала, т. е. представлении его в виде комплексно-сопряжённых множителей. Применим этот же метод для случая дискретного БИХ-фильтра, тем более, что факторизация спектра для регулярных последовательностей уже была рассмотрена в предыдущих главах.

Прежде чем приступить к решению общей задачи, рассмотрим частный случай, когда на вход фильтра поступает белый шум с единичной дисперсией — обозначим эту последовательность w_k , а соответствующую импульсную характеристику — через h_{wi} .

Уравнения Винера–Хопфа для w_k имеют вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_{wm} b_w[i-m] = b_{sw}[i], \quad 0 \leq i < \infty,$$

где $b_w[i] = \delta[i]$ — корреляционная функция белого шума, а $b_{sw}[i]$ — взаимная корреляционная шума между общей последовательностью w_k на входе фильтра и той её частью s_k , которая является полезным сигналом.

Действие дельта-функции приводит к тому, что из всей суммы, стоящей в левой части уравнений, остаётся лишь слагаемой с $m = i$:

$$h_{wi} = b_{sw}[i], \quad 0 \leq i < \infty.$$

Следовательно, получающееся решение будет удовлетворять требованию реализуемости. Таким образом, винеровский реализуемый БИХ-фильтр для белого шума имеет вид

$$h_{wi} = b_{sw}[i]u_i, \quad (4.2.11)$$

где, как и прежде, u_k — функция единичного скачка.

Следуя традиционному подходу в обозначениях, обозначим z -преобразование соотношения (4.2.11) следующим образом:

$$Z[h_{wi}] = Z[b_{sw}[i]u_i] = [P_{sw}(z)]_+. \quad (4.2.12)$$

“Истинное” z -преобразование от взаимной корреляционной функции даёт взаимный энергетический спектр, а символ “+” в нижнем индексе означает, что это преобразование было применено к последовательности, у которой предварительно обнулены все члены в отрицательной временной области.

Итак, если на вход фильтра поступает белый шум (т. е. дельта-коррелированная последовательность), то оптимизации фильтра осуществляется на основе соотношений (4.2.11). Следовательно, в более общем случае — когда корреляционная функция входной последовательности отличается от дельта-функции — достаточно провести *обеление* последовательности, после чего задача сведётся к уже решённой.

Вопрос обеления рассматривался в разд. 3.2: если задана передаточная характеристика $Q(z)$ какого-либо фильтра, то инверсный фильтр, имеющий характеристику $1 / Q(z)$, называется обеляющим. Это означает, что если на вход такого обеляющего фильтра подаётся последовательность ξ_k со СПМ, определяемой соотношением

$$P_{\xi}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*),$$

то на выходе фильтра окажется белый шум с единичной дисперсией. Другими словами, каскадное соединение фильтра $Q(z)$, являющегося порождающим для последовательности ξ_k , и обеляющего фильтра $G(z)$ приводит к последовательности w_k , для которой СПМ равна единице:

$$\begin{aligned} P_w(z) &= P_{\xi}(z) G(z) G^*(1/z^*) = \\ &= \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*) \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*)} = 1. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно указать решение общей задачи. Пусть $H(z)$ — характеристика реализуемого БИХ-фильтра, обеспечивающего оптимальную, в смысле минимума СКО, оценку полезного сигнала s_k на основе анализа зашумлённой последовательности ξ_k .

Напомним, что при цифровой обработке в качестве анализируемых сигналов, рассматриваются регулярные последовательности, полученные с выхода порождающих фильтров передаточная характеристика $Q(z)$ которых рациональна:

$$Q(z) = \frac{D(z)}{G(z)}.$$

Это позволяет осуществить факторизацию спектра, т. е. представить СПМ последовательности ξ_k в виде

$$P_\xi(z) = \sigma_0^2 \left[\frac{B(z)}{A(z)} \right] \left[\frac{B^*(1/z^*)}{A^*(1/z^*)} \right],$$

где $A(z)$ и $B(z)$ — нормированные полиномы относительно z^{-1} :

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p};$$

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q},$$

все корни которых находятся за пределами единичной окружности, и каждый ноль (полнос) встречается только в виде комплексно-сопряжённой пары.

Для получения вида оптимальной характеристики фильтра будем использовать следующий методический подход.

Представим, что последовательность ξ_k фильтруется каскадом из трёх фильтров, имеющих передаточные характеристики $G(z)$, $G^{-1}(z)$ и $H(z)$, как показано на рис. 4.9. Реализуемый фильтр $G(z)$ является обеляющим для ξ_k , а реализуемый инверсный фильтр $G^{-1}(z)$ — восстанавливающим, т. е. на его выходе вновь порождается последовательность ξ_k . Таким образом, из представленной схемы следует, что в конечном итоге оценка полезного s_k сигнала производится фильтром $H(z)$, когда на его входе присутствует анализируемая последовательность, т. е. так, как формулируется в задаче винеровской фильтрации.

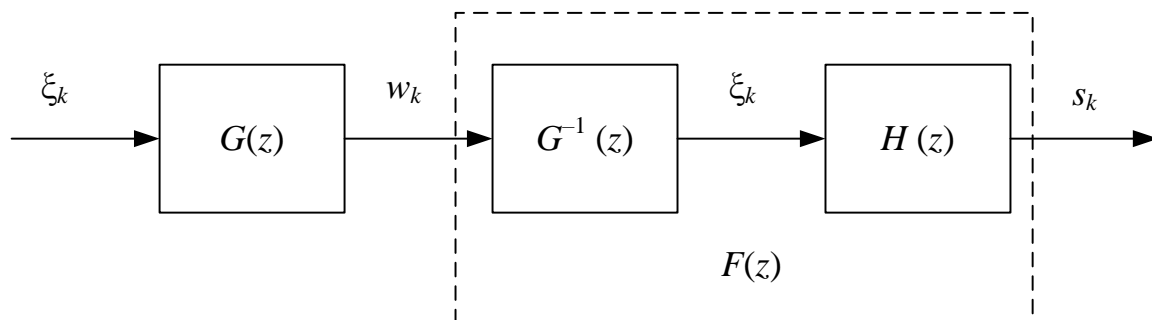


Рис. 4.9. Реализация винеровская фильтрация при использовании обеляющего фильтра

Найдём структуру фильтра $F(z)$, исходя из имеющихся уравнений Винера–Хопфа. Соотношение (4.1.12) представляет z -преобразование, т. е. передаточную характеристику оптимального фильтра, когда на его входе присутствует белый шум. Другими словами, $Z[h_{wi}]$ и есть каскад из двух фильтров

$$Z[h_{wi}] \equiv F(z) = G^{-1}(z)H(z) = [P_{sw}(z)]_+,$$

являющийся реализуемым фильтром (его реализуемость следует из реализуемости фильтров $G^{-1}(z)$ и $H(z)$).

Пусть g_k — импульсная характеристика обеляющего фильтра. Тогда белый шум w_k может быть получен как свёртка g_k с анализируемой последовательностью:

$$w_k = g_k * \xi_k = \sum_{m=0}^{\infty} g_m \xi_{k-m}.$$

Следовательно, взаимная корреляционная функция между полезным сигналом и белым шумом есть

$$\begin{aligned} b_{sw}[i] &= \mathbf{E}[s_k w_{k-i}^*] = \mathbf{E}\left[s_k \sum_{m=0}^{\infty} g_m^* \xi_{k-i-m}^*\right] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g_m^* \mathbf{E}[s_k \xi_{k-i-m}^*] = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^* b_{s\xi}[i+m]. \end{aligned}$$

Тогда, используя соотношение (3.1.10), связывающие взаимные спектры последовательностей, получаем

$$P_{sw}(z) = P_{s\xi}(z)G^*(1/z^*) = \frac{P_{s\xi}(z)}{\sigma_0 Q^*(1/z^*)},$$

и, таким образом,

$$F(z) = \left[\frac{P_{s\xi}(z)}{\sigma_0 Q^*(1/z^*)} \right]_+ = \frac{1}{\sigma_0} \left[\frac{P_{s\xi}(z)}{Q^*(1/z^*)} \right]_+. \quad (4.2.13)$$

Итак, получен вид передаточной характеристики $F(z)$. Теперь, для окончательного решения задачи, достаточно увидеть по схеме на рис. 4.9, что

$$F(z) = G^{-1}(z)H(z)$$

или

$$H(z) = G(z)F(z).$$

Поскольку фильтр $G(z)$ является обеляющим для последовательности ξ_k ,

$$G(z) = \frac{1}{\sigma_0 Q(z)},$$

отсюда

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_{s\xi}(z)}{Q^*(1/z^*)} \right]_+. \quad (4.2.14)$$

В том случае, когда полезная и шумовая составляющие анализируемой последовательности независимы,

$$P_{s\xi}(z) = P_s(z);$$

$$P_\xi(z) = P_s(z) + P_v(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*),$$

и

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_s(z)}{Q^*(1/z^*)} \right]_+. \quad (4.2.14a)$$

Соотношение (4.2.14) представляет (в терминах порождающего фильтра и взаимного энергетического спектра) оптимальную структуру реализуемого БИХ-фильтра, обеспечивающего оценку полезного сигнала s_k по наблюдению за анализируемой последовательностью ξ_k .

При использовании такого фильтра минимальная СКО равна

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = b_s[0] - \sum_{m=0}^{\infty} h_m b_{s\xi}^*[i]. \quad (4.2.15)$$

Соотношение (4.2.15) очень похоже на аналогичное соотношение (4.2.7), но сумма, стоящая в правой части, содержит слагаемые только с неотрицательными индексами.

Запись минимальной СКО в интегральной форме идентична выражению (4.2.7a), но фигурирующая в нём частотная характеристика теперь определяется соотношением (4.2.14).

Рассмотрим пример получения оптимальной характеристики реализуемого БИХ-фильтра для случая, когда s_k и v_k независимы, причём мешающим сигналом является белый шум с единичной дисперсией, а полезный сигнал — это AR(1)-последовательность, описываемая разностным уравнением

$$s_k = 0,8s_{k-1} + w_k,$$

где w_k — белый шум с дисперсией $\sigma_0^2 = 0,36$.

Корреляционная функция заданной AR(1)-последовательности равна

$$b_s[m] = 0,8^{|m|},$$

следовательно,

$$P_s(z) = \frac{1 - 0,8^2}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)} = \frac{0,36}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)}.$$

Спектр анализируемой последовательности

$$\begin{aligned} P_\xi(z) &= P_s(z) + P_v(z) = \frac{0,36}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)} + 1 = \\ &= -\frac{1}{z} \frac{0,8z^2 - 2z + 0,8}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)} = -\frac{1}{z} \frac{0,8(z - 0,5)(z - 2)}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)} = \\ &= 1,6 \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5z)}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Видно, что спектр $P_\xi(z)$ вещественный, так что он должен иметь вид

$$P_\xi(z) = \sigma_0^2 Q(z)Q(z^{-1}).$$

Сравнивая с (4.2.16), видим:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= 1,6; \\ Q(z) &= \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}}. \end{aligned}$$

Фигурирующее в (4.2.14) отношение

$$\frac{P_s(z)}{Q(z^{-1})} = \frac{0,36(1 - 0,8z)}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)(1 - 0,5z)} = \frac{0,36}{(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,5z)}$$

разложим на простейшие дроби:

$$\frac{P_s(z)}{Q(z^{-1})} = \frac{0,36z^{-1}}{(1 - 0,8z^{-1})(z^{-1} - 0,5)} = \frac{0,6}{1 - 0,8z^{-1}} - \frac{0,6}{1 - 2z^{-1}}.$$

Из свойств обратного z -преобразования (табл. 2.3) следует, что первое слагаемое соответствует временной последовательности $0,8^k u_k$, с неотрицательными индексами, в то время как второе слагаемое — последовательности $-0,8^k u_{-k-1}$, состоящей из членов с отрицательными индексами. Следовательно,

$$\left[\frac{P_s(z)}{Q(z^{-1})} \right]_+ = \frac{0,6}{1 - 0,8z^{-1}}.$$

Таким образом, передаточная характеристика оптимального реализуемого БИХ-фильтра имеет, согласно (4.2.14), следующий вид:

$$H(z) = \frac{1}{1,6} \frac{1 - 0,8z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} \frac{0,6}{1 - 0,8z^{-1}} = \frac{0,375}{1 - 0,5z^{-1}}, \quad (4.2.17)$$

а импульсная характеристика —

$$h_k = 0,375 \cdot 0,5^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.2.18)$$

При этом обеспечивается минимальная СКО, равная

$$\begin{aligned} \min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] &= 1 - 0,375 \sum_{m=0}^{\infty} (0,5 \cdot 0,8)^m = \\ &= 1 - 0,375 \frac{1}{1 - 0,4} = 1 - 0,625 = 0,375. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Видно, что оптимальный БИХ-фильтр первого порядка обеспечивает минимальную СКО меньшую, чем оптимальный КИХ-фильтр второго порядка, для которого (разд. 4.1.1)

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = 0,4.$$

С другой стороны, посмотрим, какую минимальную СКО обеспечивает для рассматриваемой последовательности нереализуемый БИХ-фильтр, системная функция которого

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{P_s(z)}{P_\xi(z)} = \frac{0,36(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)}{1,6(1 - 0,8z^{-1})(1 - 0,8z)(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5z)} = \\ &= \frac{0,225}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5z)}, \end{aligned}$$

и, соответственно, импульсная характеристика

$$h_k = 0,3 \cdot 0,5^{|k|}, \quad -\infty < k < \infty.$$

Из (4.2.7) имеем:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] &= 1 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} 0,3(0,5 \cdot 0,8)^{|m|} = 1 - 2 \sum_{m=0}^{\infty} 0,3(0,5 \cdot 0,8)^m + 0,3 = \\ &= 1,3 - 0,6 \frac{1}{1 - 0,4} = 0,3, \end{aligned}$$

что, ожидаемо, меньше, чем для реализуемого БИХ-фильтра.

4.2.3. Линейное предсказание на основе реализуемого БИХ-фильтра

В разд. 4.1.2 решалась задача линейного предсказания, осуществляемого по конечному числу наблюдаемых отсчётов. Рассмотрим аналогичную задачу для реализуемого БИХ-фильтра, когда оценка \hat{x}_{k+1} текущего элемента осуществляется на основе бесконечного числа отсчётов:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x_{k-n}. \quad (4.2.20)$$

Трактуя x_{k+1} как полезный сигнал s_k , получим взаимную корреляционную функцию между x_k и s_k :

$$b_{s\xi}[m] = \mathbf{E}[s_k x_{k-m}^*] = \mathbf{E}[x_{k+1} x_{k-m}^*] = b_{\xi}[m+1].$$

Тогда, с использованием свойств z -преобразования (табл. 2.2),

$$P_{s\xi}(z) = zP_{\xi}(z),$$

и оптимальная характеристика винеровского фильтра-предсказателя имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{zP_{\xi}(z)}{Q^*(1/z^*)} \right]_+.$$

Но $P_x(z)$ — это спектр регулярной последовательности на выходе порождающего фильтра, т. е.

$$P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*),$$

тогда выражением для $H(z)$ упрощается:

$$H(z) = \frac{1}{Q(z)} [zQ(z)]_+.$$

Для регулярных последовательностей $Q(z)$ является нормированным полиномом:

$$Q(z) = 1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots,$$

т. е. представляет собой z -преобразование последовательности, содержащей члены только с неотрицательными индексами. Следовательно,

$$[Q(z)]_+ \equiv Q(z).$$

При умножении $Q(z)$ на z в сумме

$$zQ(z) = z + q_1 + q_2 z^{-1} + q_3 z^{-2} + \dots$$

появляется слагаемое

$$z \equiv (z^{-1})^{-1}$$

соответствующее минус первой степени в z -преобразовании. Следовательно, при применении операции $[]_+$ оно должно быть отброшено. Таким образом,

$$[zQ(z)]_+ = q_1 + q_2 z^{-1} + q_3 z^{-2} + \dots = z(Q(z) - 1),$$

и оптимальная характеристика винеровского фильтра-предсказателя есть

$$H(z) = \frac{z(Q(z) - 1)}{Q(z)} = z \left(1 - \frac{1}{Q(z)} \right). \quad (4.2.21)$$

Найдём минимальную СКО, которая обеспечивается при использовании фильтра (4.2.21). Согласно (4.2.7),

$$\min \mathbf{E} [|\Delta_k|^2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C [P_s(z) - H(z) P_{s\xi}^*(1/z^*)] z^{-1} dz,$$

где C — любой замкнутый контур в области сходимости подынтегральной функции, охватывающий все полюсы и начало координат. Поскольку

$$P_s(z) = P_\xi(z);$$

$$P_{s\xi}(z) = z P_\xi(z),$$

используя сопряжённую симметрию спектра

$$P_\xi(z) = P_\xi^*(1/z^*),$$

получаем

$$\begin{aligned} \min \mathbf{E} [|\Delta_k|^2] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [P_\xi(z) - z^{-1} H(z) P_\xi^*(1/z^*)] z^{-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C P_\xi(z) [1 - z^{-1} H(z)] z^{-1} dz. \end{aligned}$$

Подставим в это выражение значение $H(z)$, определяемое (4.2.21), тогда

$$\begin{aligned} \min \mathbf{E} [|\Delta_k|^2] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C P_\xi(z) \left[1 - z^{-1} z \left(1 - \frac{1}{Q(z)} \right) \right] z^{-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{P_\xi(z)}{Q(z)} z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sigma_0^2 Q^*(1/z^*) z^{-1} dz = \\ &= \sigma_0^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C Q^*(1/z^*) z^{-1} dz = \sigma_0^2 q_0. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Как уже было сказано, при использовании регулярных последовательностей используются нормированные полиномы, для которых $q_0=1$. С учётом этого, получаем очень простое выражение:

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \sigma_0^2. \quad (4.2.22)$$

В разд. 3.2, где обосновывалась факторизация спектра случайных последовательностей, было получено соотношение, связывающее дисперсию σ_0^2 возбуждающей последовательности с факторизуемым спектром $P_\xi(\omega)$:

$$\sigma_0^2 = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_\xi(\omega) d\omega \right].$$

Следовательно, для минимальной СКО можно записать следующее соотношение:

$$\min \mathbf{E} \left[|\Delta_k|^2 \right] = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_\xi(\omega) d\omega \right]. \quad (4.2.23)$$

Когда в качестве предсказываемой последовательности фигурирует AR(P)-последовательность, имеющий спектр

$$P_\xi(z) = \frac{\sigma_0^2}{A(z)A^*(1/z^*)},$$

где все нули минимально-фазового полинома

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}$$

находятся внутри единичной окружности, оптимальная характеристика линейного предсказателя есть

$$H(z) = z \left(1 - \frac{1}{Q(z)} \right) = z(1 - A(z)) = \sum_{i=1}^P a_i z^{i-1}, \quad (4.2.24)$$

т. е. представляет собой не что иное, как характеристику КИХ-фильтра. Следовательно, несмотря на потенциально возможный учёт “бесконечной” истории процесса, для AR(P)-последовательности реальную роль играют лишь крайние P отсчётов. Это и не удивительно, поскольку AR(P)-последовательность определяется разностным уравнением

$$\xi_k = -a_1 \xi_{k-1} - a_2 \xi_{k-2} - \dots - a_P \xi_{k-P} + v_k,$$

в котором v_k — белый шум. Поскольку отсчётное значение шума v_{k+1} не может быть предсказано по предыдущим значениям сигнала, лучшее, что можно сделать, предсказывая “по здравому смыслу” x_{k+1} — это просто игнорировать шум, формируя оценку

$$\hat{\xi}_{k+1} = -a_1 \xi_k - a_2 \xi_{k-1} - \dots - a_p \xi_{k-p+1},$$

что и описывается соотношением (4.2.24).

Например, для AR(2)-последовательности, задаваемой разностным уравнением

$$\xi_k = 0,9 \xi_{k-1} - 0,2 \xi_{k-2} + v_k,$$

где v_k — белый шум с единичной дисперсией, имеем

$$A(z) = 1 + -0,9z^{-1} + 0,2z^{-2}.$$

Следовательно, оптимальная характеристика фильтра-предсказателя есть

$$H(z) = z(1 - A(z)) = 0,9 - 0,2z^{-1},$$

т. е. предсказание осуществляется по закону

$$\hat{\xi}_{k+1} = 0,9 \xi_k - 0,2 \xi_{k-1}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 4

4.1. Последовательность ξ_k задаётся разностным уравнением

$$\xi_k = \alpha \xi_{k-1} + v_k + \beta v_{k-1},$$

где v_k — белый шум с математическим ожиданием m_v и дисперсией σ_v^2 .

а) Найти линейный предсказатель второго порядка

$$\hat{\xi}_{k+1} = c_0 \xi_k + c_1 \xi_{k-1},$$

минимизирующий среднеквадратическую ошибку предсказания и найти её минимальное значение.

б) Запишем предсказатель в виде

$$\hat{\xi}_{k+1} = C + c_0 \xi_k + c_1 \xi_{k-1}.$$

Найти значения C , c_0 и c_1 , минимизирующие среднеквадратическую ошибку и сравнить их со значениями, найденными в п. а).

4.2. Рассматривается трёхшаговое предсказание

$$\hat{\xi}_{k+1} = c_0 \xi_k + c_1 \xi_{k-1}$$

на основе фильтра первого порядка.

а) Найти уравнения Винера–Хопфа для заданного предсказателя.

б) Для отсчётных значений корреляционной функции

$$\mathbf{r}_\xi = (1, 0, 0, 0, -0,2, -0,9)^T.$$

решить уравнения Винера–Хопфа и найти оптимальные коэффициенты трёхшагового предсказателя.

в) По найденным коэффициентам c_0 и c_1 построим фильтр с характеристикой

$$G(z) = 1 + c_0 z^{-3} + c_1 z^{-4}.$$

Является ли такой фильтр минимально-фазовым? Что можно сказать об эффективности его работы по сравнению с заданным фильтром первого порядка?

4.3. Решить предыдущую задачу при условии, что изначально рассматривается трёхшаговое предсказание на основе фильтра второго порядка.

4.4. Рассматривается задача линейного предсказания в присутствии помехи. Полезным сигналом является AR(1)-последовательность s_k , определяемая разностным уравнением

$$s_k = 0,5s_{k-1} + v_k,$$

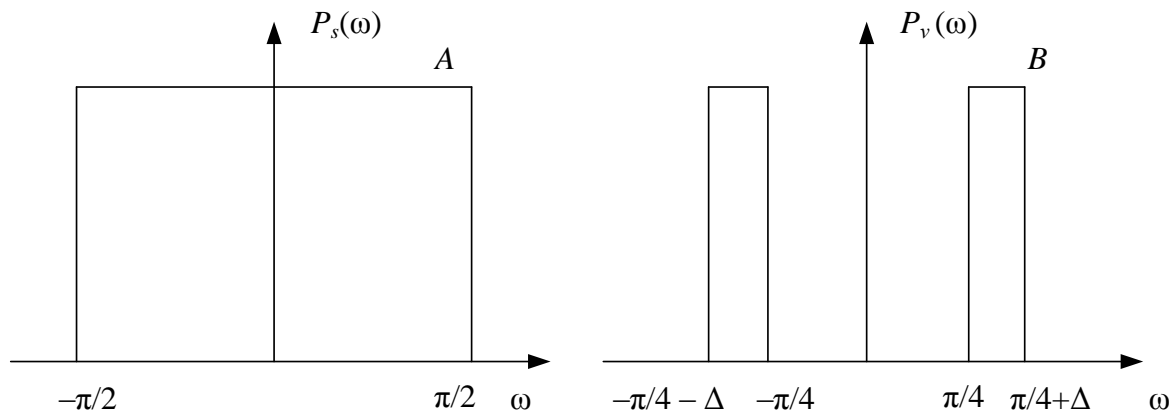
где v_k — белый шум с единичной дисперсией. Помехой — аддитивная, не коррелированная с s_k и v_k последовательность w_k , также являющаяся белым шумом с дисперсией, равной 0,5.

а) Разработать предсказывающий КИХ-фильтр первого порядка и найти среднеквадратическую ошибку предсказания

$$\varepsilon = \mathbf{E} \left[(s_{k+1} - \hat{s}_{k+1})^2 \right].$$

б) Разработать оптимальный винеровский реализуемый БИХ-фильтр и сравнить возникающую среднеквадратическую ошибку с той, что получается в п. а.

4.5. Полезный сигнал s_k оценивается по значениям x_k , представляющим собой аддитивную смесь полезного сигнала и некоррелированной с ним помехи v_k . Спектры $P_s(\omega)$ и $P_v(\omega)$ сигнала и помехи имеют вид, представленный на рисунках.



а) Разработать нереализуемый фильтр Колмогорова–Винера, оценивающий полезный сигнал s_k по наблюдаемым значениям x_k :

$$\hat{s}_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{n-k}.$$

б) Рассчитать среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon = \mathbf{E} \left[(s_k - \hat{s}_k)^2 \right]$$

и сравнить её с той, которая получается, когда в качестве импульсной характеристики используется дельта-функция: $h_n = \delta[n]$.

в) Разработать винеровский КИХ-фильтр второго порядка, имеющий передаточную характеристику

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2},$$

и сравнить получающуюся среднеквадратическую ошибку с теми, что фигурируют в пп. а, б.

4.6. Полезный сигнал s_k наблюдается в условиях аддитивного белого шума v_k с единичной дисперсией и реверберационной помехи, т. е. наблюдаются отсчёты

$$\xi_k = s_k + 0,8s_{k-1} + v_k.$$

Будем считать, что s_k — это AR(1)-последовательность, для которой известны отсчётные значения корреляционной функции:

$$\mathbf{b}_\xi = [4,0 \ 2,0 \ 1,0 \ 0,5]^T.$$

а) Разработать нереализуемый винеровский БИХ-фильтр и найти для него среднеквадратическую ошибку.

б) Разработать реализуемый винеровский БИХ-фильтр, найти для него среднеквадратическую ошибку и сравнить с аналогичным значением, полученным в п. а.

4.7. Стационарная последовательность ξ_k , характеризуемая корреляционной функцией

$$b_\xi[m] = \sigma_\xi^2 \alpha^{|m|}, \quad |\alpha| < 1,$$

известна в концевых точках k_A и k_B заданного интервала $[k_A; k_B]$.

Основываясь на этих двух наблюдениях, определить оптимальную оценку

$$\hat{\xi}_k = a_k \xi_{k_A} + b_k \xi_{k_B}$$

для следующих областей:

а) $k < k_A$;

б) $k > k_B$;

в) $k_A < k < k_B$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М. : Дрофа, 2006. — 719 с.
2. *Гельгор А. Л.* Методы моделирования случайных величин и случайных процессов / А. Л. Гельгор, А. И. Горлов, Е. А. Попов. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 217 с.
3. *Свешников А. Г.* Теория функций комплексного переменного / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Физматлит, 2010. — 334 с.
4. *Гельгор А.Л.* Общая теория связи. Проверка статистических гипотез. Оценивание параметров. Оптимальный приём сигналов / Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2013. — 227 с.
5. *Ивченко Г. И.* Введение в математическую статистику / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — М. : Издательство ЛКИ, 2010. — 600 с.
6. *Солонина А. И.* Основы цифровой обработки сигналов. / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьёва. — СПб. : БХВ–Петербург, 2005. — 749.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М. : Физматлит, 2001. — 616 с.