

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

**ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ
ТЕХНИКА И МЕТРОЛОГИЯ**

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

**ЧАСТЬ 1 Приборы,
сведения из теоретической метрологии,
статистическая обработка результатов измерений**

**Издание второе
переработанное и дополненное**

Под редакцией проф. Г.Н.Солопченко

**Санкт - Петербург
2014**

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. Технические средства общего применения, используемые в лабораторных работах.....	9
1.1. Вольтметры универсальные цифровые GDM-8135, GDM-8135.....	10
1.2. Миллиомметр цифровой GOM-802	13
1.3. Цифровые средства измерения параметров L, C, R	13
1.4. Электронно-лучевые осциллографы	16
1.5. Источники питания	20
1.6. Общие рекомендации и пояснения к программному обеспечению	21
2. Погрешности результатов измерений.....	24
2.1. Метрологическая схема происхождения погрешности результатов измерений.....	24
2.2. Классификация измерений и погрешностей измерений.....	28
2.3. Математическое описание погрешностей средств измерений и результатов измерений.....	30
2.4. Основные принципы нормирования характеристик погрешности средств измерений.....	35
2.5. Общие принципы определения и представления характеристик погрешности результатов измерений в условиях действия случайных факторов.....	39
2.6. Правила и примеры представления результатов прямых измерений.....	41
2.7. Оценка характеристик погрешности и представление результатов косвенных измерений.....	46
3. Методы математической статистики, применяемые в практике измерений.....	49
3.1. Подготовка массива результатов измерений для статистической обработки.....	50

3.2. Точечное статистическое оценивание значения измеряемой величины и характеристик погрешности....	53
3.3. Интервальное статистическое оценивание.....	58
3.4. Применение методов проверки статистических гипотез при обработке результатов многократных наблюдений.....	66
3.5. Определение статических характеристик преобразования по экспериментальным данным.....	68
3.6. Идентификация плотности распределения случайной составляющей погрешности измерений с помощью проверки статистических гипотез.....	81
Приложение 1. Форма титульного листа отчета о лабораторной работе	86
Приложение 2. Указания по составлению отчета о лабораторной работе	87
Список рекомендуемой литературы.....	90

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цикл лабораторных работ, описанных в настоящем издании, предназначен для практической поддержки обучения по дисциплинам, дающим общие сведения в области теории и практики технических измерений и метрологии.

Настоящий лабораторный практикум представляет собой комплект из нескольких частей, изданных отдельными брошюрами.

Первая часть является общей, в ней содержатся сведения, используемые для выполнения всех лабораторных работ, а именно:

- сведения о характеристиках типичных средств измерений, используемых работах, и о правилах их применения,
- сведения из области нормативной метрологии о нормировании погрешности средств измерений, о правилах представления результатов измерений и оценки характеристик погрешностей этих результатов,
- сведения из теории вероятностей, необходимые для формализации математических моделей средств измерений, измеряемой величины и объекта измерений,
- сведения из математической статистики, необходимые для обработки результатов измерений и для экспериментальной оценки погрешности измерений,
- требования к оформлению отчетов по лабораторным работам.

Другие части лабораторного практикума изданы отдельными брошюрами, каждая из которых содержит методические указания по выполнению двух лабораторных работ.

В ходе выполнения работ студенты знакомятся с наиболее распространенными методами измерений основных параметров электрических величин (постоянного и переменного напряжения и силы тока, мощности электрической энергии, частоты и периода импульсных и гармонических сигналов, активного сопротивления, емкости и индуктивности), а также механических деформаций. Перечисленные величины составляют значительную часть величин, подлежащих измерениям при испытаниях и эксплуатации электроэнергетических объектов, при управлении технологическими процессами, при научных исследованиях.

Предусмотрено практическое ознакомление с наиболее типичными источниками методических и инструментальных, случайных и систематических погрешностей, возникающих в реальных условиях измерений, с со-

временными методами учета и коррекции этих погрешностей, а также метрологическими правилами представления результатов измерений. В каждой работе студенты закрепляют теоретические знания о всех принятых в настоящее время методах нормирования и представления в метрологической документации характеристик погрешности средств измерений и используют нормированные значения для оценки инструментальной и методической составляющих погрешности результатов измерений.

Кроме практического руководства описание каждой работы содержит краткую теоретическую часть, раскрывающую математические модели преобразования измерительной информации, взаимодействия средств измерений с объектом, а также математические модели погрешности измерений, специфические для соответствующей работы.

Во всех работах, в том числе поддерживаемых компьютером, предусмотрен значительный объем ручных операций по составлению электрических схем измерений, по варьированию этих схем, по регулированию параметров и уравниванию схем сравнения. Такой подход способствует углубленному практическому изучению *специфических особенностей любого процесса измерений и его метрологической поддержки*, которые инвариантны к дальнейшим преобразованиям и к используемому компьютеру.

Представленный цикл содержит восемь работ. Каждая работа может быть легко адаптирована к требованиям образовательных стандартов, предусматривающих обучение по дисциплинам “Информационно-измерительная техника и электроника”, “Метрология, стандартизация и сертификация”.

Объем каждой работы может варьироваться в широких пределах: от одного двухчасового выполнения до небольшого, но полезного метрологического исследования.

Характерным примером таких возможностей является работа № 1 “Статистические методы обработки результатов измерений и определения характеристик случайных погрешностей”. В этой работе используется аналого-цифровой преобразователь напряжения, сопряженный с персональной ЭВМ. В работе предусмотрены варианты обработки реальных данных, получаемых с помощью АЦП, а также массивов данных, получаемых посредством цифрового моделирования случайных погрешностей измерений, плотности распределений которых выбираются из обширного меню. В работе исследуются разнообразные методы статистической обработки получаемых данных с целью определения характеристик погрешности аналого-цифрового преобразователя и результатов измерений (точеч-

ные и интервальные оценки характеристик систематической и случайной составляющих, проверяются гипотезы о виде закона распределения погрешностей). Работа выполняется в диалоговом режиме с ЭВМ. Промежуточные и окончательные результаты представляются в графическом режиме.

В работе № 2 “Измерение сопротивлений на постоянном токе” студенты знакомятся с наиболее распространенными методами измерения сопротивления, которые реализуются как автономными измерительными приборами (аналоговыми и цифровыми омметрами, мультиметрами, односторонним и двойным мостами), так и современными измерительно-вычислительными системами. Диапазон измеряемых сопротивлений: от 0.1 до 100000 Ом. Выполняется сравнительное исследование характеристик погрешности измерения сопротивления с помощью разнообразных методов и приборов и делаются выводы о предпочтительных областях применения этих методов.

В работе № 3 выполняется исследование особенностей измерения параметров постоянного напряжения с помощью стрелочных, электронных и цифровых вольтметров. На физической модели участка электрической цепи исследуются методические и инструментальные составляющие погрешностей, а также погрешности, порождаемые действием продольных и поперечных помех. Моделируются продольные и поперечные помехи и выполняется сравнительное исследование методов их подавления.

В работе № 4 исследуется модель измерительного канала измерительно-вычислительной системы, в которую входит аналоговый преобразователь приращения сопротивления в напряжение, построенный по схеме моста в неравновесном режиме, аналого-цифровой преобразователь и персональный компьютер.

Подобная схема преобразователя и последовательность преобразований типичны для применения в измерительных каналах измерительных информационных систем в тех случаях, когда датчик (сенсор) преобразует измеряемую физическую величину в приращение сопротивления. Примерами таких датчиков могут служить термометр сопротивления, тензорезистор, потенциометрические датчики и многие другие резистивные датчики. Выполняются многократные эксперименты, и по результатам этих экспериментов идентифицируется математическая модель прямой и обратной характеристик преобразования аналоговой части преобразователя в виде степенного полинома или отношения степенных полиномов (по выбору преподавателя) с автоматическим выбором их порядка. В этих экспериментах аналого-цифровой преобразователь используется для автоматиче-

ского преобразования и ввода в компьютер значений выходного напряжения неравновесного моста. Управление измерениями и обработка данных выполняется компьютером.

В соответствии с правилами метрологии определяются характеристики погрешности преобразователя.

В работе № 5 студенты получают практические навыки измерения параметров конденсаторов и катушек индуктивности. Используемые средства измерений: мост переменного тока в равновесном режиме, который собирают студенты в начале работы, автоматический цифровой мост и полуавтоматический мост переменного тока. Исследуется влияние на результат измерения параметров моста и частоты напряжения питания моста. По нормированным характеристикам используемых средств измерений определяются характеристики погрешности измерений емкости, тангенса угла потерь конденсатора, индуктивности и активного сопротивления катушки индуктивности.

В работе № 6 выполняются измерения частотно-временных параметров импульсных сигналов, которые моделируются с помощью контактных реле, триггеров, схем совпадений и одновибраторов. Студенты получают практические навыки работы с частотомером в различных режимах, а также с многофункциональным осциллографом. Кроме того выполняется идентификация статической характеристики измерительного преобразователя “напряжение - частота” при разных значениях параметров этого преобразователя. Идентификация выполняется по результатам многократных измерений входного постоянного напряжения и частоты выходного напряжения методом обобщенных наименьших квадратов с выбором степени аппроксимирующего полинома. Определяются характеристики погрешности исследованного преобразователя.

Работа № 7 посвящена измерениям электрических параметров макета энергоагрегата: электромашинного генератора, ведущий двигатель которого питается от трехфазной цепи. Режим работы этого агрегата изменяется с помощью тиристорного регулятора. Измерениям подлежат: фазные напряжения и сила фазных токов, полная и активная мощность, потребляемые двигателем агрегата, мощность, сила тока и напряжение на выходе агрегата. Исследуется зависимость коэффициента полезного действия агрегата от угла регулирования тиристорного регулятора и от сопротивления нагрузки. Выполняются расчеты по определению характеристик погрешности прямых и косвенных измерений.

В работе № 8 студенты знакомятся с методами измерений механических деформаций и принципами построения датчиков силы на основе применения тензорезисторов. Программой работы предусмотрена калиб-

ровка тензорезисторов методом наименьших квадратов. На основании выполненных метрологических экспериментов определяются коэффициенты двучленной формулы, нормирующей погрешность партии тензорезисторов.

Работа № 9 выполняется на макете четырехканального тензометрического силоизмерительного преобразователя, построенного на базе тензорезисторов, включенных по схеме моста, и упругого элемента в виде консольной балки В ходе работы определяется характеристика преобразования этого преобразователя, после чего с его помощью выполняется многократное взвешивание произвольного предмета. Результаты этих взвешиваний подвергаются статистической обработке с целью определения характеристик погрешности результатов измерений.

В работе № 10 выполняется исследование особенностей измерения параметров переменного напряжения и тока с помощью стрелочных приборов. Определяются частотные характеристики электродинамических и электромагнитных вольтметров переменного напряжения на сигналах переменного напряжения различной формы. Выполняется измерение действующего значения переменного тока с применением измерительного трансформатора тока и токовых клещей (без разрыва цепи измеряемого тока). Определяются характеристики погрешности результатов измерений.

В учебном пособии учтены положения Закона РФ “Об обеспечении единства измерений”, а также требования отечественных нормативных документов и международных документов Международной организации законодательной метрологии, Международного бюро мер и весов, Международной электротехнической комиссии и Международной организации по стандартизации.

В разработке настоящего лабораторного практикума и лабораторных макетов принимали участие сотрудники кафедры Измерительных информационных технологий СПбГТУ: д.т.н. проф. Гутников В.С., д.т.н. проф. Мазин В.Д., д.т.н. проф. Шкодырев В.П., к.т.н. доц. Семенов К.К., к.т.н. доц. Андрианов В.А., к.т.н. доц. Дьяченко Ю.Н., к.т.н. доц. Сальников В.Ю. Учтены полезные замечания и практический опыт проведения работ к.т.н. доц. Левшиной Е.С., к.т.н. доц. Барченкова А.И., к.т.н. Кнорринг Л.Н., к.т.н. Малыгиной Н.В.

При подготовке пособия были учтены замечания и предложения коллег и студентов, которым я приношу искреннюю благодарность за внимание и затраченный труд.

Редактор лабораторного практикума

проф. Г.Н. Солопченко.

1. ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ОБЩЕГО ПРИМЕНЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

В лабораторных работах используются следующие средства измерений:

- меры (образцовые катушки сопротивления, образцовые конденсаторы и катушки индуктивности, магазины сопротивлений и калибраторы напряжения - многозначные меры),
- приборы сравнения (мосты),
- аналоговые измерительные приборы (стрелочные электромеханические приборы, стрелочные электронные приборы),
- цифровые приборы (вольтметры, мультиметры, цифровые приборы для измерения активного сопротивления, емкости и индуктивности),
- измерительные преобразователи (измерительный трансформатор тока, токовые клещи).

Вспомогательные технические средства:

- источники питания, в том числе, генераторы электрических сигналов,
- электронно - лучевые осциллографы,
- персональные компьютеры,
- движковые реостаты.

На случаи вынужденной замены приборов в настоящем разделе приведены общие правила работы, которые распространяются на аналогичные приборы другого типа.

Лабораторные макеты и средства измерений, которые используются только в одной работе, описаны в инструкции к этой конкретной работе.

В разделе 1.6 приводятся инструкции по работе с персональными компьютерами, входящими в состав лабораторных макетов.

1.1. Вольтметры универсальные цифровые GDM-8135 и GDM-8145

Передние панели этих вольтметров одинаковы и отличаются друг от друга только количеством разрядов цифрового индикатора: у прибора **GDM-8135** – четыре разряда, у прибора **GDM-8145** – пять.

Приборы предназначены для измерения постоянного напряжения и силы постоянного тока, действующего значения переменного напряжения и силы переменного тока, а также сопротивления. Режимы и пределы измерения переключаются кнопочным переключателем 8, находящимся в нижней части лицевых панелей приборов. Крайняя правая кнопка 1 зеленого цвета предназначена для включения питания. Присоединительные гнезда для постоянного и переменного напряжения расположены вертикально в левой части передней панели 7, гнездо COM – общее. Гнезда для подсоединения тока силой 2 А и 20 А расположены там же горизонтально. Кнопкой 2 переключают режим измерений: постоянный или переменный ток или напряжение. Кнопками 3, 4, 5 переключается вид измеряемой величины. Кнопкой 6 включается и выключается звуковой сигнал при прозвонке цепей (только у вольтметра **GDM-8135**).

Характеристики погрешности приборов различаются, поскольку пятиразрядный прибор точнее. Эти характеристики нормируются для абсолютной погрешности, как это принято в зарубежных англоязычных нормативных документах и приведены в таблицах 1.1 – 1.4. Для использования этих характеристик при выполнении лабораторных работ они должны быть пересчитаны в двучленную формулу, принятую для нормирования относительных погрешностей цифровых измерительных приборов в России.

На переменном токе приборы отградуированы в действующих значениях синусоидального сигнала тока и напряжения.

Входное сопротивление на всех диапазонах измерения постоянного напряжения не менее 10 Мом. На переменном напряжении параллельно этому сопротивлению действует емкость, не превышающая 100 пФ.

Таблица 1.1

**Характеристики абсолютной погрешности прибора GDM-8135
на постоянном токе**

Измеряемая величина	Диапазоны измерения	Цена единицы младшего разряда вых. кода	Предел допускаемой основной абсолютной погрешности
Постоянное напряжение	-200 ÷ 200 мВ	0.1 мВ	$0.001 \cdot U_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда
	-2 ÷ 2 В	1.0 мВ	
	-20 ÷ 20 В	10.0 мВ	
	-200 ÷ 200 В	100.0 мВ	
Сила постоянного тока	-200 ÷ 200 мкА	0.1 мкА	$0.002 \cdot I_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда
	-2 ÷ 2 мА	1.0 мкА	
	-20 ÷ 20 мА	10.0 мкА	
	-200 ÷ 200 мА	100.0 мкА	

Таблица 1.2

Характеристики абсолютной погрешности прибора GDM-8135 на переменном токе

Измеряемая величина	Диапазон измерения	Предел допускаемой основной абсолютной погрешности в полосе частот			
		40 Гц ÷ 1 кГц	1 кГц ÷ 10 кГц	10 ÷ 20 кГц	20 ÷ 40 кГц
Напряжение	0 ÷ 200 мВ	$0.005 \cdot U_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда	$0.01 \cdot U_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда	$0.02 \cdot U_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда	$0.05 \cdot U_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда
	0 ÷ 2 В				
	0 ÷ 20 В				
Сила тока	0 ÷ 200 мкА	$0.005 \cdot I_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда	$0.01 \cdot I_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда	$0.02 \cdot I_{\text{изм}} + 1$ мл. разряда	Не нормирована
	0 ÷ 2 мА				
	0 ÷ 20 мА				
	0 ÷ 200 мА				

Таблица 1.3

**Характеристики абсолютной погрешности прибора GDM-8145
на постоянном токе**

Измеряемая величина	Диапазоны измерения	Цена единицы младшего разряда вых. кода	Предел допускаемой основной абсолютной погрешности
Постоянное напряжение	-200 ÷ 200 мВ	0.01 мВ	$0.0003 \cdot U_{\text{изм}} + 4$ мл. разряда
	-2 ÷ 2 В	0.1 мВ	
	-20 ÷ 20 В	1.0 мВ	
	-200 ÷ 200 В	10.0 мВ	
Сила постоянного тока	-200 ÷ 200 мкА	0.1 мкА	$0.002 \cdot I_{\text{изм}} \pm 2$ мл. разряда
	-2 ÷ 2 мА	1.0 мкА	
	-20 ÷ 20 мА	10.0 мкА	
	-200 ÷ 200 мА	100.0 мкА	

Таблица 1.4

**Характеристики абсолютной погрешности прибора GDM-8145
на переменном токе**

Измеряемая величина	Диапазон измерения	Предельная основная абсолютная погрешность в полосе частот				
		20Гц ÷ 45Гц	45Гц ÷ 2кГц	2кГц ÷ 10кГц	10 ÷ 20 кГц	20 ÷ 50 кГц
Напряжение	0 ÷ 200 мВ	$0.01 \cdot U_{\text{изм}}$	$0.005 \cdot U_{\text{изм}}$	$0.01 \cdot U_{\text{изм}} \pm$	$0.02 \cdot U_{\text{изм}}$	$0.05 \cdot U_{\text{изм}}$
	0 ÷ 2 В	±15 ед. мл. разряда	±15 ед.мл. разряда	15 ед.мл. разряда	± 30 ед. мл. разряда	± 30 ед. мл. разряда
	0 ÷ 20 В					
Сила тока	0 ÷ 200 мкА	$0.01 \cdot I_{\text{изм}}$	$0.005 \cdot I_{\text{изм}}$	$0.01 \cdot I_{\text{изм}} \pm 1$	$0.02 \cdot I_{\text{изм}}$	Не нормирована
	0 ÷ 2 мА					
	0 ÷ 20 мА					
	0 ÷ 200 мА					

1.2. Миллиомметр цифровой GOM-802

Цифровой программируемый миллиомметр GOM-802 предназначен для измерения малых сопротивлений, обеспечивает допусковый контроль резисторов и может быть подключен к компьютеру через интерфейс RS-232 или GPIB. Диапазоны измерений и нормируемые метрологические характеристики абсолютной погрешности миллиомметра приведены в таблице 1.5. Для использования этих характеристик при выполнении лабораторных работ они должны быть пересчитаны в двучленную формулу, принятую для нормирования относительных погрешностей цифровых измерительных приборов в России.

Таблица 1.5.
Характеристики абсолютной погрешности миллиомметра GOM-802

Предел измерения	Цена единицы младшего разряда	Предел допускаемой абсолютной погрешности	Сила тока через измеряемое сопротивление	Напряжение на измеряемом сопротивлении
30 мОм	1 мкОм	$0.001 \cdot R_{\text{изм}} + 6 \text{ ед. мл. разряда}$	1 А	3,0 В
300 мОм	10 мкОм	$0.0005 \cdot R_{\text{изм}} + 6 \text{ ед. мл. разряда}$	100 мА	
3 Ом	100 мкОм	$0.0005 \cdot R_{\text{изм}} + 3 \text{ ед. мл. разряда}$	100 мА	
30 Ом	1 мОм	$0.0005 \cdot R_{\text{изм}} + 2 \text{ ед. мл. разряда}$	10 мА	
300 Ом	10 мОм		1 мА	
3000 Ом	100 мОм		100 мкА	
30 кОм	1000 мОм		100 мкА	
300 кОм	10 Ом		10 мкА	
3000 кОм	100 Ом		1 мкА	
				4,8 В

1.3. Цифровые средства измерения параметров L, C, R

1.3.1. Цифровой измеритель LCR – AM-3002

Предназначен для измерения индуктивности **L**, емкости **C** и сопротивления **R**, а также тангенса угла потерь **tgδ** и добротности **Q** на двух рабочих частотах 120 Гц и 1000 Гц. Выбор диапазонов может быть ручным и автоматическим.

Нормируемые характеристики **LCR** – метра **AM-3002** приведены в таблицах 1.6 – 1.8.

Таблица 1.6.

Характеристики предельно допустимой относительной погрешности измерения сопротивления

Диапазон	Макс. показание	Погрешность на частоте	
		120 Гц	1000 Гц
10 МОм	9,999 МОм	Не нормирована	0.6 % + 5 ед. мл. разряда
1 МОм	999,9 кОм	0.3 % + 3 ед. мл. разряда	
100 кОм	99,99 кОм	0.3 % + 2 ед. мл. разряда	
10 кОм	9,999 кОм	0.3 % + 2 ед. мл. разряда	
1 кОм	999,9 Ом	0.3 % + 2 ед. мл. разряда	
100 Ом	99,99 Ом	0.5 % + 3 ед. мл. разряда	
10 Ом	9,999 Ом	0.3 % + 3 ед. мл. разряда	0.6 % + 5 ед. мл. разряда

Таблица 1.7.

Характеристики предельно допустимой относительной погрешности измерения емкости

Диапазон	Погрешность по частоте			
	120 Гц		1000 Гц	
	С	Тангенс угла потерь	С	Тангенс угла потерь
10 мФ	2.5%+5 ед.мл.	5%+100/С*+5ед.мл.	-	-
1 мФ	0.6%+5ед.мл.	1.0%+100/С*+5ед.мл.	2.5 % +5ед.мл.	5%+100/С*+5ед.мл.
100 мкФ	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.	0.6%+5ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.
10 мкФ	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.
1 мкФ	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.
100 нФ	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.	0.4%+3ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.
10 нФ	0.6%+3ед.мл.	1.0%+100/С*+5ед.мл.	0.4%+5ед.мл.	0.4%+100/С*+5ед.мл.
1 нФ	-	-	0.6%+5ед.мл.	1.0%+100/С*+5ед.мл.

Примечание. В таблице С* - результат измерения.

Таблица 1.8.

Характеристики предельно допустимой относительной погрешности измерения индуктивности

Диапазон	Погрешность по частоте			
	120 Гц		1000 Гц	
	L	Добротность	L	Добротность
1000 Гн	0.3% +5 ед.мл.	1.0%+100/L*+5ед.мл.	-	-
100 Гн	0.3%+5ед.мл.	0.8%+100/L*+5ед.мл.	0.3 % +5ед.мл.	1.0%+100/L*+5ед.мл.
10 Гн	0.3%+5ед.мл.	0.8%+100/L*+5ед.мл.	0.3%+5ед.мл.	0.8%+100/L*+5ед.мл.
1 Гн	0.3%+5ед.мл.	0.8%+100/L*+5ед.мл.	0.3%+3ед.мл.	0.8%+100/L*+5ед.мл.
100 мГн	0.5%+3ед.мл.	1.5%+100/L*+5ед.мл.	0.3%+5ед.мл.	0.8%+100/L*+5ед.мл.
10 мГн	1.0%+3ед.мл.	5.0%+100/L*+5ед.мл.	0.5%+5ед.мл.	2.5%+100/L*+5ед.мл.
1 мГн	-	-	0.4%+5ед.мл.	5.0%+100/L*+5ед.мл.

Примечание. В таблице L* - результат измерения.

Измерения емкости возможны по параллельной и последовательной схемам замещения. Измерения индуктивности выполняется только по по-

следовательной схеме замещения. Переключатель этих режимов и индикация на дисплее прибора: **PRL** – параллельная и **SEr** – последовательная схемы.

При измерении емкости по параллельной схеме замещения тангенс угла потерь конденсатора: $\text{tg}\delta = 1/\omega RC$. Если емкость измеряется по последовательной схеме, $\text{tg}\delta = \omega RC$. Здесь **R** – сопротивление, которое вызывает активные потери. Добротность катушки индуктивности – это величина, рассчитываемая по формуле $Q = \omega L/R$, где **R** – активное сопротивление обмотки катушки, $\omega = 2\pi f$, **f** – частота, на которой выполнены измерения.

1.3.2. Цифровой измеритель L, C, R типа E7-8

Цифровой измеритель параметров элементов электрических цепей L, C, R типа E7-8 представляет собой автоматический мост переменного тока. Измерение емкости конденсатора выполняется по параллельной схеме замещения, а измерение индуктивности – по последовательной схеме. Диапазоны измерения данного прибора приведены в таблице 1.9.

Таблица 1.9

Диапазоны измерения измерителя L,C,R типа E7-8

Номер диапазона	Конечные значения измеряемых величин			
	C_к	L_к	R_к	G_к
1	99,99 пФ	999,9 Гн	9,999 МОм	999,9 нСм
2	999,9 пФ	99,99 Гн	999,9 кОм	9,999 мкСм
3	9,999 нФ	9,999 Гн	99,99 кОм	99,99 мкСм
4	99,99 нФ	999,9 мГн	9,999 кОм	999,9 мкСм
5	999,9 нФ	99,99 мГн	999,9 Ом	9,999 мСм
6	9,999 мкФ	9,999 мГн	99,99 Ом	99,99 мСм
7	99,99 мкФ	999,9 мкГн	9,999 Ом	999,9 мСм

Рабочая частота измерений **(1000 - 10 , 1000 + 10) Гц.**

Измерения емкости выполняются в соответствии с параллельной схемой замещения конденсатора, а измерения индуктивности – в соответствии с последовательной схемой замещения катушки.

Что касается характеристик основной инструментальной погрешности, то они нормируются для абсолютной погрешности, как это представлено ниже.

Пределы допускаемой основной абсолютной погрешности измерения:

- емкости от 0,01 пФ до 10 мкФ

$$[0,001(1 + 0,5 \operatorname{tg}\delta)C + 0,0001 C_K + 0,01 \text{ пФ}];$$

- емкости от 10 мкФ до 100 мкФ

$$[0,001(1,5 + \operatorname{tg}\delta)C + 0,0001 C_K];$$

- индуктивности

$$[0,001(1 + \operatorname{tg}\delta)L + 0,1 \text{ мкГн} + 0,0001 L_K];$$

- активного сопротивления $[0,001(1 + \operatorname{tg}\delta)R + 0,0001 R_K];$

- активной проводимости $[0,001(1 + \operatorname{tg}\delta)G + 0,0001 G_K];$

- тангенса угла потерь емкости от 10 пФ до 10 мкФ

$$[0,0005 + 0,005 \operatorname{tg}\delta];$$

- тангенса угла потерь индуктивности больше 100 мкГн, а также емкости от 10 мкФ до 100 мкФ

$$[0,001 + 0,005 \operatorname{tg}\delta].$$

Здесь C, L, R, G - измеренные прибором значения емкости, индуктивности, сопротивления и проводимости соответственно. C_K, L_K, R_K, G_K - максимальные (конечные) значения измеряемых на каждом из диапазонов измерения емкости, индуктивности, сопротивления и проводимости, приведенные в таблице 1.9, $\operatorname{tg}\delta$ – измеренное значение тангенса угла потерь измеряемой реактивности или величина, рассчитываемая по формуле: $\operatorname{tg}\delta = 1/\omega RC$ при измерениях емкости или $\operatorname{tg}\delta = R/\omega L$ при измерениях сопротивления и индуктивности.

1.4. Электронно-лучевые осциллографы

1.4.1. Общие свойства электронно-лучевых осциллографов

Электронно-лучевые осциллографы предназначены для наблюдения за изменениями напряжения на участках электрических цепей. В лабораторных работах, описанных в настоящих методических указаниях, осциллографы применяются для наблюдения за формой периодических сигналов напряжения, для определения интервалов времени, длительности импульсов и фазового сдвига, а также в качестве индикатора равновесия мостов переменного тока.

В лабораторных работах применяются осциллографы различного типа, поэтому здесь будут описаны их общие свойства. Конкретные рекомендации по работе с осциллографами в целях выполнения исследований даны в описании соответствующих лабораторных работ.

Сигнал напряжения, подлежащий наблюдению, подается на вход осциллографа с помощью штатного двухпроводного (как правило, коаксиального) кабеля. Входной разъем кабеля первого канала расположен на лицевой панели осциллографа и обозначен **СН 1**. Кроме того этот вход снабжается условным обозначением вида сигнала : переменный (\sim), постоянный (—). смешанный ($\overline{\sim}$) (см. также п. 1.3.1.3). У входа некоторых осциллографов расположен переключатель этих видов входного сигнала: **AC, DC, GND**. Положение **GND** означает замыкание входа накоротко.

В двухлучевом осциллографе **MOS-6XX** аналогичными обозначениями и переключателями снабжен и второй вход. Для разных каналов предусмотрены две панели управления. Вход первого канала обозначен **СН 1**, вход второго канала - **СН 2**.

В каждой панели управления каналами осциллографа **MOS-6XX** расположены:

- поворотный переключатель **VOLTS/DIV** чувствительности осциллографа с указанием чувствительности в единицах сетки экрана,
- ручка плавной регулировки чувствительности осциллографа, соосная с поворотным переключателем; крайнее положение этой ручки в направлении движения часовой стрелки фиксируется при незначительном усилии щелчком, и только в этом положении ручки плавной регулировки обеспечивается то значение чувствительности осциллографа, которое установлено поворотным переключателем,
- ручка смещения изображения по вертикали, снабженная обозначением “ \updownarrow ” или знаком **◀position▶**.

Горизонтальная ось на экране осциллографа при наблюдении периодических сигналов - ось времени. Масштаб на этой оси определяется средствами управления, расположенными на части лицевой панели **HORIZONTAL**. Скорость линейной развертки регулируется поворотным переключателем, снабженным надписью “**РАЗВЕРТКА**” или “**TIME/DIV**”

и значениями времени развертки. Соосно или рядом с этим переключателем расположена ручка плавной регулировки скорости развертки “**SWP/VAR**”, с помощью которой можно добиться стационарного изображения сигнала. Только в крайнем положении этой ручки по направлению движения часовой стрелки обеспечивается то время развертки, которое установлено поворотным переключателем.

Там же расположена кнопка “**×10 MAG**”, которая увеличивает скорость развертки в 10 раз. При этом точка, находящаяся посередине экрана, не сдвигается. В этой же части лицевой панели осциллографа расположена ручка смещения изображения по горизонтали, обозначенная значком “**↔**” или знаком **◀position▶**.

Часть лицевой панели осциллографа **MOS-6XX**, обозначенная , как **TIGGER**, содержит:

- входной разъем **TRIG IN** внешних сигналов синхронизации,
- переключатели каналов, обслуживаемых синхронизацией,
- переключатель режимов и полярности сигналов синхронизации,
- плавный регулятор уровня сигнала синхронизации “**LEVEL**”.

В осциллографах некоторых типов предусмотрена возможность отключения линейной развертки и подачи на пластины развертки сигнала напряжения. На лицевой панели таких осциллографов расположен разъем или зажим с обозначением “**ВХОД X**” или “**X**”. Если на оба входа “**X**” и “**Y**” будут поданы периодические сигналы, то на экране будут изображены двумерные замкнутые фигуры. Примером таких фигур могут служить фигуры Лиссажу, которые получаются при подаче на входы “**X**” и “**Y**” двух синусоидальных сигналов одинаковой или кратной частоты. Режим рисования фигур Лиссажу включается нажатием кнопки “**X-Y**” на лицевой панели осциллографа.

На лицевой панели осциллографа расположены также ручки регулировки яркости, фокусировки луча и у некоторых осциллографов - ручка исправления астигматизма.

Метрологические характеристики некоторых электронно-лучевых осциллографов нормируются.

Осциллограф двухлучевой **MOS-620 СН** имеет входное сопротивление не менее 1 Мом, относительная погрешность воспроизведения сигнала

лов на мониторе осциллографа не превышает 3% (как по вертикальной, так и по горизонтальной осям). Входное сопротивление осциллографа **ОСУ 10А** составляет не менее 1 Мом, погрешность по вертикали не более 4%. Особенность его применения в мостах переменного тока заключается в утоплении кнопки “X – Y”.

1.4.2. Общие правила подготовки электронно-лучевых осциллографов к работе

После того, как на осциллограф подается питание, он должен прогреться в течение 5÷10 минут.

Если на экране нет луча, выполняются следующие операции:

- включается развертка, поворотный переключатель развертки устанавливается в среднее положение, ручка плавной регулировки развертки устанавливается в крайнее положение по часовой стрелке,

- переключатель синхронизации ставится в положение “АВТ” или “ВНУТР”, уровень синхронизации устанавливается максимальным,

- переключатель и ручка плавной регулировки чувствительности устанавливаются в положение максимальной чувствительности,

- переключатель вида входного сигнала устанавливается в положение “”,

- ко входу “Y” подключается сигнальный кабель и к каждому из его концов по очереди прикасаются пальцем, при одном из этих прикосновений экран, как минимум, должен засветиться,

- сохраняя это прикосновение, манипулируют ручками “” и “” до появления на экране сигнала, после чего уменьшают чувствительность до уровня, когда весь сигнал помехи, возникающий от прикосновения, уместится на весь экран по вертикали,

- входные концы сигнального кабеля соединяются накоротко, при этом на экране появляется горизонтальная прямая - ось времени, если она смещена, манипуляцией ручками “” и “” устанавливают ее в середине экрана, увеличивают чувствительность осциллографа, вновь ручками “” и “” корректируют положение оси и продолжают эти действия до достижения максимальной чувствительности.

Тот конец кабеля, Ваше прикосновение к которому дает в описанной процедуре сигнал помехи, является высокопотенциальным концом. Второй конец - низкопотенциальный, прикосновение к нему даже на самой высокой чувствительности не приводит к появлению сигнала помехи. Этот конец присоединяется к общим зажимам лабораторного макета, обозначенным “⊥”, к аналогичным зажимам электронных вольтметров, генераторов и источников питания, к низкопотенциальным зажимам цифровых вольтметров.

1.5. Источники питания

1.5.1. Общие свойства источников питания

В лабораторных работах в качестве источников питания лабораторных макетов применяются низковольтные источники стабильного напряжения. Диапазон напряжения у разных источников составляет от (0÷15)В до (0÷30)В. Некоторые лабораторные макеты имеют встроенные источники стабильного напряжения и подключаются непосредственно к общей сети 220 В 50 Гц.

Низковольтные источники стабильного напряжения, снабженные плавными регуляторами выходного напряжения, имеют цифровой дисплей, с помощью которого контролируется значение выходного напряжения и (или) тока.

Источники напряжения, имеющие дискретные переключатели выходного напряжения, снабженные шкалами или иными обозначениями воспроизводимого напряжения, могут не иметь встроенных вольтметров. Некоторые из подобных источников, как например, **Б5-47**, **Б5-48**, имеют переключатель, устанавливающий ограничение по выходному току, что позволяет предохранить потребляющую цепь от повреждений током излишне большой силы.

Выходные зажимы источников питания снабжены указаниями полярности.

Как правило, источники питания не являются средствами измерений, и метрологические характеристики источников питания не нормируются. Исключение представляет источник питания типа **НУ-15002D**, у которого

предельная относительная погрешность установки и регистрации выходного напряжения не превышает 1 %.

1.5.2. Общие правила применения источников питания

Перед подключением источника питания к сети 220 В необходимо выполнить следующие действия:

Регуляторами выходного напряжения установить нулевое значение этого напряжения.

После включения источника в сеть дать ему прогреться 15÷20 минут.

При возникновении короткого замыкания в нагрузке следует отключить сетевое питание, ликвидировать причину замыкания и вновь включить источник в сеть.

По окончании работы или при переключениях в измерительной цепи выходное напряжение следует убавить до нуля.

Конкретные указания по применению источников питания при необходимости будут даны в методических указаниях по выполнению соответствующих работ.

1.6. Общие рекомендации и пояснения к программному обеспечению

1. Для запуска программ на исполнение необходимо войти в директорию **c:\LAB_159**, после чего

- для выполнения работы № 1 войти в директорию **LAB1**, отметить курсором командный файл **lab_1.bat** и нажать клавишу **‘Enter’**,

- для выполнения работы № 4 войти в директорию **LAB4**, отметить курсором командный файл **lab_4.bat** и нажать клавишу **‘Enter’**.

Эти командные файлы будут вызывать на исполнение программы автоматически.

Для выполнения второй части работы № 8 войти в директорию **LAB_8**, отметить курсором командный файл **lab8.bat** и нажать клавишу **‘Enter’**.

2. Индикатором выполнения программы является вращающийся в нижней части экрана дисплея треугольник. Во время его вращения никакие кнопки на клавиатуре нажимать нельзя! Если указанная индикация от-

существует, это значит, что произошел сбой работы программы. В этом случае делаются попытки:

- одновременное нажатие клавиш '**Ctrl**' и '**C**',

Если это не помогает,

- одновременное нажатие клавиш '**Ctrl**', '**Alt**' и '**Del**',

Если это не помогает,

- нажатие кнопки '**Reset**', расположенной на лицевой панели процессора.

3. При запросе компьютером ответа пользователя (Y/N) и нажатии одной из клавиш '**Y**' или '**N**' клавишу '**Enter**' не нажимать !

4. Для досрочного прекращения работы любой программы следует нажать одновременно клавиши '**Ctrl**' и '**C**'.

5. В случаях досрочного прекращения работы любой программы по какой - либо причине из указанных выше на исполнение вновь вызывается прерванная программа *вновь вызывается* на исполнение вручную с клавиатуры посредством наведения курсора на ее имя навигационными клавишами.

вручную с клавиатуры посредством выведения курсора на ее имя навигационными клавишами и нажатием клавиши '**Enter**'. Все последующие программы, подлежащие исполнению в соответствии с заданием преподавателя, вызываются также вручную с клавиатуры.

6. Для ввода массива данных в файл с клавиатуры необходимо

- одновременно нажать две клавиши '**Shift**' и '**F4**',

- на запрос компьютера об имени файла, который Вы собираетесь редактировать, ввести удобное для Вас имя файла в формате <имя>.dat и нажать '**Enter**', длина имени файла не должна превышать 8 символов,

- в результате откроется Ваш файл, в который следует вводить десятичные числа, разделяя их друг от друга одним пробелом; дробная часть чисел отделяется от целой части точкой (**не запятой !**),

- после ввода всех чисел ввести один пробел и нажать кнопку '**Enter**',

- для сохранения файла нажать кнопку '**F2**',

- нажать кнопку '**Esc**'.

Ваши данные записаны в файле с присвоенным ему именем.

7. Все промежуточные результаты, необходимые для оформления отчета, студенты записывают на свои дискеты из файлов, имена которых были введены ими по запросам от компьютера.

8. При отсутствии у студентов дискет и доступа к компьютерам содержимое файлов записывается в протокол эксперимента вручную. Для вывода содержимого файлов на дисплей необходимо:

- навигационными клавишами (клавиши со стрелками) установить курсор на имя нужного файла,
- нажать на клавишу ‘ F3 ‘,
- переписать с дисплея данные, необходимые для оформления отчета.
- покинуть этот файл нажатием клавиши ‘ Esc ’.

2. ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Метрологическая схема происхождения погрешности результатов измерений

Происхождение погрешностей результатов прямых измерений иллюстрирует метрологическая структурная схема, приведенная на рис. 2.1. Эта схема справедлива для тех ситуаций, когда измерения выполняются линейным средством измерений.

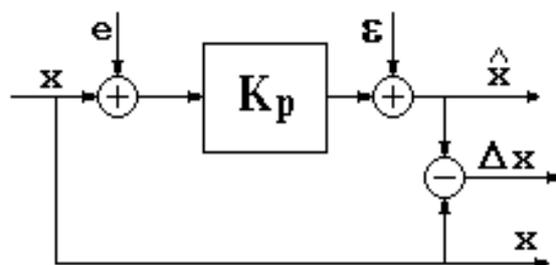


Рис. 2.1. Метрологическая структурная схема образования погрешности результатов измерений, выполняемых линейным средством измерений

На схеме рис. 2.1 обозначено: x - значение измеряемой величины; \hat{x} - результат прямого измерения; e - обозначение суммарного действия наводок, помех, погрешностей от взаимного влияния средства измерений и объекта измерений, погрешностей, вызванных некорректной постановкой задачи измерений; ε - собственная аддитивная погрешность средства измерений; K_p - реальный коэффициент преобразования, присущий данному экземпляру средства измерений и отличающийся от идеального коэффи-

циента преобразования, равного $\mathbf{1}$, не более, чем на нормированное значение погрешности; Δx - погрешность результата прямого измерения.

Из рис. 2.1 непосредственно следует, что формула для *абсолютной погрешности* результата прямого измерения имеет вид:

$$\Delta x = \hat{x} - x = (\mathbf{K}_p - \mathbf{1}) \cdot x + \varepsilon + \mathbf{K}_p \cdot e.$$

Введем обозначение $\mathbf{K}_p - \mathbf{1} = \Delta \mathbf{K}$. С учетом того, что $|\Delta \mathbf{K} \cdot e| \ll |e|$, получим выражение для абсолютной погрешности прямого измерения:

$$\Delta x \approx \Delta \mathbf{K} \cdot x + \varepsilon + e. \quad (2.1)$$

Относительная погрешность результата прямого измерения, которая обычно выражается в процентах, определяется равенством:

$$\gamma_x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% = \frac{\Delta \mathbf{K}}{\mathbf{1}} \cdot 100\% + \frac{\varepsilon}{x} \cdot 100\% + \frac{e}{x} \cdot 100\% = \gamma_K + \gamma_\varepsilon + \gamma_e, \quad (2.2)$$

где γ_K - относительная погрешность коэффициента преобразования по отношению к значению идеального коэффициента, равного $\mathbf{1}$; γ_ε - относительная аддитивная погрешность средства измерений; γ_e - сумма относительных погрешностей: взаимодействия средства измерений с объектом, погрешностей от помех, погрешностей от неадекватности математической модели измеряемой величины, выраженных в процентах.

В этих равенствах первые два слагаемые порождены собственными свойствами средства измерений из-за несовершенства технологии изготовления и неизбежного разброса параметров комплектующих изделий, деталей и узлов. По этой причине $\Delta \mathbf{K} \cdot x + \varepsilon$ и $\gamma_K + \gamma_\varepsilon$ называются *инструментальными погрешностями* (абсолютными и относительными соответственно). Инструментальные погрешности могут изменяться при изменении внешних факторов (климатических, механических и др.), действующих на средство измерений в реальных условиях эксплуатации. Ответственность за инструментальную погрешность несет производитель средства измерений, и поэтому в целях обеспечения надлежащего качества и гарантий для потребителя на инструментальную погрешность назначаются нормы в виде пределов допускаемых значений. Каждый экземпляр средства измерений при выпуске из производства и периодически во время эксплуатации должен контролироваться на предмет удовлетворения этим нормам.

Абсолютная инструментальная погрешность линейного средства измерений состоит из двух слагаемых. Первое из них, а именно, $\Delta K \cdot x$ линейно зависит от измеряемой величины и называется *мультипликативной абсолютной погрешностью*. Второе слагаемое ϵ не зависит от измеряемой величины и называется *аддитивной абсолютной погрешностью*. Точно так же слагаемые относительной инструментальной погрешности $\gamma_K + \gamma_\epsilon$ называются *мультипликативной относительной погрешностью* и *аддитивной относительной погрешностью* соответственно. Если измерения выполняются нелинейным средством измерений, разделить погрешность результата на мультипликативную и аддитивную составляющие невозможно.

Третье слагаемое ϵ в равенствах (2.1), (2.2) это погрешность, которая возникает только при конкретном применении средства измерений, поэтому она нормироваться не может, ибо производитель не несет за нее ответственность. Для того, чтобы потребитель мог оценить характеристику этой погрешности в конкретных условиях применения, производитель сообщает и гарантирует нормированные характеристики входного сопротивления и иных свойств средства измерений, которые требуются для этого расчета. Эта составляющая погрешности называется *погрешностью применения*, поскольку возникает только при конкретном применении средства измерения.

В реальных условиях измерений, когда в составе погрешностей ϵ и ϵ присутствуют пульсации измеряемой величины и помехи, когда на средство измерений действуют различные трудно учитываемые внешние факторы, а собственно средство измерений содержит внутренние источники случайного шума, тогда в общей погрешности измерений появляются случайные составляющие. Они проявляются в разбросе значений результатов многократных измерений неизменной во времени величины.

Альтернативой случайной составляющей погрешности средств измерений и результатов измерений является систематическая составляющая, которая порождается систематической составляющей аддитивной погрешности ϵ , погрешностью коэффициента преобразования и взаимодействием средства измерений с объектом, а также паразитными медленно меняющимися сигналами, такими, как например, термоЭДС в измерительных

цепях.

На рис. 2.2 приведен пример возможного распределения большого количества результатов многократных измерений неизменной величины x . Принято, что истинное значение измеряемой величины равно x_0 и что измерения сопровождаются систематической погрешностью $\Delta_c x$, причем в приведенном примере $\Delta_c x > 0$. Пример плотности разброса результатов измерений, вызванного случайной составляющей погрешности, показана колоколообразной кривой.

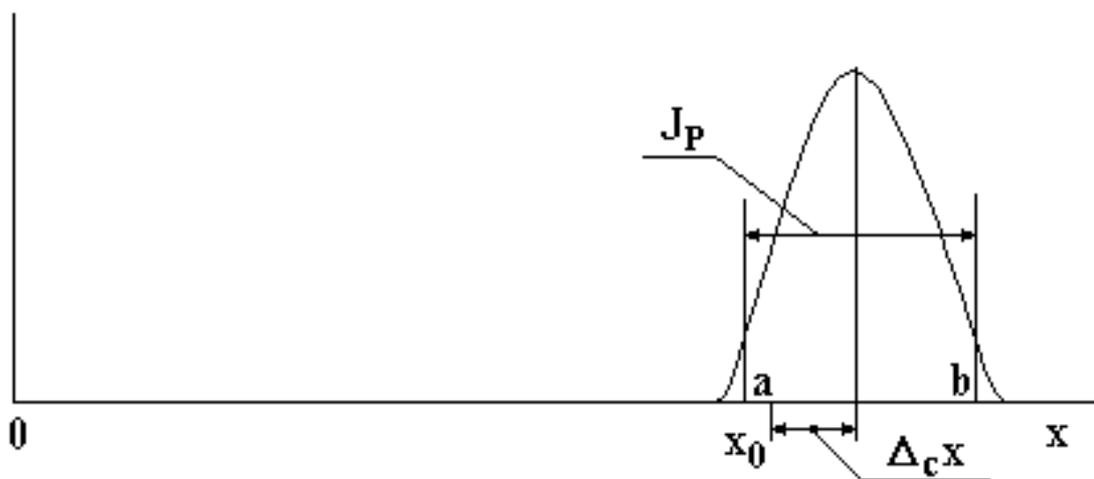


Рис. 2.2. Пример плотности случайного разброса результатов многократных измерений величины x

Из общих соображений понятно, что значение погрешности каждого конкретного результата измерений знать невозможно, ибо в противном случае можно было бы определить точное истинное значение измеряемой величины простым введением поправки на эту погрешность. Поэтому на практике пользуются *характеристиками погрешности*. Наиболее распространенными среди них являются:

- характеристики случайной составляющей:

а) среднеквадратическое значение случайной составляющей погрешности,

или

б) границы интервала J_P , в котором содержится не менее P -ой доли всех возможных значений случайной составляющей погрешности; обычно задают $P = 0.9 \div 0.95$,

- характеристика систематической составляющей погрешности:

границы интервала, содержащего неисключенное значение систематической составляющей погрешности.

Отметим, что интервальные характеристики погрешностей результатов измерений хорошо согласуются с нормированием характеристик погрешностей средств измерений в виде пределов допускаемых значений, то есть также в виде интервалов.

Характеристики погрешности средств измерений, на которые устанавливаются нормы, являются *нормируемыми метрологическими характеристиками*. Сведения о принципах нормирования характеристик погрешности средств измерений приводятся ниже в п. 2.4.

2.2. Классификация измерений и погрешностей измерений

В настоящем разделе приведена классификация, термины и определения, соответствующие Рекомендации МИ 2247-93, а также словарю, разработанному представителями Международного Бюро Мер и Весов (МБМВ), Международной Электротехнической Комиссии (МЭК), Международной Организации Законодательной Метрологии (МОЗМ) и Международной Организации по стандартизации (ИСО).

Прямое измерение - измерение, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно.

Косвенное измерение - определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других величин, функционально связанных с искомой величиной.

Погрешность результата измерения, погрешность измерения - отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины.

Характеристика погрешности результата однократного измерения - характеристика погрешности одного измерения, оцениваемая на основании известных погрешностей средства и метода измерений в данных условиях.

Неопределенность измерений - свойство результатов измерений, характеризующее рассеяние значений, которые можно приписать измеряемой величине.

Систематическая погрешность измерения, систематическая погрешность - составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же неизменной во времени измеряемой величины.

Случайная погрешность измерения, случайная погрешность - составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же неизменной во времени измеряемой величины в одних и тех же условиях.

Инструментальная погрешность измерения - составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерения.

Основная погрешность средства измерений - погрешность средства измерений в нормальных условиях применения. Нормальные условия применения устанавливаются в стандартах и других нормативных документах на средство измерений конкретного типа в соответствии с ГОСТ 8.395.

Основная приведенная погрешность средства измерений - выраженное в процентах отношение значения основной погрешности средства измерений к нормирующему значению измеряемой величины, которое устанавливается в стандартах и других нормативных документах на средство измерений конкретного типа. примеры нормирующих значений измеряемой величины приведены в п. 2.4 настоящих методических указаний.

Погрешность метода измерений, методическая погрешность - составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений.

Абсолютная погрешность измерения, абсолютная погрешность - погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность измерения, относительная погрешность - погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности результата измерения к действительному значению измеряемой величины или к результату измерения.

Аддитивная составляющая погрешности результата измерений, аддитивная погрешность (термин и определение не стандартизованы) - со-

ставляющая абсолютной погрешности результата измерений, не зависящая от значения измеряемой величины.

Мультипликативная составляющая погрешности измерений, мультипликативная погрешность (термин не стандартизован) - составляющая абсолютной погрешности результата измерений, линейно зависящая от значения измеряемой величины, мультипликативная составляющая относительной погрешности не зависит от значения измеряемой величины.

2.3. Математическое описание случайных погрешностей средств измерений и результатов измерений

Обозначим для дальнейшего всю совокупность значений погрешности, которая может содержать случайную и систематическую составляющие, через δ , а конкретные значения, которые принимает погрешность, - через Δ .

Наиболее полным математическим описанием случайной погрешности средств измерений и результатов измерений является *функция распределения вероятностей*, которая обозначается через $F(\Delta)$, и производная от нее *плотность распределения вероятностей* $\varphi(\Delta)$, иначе называемая *законом распределения вероятностей*. Подобными функциями описываются и результаты измерений: $F(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно. На рис. 2.2 приведен пример одного из видов плотности распределения вероятностей результатов измерений величины x .

Математически функция распределения погрешности определяется, как вероятность того, что случайная погрешность δ не превосходит значения Δ , то есть $F(\Delta) = P(\delta \leq \Delta)$. Поскольку с ростом длины участка Δ числовой оси вероятность убывать не может, функция распределения не убывает, и $F(-\infty) = 0$, а $F(\infty) = 1$. Для непересекающихся отрезков $(-\infty, a]$ и $(a, b]$:

$$F(b) = P(\delta \leq b) = P(\delta \leq a) + P(a < \delta \leq b) = F(a) + P(a < \delta \leq b),$$

откуда следует, что $P(a < \delta \leq b) = F(b) - F(a)$.

Функция распределения и плотность распределения связаны соотно-

шениями: $\varphi(\Delta) = d(F(\Delta))/d\Delta$ и обратно $F(\Delta) = \int_{-\infty}^{\Delta} \varphi(\delta) d\delta$. Поэтому имеют место равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = F(\infty) = 1, \quad P(a < \delta \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(\Delta) d\Delta. \quad (2.3)$$

В качестве характеристик систематической и случайной составляющих погрешности используют числовые характеристики плотности распределения погрешности:

- математическое ожидание (систематическая погрешность)

$$M[\delta] = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \cdot \varphi(\Delta) d\Delta = \Delta_c. \quad (2.4)$$

- дисперсию (квадрат среднеквадратического значения случайной составляющей погрешности)

$$D[\delta] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta - \Delta_c)^2 \cdot \varphi(\Delta) d\Delta. \quad (2.5)$$

- интервал J_p , содержащий P -ую долю всех значений, которые может принимать случайная составляющая погрешности; в силу неоднозначности математического определения этого интервала его назначают симметричным относительно математического ожидания, то есть систематической погрешности:

$$P(-g < \delta - \Delta_c \leq g) = P(\Delta_c - g < \delta \leq \Delta_c + g) = \int_{\Delta_c - g}^{\Delta_c + g} \varphi(\Delta) d\Delta = \int_{-g}^g \varphi(\Delta + \Delta_c) d\Delta, \quad (2.6)$$

где $g > 0$ - полуширина интервала J_p , называемая иногда доверительной погрешностью.

Результаты измерения величины x_0 (рис. 2.2) описываются той же плотностью распределения, что и случайные погрешности. Поскольку результат x каждого однократного измерения есть сумма

$$x = x_0 + \delta,$$

то плотность распределения результатов измерений есть плотность распределения погрешностей, смещенная вправо на x_0 . К этому смещению добавится систематическая погрешность $\Delta_c x$ результата измерения. Таким образом, если $\varphi(\Delta)$ - плотность распределения погрешностей измерений с систематической составляющей $\Delta_c x$, то плотность распределения

результатов измерений величины x_0 есть $\varphi(x - x_0)$. Математическое ожидание результатов измерений величины x_0 будет равно (см. также рис. 2.2):

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x - x_0) dx = x_0 + \Delta_c x. \quad (2.7)$$

Дисперсия результатов измерений определяется выражением

$$D[x] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0 - \Delta_c x)^2 \cdot \varphi(x - x_0) dx. \quad (2.8)$$

Интервал J_p , содержащий P -ую долю всех значений, которые может принимать случайная погрешность результатов измерений, назначают симметричным относительно математического ожидания:

$$\begin{aligned} P(-g < x - x_0 - \Delta_c x \leq g) &= P(x - \Delta_c x - g \leq x_0 < x - \Delta_c x + g) = \\ &= \int_{x_0 + \Delta_c x - g}^{x_0 + \Delta_c x + g} \varphi(\Delta) d\Delta = \int_{-g}^g \varphi(x + x_0 + \Delta_c x) dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $g > 0$ - полуширина интервала J_p .

Из полученного выражения и рис. 2.2 видно, что ширина интервала неопределенности значений измеряемой величины и случайной составляющей погрешности измерений одинакова и равна $(b - a)$. Весь интервал сдвинут на значение систематической погрешности $\Delta_c x$. Если значение $\Delta_c x$ известно, на него вводится поправка. В противном случае, когда известны лишь пределы возможных значений систематической погрешности $[-\Delta_c x, \Delta_c x]$, то в качестве полуширины интервалов неопределенности приходится брать сумму $g + \Delta_c x$.

Если систематическая составляющая погрешности отсутствует, то математическое ожидание результатов многократных измерений будет равно x_0 . Тогда случайная составляющая погрешности может быть уменьшена за счет выполнения многократных измерений и последующего обработки полученных результатов. В частности, при усреднении n результатов измерений дисперсия среднего, а стало быть, дисперсия случайной погрешности измерения уменьшается в n раз.

Систематическая погрешность при усреднении результатов многократных измерений не изменяется.

Ниже приведены примеры наиболее распространенных плотностей распределения случайных погрешностей средств измерений.

2.3.1. Плотность нормального распределения (нормальный закон)

Плотностью нормального распределения описываются погрешности, вызванные тепловым шумом, а также совместным действием нескольких независимых примерно равнозначных случайных факторов.

График плотности распределения приведен на рис. 2.3. Плотность распределения имеет вид

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\Delta - c)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$$

Математическое ожидание погрешности (систематическая составляющая) $M[\delta] = c$. Дисперсия случайной составляющей погрешности $D[\delta] = \sigma^2$. Среднеквадратическое значение случайной составляющей погрешности равно σ . Интервал J_P , содержащий P -ую долю значений случайной составляющей погрешности при $P = 0.95$:

$$J_{0.95} = [c - 1.96 \cdot \sigma, c + 1.96 \cdot \sigma].$$

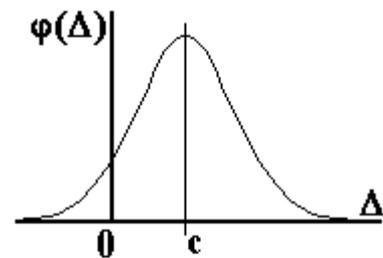


Рис. 2.3. Плотность нормального распределения

2.3.2. Плотность равномерного распределения (равномерный закон)

Плотностью равномерного распределения чаще всего описывают погрешность, вызванную округлением результатов измерений, которое неизбежно происходит при аналого-цифровом преобразовании из-за ограниченности количества разрядов аналого-цифрового преобразователя. Пример графика плотности равномерного распределения представлен на рис. 2.4. Параметрами этой плотности распределения являются: ширина $2h$ и математическое ожидание c , то есть систематическая составляющая погрешности. Дисперсия

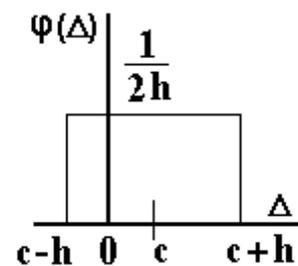


Рис. 2.4. Плотность равномерного распределения

случайной погрешности, которая распределена в соответствии с этой плотностью, равна $D[\delta] = h^2/3$, среднеквадратическое значение погрешности равно $h/\sqrt{3}$. Интервал J_P , содержащий P -ую долю значений случайной составляющей погрешности при $P = 0.95$:

$$J_{0.95} = [c - 0.95 \cdot h, c + 0.95 \cdot h].$$

2.3.3. Плотность треугольного распределения (треугольный закон)

Этой плотностью распределения описывается случайная погрешность, представляющая собой сумму двух независимых равномерно распределенных погрешностей. График плотности

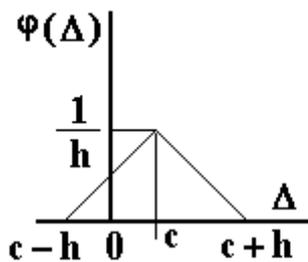


Рис. 2.5. Плотность треугольного распределения

треугольного распределения представлен на рис. 2.5. Математическое ожидание (систематическая составляющая погрешности)

$M[\delta] = c$, дисперсия погрешности

$D[\delta] = h^2/6$, среднеквадратическое значение

равно $h/\sqrt{6}$. Интервал J_P , содержащий P -

ую долю значений случайной составляющей погрешности при $P = 0.95$:

$$J_{0.95} = [c - 0.975 \cdot h, c + 0.975 \cdot h].$$

2.3.4. Плотность распределения ARCSIN

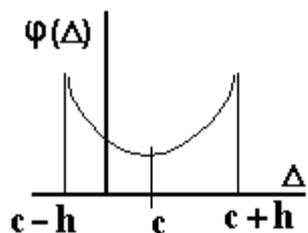


Рис. 2.6. Плотность распределения ARCSIN

Этой плотностью распределения описываются случайные погрешности, вызванные синусоидальными помехами при измерениях, которые выполняются в случайные моменты времени, не синхронизированные с частотой сигнала помехи.

Плотность распределения ARCSIN имеет вид

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{h^2 - (\Delta - c)^2}}.$$

График плотности распределения представлен на рис. 2.6. Параметры плотности распределения: математическое ожидание (систематическая составляющая погрешности) $M[\delta]=c$, дисперсия погрешности $D[\delta] = \frac{h^2}{2}$, среднеквадратическое значение равно $\frac{h}{\sqrt{2}}$. Интервал J_P , содержащий P -ую долю значений случайной составляющей погрешности при $P = 0.95$:

$$J_{0.95} = [c - 0.997 \cdot h, c + 0.997 \cdot h]$$

2.4. Основные принципы нормирования характеристик погрешности средств измерений

Общие принципы нормирования метрологических характеристик, в том числе, характеристик погрешности средств измерений установлены ГОСТ 8.009. В этом стандарте приведен общий перечень метрологических характеристик, из которого для нормирования должны выбираться такие характеристики, которые могут обеспечить:

- надлежащее качество производства средств измерений и гарантии потребителю,
- достоверный расчет характеристик инструментальной составляющей погрешности результатов измерений в реальных условиях эксплуатации в соответствии с равенствами (2.1), (2.2),
- экономически приемлемую трудоемкость экспериментального определения и контроля нормируемых характеристик при выпуске средств измерений из производства и ремонта, а также при периодических, инспекционных и иных метрологических испытаниях средств измерений.

Перечень нормируемых метрологических характеристик должен соответствовать принципу действия прибора, особенностям его применения и не должен быть избыточным.

Погрешность электромеханических стрелочных приборов и аналоговых электронных приборов практически не содержит случайной составляющей, и мультипликативная компонента погрешности мала по сравнению с аддитивной. Поэтому для этих приборов нормируется значение основной приведенной погрешности (определение см. п. 2.2). В качестве нормы устанавливается предел допускаемого значения основной приве-

денной погрешности $\gamma_{\text{СИ}}$, выраженный в процентах, и численное значение этой нормы используется для обозначения класса точности средства измерений. Это означает, что в любой точке диапазона измерения абсолютная погрешность Δ каждого экземпляра прибора конкретного типа, допущенного к применению органами метрологической службы, должна удовлетворять условию

$$-\gamma_{\text{СИ}} \leq \frac{\Delta}{X_{\text{нрм}}} \cdot 100\% \leq \gamma_{\text{СИ}}$$

или

$$-\frac{\gamma_{\text{СИ}} \cdot X_{\text{нрм}}}{100} \leq \Delta \leq \frac{\gamma_{\text{СИ}} \cdot X_{\text{нрм}}}{100},$$

где $X_{\text{нрм}}$ - нормирующее значение измеряемой величины.

В качестве нормирующего значения измеряемой величины может быть выбрано одно из следующих:

- если диапазон изменения измеряемой величины есть интервал от 0 до $X_{\text{к}}$, то $X_{\text{нрм}} = X_{\text{к}}$,

- если диапазон изменения измеряемой величины представляет собой интервал от X_{min} до X_{max} , то $X_{\text{нрм}} = X_{\text{max}} - X_{\text{min}}$.

Во всех случаях, если класс точности прибора, обозначенный на шкале или лицевой панели, есть $\gamma_{\text{СИ}}$, и если прибор допущен к применению (о чем свидетельствует пломба метрологического органа и непросроченная дата очередной поверки), то о его абсолютной инструментальной погрешности Δ в нормальных условиях мы знаем только лишь

- что эта погрешность, в основном, систематическая,
- что по модулю она не превосходит значения $0.01 \cdot \gamma_{\text{СИ}} \cdot X_{\text{нрм}}$.

Значение этой погрешности и ее знак неизвестны.

Второй метрологической характеристик таких средств измерений является собственное сопротивление.

Инструментальные погрешности линейных цифровых приборов и линейных измерительных преобразователей примерно в равной степени содержат аддитивную и мультипликативную компоненту. Мультипликативная составляющая линейно зависит от измеряемой величины, и график зависимости предельных значений абсолютной погрешности подобных средств измерений от измеряемой величины имеет вид, представленный на рис. 2.7. Здесь обозначено: x_k - конечное значение измеряемой величины в диапазоне измерения, Δ_a - предел допускаемой абсолютной аддитивной погрешности, Δ_k - предел допускаемого значения суммы абсолютной аддитивной и абсолютной мультипликативной погрешностей. Нормирование характеристик абсолютной погрешности в подавляющем большинстве случаев оказывается неудобным. Поэтому в метрологической документации на линейные аналоговые и аналого-цифровые преобразователи, цифровые вольтметры и мультиметры сумма аддитивной и мультипликативной погрешностей нормируется установлением пределов допускаемых значений относительной (не приведенной !) погрешности. Эти пределы, конечно, зависят от значения измеряемой величины и представляются в виде двучленной формулы

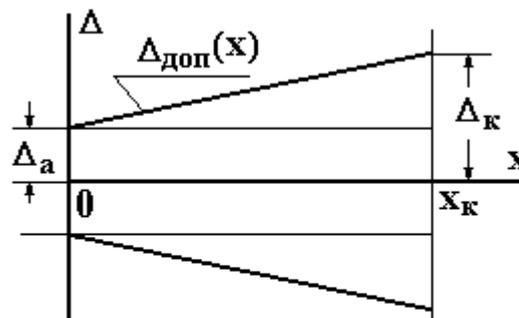


Рис.2.7. Пределы допускаемых значений аддитивной и мультипликативной погрешностей

$$\gamma_{\text{доп}}(x) = c + d \cdot \left[\left| \frac{x_k}{x} \right| - 1 \right], \quad d = \frac{|\Delta_a|}{|x_k|} \cdot 100\%, \quad c = \frac{\Delta_k}{K_c} \cdot 100\% + d, \quad (2.10)$$

где Δ_k - предел допускаемого отличия реального коэффициента преобразования от идеального (номинального) значения $K_{\text{н}}$ (см. формулу (2.2) из п. 2.1).

Из формулы (2.10) и из рис. 2.7 видно, что в конце диапазона измерений, когда $x = x_k$,

$$\gamma_{\text{доп}}(x) = c = \frac{\Delta_k}{x_k} \cdot 100\% .$$

При нормировании характеристики погрешности двучленной форму-

лой класс точности условно обозначается в виде перечисления через черту коэффициентов c и d : c/d , где всегда $c > d$.

В отличие от электромеханических приборов погрешности измерительных преобразователей и цифровых приборов могут содержать случайную составляющую. В соответствии с ГОСТ 8.009 случайная составляющая погрешности должна нормироваться отдельно, если ее среднеквадратическое значение $\sigma(\delta)$ составляет более 10% от предела допускаемых значений общей погрешности средства измерений. Для случайной составляющей погрешности устанавливается предел допускаемого среднеквадратического значения $\sigma_{\text{доп}}$ или предел допускаемого значения $g_{\text{доп}}$ полуширины g интервала J_p , который определен формулой (2.6).

При $P=0.95$ для законов распределения случайных погрешностей, приведенных в п. 2.3, значение полуширины этих интервалов составляет:

- для плотности нормального распределения $g=1.96\sigma$,
- для плотности равномерного распределения $g=0.95h$,
- для плотности треугольного распределения $g=0.975h$,
- для плотности распределения ARCSIN $g=0.997h$.

Если указанные характеристики случайной составляющей погрешности не изменяются в диапазоне измерений, они нормируются одним числом, выраженным в абсолютных или относительных значениях. При изменении характеристик случайной составляющей погрешности в зависимости от измеряемой величины они нормируются функцией, в том числе линейной, представленной в виде, аналогичном двучленной формуле (2.10).

В тех случаях, когда погрешность средства измерений содержит случайную составляющую, но тем не менее она нормируется без разделения на систематическую и случайную составляющие, то это значит, что в нормированных пределах должна лежать сумма систематической и случайной погрешностей с заданной вероятностью, например, $P=0.95$. Пример подобного интервала приведен на рис. 2.8. Понятно, что этот интервал будет шире интервала, содержащего только одну случайную составляющую, на значение систематической погрешности.

При таком нормировании для потребителя остается неизвестным, как поделили между собой этот нормированный интервал систематическая и

случайная составляющие погрешности, и существуют ли они обе, или одной из составляющих нет.

Для того, чтобы это установить, нет иного пути, кроме эксперимента, в котором должно участвовать образцовое средство измерений (мера или прибор). Эксперимент должен заключаться в том, что на вход испытуемого средства измерений подаются точно известные значения измеряемой величины, заданные в нормативной документации. При этих значениях производятся многократные измерения выходной величины, после чего путем статистической обработки методами, описанными в п.п. 3.2 - 3.4, вычисляются границы доверительного интервала для систематической составляющей погрешности (математического ожидания погрешности) и границы доверительного интервала (толерантные пределы) для промежутка J_p , который содержит заданную долю значений случайной погрешности.

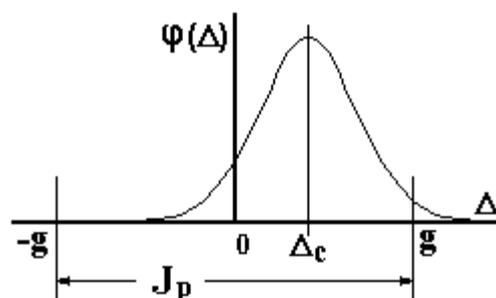


Рис. 2.8. Интервал, содержащий сумму систематической и случайной составляющих погрешности

2.5. Общие принципы определения и представления характеристик погрешности результатов измерений в условиях действия случайных факторов

Общепринятой формой представления окончательного результата измерений или его погрешности является интервал. Понятно, что если измерения сопровождаются случайными погрешностями и помехами, указанные интервалы должны сопровождаться сообщением о вероятности, с которой можно утверждать о нахождении истинного значения измеряемой величины в этом интервале.

Практическое определение границ подобных интервалов может быть выполнено двумя способами:

- путем расчета - суммированием значения характеристики абсолютной инструментальной погрешности, нормированной для применяемого средства измерений и увеличенной из-за влияния внешних факторов, с аб-

солютной величиной полуширины g интервала J_p погрешностей, вызванных случайными возмущающими воздействиями,

- путем статистической обработки результатов многократных измерений одной и той же неизменной во времени величины в одних и тех же условиях; в этом случае статистическими методами определяются *толерантные пределы* (см. п.3.3.4), которые суть не что иное, как границы доверительного интервала, содержащего заданную долю значений случайной погрешности однократных измерений.

При использовании любого из перечисленных способов границы этого интервала должны быть смещены в одну сторону на значение систематической погрешности, если она известна и если в результат измерения не введена соответствующая поправка. Однако, если о систематической погрешности известно только, что ее значение лежит внутри некоторого интервала, то интервал для суммарной погрешности должен быть расширен на ширину интервала, в котором лежат возможные значения систематической погрешности.

Аналогичная ситуация имеет место и в тех случаях, когда в результаты измерений вводится поправка на систематическую погрешность. Дело в том, что значение этой поправки известно с конечной погрешностью, которая представляется также в виде интервала и называется *неисключенной систематической погрешностью* (НСП).

С целью уменьшения влияния случайных погрешностей и помех часто прибегают к многократным измерениям, а в качестве результата измерения используют среднее значение. Понятно, что если систематическая погрешность невелика по сравнению со случайной и измеряемая величина неизменна, то ширина интервала погрешности может быть уменьшена. Тогда границы интервала погрешности (неопределенности значений измеряемой величины) определяются, как границы доверительного интервала, который с заданной довольно высокой доверительной вероятностью $Q = (0,8 \div 0,95)$ покрывает истинное значение измеряемой величины (см. п. 3.3). *Эти границы, как и ширина доверительного интервала являются характеристиками случайной погрешности (неопределенности) результата многократных измерений.*

Поскольку при усреднении результатов измерений систематическая

составляющая погрешности не изменяется, границы доверительного интервала должны быть смещены на значение систематической погрешности результата каждого однократного измерения, если это значение известно. В противном случае, как и ранее, границы должны быть расширены на значение ширины интервала, в котором лежат возможные значения систематической погрешности. В качестве вероятностной меры подобных интервалов должна использоваться доверительная вероятность.

Подобные интервальные характеристики погрешности в некоторых работах, методиках и стандартах называются "доверительной погрешностью".

2.6. Правила и примеры представления результатов прямых измерений

При выполнении работ и оформлении отчетов о них следует выполнять общие *метрологические правила представления результатов измерений и характеристик погрешности (неопределенности)* этих результатов, а именно:

- результат измерения представляется именованным числом, выраженным в единицах измеряемой величины x ,

- характеристика абсолютной погрешности выражается именованным числом в единицах измеряемой величины, количество значащих цифр в выражении абсолютной погрешности должно быть равно **1**; в порядке исключения допускается использовать две значащие цифры, из которых последняя должна быть равна 5,

- характеристика относительной погрешности (в том числе - приведенной) должна выражаться в процентах, количество значащих цифр в выражении относительной погрешности должно быть равно **1**; в порядке исключения допускается использовать две значащие цифры, из которых последняя должна быть равна 5,

- округление значений характеристик погрешности выполняется в сторону увеличения абсолютного значения (модуля),

- число, выражающее результат измерения, должно заканчиваться тем десятичным разрядом, в котором находится первая значащая цифра числа, выражающего характеристику абсолютной погрешности,

Правило округления числа, выражающего результат измерения:

если старшая из отбрасываемых цифр равна 5 или больше, младшая цифра из оставшихся увеличивается на единицу, в противном случае она остается неизменной, при этом, если результат измерения выражается целым числом, то отбрасываемые цифры заменяются нулями.

Округление рекомендуется выполнять на последнем этапе вычислений при получении окончательного результата, при этом могут оказаться несогласованными результаты вычислений нескольких значений разных величин, тогда возникшее несоответствие следует исправить, не занижая погрешностей результата.

Правила представления интервальных характеристик. Если интервал симметричен относительно нуля, его границы могут быть представлены в виде $\pm\Delta_{\text{доп}}$. Интервал с несимметричными границами следует представлять указанием обеих границ $[A, B]$. Подобное представление пригодно для интервалов с симметричными границами: $[-A, A]$.

Примеры представления результатов прямых измерений и характеристик погрешности измерения (неопределенности значения измеряемой величины).

Пример 1. Настоящий пример выполнен для случая, когда случайные погрешности отсутствуют.

Предположим, что выполнено однократное прямое измерение напряжения U с помощью стрелочного вольтметра в нормальных условиях. Обозначение класса точности вольтметра **0,5**. Предел измерения $U_{\text{max}} = 150\text{В}$. Показание вольтметра $\hat{U} = 115\text{В}$. Систематическая составляющая абсолютной погрешности e возникает в результате взаимодействия вольтметра с объектом из-за собственного потребления и шунтирования участка цепи объекта. В этом случае эта погрешность систематическая и может быть вычислена (работа № 3). Допустим для этого примера, что она равна $\Delta_{\text{мет}} U = -5\text{В}$.

Инструментальная абсолютная погрешность результата измерения находится в интервале $[-\Delta_{\text{ин}} U, \Delta_{\text{ин}} U]$, где $\Delta_{\text{ин}} U = \frac{\gamma}{100} \cdot U_{\text{max}}\text{В}$, γ - число, обозначающее класс точности вольтметра. Поскольку интервал, со-

держаний значение инструментальной абсолютной погрешности, симметричен, действующие стандарты допускают его представление в виде $\pm \Delta_{\text{ин}} U$ В. Из-за систематической погрешности $\Delta_{\text{мет}} U$ интервал, содержащий общую абсолютную погрешность результата измерения, не будет симметричным:

$$\left[-\Delta_{\text{ин}} U + \Delta_{\text{мет}} U, \Delta_{\text{ин}} U + \Delta_{\text{мет}} U \right].$$

Интервал неопределенности истинного значения измеряемого напряжения также несимметричен и имеет границы:

$$\left[\hat{U} - \Delta_{\text{ин}} U - \Delta_{\text{мет}} U, \hat{U} + \Delta_{\text{ин}} U - \Delta_{\text{мет}} U \right].$$

Переходя к числам, вытекающим из настоящего примера, с учетом правил округления получим:

Границы инструментальной абсолютной погрешности $\Delta_{\text{ин}} U = \pm 0.75$ В.

Абсолютная погрешность измерения лежит в интервале $[-5.75, -4.25]$ В или с округлением $[-6.0, -4.0]$ В.

Интервал неопределенности истинного значения измеряемого напряжения имеет границы (абсолютная погрешность измерения отрицательна): $[119.25, 120.75]$ В, или с округлением $[119, 121]$ В.

Инструментальная относительная погрешность (в %%) равна

$$\pm \frac{\Delta_{\text{ин}} U}{\hat{U}} \cdot 100\% = \pm 0.6522\% \cong \pm 0.7\%$$

Относительная погрешность измерения лежит в интервале

$$[-5.2174, -3.4783]\%$$

или с округлением - $[-5.5, -3.0]\%$.

Пример 2. Предположим, что выполнены многократные измерения напряжения цифровым вольтметром в нормальных условиях. Характеристики погрешности вольтметра нормированы двучленной формулой, и его класс точности имеет обозначение $0.1/0.05$. Предел измерения $U_{\text{max}} = 100$ В. Число измерений $n = 36$. Помеха или случайная составляющая погрешности считается распределенной по нормальному закону. Среднее арифметическое значение результатов измерений равно $\bar{U} = 85.345$ В. Среднеквадратическое отклонение результатов измерений от

среднего арифметического значения вычислено и равно $s = 0.356$ В. Методическая абсолютная погрешность вычислена и равна

$$\Delta_{\text{мет}} U = -0.08 \text{ В.}$$

Инструментальная относительная погрешность результатов каждого измерения лежит в интервале $[-\gamma_{\text{ин}} U, \gamma_{\text{ин}} U]$, где $\gamma_{\text{ин}} U$ вычисляется по двучленной формуле :

$$\gamma_{\text{ин}} U = \left[0.1 + 0.05 \cdot \left(\frac{U_{\text{max}}}{\bar{U}} - 1 \right) \right] \% = 0.1086\%$$

Инструментальная абсолютная погрешность результатов каждого измерения лежит в интервале $[-\Delta_{\text{ин}} U, \Delta_{\text{ин}} U]$, где

$$\Delta_{\text{ин}} U = \frac{\gamma_{\text{ин}} U}{100} \cdot \bar{U} = 0.0927 \text{ В.}$$

Статистическими оценками границ *интервала, содержащего не менее 95% значений случайных погрешностей однократного измерения*, выполняемого в условиях действия тех же помех, являются параметрические толерантные пределы (см. п. 3.3.4.1) :

$$[-s \cdot \kappa(n, P, Q); s \cdot \kappa(n, P, Q)] ,$$

где $P = 0.95$, $n = 36$, Q - доверительная вероятность . Принимаем $Q = 0.95$. При этих значениях толерантный множитель $\kappa(36, 0.95, 0.95) = 2.5$, и толерантные пределы суть $[-0.89, 0.89]$ В. Эти пределы раздвигаются на ширину интервала инструментальной абсолютной погрешности и смещаются на значение методической абсолютной погрешности $\Delta_{\text{мет}} U$, которая является систематической. В результате этих действий мы получим оценки несимметричных границ интервала, о котором с вероятностью $Q = 0.95$ мы можем говорить, что он содержит не менее $P = 95\%$ значений погрешностей однократных измерений неизменного во времени напряжения при действии случайных помех. Эти границы $[-0.08 - 0.0927 - 0.89, -0.08 + 0.0927 + 0.89]$ В, то есть $[-1.0627, 0.9027]$ В. После округления в соответствии с приведенными правилами получим границы $[-1.5, 0.95]$ В.

Интервал неопределенности, содержащий истинное значение измеряемого напряжения, который мы бы получили по результату однократного измерения, равному **85.345** В, имеет границы

$$[85.345 - 0.9027 ; 85.345 + 1.0627] \text{ В,}$$

то есть [84.442 , 86.408] В. Поскольку первая значащая цифра в значении погрешности есть единица, округляем значения границ интервала неопределенности значений измеряемой величины до целых чисел: [84.0 , 87.0] В.

Интервалы, содержащие погрешности среднего арифметического значения результатов многократных измерений, конечно, сузятся. Вычислим эти границы.

Доверительный интервал, содержащий погрешность среднего значения n результатов измерений с учетом систематической погрешности $\Delta_{\text{мет}} U$ определяется границами :

$$\Delta_{\text{мет}} U - t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \Delta_{\text{мет}} U + t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ,$$

где $t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1)$ - множитель Стьюдента (см. п. 3.3.2), зависящий от доверительной вероятности Q . При $Q = 0.95$ и $n = 36$ $t_{0.975}(n-1) \cong 2.0$. Расчет дает границы [-0.1987 , 0.0387] В.

С учетом границ интервала инструментальной погрешности получим границы интервала, содержащего общую погрешность результата многократных измерений напряжения с усреднением : [-0.2894 , 0.1314] В.

Округляя, получим интервал погрешности : [- 0.3 , 0.2] В. Как видим, усреднение результатов многократных измерений приводит к существенному снижению погрешности.

Интервал неопределенности, содержащий истинное значение измеряемого напряжения с вероятностью $P \geq 0.95$, имеет границы

$$[85.3 - 0.1314 , 85.3 + 0.2894] \text{ В,}$$

где результат округлен до первой значащей цифры в выражении погрешности. После округления получаем интервал [85.1 , 85.6] В.

Результат измерения: $\tilde{U} = 85.3 \text{ В}$ с абсолютной погрешностью, лежащей в интервале [- 0.3 , 0.2] В.

Значения относительных погрешностей лежат в интервале

$$[-0.3517 , 0.2345]\%$$

или после округления [-0.4 , 0.25] %.

При необходимости характеризовать случайные погрешности измерений в дисперсией или среднеквадратическим значением с обеспечением гарантий достоверности, тогда следует вычислить верхнюю границу доверительного интервала с использованием распределения “хи-квадрат” (см. п. 3.3.3).

В нашем случае при доверительной вероятности **0.95** и **n = 36** *верхняя граница доверительного интервала для среднеквадратического значения* равна

$$\sigma = s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-Q}^2(n-1)}} = 0.4593 \text{ В} \cong 0.5 \text{ В}.$$

Пример 3. Экспериментальное определение характеристик АЦП (работа № 1). Выполняются многократные измерения одного и того же точно известного значения напряжения. Все действия аналогичны описанным выше в примере 2 со следующими непринципиальными изменениями:

- схема собирается таким образом, чтобы систематической погрешности $\Delta_{\text{мет}} U$ не было или чтобы она была пренебрежимо мала,

- среднее значение результатов измерений в данном случае есть оценка систематической составляющей инструментальной погрешности АЦП, а доверительный интервал, границы которого вычисляются с использованием коэффициентов Стьюдента, есть интервал, содержащий с заданной доверительной вероятностью истинные значения систематической составляющей инструментальной погрешности АЦП,

- толерантные пределы суть границы интервала, который содержит **100 P** - процентную долю значений инструментальной погрешности АЦП с вероятностью **Q**,

- в качестве оценки среднеквадратического значения случайной составляющей инструментальной погрешности АЦП используется верхняя граница доверительного интервала для среднеквадратического значения .

2.7. Оценка характеристик погрешности и представление результатов косвенных измерений

Ниже приведены примеры простейших случаев, когда результат косвенного измерения вычисляется с использованием четырех арифметических действий.

Пусть x, y - результаты прямых измерений. $\pm\Delta x, \pm\Delta y, \pm\gamma_x, \pm\gamma_y$ - границы интервалов значений их абсолютных и относительных погрешностей соответственно.

Как правило, в этой ситуации неизвестно:

- соотношение между случайными и систематическими составляющими погрешности,

- конкретные значения, принимаемые погрешностями, и их знаки.

Исходим из того, что результаты измерений необходимо снабжать гарантированными характеристиками их погрешностей. К этому, в частности, направлены правила округления результатов, приведенные в п. 2.6.

Результат косвенного измерения обозначим через z . Характеристики его абсолютной и относительной погрешности представляются в виде границ интервалов, которые содержат их значения : $\pm\Delta z, \pm\gamma_z$.

1. Сложение

Пусть $z = x + y$, $\Delta z = \Delta x + \Delta y$.

2. Вычитание

Пусть $z = x - y$, $\Delta z = \Delta x + \Delta y$, поскольку знак погрешности неизвестен, а мы обязаны определить гарантированное значение характеристики погрешности.

В этих двух действиях участвуют характеристики абсолютной погрешности, и оценка характеристики относительной погрешности результата непосредственно через характеристики относительных погрешностей исходных данных невозможна.

При задании относительных погрешностей исходных данных расчет может быть выполнен в последовательности:

- по значениям относительных погрешностей x и y вычислить характеристики абсолютных погрешностей Δx и Δy ,
- по полученному значению Δz и значению z вычислить γ_z .

При выполнении умножения и деления результатов прямых измерений, напротив, более пригодны характеристики относительной погрешности.

3. Умножение

Пусть $z = x \cdot y$. Тогда

$$\gamma_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{x \cdot y} \cdot [(x + \Delta x)(y + \Delta y) - x \cdot y] = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{x \cdot y}.$$

Третье слагаемое имеет второй порядок малости, и, учитывая правила округления и тот факт, что здесь речь идет об оценке характеристики погрешности, этим слагаемым можно пренебречь. Отсюда получаем :

$$\gamma_z = \gamma_x + \gamma_y.$$

4. Деление

Пусть $z = \frac{x}{y}$. Тогда

$$\gamma_z = \frac{1}{z} \cdot \left[\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} \right] = \frac{y}{x} \cdot \frac{y \cdot \Delta x - x \cdot \Delta y}{y \cdot (y + \Delta y)} = \frac{y}{y + \Delta y} \left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} \right].$$

Поскольку знак погрешности неизвестен и мы стремимся получить гарантированное значение характеристики относительной погрешности, сменим знак “минус” на “плюс”. Далее, в силу того, что $\Delta y \ll |y|$, и не забывая о том, что мы отыскиваем характеристику погрешности, но не значение измеряемой величины, получим окончательно:

$$\gamma_z = \gamma_x + \gamma_y.$$

В частных случаях: $z = x + a$, $z = b \cdot x$, где a и b - неслучайные числа, не содержащие погрешности, из приведенных правил следует соответственно:

$$\Delta z = \Delta x, \quad \gamma_z = \frac{\gamma_x}{1 + \frac{a}{x}}, \quad \Delta z = b \cdot \Delta x, \quad \gamma_z = \gamma_x.$$

При более сложных функциях вычисления результата косвенных измерений следует прибегать к линеаризации этих функций с помощью первых производных, и пользоваться приведенными формулами.

Правила представления результатов и их погрешностей, правила округления – по п. 2.6.

3. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ПРАКТИКЕ ИЗМЕРЕНИЙ

В инструментальном арсенале измерительных технологий и метрологических операций важное место занимают методы математической статистики, которые применяются для обработки результатов многократных измерений, содержащих случайные погрешности. Ниже представлены наиболее распространенные статистические методы, которые используются в настоящем цикле лабораторных работ для решения следующих задач:

- определение характеристик погрешности средств измерений, перечисленных в п. 2.4, по экспериментальным данным,
- уменьшение влияния случайных погрешностей и помех на результаты измерений,
- определение характеристик случайной составляющей погрешности результатов рабочих измерений по результатам многократных измерений, в том числе, идентификация плотности распределения случайной составляющей погрешности,
- определение статических характеристик преобразования измерительных преобразователей по результатам экспериментов,
- аппроксимация функциональных зависимостей между измеряемыми величинами.

Реально круг задач современных измерительных информационных технологий и метрологической практики, решение которых невозможно без привлечения аппарата математической статистики, гораздо шире.

3.1. Подготовка массива результатов измерений для статистической обработки

3.1.1. Вариационный ряд

Пусть в результате n измерений величины x получен массив x_1, x_2, \dots, x_n , который на языке математической статистики называется *выборкой*, элементы этого массива называются *выборочными значениями* измеряемой величины, а их количество - *объемом выборки*.

Вариационный ряд образуется путем перестановки исходного массива результатов многократных измерений в порядке их возрастания. Такая перестановка получается естественным путем при нанесении результатов на числовую ось. Элементы нового массива получают новые порядковые номера, и эти новые номера заключаются в круглые скобки:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}. \quad (3.1)$$

При экспериментальном определении характеристик погрешности исходным массивом является массив выборочных значений погрешности $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, из которых составляется вариационный ряд

$$\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \dots, \Delta_{(n)}. \quad (3.2)$$

Первый и последний члены вариационного ряда называются *крайними членами вариационного ряда*. Полусумма крайних членов вариационного ряда называется *срединной размаха выборки*:

$$x_{cp} = (x_{(1)} + x_{(n)}) / 2, \text{ или } \Delta_{cp} = (\Delta_{(1)} + \Delta_{(n)}) / 2.$$

Средний по положению член вариационного ряда называется *выборочной медианой*. При нечетном n выборочной медианой для (3.1) и (3.2) является

$$\tilde{x}_{med} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \text{ или } \Delta_{med} = \Delta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \text{ соответственно.}$$

Вариационный ряд является основой для построения выборочной функции распределения.

3.1.2. Выборочная функция распределения

Выборочные функции распределения $\tilde{F}(x)$ и $\tilde{F}(\Delta)$ являются оценками функций распределения измеряемой величины x , возмущенной случайными погрешностями, и погрешности δ средства измерений соответственно. Выборочные функции распределения строят с целью идентификации генеральной функции распределения $F(x)$ или $F(\Delta)$. В дальнейшем, если иное не будет оговорено особо, мы будем пользоваться только одним обозначением аргумента функции распределения, поскольку все рассуждения и математические выкладки одинаковы для любых аргументов.

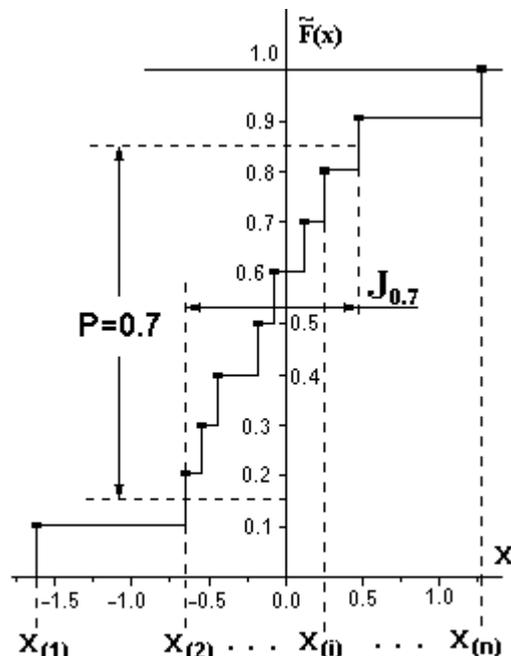


Рис. 3.1. Пример выборочной функции распределения

Математическое описание выборочной функции распределения соответствует описанию функции распределения, приведенному в п. 2.3:

$$\tilde{F}(x) = n(x_{(i)} \leq x) / n, \quad (3.3)$$

где $n(x_{(i)} \leq x)$ - количество членов вариационного ряда, значения которых не превосходят x .

Пример графика выборочной функции распределения приведен на рис. 3.1. Из этого графика видно, что выборочная функция распределения есть неубывающая ступенчатая функция с областью изменения $[0,1]$. Она возрастает скачком в каждой точке $x = x_{(i)}$. Размер каждого скачка равен $1/n$.

3.1.3. Гистограмма

Статистической оценкой генеральной плотности распределения $\varphi(x)$ или $\varphi(\Delta)$ служит *гистограмма* $\tilde{\varphi}(x)$ или $\tilde{\varphi}(\Delta)$ соответственно, которая строится по выборочным данным в виде кусочно-постоянной функции. В дальнейшем, как и для выборочной функции распределения, мы будем использовать только одно обозначение аргумента, если иное не будет оговорено особо. Пример гистограммы приведен на рис. 3.2. Гистограмма состоит из прямоугольников, построенных на полуоткрытых отрезках $(x_k, x_{k+1}]$ равной длины $\Delta x = x_{k+1} - x_k$, как на основании

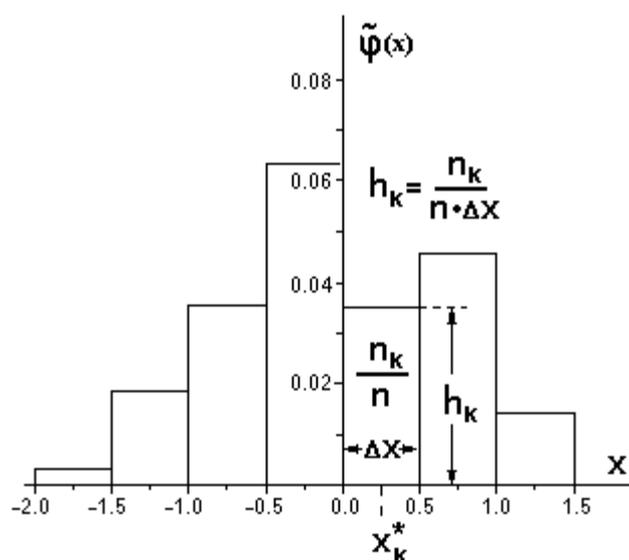


Рис. 3.2. Пример гистограммы

высоты каждого k -ого прямоугольника должна быть такой, чтобы его площадь была равна n_k / n , где n_k - количество выборочных значений, попавших в k -ый отрезок $(x_k, x_{k+1}]$ оси x . Общее количество этих отрезков - K . Для построения гистограммы необходимо разделить интервал между наименьшим и наибольшим выборочными значениями на отрезки равной длины таким образом, чтобы минимальное количество выборочных значений, находящихся внутри какого-либо из отрезков, было равно от 3 до 5. Если количество выборочных значений внутри k -го отрезка обозначить через n_k , то высота прямоугольника, который нужно построить на этом отрезке, как на основании, равна

$$h_k = \frac{n_k}{n \cdot \Delta x} \quad (3.4.)$$

В этом случае площадь фигуры, заключенной между гистограммой и осью абсцисс, будет равна 1, как это и следует из свойств плотности распределения вероятностей (см. формулу (2.3) п. 2.3), оценкой которой является гистограмма.

3.2. Точечное статистическое оценивание значения измеряемой величины и характеристик погрешности

3.2.1. Оценки значения измеряемой величины и характеристик погрешности результатов измерений

Как показано в п. 2.1 и на рис. 2.2, при наличии случайной составляющей погрешности измерений значение неизменной во времени измеряемой величины в сумме с систематической составляющей погрешности представляет собой математическое ожидание случайной величины, в качестве которой выступает сумма измеряемой величины и погрешности измерений. Наиболее распространенной точечной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое значение выборочных данных:

$$\tilde{x} + \tilde{\Delta}_c x = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i . \quad (3.5)$$

В ряде случаев полезными оценками математического ожидания могут служить выборочная медиана \tilde{x}_{med} или середина размаха выборки x_{cp} (см. п. 3.1.1).

Оценка математического ожидания может быть вычислена и по гистограмме:

$$\tilde{x} + \tilde{\Delta}_c x = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^K n_k \cdot x_k^* , \quad (3.6)$$

где x_k^* - середины интервалов, на которых построена гистограмма (см. рис. 3.2).

Эта оценка экономичнее в отношении трудоемкости вычислений, но качество ее хуже, ибо за счет группирования данных при построении гистограммы часть информации теряется.

При отсутствии систематической составляющей погрешности измерений среднее арифметическое значение есть оценка значения измеряемой величины.

Перейдем теперь к оцениванию характеристик погрешности результатов измерений, перечисленных в п.п. 2.1, 2.3.

Если все повторные измерения выполняются независимо друг от дру-

га, то оценка s среднеквадратического значения σ случайной составляющей погрешности результата каждого одиночного измерения вычисляется по формуле

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.7)$$

Эта оценка может быть вычислена и по гистограмме:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k \cdot (x_k^* - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta x)^2}{12}}. \quad (3.8)$$

Точечные оценки границ интервала J_P , в котором содержится не менее P - ой доли всех возможных значений случайной составляющей погрешности, определяются по выборочной функции распределения. На рис. 3.1 показан пример определения границ интервала J_P , для $P=0.7$, который содержит **70%** значений случайных погрешностей измерений. Из рисунка видно, что точечными оценками границ подобных интервалов для любых значений P всегда будут выборочные значения, они же - члены вариационного ряда

$$[x_{(k)}, x_{(n-r)}]. \quad (3.9)$$

Если сдвинуть этот интервал по оси абсцисс на значение оценки \bar{x} , получим искомые точечные оценки границ интервала J_P только для случайной составляющей погрешности однократных измерений:

$$\tilde{J}_P = [x_{(k)} - \bar{x}, x_{(n-r)} - \bar{x}]. \quad (3.10)$$

Из этого же рисунка видно также, что для уверенного определения границ интервала J_P , соответствующего вероятности P , достаточно близкой к **1**, необходимо, чтобы величина скачков выборочной функции распределения была не больше значения $(1-P)/2$: $1/n \leq (1-P)/2$, откуда следует, что количество измерений, которые для этого требуется выполнить, должно удовлетворять условию:

$$n \geq 2/(1-P). \quad (3.11)$$

Например, если $P=0.95$, то $n \geq 40$. Такое значительное количество измерений есть “плата” за то, что здесь не используется такая богатая информация, как информация о плотности распределения вероятностей случайной составляющей погрешности. Если же вид этой плотности распре-

деления известен, то *точечные оценки* искомым границ можно получить при меньшем объеме выборки, достаточном для точечной оценки среднеквадратического значения погрешности. В этих условиях для плотностей распределений, приведенных в п.п. 2.3.1 – 2.3.4, и вероятности **P=0.95** можно записать:

- для плотности нормального распределения

$$\tilde{g} = 1.96s, \quad \tilde{J}_{0.95} = [-1.96s, +1.96s], \quad (3.12)$$

- для плотности равномерного распределения

$$\tilde{g} = 1.65s, \quad \tilde{J}_{0.95} = [-1.65s, +1.65s], \quad (3.13)$$

- для плотности треугольного распределения

$$\tilde{g} = 2.4s, \quad \tilde{J}_{0.95} = [-2.4s, +2.4s], \quad (3.14)$$

- для плотности распределения ARCSIN

$$\tilde{g} = 1.41s, \quad \tilde{J}_{0.95} = [-1.41s, +1.41s], \quad (3.15)$$

где \tilde{g} - точечные оценки полуширины g интервалов J_p , математическое определение которых дается формулами (2.6) и (2.9), s - точечная оценка среднеквадратического значения случайной погрешности.

Эти оценки называются *параметрическими оценками*, поскольку они вычисляются через оценки параметров плотностей распределений, и для их применения необходима информация о виде плотности распределения. Оценки вида (3.9), (3.10) называются *непараметрическими оценками* и не зависят от вида плотности распределения.

Выше формулами (3.5) - (3.8) были определены точечные оценки значения измеряемой величины и характеристик случайной составляющей погрешности однократных измерений. Поскольку для получения оценки значения измеряемой величины в формулах (3.5), (3.6) мы усреднили результаты n измерений, то тем самым мы уменьшили случайную составляющую погрешности результата усреднения n измерений в \sqrt{n} раз. Поэтому, если в качестве результата измерения величины x принять \bar{x} , то оценкой среднеквадратического значения случайной погрешности этого результата будет s/\sqrt{n} . Точечные параметрические оценки границ интервала J_p , в котором содержится не менее **P** - ой доли всех возможных зна-

чений случайной составляющей погрешности, распределенной по нормальному закону также изменятся, и для $P=0.95$ эти оценки вычисляются по формуле:

$$\tilde{J}_{0.95} = \left[-1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}, +1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} \right], \quad (3.16)$$

В силу того, что плотность распределения суммы независимых случайных величин с увеличением их количества стремится к плотности нормального распределения, то уже начиная с $n=(10\div 15)$ оценки (3.16), могут быть применены независимо от вида плотности распределения случайной составляющей погрешности.

3.2.2. Оценки характеристик погрешности средств измерений

В соответствии с действующими метрологическими нормативными документами характеристики погрешности определяются и контролируются в отдельных точках диапазона измерений, которые обычно указываются в разделе “Методы и средства поверки” технических условий и (или) стандартов на испытываемые средства измерений.

При метрологических испытаниях средств измерений (при поверке или калибровке) эксперимент осуществляется таким образом, что в результате формируется массив выборочных значений погрешности в каждой из заданных точек диапазона (шкалы). Каждый элемент этого массива есть разность между показанием (или выходным сигналом) испытываемого средства измерения и показанием (выходным сигналом) образцового средства измерения (меры, калибратора), точность которого, по крайней мере, в три - пять раз выше. Таким образом, исходным материалом для обработки служат выборочные значения $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, из которых затем составляется вариационный ряд $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \dots, \Delta_{(n)}$, как в п. 3.1.1. В этих значениях содержатся обе составляющие: систематическая и случайная. В соответствии с п.п. 3.1.2, 3.1.3. по этим значениям строится выборочная функция распределения и гистограмма, которые служат для идентификации вида плотности распределения случайной составляющей погрешности и для оценки некоторых ее характеристик. По выборочным значениям погрешностей вычисляются точечные оценки характеристик погрешности

средства измерений:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}. \quad (3.17)$$

Оценки $\bar{\Delta}$ и s могут быть вычислены также и по гистограмме по аналогии с (3.6), (3.8).

Среднее арифметическое значение $\bar{\Delta}$ - точечная оценка систематической составляющей погрешности Δ_c средства измерений, s - оценка среднеквадратического значения σ случайной составляющей погрешности средства измерений. В ряде случаев для точечного оценивания систематической составляющей погрешности используются выборочная медиана $\tilde{\Delta}_{\text{med}}$ или середина размаха Δ_{cp} . Точечные оценки границ интервала \mathbf{J}_P вычисляются по формулам (3.12 - 3.15) и в общем виде могут быть выражены следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{J}}_P = [-q \cdot s, +q \cdot s], \quad \tilde{g} = q \cdot s,$$

где q - множитель, зависящий от значения вероятности P и от вида закона распределения погрешности.

В случаях, когда по обоснованным соображениям даже при существенной случайной составляющей погрешность средства измерений нормируется без разделения на систематическую и случайную составляющие, в качестве оценки \tilde{g} полуширины интервала \mathbf{J}_P , *то есть доверительной погрешности* (см. п. 2.4 и рис. 2.8) принимают наибольшее по модулю значение:

- при непараметрическом оценивании

$$\tilde{g}_{\text{max}} = \max\left[|\Delta_{(1+k)}|, |\Delta_{(n-r)}|\right], \quad (3.18)$$

- при параметрическом оценивании

$$\tilde{g}_{\text{max}} = \max\left[|\bar{\Delta} - q \cdot s|, |\bar{\Delta} + q \cdot s|\right], \quad (3.19)$$

В указанных случаях оценка интервала \mathbf{J}_P есть симметричный относительно начала координат интервал $\tilde{\mathbf{J}}_P = [-\tilde{g}_{\text{max}}, +\tilde{g}_{\text{max}}]$, показанный на рис. 2.8. Метрологические нормативные документы допускают запись подобных интервалов в виде $\pm \tilde{g}_{\text{max}}$.

3.3. Интервальное статистическое оценивание

3.3.1. Понятие о доверительных интервалах

Недостаток точечных оценок заключается в том, что они не дают никакой информации о том, насколько далеки эти оценки от действительных значений искомых характеристик. Гораздо более полную информацию о действительных значениях оцениваемых величин и характеристик содержат *интервальные оценки*, каковыми являются границы *доверительных интервалов*.

Доверительный интервал - интервал, который покрывает действительное значение оцениваемой величины с заданной вероятностью Q .

Вероятность Q называется *доверительной вероятностью* и назначается в пределах от **0.8** до **0.95** в зависимости от условий каждой конкретной задачи.

Слишком малое значение доверительной вероятности снижает доверие к результатам измерений. С другой стороны, слишком большое значение доверительной вероятности приводит к существенному расширению доверительного интервала, и в пределе при $Q = 1$ доверительным интервалом оказывается вся ось вещественных чисел, ибо в условиях действия случайных факторов об оцениваемой величине наверняка можно предположить лишь, что ее значение лежит где-то на числовой оси.

Границы доверительных интервалов случайны, поскольку они не могут быть определены иначе, чем путем обработки данных, возмущенных действием случайных факторов. В связи с этим доверительный интервал можно интерпретировать, как некий отрезок случайной длины, брошенный случайным образом на числовую ось так, что он покрывает действительное значение оцениваемой величины с доверительной вероятностью Q .

В представленном цикле лабораторных работ нас будет интересовать задача построения доверительных интервалов:

- для значения измеряемой величины (на языке математической статистики - для математического ожидания результатов многократных измерений),
- для значения систематической составляющей погрешности средства

измерений (для математического ожидания погрешности средства измерений),

- для среднеквадратического значения случайной составляющей погрешности результата измерения или погрешности средства измерения.

- для интервала J_p , в котором содержится не менее P - ой доли всех возможных значений случайной составляющей погрешности результатов измерений или средств измерений.

3.3.2. Доверительные интервалы для значения измеряемой величины и для систематической составляющей погрешности средства измерений

Точечная оценка математического ожидания результатов многократных измерений неизменяющейся измеряемой величины является оценкой суммы истинного значения измеряемой величины x и систематической погрешности $\Delta_c x$ (см. также п.п. 2.1, 2.3)

Если плотность распределения случайной составляющей погрешности измерений есть плотность нормального распределения или близка к ней, то границы доверительного интервала, накрывающего действительное значение суммы $x + \Delta_c x$ с вероятностью Q , вычисляются по формулам

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1), \quad \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1), \quad (3.20)$$

где \bar{x} и s - оценки, вычисляемые по формулам п. 3.2.1, $t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1)$ - коэф-

фициент Стьюдента, таблицы значений которого приводятся практически во всех учебниках и справочниках по математической статистике; ниже в таблице 3.1 приведена выписка из этих таблиц.

Таким образом, по определению доверительного интервала,

$$P\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1) \leq x + \Delta_c x \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1)\right) = Q. \quad (3.21)$$

В случае отсутствия систематической составляющей погрешности доверительный интервал с границами (3.20) есть не что иное, как интервал неопределенности истинного значения измеряемой величины (см. также

п.2.1). Как видно из формулы (3.21), с увеличением n ширина доверительного интервала уменьшается, стремясь в пределе к нулю. Это обстоятельство свидетельствует о том, что увеличение количества измерений и усреднение результатов не бесполезно. Систематическую погрешность усреднение результатов измерений не изменяет.

Границы доверительного интервала для систематической составляющей погрешности средства измерений определяются при его метрологических испытаниях по выборочным значениям погрешности в соответствии с приведенными формулами и с заменой x на Δ . В результате будут получены нижняя Δ_{CH} и верхняя Δ_{CB} границы доверительного интервала, который с вероятностью Q накрывает действительное значение систематической составляющей погрешности средства измерений:

$$P\left(\bar{\Delta} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1) \leq \Delta_c \leq \bar{\Delta} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1)\right) = P(\Delta_{CH} \leq \bar{\Delta} \leq \Delta_{CB}) = Q, \quad (3.22)$$

где точечные оценки $\bar{\Delta}$ и s вычисляются по формулам (3.17).

Таблица 3.1

Коэффициенты Стьюдента $t_{\frac{1+Q}{2}}(n-1)$

$Q \backslash n$	4	5	6	8	10	12	14	16	18	...	∞
0.8	1.64	1.53	1.48	1.41	1.38	1.36	1.35	1.34	1.33	...	1.29
0.95	3.18	2.78	2.57	2.36	2.26	2.20	2.16	2.13	2.11	...	1.96

В п. 2.6 приводится пример интервальной оценки характеристики погрешности среднего арифметического значения, полученного усреднением результатов многократных измерений (пример 2).

3.3.3. Доверительные интервалы для среднеквадратического значения случайной составляющей погрешности

Все действия и формулы, необходимые для построения доверительных интервалов, накрывающих действительное среднеквадратическое значение σ случайной составляющей погрешности средств измерений и результатов измерений, полностью идентичны. Различие состоит только в

обозначениях.

Вычисление границ доверительного интервала для σ основано на том, что если плотность распределения случайной составляющей погрешности нормальна, то плотность распределения величины

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad (3.23)$$

где s - оценка σ по формуле (3.7) или (3.17), есть плотность распределения $\chi^2(n-1)$ с $(n-1)$ степенью свободы. Поэтому

$$P\left(\chi_{\frac{1-Q}{2}}^2(n-1) \leq \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2} \leq \chi_{\frac{1+Q}{2}}^2(n-1)\right) = Q,$$

откуда, преобразуя неравенство, стоящее внутри скобок, получим нижнюю $\sigma_{\text{н}}$ и верхнюю $\sigma_{\text{в}}$ границы доверительного интервала, накрывающего действительное значение σ с доверительной вероятностью Q :

$$P\left(s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\frac{1+Q}{2}}^2(n-1)}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\frac{1-Q}{2}}^2(n-1)}}\right) = P(\sigma_{\text{н}} \leq \sigma \leq \sigma_{\text{в}}) = Q,$$

Поскольку $\sigma \geq 0$, нас будет интересовать только верхняя граница доверительного интервала $\sigma_{\text{в}}$. Значение этой верхней границы для σ определяется из неравенства, стоящего в круглых скобках предыдущего выражения:

$$P\left(0 \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-Q}^2(n-1)}}\right) = P(0 \leq \sigma \leq \sigma_{\text{в}}) = Q, \quad (3.24)$$

Таблица 3.2

Значения $\chi_{1-Q}^2(n-1)$

$Q \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q = 0.8	0.45	1.0	1.65	2.34	3.07	3.82	4.6	5.38	6.18	6.99	7.81
Q = 0.95	0.1	0.35	0.71	1.14	1.63	2.17	2.73	3.32	3.94	4.57	5.23

Таблицы квантилей распределения $\chi^2(n-1)$ приведены практически во всех учебниках и справочниках по математической статистике. В таблице 3.2 приведена выписка из этих таблиц применительно к представленному здесь циклу лабораторных работ. В п. 2.6 приводится пример применения плотности распределения $\chi^2(n-1)$ для определения по результатам многократных измерений верхней границы $\sigma_{\text{в}}$ среднеквадратического значения погрешности однократного измерения (пример 2).

3.3.4. Доверительный интервал для интервала J_{P} , в котором содержится P – ая доля всех возможных значений случайной составляющей погрешности результатов измерений или средств измерений

Задача состоит в том, чтобы построить доверительный интервал $\hat{J}(P, Q)$, который должен покрывать действительный интервал J_{P} с вероятностью Q , то есть

$$P(J_{\text{P}} \subseteq \hat{J}(P, Q)) = Q.$$

Границы доверительного интервала $\hat{J}(P, Q)$ для J_{P} называются *толерантными пределами*. И по аналогии с п. 3.2.1. мы рассмотрим методы построения *параметрических* и *непараметрических толерантных пределов*. Параметрические толерантные пределы могут быть построены при условии, что плотность распределения случайной составляющей погрешности нормальна. Непараметрические толерантные пределы не зависят от вида плотности распределения, но за это требуют увеличения объема выборки, то есть увеличения трудоемкости.

Следует заметить, что с помощью толерантных пределов оценивается характеристика случайной составляющей погрешности результатов однократных измерений и что с увеличением объема выборки ширина доверительного интервала $\hat{J}(P, Q)$ к нулю не стремится, его границы (толерантные пределы), сближаются друг с другом и приближаются к границам интервала J_{P} извне.

Поскольку погрешности нормируются и представляются интервалами J_{P} , симметричными относительно нуля (см. п.п. 3.4, 3.5), то доверитель-

ные интервалы для них будут также симметричными.

3.3.4.1. Параметрические толерантные пределы

Параметрические толерантные пределы для случайной составляющей погрешности результата измерений или средства измерений суть границы интервала:

$$\hat{J}(P, Q) = [-s \cdot \kappa(n, P, Q), s \cdot \kappa(n, P, Q)], \quad (3.25)$$

где s - оценка σ , вычисляемая по формуле (3.17), $\kappa(n, P, Q)$ - толерантный множитель, таблица значений которого приведена в книге Л.Н.Большев, Н.В.Смирнов "Таблицы математической статистики" .-М.: ВЦ АН СССР, 1968 г.

Ниже в таблице 3.3 приведены значения толерантного множителя для $P = 0.95$ применительно к настоящему циклу лабораторных работ.

Таблица 3.3

Толерантный множитель $\kappa(n, 0.95, Q)$

$Q \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10
0.8	5.09	3.935	3.44	3.167	2.98	2.86	2.77	2.69
0.95	9.916	6.370	5.079	4.414	4.007	3.732	3.532	3.379

Пользуясь выражением для симметричных интервалов, которое было введено выше в п. 3.2.2 и допускается к использованию метрологическими нормативными документами, запишем интервал $\hat{J}(P, Q)$ в виде

$$\pm s \cdot \kappa(n, P, Q).$$

Фактически здесь получена верхняя граница \hat{g} доверительного интервала для полуширины g симметричного интервала J_P (то есть, для доверительной погрешности), который определен формулами (2.6), (2.9): $\hat{g} = s \cdot \kappa(n, P, Q)$. Из сравнения полученной интервальной оценки с точечной оценкой (3.12) видно, что всегда $\hat{g} > \tilde{g}$. Этого следовало ожидать, поскольку оценка, полученная здесь, дает право записать равенство

$$P(J_P \subseteq [-\hat{g}, +\hat{g}]) = P(J_P \subseteq [-s \cdot \kappa(n, P, Q), +s \cdot \kappa(n, P, Q)]) = Q,$$

В случаях, когда по обоснованным соображениям даже при существенной случайной составляющей погрешность средства измерений нормируется без разделения на систематическую и случайную составляющие (см. п. 2.4 и рис. 2.8), в качестве оценки \hat{g} полуширины интервала J_P , показанного на рис. 2.8, принимают наибольшее по модулю значение (см. также формулу (3.19)):

$$\hat{g}_{\max} = \max\left[|\bar{\Delta} - s \cdot \kappa(n, P, Q)|, |\bar{\Delta} + s \cdot \kappa(n, P, Q)|\right], \quad (3.26)$$

В указанных случаях оценка такого интервала J_P есть симметричный относительно начала координат интервал $\hat{J}(P, Q) = [-\hat{g}_{\max}, +\hat{g}_{\max}]$.

3.3.4.2. Непараметрические толерантные пределы

Непараметрическими точечными оценками границ интервала J_P в выражении (3.10) являлись члены вариационного ряда с исключенной оценкой математического ожидания, то есть выборочные значения случайной составляющей погрешности. Необходимая достоверность этих оценок достигалась при некотором объеме выборки, который зависел от заданного значения вероятности P . Естественно ожидать, что непараметрическими толерантными пределами также будут члены вариационного ряда, и чтобы обеспечить заданную доверительную вероятность того, что действительный интервал J_P оказался между толерантными пределами, к объему выборки должны быть предъявлены не менее жесткие требования.

В качестве непараметрических толерантных пределов для случайной составляющей погрешности измерений целесообразно использовать члены вариационного ряда (3.1), симметричные по своему расположению относительно его середины:

$$\hat{J}(P, Q) = [x_{(1+r)} - \bar{x}, x_{(n-r)} - \bar{x}]. \quad (3.27)$$

Непараметрические толерантные пределы для случайной составляющей погрешности средств измерений определяются точно так же по элементам вариационного ряда (3.2):

$$\hat{J}(P, Q) = [\Delta_{(1+r)} - \bar{\Delta}, \Delta_{(n-r)} - \bar{\Delta}]. \quad (3.28)$$

Относительно нуля толерантные пределы (3.27), (3.28), вообще говоря, симметричными не будут. Но поскольку для нормирования случайной

составляющей погрешности используются интервалы J_P , симметричные относительно нуля, то и доверительные интервалы для них также должны быть симметричными:

$$\hat{J}(P, Q) = [-\hat{g}, +\hat{g}], \quad (3.29)$$

где $\hat{g} = \max[|\Delta_{(1+r)} - \bar{\Delta}|, |\Delta_{(n-r)} - \bar{\Delta}|]$ – непараметрическая интервальная оценка полуширины g , которая определена формулами (2.6), (2.9) для интервала J_P .

В случаях, когда по обоснованным соображениям даже при существенной случайной составляющей погрешность средства измерений нормируется без разделения на систематическую и случайную, тогда интервал J_P содержит обе составляющие (см. рис. 2.8), и непараметрической оценкой полуширины такого интервала, то есть доверительной погрешности будет

$$\hat{g}_{\max} = |\Delta|_{(n-r)} \approx \max[|\bar{\Delta} - \hat{g}|, |\bar{\Delta} + \hat{g}|], \quad (3.30)$$

где \hat{g} – оценка из (3.29), $|\Delta|_{(n-r)}$ – $(n - r)$ -ый член вариационного ряда, составленного из модулей выборочных значений погрешностей :

$$|\Delta|_{(1)}, |\Delta|_{(2)}, \dots, |\Delta|_{(n)}, \quad (3.31)$$

При $r = 0$ в формулах (3.27) - (3.30) будут участвовать крайние члены исходных вариационных рядов, если, конечно, объем выборки достаточен для обеспечения заданных вероятностей P и Q . Однако, крайние члены любого вариационного ряда могут оказаться слишком далеко от основной группы результатов измерений из-за импульсных помех, перемежающихся отказов аппаратуры, грубых промахов измерений и действия других дестабилизирующих факторов. Поэтому, если необходимо защититься от их действия, то в качестве толерантных пределов придется использовать не крайние, а внутренние члены вариационного ряда, то есть в формулах (3.27) - (3.30) задать $r > 0$. Конечно, за эту защиту нужно будет “заплатить”

Таблица 3.4

Объем выборки, минимально необходимый для определения непараметрических толерантных пределов при $P = 0.95$

Q \ R	0	1	2
0.80	32	59	84
0.95	59	93	124

увеличением объема выборки. В таблице 3.4 приведены значения минимально необходимого объема выборки, при котором для $r > 0$ обеспечивается заданная достоверность определения непараметрических толерантных пределов при $P = 0.95$.

3.4. Применение методов проверки статистических гипотез при обработке результатов многократных наблюдений

В теории проверки статистических гипотез приняты обозначения:

H_0 - гипотеза, выдвигаемая исследователем и подлежащая проверке,

H_1 - альтернативная гипотеза.

Методами проверки статистических гипотез решаются следующие задачи измерительной техники и метрологии :

- контроль характеристик погрешности средств измерений при метрологических испытаниях в присутствии существенной случайной составляющей (в этом случае проверяется гипотеза $H_0: -\Delta_{\text{доп}} \leq \Delta \leq \Delta_{\text{доп}}$ или $-\gamma_{\text{доп}} \leq \gamma \leq \gamma_{\text{доп}}$);

- определение степени полинома, аппроксимирующего результаты измерений в условиях действия случайных погрешностей (проверяется гипотеза о степени полинома, см. п.п. 3.5.3, 3.5.4),

- определения вида плотности распределения случайных составляющих погрешности средств измерений и результатов измерений (проверяется гипотеза о виде плотности распределения случайной составляющей погрешности, см. п.3.6).

В каждом из перечисленных случаев нужно помнить следующее.

1. Мы занимаемся проверкой статистических гипотез, обладая экспериментальными данными, возмущенными случайными погрешностями. Поскольку количество экспериментальных данных (то есть объем выборки) не бесконечно, то это порождает неопределенность в принятии решения об истинности или ложности проверяемой гипотезы. Необходимо выяснить, чем вызвано несоответствие между выдвигаемой гипотезой и результатами эксперимента: имеющейся случайностью и конечностью объема выборки или систематическим неслучайным расхождением между выдвинутой гипотезой и реальностью.

2. Значение критерия вычисляется в предположении справедливости гипотезы H_0 (она называется *нулевой гипотезой*), а критическое значение критерия выбирается из следующих соображений: "Если нулевая гипотеза в самом деле справедлива, то превышение критерием данного критического значения настолько маловероятно, что не может быть оправдано конечностью объема выборки, и потому в этом случае приходится признать, что экспериментальные данные противоречат выдвинутому предположению, и для подтверждения нулевой гипотезы отсутствуют достаточные основания. Напротив, если вычисленное значение критерия не превысило критического значения, это означает, что экспериментальные данные не противоречат выдвинутой гипотезе H_0 ".

Вероятность того, что критерий превысит критическое значение при справедливости нулевой гипотезы, называется *уровнем значимости критерия* и обозначается через α .

3. Понятно, что, уменьшая α , мы уменьшаем возможность ошибочного отклонения выдвигаемой нами нулевой гипотезы, и в пределе при $\alpha = 0$ нулевая гипотеза не будет отклонена никогда! Но тогда эту гипотезу можно было бы и не проверять, а просто принять ее безоговорочно. Правда, если она на самом деле неверна, то этот факт не будет обнаружен, то есть в этом случае вероятность ошибочного вывода возрастает до единицы.

Эти рассуждения указывают на то, что выбор вероятности α и, стало быть, критического значения должен производиться путем поиска компромисса между вероятностями ошибочных решений в зависимости от тяжести последствий возможных ошибок и трудоемкостью процедуры.

3.5. Определение статических характеристик преобразования средств измерений по экспериментальным данным

3.5.1. Исходные данные

Статическая характеристика преобразования средства измерений - функция, описывающая зависимость между входным сигналом x и выходным сигналом y (показанием) средства измерений. Чаще всего она представляется в виде $y = f(x)$, но иногда используется и обратная функция $x = \psi(y)$. Статические характеристики преобразования средств измерений, кроме аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей, - это гладкие дифференцируемые монотонные функции, сколь угодно точно аппроксимируемые степенными полиномами. Степень полинома, аппроксимирующего определяемую характеристику преобразования с некоторой удовлетворительной точностью, как правило, неизвестна.

Определение статических характеристик преобразования средств измерений обычно выполняется при их калибровке в метрологических подразделениях с помощью образцовых средств, характеристики погрешности которых и методы выполняемых при этом измерений должны обеспечивать точность результатов измерений, превышающую ожидаемую (декларированную) точность испытуемого средства измерений не менее, чем в $3 \div 5$ раз.

Пусть статическая характеристика преобразования $y=f(x)$ с высокой точностью, существенно превышающей требуемую точность определения этой характеристики, аппроксимируется степенным полиномом неизвестной степени q с неизвестными коэффициентами:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_qx^q. \quad (3.32)$$

Задача состоит в определении количества и значений коэффициентов степенного полинома по результатам измерений входного и выходного сигналов так, чтобы полученный полином, аппроксимирующий полином (3.32), отличался от него не более, чем на погрешность, обусловленную погрешностью измерений. Благодаря тому, что измерения выполняются с помощью образцовых средств, можно считать, что аппроксимация полинома (3.32) влечет за собой аппроксимацию искомой характеристики.

Обычно в нормативных документах на испытуемое средство измерений указываются значения x_1, x_2, \dots, x_k , которые должны быть заданы на входе. С помощью калибратора или иного точного источника входной величины x устанавливают последовательно указанные значения, начиная с наименьшего, и при каждом значении $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ измеряют выходной сигнал. Затем по достижении последнего k -го значения и измерения выходного сигнала ненамного увеличивают значение входной величины, и процесс повторяется в обратном направлении. Делают несколько таких циклов в одинаковых условиях. В результате при каждом значении входной величины x_i будет получен массив выборочных значений выходной

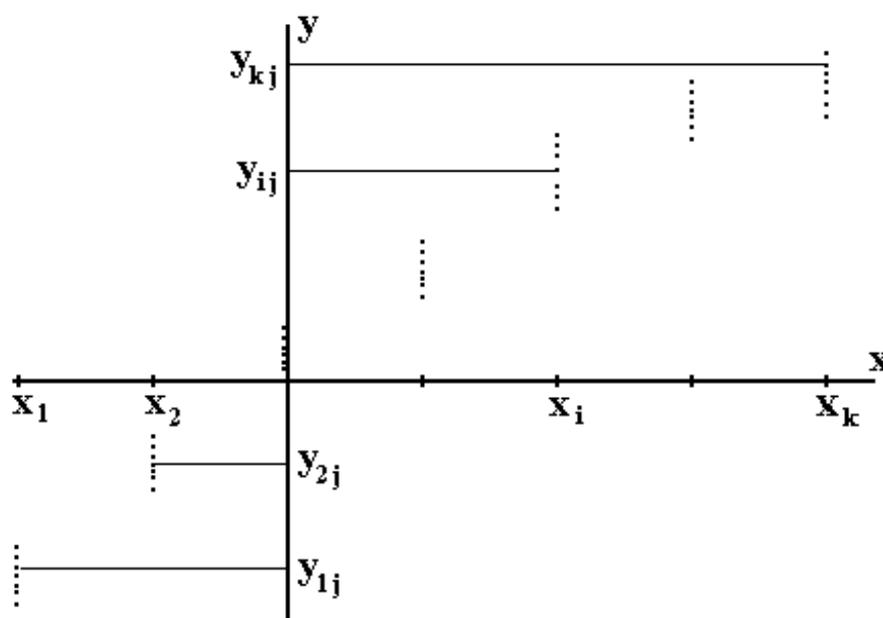


Рис. 3.3. Графическое представление результатов экспериментов по определению статической характеристики преобразования

величины объемом n : $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$. Пример графического представления результатов описанного эксперимента показан на рис. 3.3. Здесь $y_{ij}, i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n$ - обозначение выборочных значений выходной величины, полученных в i -ой точке при j -ом эксперименте.

3.5.2. Предварительная обработка результатов измерений

Предварительная обработка данных, полученных в результате эксперимента и представленных на рис. 3.3, заключается в том, что в каждой i -ой точке вычисляются оценки математического ожидания и дисперсии (см. также п.3.2.1):

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}, \quad s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \quad (3.33)$$

Вслед за этим проверяется статистическая гипотеза о равенстве дисперсий разброса результатов измерений в i -ых точках. На языке математической статистики эта гипотеза формулируется вместе с ее альтернативой следующим образом:

Гипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_i^2 = \dots = \sigma_k^2$. – “измерения равноточные”.

Альтернатива H_1 : “измерения неравноточные”.

Проверка этой гипотезы необходима для выбора одного из двух различающихся методов обработки данных. Общие принципы проверки статистических гипотез изложены выше в п.3.4.

Проверка сформулированной гипотезы выполняется по критерию Кочрена (Cochran). Для этого вычисляется значение критерия

$$G = \frac{\max_i s_i^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2}. \quad (3.34)$$

Вычисленное значение критерия сравнивается с критическим значением, которое зависит от k и n , а также от уровня значимости α , значение которого выбирается из диапазона $0.05 \div 0.2$. В таблице 3.5 приведены критические значения $g(\alpha, k, n)$ для $\alpha = 0.05$.

Если окажется, что $G > g(\alpha, k, n)$, то это значит, что мы не имеем достаточных оснований для того, чтобы считать нашу гипотезу справедливой, а измерения выходной величины следует считать неравноточными. В противном случае у нас нет достаточных оснований для отклонения гипотезы H_0 , и мы считаем измерения равноточными.

Вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы, если она на самом деле справедлива, будет не больше заданной нами вероятности α .

Таблица 3.5

Критические значения критерия Кочрена

$n \backslash k$	2	3	4	5	6	7
6	0.8772	0.7071	0.5895	0.5063	0.4447	0.3974
8	0.8332	0.6530	0.5365	0.4564	0.3980	0.3535
10	0.8010	0.6167	0.5017	0.4241	0.3682	0.3259
12	0.7910	0.5020	0.4780	0.4020	0.3460	0.3050

Результаты выполненной нами предварительной обработки исходных данных запишем в виде вектора средних значений и матрицы оценок дисперсий:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_k \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_1^2 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s_2^2 & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & s_k^2 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

3.5.3. Определение статической характеристики преобразования. Случай равноточных измерений

Поскольку степень полинома q неизвестна, мы вынуждены отыскивать полином, аппроксимирующий статическую характеристику преобразования с подбором подходящей степени. Пусть предполагаемая степень искомого полинома равна p . Тогда мы хотели бы, чтобы во всех i -ых точках выполнялись равенства:

$$\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_p x_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.36)$$

Эти равенства образуют систему уравнений, которая может быть записана в матричном виде

$$\bar{Y} = X \cdot A, \quad (3.37)$$

где вектор \bar{Y} определен в (3.35). Матрица X и вектор A имеют вид

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^p \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Всегда желательно, чтобы $k > p + 1$. Таким образом создается полезная избыточность, повышающая устойчивость оценок коэффициентов полинома. Но при этом матрица \mathbf{X} неквадратная, и система (3.37) не имеет решения в обычном смысле. Для получения решения эту систему преобразуют к системе с квадратной матрицей путем умножения слева на транспонированную матрицу \mathbf{X}^T :

$$\mathbf{X}^T \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \cdot \mathbf{A},$$

Решая эту систему, получают вектор оценок коэффициентов полинома:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{Y}}. \quad (3.39)$$

Компонентами вектора $\tilde{\mathbf{A}}$ являются оценки $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p$ коэффициентов полинома (3.36). Описанный метод их получения называется *методом наименьших квадратов (МНК)*.

Для того, чтобы оценить дисперсии погрешности оценок коэффициентов, следует найти наибольшую из оценок дисперсии $s_{\max}^2 = \max_i s_i^2$, полученных по (3.33), и вычислить дисперсионную матрицу оценок коэффициентов:

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{a}}} = \frac{s_{\max}^2}{n} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}. \quad (3.40)$$

Диагональные элементы этой матрицы суть дисперсии искоемых коэффициентов. Появление множителя $1/n$ вызвано тем, что левая часть системы (3.37) - это вектор средних арифметических значений, дисперсия которых, как указано в п. 3.2.1, в n раз меньше дисперсии погрешности однократных измерений.

Формулируется статистическая гипотеза

\mathbf{H}_0 : “степень полинома не превышает p ”

вместе с сопровождающей ее альтернативой

H_1 : “степень полинома превышает p ”.

Для проверки этой гипотезы полученные оценки коэффициентов подставляются в полином (3.36), (3.37), во всех i -ых точках вычисляются отклонения значений этого полинома от средних значений \bar{Y} и находится сумма квадратов этих отклонений, взвешенных обратно пропорционально оценкам дисперсий погрешностей измерений в этих точках:

$$R^2 = n \cdot (\mathbf{X} \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \bar{Y})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \bar{Y}), \quad (3.41)$$

где \mathbf{S}^{-1} - матрица, обратная матрице, определенной в (3.35).

Сформулированная гипотеза проверяется с помощью упрощенного критерия критерий Фишера и сводится к проверке неравенства

$$R^2 < (k - p - 1) \cdot F_{1-\alpha}(k - p - 1, n - 1), \quad (3.42)$$

где α - уровень значимости (см. п. 3.4). Значения $F_{1-\alpha}(k - p - 1, n - 1)$ приведены в таблицах 3.6, 3.7 для уровней значимости **0.05** и **0.1**.

В этих таблицах обозначено : $k_1 = k - p - 1, k_2 = n - 1$.

Если неравенство (3.42) выполняется, делается вывод о том что наша гипотеза не противоречит экспериментальным данным. В противном случае приходится сделать вывод, что выбранная нами степень полинома недостаточна, то есть $p < q$.

Таблица 3.6

Критические значения критерия Фишера, $\alpha=0.05$

$k_1 \backslash k_2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73	4.68	4.62
7	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.72	3.68	3.63	3.57	3.51
9	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.00
11	3.58	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
13	3.41	3.18	3.02	2.91	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
15	3.29	3.05	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47
17	3.19	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38

Таблица 3.7

Критические значения критерия Фишера, $\alpha=0.1$

$k_1 \backslash k_2$	3	4	5	6	7	8	3	10	11	12
5	3.61	3.52	3.45	3.4	3.37	3.34	3.31	3.29	3.90	3.87
7	3.07	2.96	2.88	2.82	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63
9	2.81	2.69	2.61	2.55	2.50	2.47	2.44	2.41	2.38	2.34
11	2.66	2.53	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.16
13	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.19	2.16	2.14	2.12	2.10
15	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.08	2.06	2.04	2.02
17	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96

Алгоритм определения статической характеристики преобразования средства измерений представляет собой итеративный процесс, поскольку степень полинома априори неизвестна.

После выполнения эксперимента по п. 3.5.1, предварительной обработки его результатов по п. 3.5.2 задается уровень значимости α для проверки гипотезы о достаточности степени полинома и производятся следующие операции.

1: Задается начальное значение степени аппроксимирующего полинома $p = 1$.

2: Формируется матрица X по (3.38).

3: Вычисляются оценки коэффициентов \tilde{A} по (3.39).

4: Проверяется статистическая гипотеза о достаточности степени полинома по (3.41), (3.42) :

H_0 : “степень полинома не превышает p ”,

против альтернативы

H_1 : “степень полинома превышает p ”

Если гипотеза H_0 отклоняется, $p = p + 1$, переход на **2:** .

Если гипотеза H_0 не отклоняется, переход на **5:** .

5: Оцениваются дисперсии погрешности полученных значений коэффициентов по (3.40).

Конец.

В конечном итоге мы получаем оценку статической характеристики средства измерений в виде полинома

$$\tilde{y} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \dots + \tilde{a}_p x^p. \quad (3.43)$$

Замечание. Гипотеза H_0 может оказаться отклоненной не только из-за недостаточности степени аппроксимирующего полинома. Другими причинами ее отклонения могут быть:

- наличие изменяющейся в диапазоне измерения систематической составляющей в составе погрешностей средств измерений, которые участвуют в эксперименте,
- отказы аппаратуры и грубые промахи в измерениях, допущенные экспериментатором.

3.5.4. Определение статической характеристики преобразования. Случай неравноточных измерений

Процедура определения статической характеристики преобразования средств измерений в случае различных погрешностей измерений выходной величины выполняется в случае отрицательного результата проверки гипотезы о равноточности измерений. Эта процедура идентична процедуре, описанной выше в п. 3.5.3. Отличие состоит в том, что оценки коэффициентов полинома вычисляются по формуле:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{Y}}. \quad (3.44)$$

Дисперсии этих оценок суть диагональные элементы матрицы

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{a}}} = \frac{1}{n} (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1}. \quad (3.45)$$

Итак, отличие этих формул от формул предыдущего пункта заключается в появлении матрицы \mathbf{S}^{-1} . Ее вычисление необременительно, поскольку матрица \mathbf{S} диагональная (см. формулу (3.35)), и обратная ей матрица также диагональная. Ее диагональные элементы обратны диагональным элементам исходной матрицы.

Алгоритм определения статической характеристики преобразования средства измерений в рассматриваемом случае практически совпадает с алгоритмом п. 3.5.3. за исключением упомянутых отличий в формулах.

После выполнения эксперимента по п. 3.5.1 и предварительной обработки результатов по п. 3.5.2 задается значение уровня значимости α проверки гипотезы о достаточности степени полинома, и производятся сле-

дующие операции.

1: Задается начальное значение степени аппроксимирующего полинома $p = 1$.

2: Формируется матрица X по (3.38).

3: Вычисляются оценки коэффициентов \tilde{A} по (3.44).

4: Проверяется статистическая гипотеза о достаточности степени полинома по (3.41), (3.42).

Если гипотеза H_0 отклоняется, $p = p + 1$, переход на **2** .

Если гипотеза H_0 не отклоняется, переход на **5** .

5: Оцениваются дисперсии погрешности полученных значений коэффициентов по (3.45).

Конец.

В конечном итоге мы получаем оценку статической характеристики средства измерений в виде полинома

$$\tilde{y} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \dots + \tilde{a}_px^p. \quad (3.46)$$

Замечание. Гипотеза H_0 может оказаться отклоненной не только из-за недостаточности степени аппроксимирующего полинома. Другими причинами ее отклонения могут быть:

- наличие изменяющейся в диапазоне измерения систематической составляющей в составе погрешностей средств измерений, которые участвуют в эксперименте,

- отказы аппаратуры и грубые промахи в измерениях, допущенные экспериментатором.

3.5.5. Определение коэффициента преобразования линейной статической характеристики преобразования.

При разработке и изготовлении средств измерений обычно стремятся к тому, чтобы их статические характеристики преобразования были линейными по отношению к информативному параметру измеряемого или преобразуемого сигнала измеряемой величины. Мало того, обычно добиваются, чтобы эти характеристики обязательно проходили через начало координат.

Незначительная нелинейность и ненулевое значение выходного сиг-

нала при нуле входного учитываются в составе систематической составляющей погрешности средства измерений. Значение этой погрешности зависит от входной величины и является случайным на множестве экземпляров средств измерений одного типа. Поэтому она нормируется пределами допускаемых значений в составе общей погрешности средства измерений. Потребители таких средств измерений имеют возможность существенно уменьшить эту погрешность от необъявленной нелинейности характеристики преобразования путем выполнения собственными силами эксперимента, описанного выше в п. 3.5.1, и полиномиальной аппроксимации его результатов по п.п. 3.5.3, 3.5.4. Далее при рабочих измерениях они пользуются этой индивидуальной характеристикой, и тем самым систематическая погрешность, вызванная фактической нелинейностью, существенно уменьшается.

Итак, в рассматриваемом случае, когда статическая характеристика преобразования объявлена линейной, проходящей через начало координат, степень q полинома (3.32) задана и равна 1 , коэффициент $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$, и нам остается определить значение только одного коэффициента полинома $\mathbf{y} = \mathbf{a}_1 \mathbf{x}$. Этот коэффициент называется коэффициентом преобразования и в то же время его значение есть чувствительность средства измерений. В таком случае мы принимаем $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{1}$.

Эксперименты и предварительная обработка исходных данных остаются теми же самыми, как и в п.п. 3.5.1, 3.5.2.

Рассмотрим вначале случай равноточных измерений.

Поскольку мы оцениваем лишь единственный коэффициент, от матрицы \mathbf{X} в (3.38) останется только один второй столбец, и формулы п. 3.5.3 приобретают весьма простой вид.

Оценка коэффициента \mathbf{a}_1 и среднеквадратическое значение его погрешности вычисляются по формулам:

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{y}_i \cdot \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i^2}, \quad s_{\tilde{\mathbf{a}}_1} = \sqrt{\frac{s_{\max}^2}{n \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i^2}}, \quad (3.47)$$

где s_{\max}^2 - наибольшее из значений оценок дисперсий (3.33).

Если необходимо убедиться в линейности исследуемой характеристики, это можно сделать путем проверки статистической гипотезы, выполнив вычисления по формулам (3.41), (3.42). В нашем случае формула (3.41) приобретает вид:

$$R^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(\tilde{a}_1 x_i - \bar{y}_i)^2}{s_i^2}. \quad (3.48)$$

После этого с использованием таблиц 3.6, 3.7 проверяется выполнение неравенства (3.42). Если неравенство (3.42) выполняется, это значит, что фактическая нелинейность, если она есть, настолько мала, что не может быть выявлена на фоне погрешностей измерений. В противном случае нелинейность обнаруживается, и пользователь принимает одно из двух решений:

- повышать степень аппроксимирующего полинома и тем самым уточнять характеристику преобразования данного конкретного экземпляра средства измерений,

- учесть обнаруженную нелинейность в составе погрешности средства измерений.

Однако, следует иметь в виду, что гипотеза о линейности может быть отклонена не только из-за фактической нелинейности характеристики преобразования. Ее отклонение может быть вызвано некорректностью выполнения эксперимента (см. также замечание к п. 3.5.3.).

В конечном итоге мы получаем оценку статической характеристики преобразования средства измерений в виде

$$y = \tilde{a}_1 \cdot x. \quad (3.49)$$

Случай неравноточных измерений.

Если проверка статистической гипотезы о равенстве дисперсий измерений выходной величины дала отрицательный результат, то формулы (3.47) изменяются следующим образом:

$$\tilde{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{y}_i \cdot \frac{x_i}{s_i^2}}{\sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{s_i}\right)^2}, \quad s_{\tilde{a}_1} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{s_i}\right)^2}}. \quad (3.50)$$

Остальные действия, проверка гипотез, выводы и замечания в точно-

сти соответствуют изложенному выше.

3.5.6. Оценка характеристик погрешности средства измерений по результатам определения линейной статической характеристики преобразования.

Поскольку в эксперименте по определению характеристик погрешности средств измерений применяются образцовые средства высокой точности, можно считать, что все экспериментальные значения погрешности суть выборочные значения погрешности испытуемого средства измерений.

После того, как оценка статической характеристики преобразования испытуемого средства измерений получена в виде (3.49), мы имеем возможность вычислить выборочные значения погрешностей в каждой i -ой точке диапазона измерений :

$$\Delta_{ij} = y_{ij} - \tilde{a}_1 x_i. \quad (3.51)$$

Таким образом в каждой i -ой точке мы получаем выборку объема n (см. рис. 3.4):

$$\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots, \Delta_{in}. \quad (3.52)$$

Для каждой из этих выборок по формулам (3.17) вычисляются оценки систематической составляющей погрешности и среднеквадратического значения случайной составляющей погрешности:

$$\bar{\Delta}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta_{ij}, \quad s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\Delta_{ij} - \bar{\Delta}_i)^2}. \quad (3.53)$$

Далее в соответствии с п. 3.3.4.1. для заданных значений вероятностей P и Q вычисляются параметрические толерантные пределы в каждой i -ой точке :

$$[\bar{\Delta}_i - s_i \cdot \kappa(n, P, Q), \bar{\Delta}_i + s_i \cdot \kappa(n, P, Q)], \quad (3.54)$$

и по ним в соответствии с п. 2.4 и формулой (3.26) определяют оценки \hat{g}_i полуширины интервалов J_{P_i} , содержащих не менее P -ой доли всех возможных значений аддитивной погрешности средства измерений в i -ой точке диапазона измерений:

$$\hat{\Delta}_{ai} = \hat{g}_i = \max[|\bar{\Delta}_i - s_i \cdot \kappa(n, P, Q)|, |\bar{\Delta}_i + s_i \cdot \kappa(n, P, Q)|]. \quad (3.55)$$

В качестве оценки характеристики аддитивной погрешности следует

принять наибольшее значение по всем $i, i = 1, 2, \dots, k$:

$$\Delta_a = \max_i \Delta_{ai} . \quad (3.56)$$

Такое определение характеристики аддитивной погрешности позволяет считать, что если статическая характеристика преобразования средства измерений обладает некоторой нелинейностью, то систематическая погрешность, вызванная этой нелинейностью, учитывается в составе характеристики погрешности (3.56).

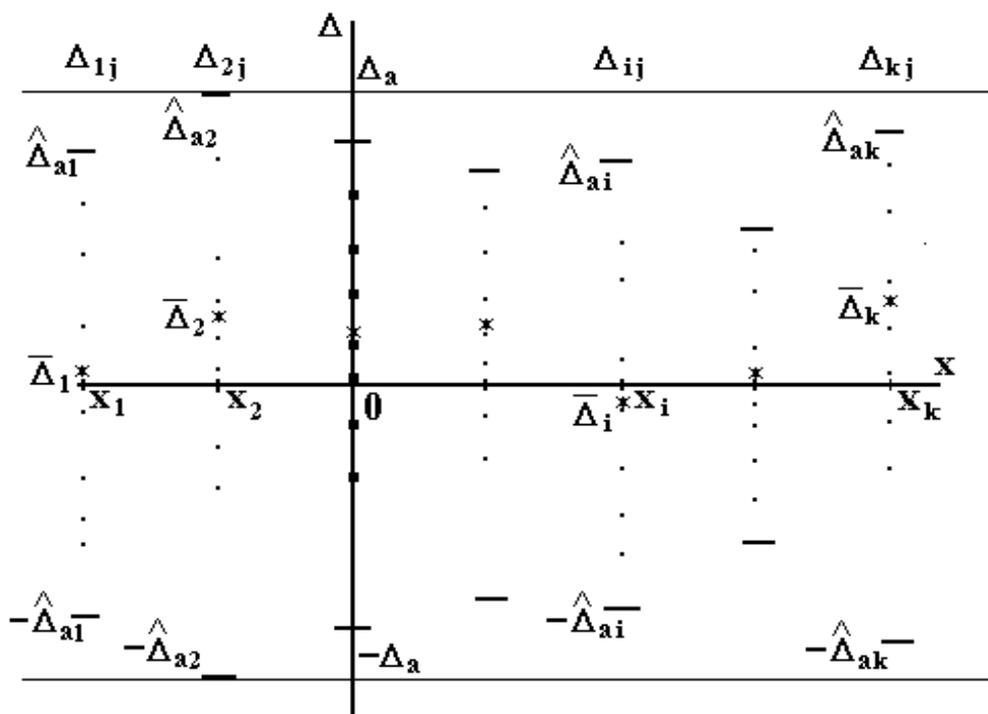


Рис.3.4. Графическое представление выборочных значений погрешности средства измерений и границ симметричных относительно нуля параметрических толерантных пределов погрешности

Пример графического представления значений погрешности Δ_{ij} (точки), их средних арифметических $\bar{\Delta}_i$ (звездочки), оценок $(-\hat{\Delta}_{ai}, +\hat{\Delta}_{ai})$ границ интервалов J_{Pi} (отрезки горизонтальных линий), и границ $(-\tilde{\Delta}_a, \tilde{\Delta}_a)$ аддитивной погрешности (горизонтальные прямые) представлен на рис. 3.4.

Кроме характеристики аддитивной погрешности необходимо указать характеристику мультипликативной погрешности, порождаемой погреш-

ностью, с которой мы оценили значение коэффициента преобразования a_1 (см. формулу (3.50) и п. 2.1). В соответствии с идеологией интервального оценивания, описанной в п. 3.3.1, значение коэффициента преобразования будем оценивать доверительным интервалом с заданной доверительной вероятностью. К данному случаю применяют технику построения доверительного интервала для математического ожидания, которая изложена в п. 3.3.2. В соответствии с этой техникой и с формулой (3.22) можем записать:

Таким образом, возвращаясь к обозначениям п. 2.1, можно считать, что с вероятностью Q модуль погрешности коэффициента преобразования не превосходит значения

$$\Delta K = \Delta a_1 = s_{\tilde{a}_1} \cdot t_{\frac{1+Q}{2}}(k-1). \quad (3.57)$$

В конечном итоге получены все данные, необходимые для определения коэффициентов c и d двучленной формулы (2.10).

$$d = \frac{\Delta a}{|x_k|} \cdot 100\%, \quad c = \left(\frac{\Delta a_1}{\tilde{a}_1} \cdot 100 + d \right) \% = \left(\frac{\Delta K}{K} \cdot 100 + d \right) \%, \quad (3.58)$$

3.6. Идентификация плотности распределения случайной составляющей погрешности измерений с помощью проверки статистических гипотез

3.6.1. Критерии проверки статистических гипотез о плотности распределения случайных погрешностей

Выше в разделе 3.5 приведены примеры применения методов проверки статистических гипотез для идентификации статических характеристик преобразования средств измерений. В настоящем разделе будут рассмотрены методы идентификации плотности распределения случайной составляющей погрешности средств измерений и результатов измерений с помощью следующих наиболее распространенных критериев:

- “хи-квадрат”,
- Колмогорова - Смирнова,
- “омега-квадрат” Мизеса.

3.6.2. Проверка гипотезы H_0 о соответствии плотности распределения выборочным данным по критерию “хи - квадрат”

Гипотеза H_0 состоит в том, что выборочные значения извлечены из генеральной совокупности, плотность распределения вероятностей которой $\varphi(x)$.

Проверка этой гипотезы по критерию χ^2 производится путем сравнения гистограммы с предполагаемой теоретической кривой плотности распределения вероятностей. Критерий χ^2 есть количественная оценка отличия теоретической кривой от гистограммы и вычисляется по формуле

$$\chi^2(K - r) = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}, \quad (3.59)$$

где K - общее количество отрезков оси абсцисс, на которых построена гистограмма, r - количество параметров предполагаемой плотности распределения, которые были вычислены по выборочным данным, n - объем выборки, n_k - количество выборочных значений, попавших в k -ый интервал гистограммы (см. п. 3.1.3), p_k - вероятность попадания значения случайной величины (погрешности, помехи) в этот же интервал, вычисленная по теоретической плотности распределения (2.3):

$$p_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x) dx .$$

Критическое значение $\chi_{1-\alpha}^2(K - r)$ критерия назначается путем задания уровня значимости α . Ниже приведена таблица критических значений критерия.

Теперь, если окажется, что $\chi^2(K-r) > \chi_{1-\alpha}^2(K - r)$, делается следующее заключение: "Если бы полученная нами выборка была извлечена из генеральной совокупности с плотностью распределения $\varphi(x)$, то такое большое значение критерия настолько маловероятно, что у нас нет оснований для подтверждения выдвинутой гипотезы".

Таблица критических значений критерия χ^2

$\alpha \backslash \mathbf{K-r}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2	6.0	7.3	8.6	9.8	11.0	12.2	13.4	14.6	15.8	17.0
0.1	7.8	9.2	10.6	12.0	13.4	14.7	16.0	17.3	18.5	19.8
0.05	9.5	11.1	12.6	14.1	15.5	16.9	18.3	19.7	21.0	22.4

В противоположной ситуации, когда

$$\chi^2(\mathbf{K-r}) < \chi^2_{1-\alpha}(\mathbf{K-r}),$$

делается заключение: "Выборочные данные не противоречат гипотезе о том, что они извлечены из генеральной совокупности с плотностью $\varphi(\mathbf{x})$ ".

3.6.3. Проверка гипотезы H_0 о соответствии плотности распределения выборочным данным по критерию Колмогорова - Смирнова

В соответствии с настоящим критерием сопоставляются функции распределения : предполагаемая и выборочная (см. п. 3.1.2). В качестве меры расхождения между ними здесь используется максимальный модуль разности:

$$\mathbf{D} = \sup_i |\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_{(i)})|, \quad (3.60)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{(i)})$ - предполагаемая функция распределения.

Заданному уровню значимости соответствует критическое значение критерия \mathbf{D}_α , и если окажется, что $\mathbf{D} > \mathbf{D}_\alpha$, делается заключение: "Если бы полученная нами выборка была извлечена из генеральной совокупности с плотностью распределения $\varphi(\mathbf{x})$, то такое большое значение критерия настолько маловероятно, что у нас нет оснований для подтверждения выдвинутой гипотезы".

В противоположной ситуации, когда $\mathbf{D} < \mathbf{D}_\alpha$, делается заключение: "Выборочные данные не противоречат гипотезе о том, что они извлечены из генеральной совокупности с плотностью распределения $\varphi(\mathbf{x})$ ".

Таблица 3.9

Критические значения D_α

$\alpha \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40	50	60	80	100
0.2	0.322	0.266	0.231	0.208	0.190	0.176	0.165	0.148	0.136	0.118	0.106
0.1	0.369	0.304	0.265	0.238	0.217	0.202	0.189	0.169	0.155	0.135	0.121
0.05	0.409	0.337	0.294	0.264	0.242	0.224	0.210	0.118	0.172	0.150	0.134

Для корректного применения критерия Колмогорова-Смирнова нужно разделить выборку на две группы, по одной из них оценить параметры предполагаемой функции распределения, а по другой - построить выборочную функцию распределения и приступить к проверке гипотезы.

В таблице 3.9 приведена выписка из таблицы критических значений D_α .

3.6.4. Проверка гипотезы H_0 о соответствии плотности распределения выборочным данным по критерию ω^2 Мизеса

Мерой расхождения между предполагаемой и выборочной функциями распределения является средний квадрат разностей между ними:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{F}(x) - F(x))^2 \varphi(x) dx. \quad (3.61)$$

Это выражение существенно упрощается, если интеграл представить в виде суммы интегралов по интервалам $(x_{(i)}, x_{(i+1)})$. Тогда после умножения на n будем иметь:

$$n \cdot \omega^2 = \frac{1}{12 \cdot n} + \sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}) - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \right)^2, \quad (3.62)$$

где i - номер члена вариационного ряда, $F(x_{(i)})$ - предполагаемая функция распределения.

Точные критические значения ω_α^2 не табулированы, но уже начиная с объема выборки $n = 50$, можно уверенно пользоваться значениями, которые приведены в нижеследующей таблице.

Критические значения критерия Мизеса

Уровни значимости	0.2	0.1	0.05	0.03
Критические значения $n\omega_\alpha^2$	0.2415	0.3473	0.4614	0.5489

Теперь если окажется, что $n \cdot \omega^2 > n \cdot \omega_\alpha^2$, делается заключение: "Если бы полученная выборка была извлечена из генеральной совокупности с плотностью распределения $\varphi(\mathbf{x})$, то такое большое значение критерия настолько маловероятно, что у нас нет оснований для подтверждения выдвинутой гипотезы".

В противоположной ситуации, когда $n \cdot \omega^2 < n \cdot \omega_\alpha^2$, делается заключение: "Выборочные данные не противоречат гипотезе о том, что они извлечены из генеральной совокупности с плотностью распределения $\varphi(\mathbf{x})$ ".

Форма титульного листа отчета о лабораторной работе

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

О Т Ч Е Т

о лабораторной работе №

“ наименование работы..... ”

Работу выполнили студенты группы XXXX/X :

“ “ _____ 199 г.

Работу принял

/фамилия, инициалы преподавателя/

/Подпись преподавателя, дата/

Санкт-Петербург

20 . . . г.

УКАЗАНИЯ по составлению отчета о лабораторной работе

Отчет о лабораторной работе является научно-техническим документом и должен быть составлен по правилам, принятым для протоколов о выполнении экспериментальных исследований и (или) испытаний изделий.

1. Титульный лист отчета выполняется по приведенной форме.
2. В начале отчета приводится таблица с перечнем использованных средств измерений по следующей форме.

№ п/п	Наименование средства измерений	Тип средства измерений	Измеряемая величина	Предел измерений (конечное значение)	Собственное сопротивление	Предел допускаемой основной погрешности
1	2	3	4	5	6	7
1.	1. 2.	1. 2. 1. 2.		

Если прибор многофункциональный и использовался для измерения различных величин, в графе 4 указываются только те величины, для измерения которых использовался прибор.

Если прибор имеет переключаемые пределы измерений и в ходе выполнения работы эти пределы были различными, в графе 5 перечисляются только те пределы для каждой из измеряемых величин, перечисленных в графе 4, на которых выполнялись измерения.

В графе 6 указываются значения сопротивлений (входных и (или) выходных) для каждого из пределов измерений и для каждой измеряемой величины, которые перечислены в графе 4 и 5.

Точно так же в графе 7 указываются нормированные пределы допускаемой основной (приведенной или относительной) погрешности для каждого из пределов измерений и для каждой измеряемой величины.

3. Разделы отчета, относящиеся к одному пункту программы выполнения работы, должны нумероваться тем же номером, что и этот пункт программы.

4. Каждый раздел отчета должен начинаться с перечисления условий выполнения эксперимента и числовых значений параметров, заданных преподавателем.

5. В каждом разделе отчета приводятся схемы соединений аппаратуры, таблицы и графики в соответствии с методическими указаниями.

Таблицы, рисунки и графики нумеруются и снабжаются поясняющими подписями и заголовками. Заголовок таблицы, рисунка и графика помещается над ними. Поясняющие надписи к графикам (обозначения точек и кривых, пояснения других особенностей) помещаются под графиком.

6. В тексте отчета приводятся примеры последовательного выполнения вычислений хотя бы для одного из однотипных вариантов таких вычислений. Каждый такой пример должен предваряться формулой, по которой проводятся эти однотипные вычисления.

7. Числовые значения измеряемых величин, результатов измерений и характеристик погрешности результатов в тексте отчета и в таблицах, а также оси графиков должны быть снабжены указанием размерности в соответствии с системой единиц СИ. Не допускается сокращать наименования единиц измерений, если они употребляются без цифр.

8. Правила представления результатов измерений и характеристик погрешности результатов:

- результат измерения представляется именованным числом, выраженным в единицах измерения измеряемой величины X ,

- характеристика абсолютной погрешности выражается именованным числом одной значащей цифрой в единицах измерения измеряемой величины; в порядке исключения допускается использовать две значащие цифры, из которых последняя должна быть равна 5,

- характеристика относительной погрешности (в том числе - приведенной) должна выражаться одной значащей цифрой; в порядке исключения допускается использовать две значащие цифры, из которых последняя должна быть равна 5,

- округление значений характеристик погрешности выполняется в сторону увеличения абсолютного значения (модуля),

- число, выражающее результат измерения, должно заканчиваться тем десятичным разрядом, в котором находится первая значащая цифра числа, выражающего характеристику абсолютной погрешности,

- правило округления числа, выражающего результат измерения: если старшая из отбрасываемых цифр равна 5 или больше, младшая цифра из оставшихся увеличивается на единицу, в противном случае она остается неизменной, при этом, если результат измерения выражается целым числом, то отбрасываемые цифры заменяются нулями,

- округление рекомендуется выполнять на последнем этапе вычислений при получении окончательного результата, при этом могут оказаться несогласованными результаты вычислений нескольких значений разных величин, тогда возникшее несоответствие следует исправить, не занижая погрешностей результата.

- правило представления интервальных характеристик: если интервал симметричен относительно нуля, его границы могут быть представлены в виде $\pm A$. Интервал с несимметричными границами следует представлять указанием обеих границ : $[A, B]$. Такое же представление пригодно для интервалов с симметричными границами : $[-A, A]$.

9. В отчете приводятся комментарии и выводы в конце каждого раздела или в конце отчета (в зависимости от ситуации).

10. К отчету должен быть приложен рабочий (черновой) протокол экспериментов, составленный непосредственно при выполнении работы и подписанный преподавателем в день выполнения работы.

11. В заключение отчета приводятся замечания по содержанию методических указаний.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Контрольно-измерительное оборудование / Каталог фирмы АКТАКОМ. www.aktakom.ru.
2. ГОСТ 8.383 “ГСИ. Государственные испытания средств измерений. Основные положения”.-М.: Изд-во стандартов, 1980, 10 с.
3. ГОСТ 8.395 “ГСИ. Нормальные условия измерений при поверке”.-М.: Изд-во стандартов, 1980, 6 с.
4. ГОСТ 8.401 “ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования”. – М.: Изд-во стандартов, 1980, 11 с.
5. ГОСТ 8.437 “ГСИ. Системы информационно-измерительные. Поверка. Общие положения”.-М.: Изд-во стандартов, 1981, 5 с.
6. ГОСТ 8.513 “ГСИ. Поверка средств измерений. Организация и порядок проведения”.-М.: Изд-во стандартов, 1985, 8 с.
7. ГОСТ 8.563 “ГСИ. Методики выполнения измерений”.-М.: Изд-во стандартов, 1996.
8. ГОСТ 8.596 “ГСИ. Метрологическое обеспечение измерительных систем. Основные положения”.-М.: Изд-во стандартов, 1983, 11 с.
9. ГОСТ 22261 “Средства измерения электрических и магнитных величин. Общие технические условия.”.-М.: Изд-во стандартов, 1983, 40 с.
10. Атамалян Э.Г. Приборы и методы измерения электрических величин.-М.: Высшая школа, 1989.- 383 с.
11. Основы метрологии и электрические измерения / Б.Я.Авдеев, Е.М.Антонюк, Е.М.Душин и др.; Под ред. Е.М.Душина.-Л.: Энергоатомиздат, 1987.- 480 с.
12. Левшина Е.С., Новицкий П.В. Электрические измерения физических величин.-Л.: Энергоатомиздат, 1983.-320 с.
13. Кнорринг В.Г., Марамзина М.Г. Метрология, стандартизация, сертификация.-СПб.: Издательство политехнического университета, 2006.- 240 с.
14. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Высшая школа, 1997.- 479 с.
15. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ, тт. 1, 2.-М.: Финансы и статистика.- 1987,
16. Уилкс С. Математическая статистика.-М.: Наука, 1967.- 632 с.
17. Фридман А.Э. Основы метрологии. Современный курс.-СПб.: НПО «Профессионал», 2008.- 280 с.