

На правах рукописи

Калимов Александр Гелиевич

Развитие численных методов расчета электромагнитных полей,  
основанных на применении пространственных интегральных уравнений.

Специальность 05.09.05 – Теоретическая электротехника

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Санкт-Петербург – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

- Научный консультант: доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой теоретических  
основ электротехники Санкт-Петербургского  
государственного политехнического университета  
**Коровкин Николай Владимирович.**
- Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор,  
член-корреспондент РАН,  
профессор Санкт-Петербургского  
государственного политехнического университета  
**Шнеерсон Герман Абрамович;**
- доктор технических наук, профессор,  
начальник отдела филиала «ЦНИИСЭТ»  
ФГУП «Крыловский Государственный Научный Центр»  
**Цицикян Георгий Николаевич;**
- доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой электротехники  
Вологодского технического университета  
**Шишигин Сергей Леонидович.**
- Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе»  
Российской академии наук.

Защита состоится 20 июня 2014 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.16 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу Санкт-Петербург, Политехническая д. 29.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «СПбГПУ» по адресу Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2014 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.229.16  
кандидат технических наук, доцент

Н.М. Журавлева

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследований.** Электротехнические и электроэнергетические устройства находят широкое применение в промышленности, транспорте, в медицине, в научных исследованиях, в быту, и во многих других отраслях человеческой деятельности. В современных условиях разработка и проектирование подобных устройств требует всестороннего исследования их предполагаемых технико-экономических характеристик и свойств еще до момента начала изготовления. Такие исследования предполагают, в первую очередь, математическое моделирование основных характеристик разрабатываемых устройств. Для создания современной конкурентоспособной продукции необходимо использовать наиболее надежные методы и средства моделирования, позволяющие получать достоверную информацию о свойствах разрабатываемых систем и устройств. Одним из основных и наиболее ответственных этапов процедуры математического моделирования параметров электротехнических устройств является расчет характеристик создаваемого ими электромагнитного поля. Для достижения этой цели в современных условиях наиболее широко применяются различные численные методы расчета электромагнитных полей с применением вычислительной техники. Во многих случаях, особенно при наличии конструктивных элементов со сложной конфигурацией, этап разработки и проектирования вообще невозможен без подобных исследований.

Наиболее широкое распространение в настоящее время получил целый ряд численных методов моделирования электромагнитных полей, которые условно можно разбить на две группы: интегральные и дифференциальные. К первой группе относятся методы пространственных интегральных уравнений (ПриУ) и различные формулировки метода граничных элементов (МГЭ). Ко второй группе, в первую очередь, можно отнести методы конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МГЭ). Особо стоит отметить методы сведений полевых задач к цепным, которые получили значительное развитие в последние годы. Каждый из перечисленных выше подходов к расчету электромагнитных полей имеет свою область применения. В частности, преимущества интегральных методов наиболее ярко проявляются при анализе “открытых” систем, в которых отсутствуют естественные границы с априори известными значениями характеристик электромагнитного поля. Именно такие особенности конструкции

характерны для многих электротехнических устройств. В связи с этим разработка и развитие интегральных методов расчета электромагнитных полей является одной из актуальных задач современной теоретической электротехники. Именно это обстоятельство нашло отражение в координационных планах НИР отделения «Электрофизика и электроэнергетика» РАН под названиями: «Развитие теории и методов расчета электромагнитных полей, электрических цепей, переходных процессов в электроэнергетических и электрофизических устройствах» и «Развитие методов физического, математического и численного моделирования процессов в электрофизических и электроэнергетических устройствах».

Состояние и развитие современных численных методов расчета электромагнитных полей постоянно обсуждается мировым научным сообществом, в первую очередь, на представительных международных конференциях COMPUMAG и CEFC (Conference on Electromagnetic Field Computation), каждая из которых проходит один раз в два года и собирает ведущих мировых специалистов в этой области.

Большой вклад в разработку численных методов расчета электромагнитных полей внесли ученые нашей страны, в числе которых необходимо отметить О.В. Тозони, И.Д. Маергойза, В. Курбатова, Э.В. Колесникова, В.И. Астахова, С.М. Аполлонского и др. Значительное участие в развитии этого направления теоретической электротехники приняли сотрудники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, в частности, акад. АН СССР Л.Р. Нейман, акад. РАН К.С. Демирчян, В.Н. Боронин, А.Б. Новгородцев, В.Л. Чечурин, М.А. Шакиров, В.М. Юринов, Р.П. Кияткин, Г.А. Шнеерсон и др.

Таким образом, актуальность диссертационной работы обуславливается ее направленностью на развитие одного из основных направлений в практике численного моделирования характеристик электротехнических устройств, основанного на решении пространственных интегральных уравнений электромагнитного поля.

**Цели диссертационной работы.** Цели диссертационной работы состоят в разработке новых эффективных интегральных методов расчета стационарных и меняющихся во времени электромагнитных полей, а также в развитии существующих подходов с целью улучшения их основных характеристик – точности, требований к вычислительным ресурсам, универсальности, надежности, достоверности. Для достижения поставленных целей в диссертационной работе решены следующие задачи:

1. Исследование принципов моделирования стационарных магнитных полей на основе применения интегро-дифференциального уравнения магнитостатики, сформированного относительно скалярного магнитного потенциала.
2. Применение интегро-дифференциального метода расчета стационарных магнитных полей для магнитных систем, состоящих из тонкостенных ферромагнитных оболочек.
3. Исследование точности моделирования магнитных полей в рамках интегро-дифференциального метода при использовании различных схем аппроксимации неизвестной величины и самого интегро-дифференциального уравнения.
4. Разработка комбинированной схемы постановки задачи магнитостатики, основанной на совместном использовании интегро-дифференциального метода и метода конечных элементов. Исследование эффективности такой формулировки для решения задачи магнитного экранирования.
5. Создание математической модели комплексных магнитогидродинамических процессов в двухслойной электропроводной жидкости на базе решения интегро-дифференциального уравнения магнитостатики. Применение модели к анализу электрофизических процессов, происходящих в активной зоне промышленных установок по производству алюминия.
6. Исследование точности и эффективности применения интегро-дифференциальной постановки задачи расчета переменных электромагнитных полей для моделирования вихревых токов в тонких проводящих оболочках.
7. Разработка и практическая реализация математической модели, основанной на комбинированной постановке задачи расчета вихревых токов в проводящих телах, включающей решение дифференциального уравнения Гельмгольца с граничными условиями, определяемыми за счет выполнения пространственного интегрирования по объему проводящего объекта.
8. Разработка трехмерного метода расчета вихревых токов, основанного на аппроксимации векторных характеристик электромагнитного поля на базе конечных элементов Уитни.
9. Разработка методики расчета вихревых токов в шихтованных ферромагнитных объектах, основанной на совместном решении пространственных интегральных уравнений для различных характеристик электромагнитного поля.

**Методы исследования** основаны на использовании теории электромагнитных полей; теории электрофизических процессов в жидких средах; элементов теории интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода; на применения надежной и детально изученной теории конечных элементов для решения дифференциальных и интегральных уравнений, включая теорию векторных элементов Уитни; на методах вычислительной математики.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в то, что:

1. Предложен и исследован новый численный метод расчета трехмерных стационарных магнитных полей, основанный на решении интегро-дифференциального уравнения, сформулированного относительно скалярного магнитного потенциала.
2. Разработанный интегро-дифференциальный метод расчета стационарных магнитных полей адаптирован к магнитным системам, включающим тонкостенные ферромагнитные объекты.
3. Решена комплексная задача по моделированию электрофизических процессов в промышленных установках по производству алюминия. Математическая модель построена на основе использования распределений магнитного поля, рассчитанных на основе разработанного интегро-дифференциального метода для тонкостенных ферромагнитных систем.
4. Предложена новая формулировка комбинированного метода расчета вихревых токов в немагнитных объектах на основе совместного решения уравнения Гельмгольца в проводящей среде и интегрального уравнения, связывающего характеристики электромагнитного поля внутри расчетной области и не ее границах.
5. Разработан и исследован новый интегральный метод расчета вихревых токов в немагнитных средах, основанный на прямой аппроксимации вектора плотности тока в расчетной области функциями Уитни первого порядка.
6. Выполнен комплекс работ по исследованию переходных процессов в шихтованных ферромагнитных системах путем совместного решения пространственного интегрального уравнения относительно вектора намагниченности и интегро-дифференциального уравнения, сформированного относительно векторного потенциала плотности электрического тока.

**Практическая ценность работы** состоит в разработке эффективных методов расчета электромагнитных полей, которые позволяют решать многочисленные практические задачи на высоком уровне точности и достоверности. При непосредственном участии автора разработанные им математические модели, реализующие их алгоритмы и компьютерные программы применялись и применяются в настоящее время:

- при разработке и проектировании новых, а также модернизации существующих промышленных установок по производству алюминия (имеется *Акт о внедрении проектной организации «ЭКСПЕРТ-АЛ»*, 2008 г.);
- при разработке и создании магнитов, входящих в состав различных масс-спектрометрических систем (имеются *Акты о внедрении результатов работы в Институте Аналитического Приборостроения РАН*, 2013 г., в *Лаборатории Ядерных Реакций Объединенного Института Ядерных Исследований в Дубне*, 2007 г, в *ООО «МС-Био»*, участнике проекта «Сколково», 2013 г);
- при создании крупных магнитных систем, входящих в состав ускорителей и систем управления пучками заряженных частиц.

Разработанные автором технологии расчета электромагнитных полей, силовых взаимодействий в электромагнитных полях нашли отражение в курсах лекций, читаемых в Санкт-Петербургском Государственном Политехническом Университете для магистров Института энергетики и транспортных систем (имеется *Акт о Внедрении*, выданный *ФГБОУ ВПО «СПбГПУ»*, 2013 г).

**Достоверность и обоснованность научных результатов** обеспечивается:

- за счет применения фундаментальных законов физики и теории электромагнитного поля; законов векторной алгебры и теории потенциала; строгими математическими преобразованиями и доказательствами;
- совпадением результатов математического моделирования, проведенного на основе разработанных алгоритмов и компьютерных программ с известными и полученными в процессе выполнения научных исследований аналитическими решениями модельных задач;
- согласием результатов математического моделирования, проведенного на основе разработанных алгоритмов и компьютерных программ, с экспериментальными данными, полученными автором, а также известными из открытых публикаций.

**На защиту выносятся:**

- интегро-дифференциальный метод расчета стационарных магнитных полей и алгоритм его реализации;
- формулировка интегро-дифференциального метода расчета стационарных магнитных полей для систем, включающих тонкостенные ферромагнитные оболочки;
- математическая модель электрофизических процессов в промышленных установках по производству алюминия, принципы и алгоритмы решения задачи моделирования этих процессов;
- новый трехмерный интегральный метод расчета вихревых токов в проводящих немагнитных объектах, основанный на разложении неизвестных распределений векторных характеристик электромагнитного поля в ряд по функциям Уитни первого порядка;
- методика расчета переходных процессов и вихревых токов в шихтованных ферромагнитных объектах, основанная на совместном решении интегральных уравнений относительности вектора намагниченности и векторного потенциала плотности электрического тока.

**Апробация.** Основные положения диссертации докладывались на: Всесоюзной научно-технической конференции «*Математическое моделирование в энергетике*» (Киев, 1990); на XI международном семинаре «*Методы расчета ЭОС*» (Алма-Ата, 1992); на международной конференции «*Интернационализация высшего образования и научных исследований в XXI веке*», (Санкт-Петербург, 1999); на международной научно-практической конференции «*Теоретические и практические проблемы развития электроэнергетики России*» (Санкт-Петербург, 2002); на международной конференции по оптике заряженных частиц «*СРО-4*» (Цукуба, Япония, 1994); на международных конференциях по расчету электромагнитных полей COMPUMAG-10 (Берлин, Германия, 1995), COMPUMAG-11 (Рио-де-Жанейро, Бразилия, 1997), COMPUMAG-13 (Эвиан, Франция, 2001), COMPUMAG-19 (Будапешт, Венгрия, 1013); на международной конференции по расчету электромагнитных полей SEFC-98 (Окаяма, Япония, 1998); на международных конференциях по магнитным технологиям МТ-17 (Женева, Швейцария, 2001), МТ-18 (Мориока, Япония, 2003), МТ-19 (Генуя, Италия, 2005), МТ-23 (Бостон, США, 2013), на международной конференции по магнитной гидродинамике



«МАНУД'95» (Рига, Латвия, 1995); на 8-ом международном симпозиуме по численным методам расчета электромагнитных полей «IGTE-98» (Грац, Австрия, 1998); на 4-ой международной конференции по компьютерному моделированию и неразрушающему контролю в науке и технике (Санкт-Петербург, 2001); на международной конференции «WORKSHOP IN NUMERICAL SIMULATIONS FOR ALUMINUM INDUSTRY» (Лозанна, Швейцария, 2004); на международном симпозиуме по проблемам алюминиевой промышленности «Aluminium-2006» (Монреаль, Канада, 2006); на 4-ой международной конференции по физике ускорителей заряженных частиц «IPAC-13» (Шанхай, Китай, 2013); на международном симпозиуме по электромагнитной совместимости «EMC EUROPE 2013» (Гент, Бельгия, 2013); на 12-ой международной конференции по оптимизации и обратным проблемам в электротехнике «OIRE 2012» (Гент, Бельгия, 2012); на научных семинарах кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского Государственного Политехнического Университета, в институте физики Гиссенского университета (Германия), Научно-исследовательского центра исследований физики тяжелых ионов в г. Дармштадт (Германия), в Политехническом институте г. Бухарест, Румыния, в Политехническом институте г. Турин, Италия, в Гринвичском Университете, Лондон, Англия.

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 65 печатных работ, в том числе 30 в изданиях по перечню ВАК; из них 9 статей в российских рецензируемых журналах, в том числе «Известия РАН. Энергетика»; «Электричество»; «Известия ВУЗов. Электромеханика», 21 статья в зарубежных рецензируемых журналах: «IEEE Transactions on Magnetics», «IEEE Transactions on Applied Superconductivity», «COMPEL», «Nuclear Instruments and Methods in Physical Research», «Review of Scientific Instruments».

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, представляют собой персональный вклад автора в опубликованные работы, указанные в автореферате. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта при этом был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и 8 приложений. Список использованной литературы содержит 229

наименование. Текст диссертации содержит 317 страниц машинописного текста, включая 115 рисунков, 8 таблиц.

## Содержание работы

Во **Введении** дана краткая характеристика диссертационной работы, обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели, задачи, новизна, а также основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** «Интегро-дифференциальное уравнение магнитостатики и его применение для расчета трехмерных магнитных полей» посвящена разработке нового численного метода расчета стационарных магнитных полей на основе решения интегро-дифференциального уравнения относительно скалярного магнитного потенциала.

В основе разработанного метода лежит представление скалярного магнитного потенциала  $U(\vec{r})$  в любой точке пространства в виде суммы двух компонент:

$$U(\vec{r}) = U_c(\vec{r}) + U_m(\vec{r}),$$

где  $U_c(\vec{r})$  - скалярный магнитный потенциал, наведенный сторонними токовыми источниками, а  $U_m(\vec{r})$  - потенциал, индуцированный намагниченными объектами. Второе слагаемое в правой части этого равенства выражается известным из теории потенциала интегральным соотношением:

$$U_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_m.$$

Радиус-вектор  $\vec{r}'$  в этом выражении характеризует положение точки внутри области  $\Omega_m$ , занятой намагничивающимся материалом, а радиус-вектор  $\vec{r}$  - положение произвольной точки в пространстве. Учитывая известную связь между напряженностью магнитного поля, скалярным потенциалом и намагниченностью  $\vec{M}$ , получаем интегро-дифференциальное уравнение для скалярного магнитного потенциала:

$$U(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{(\mu_r - 1) \vec{\nabla} U(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_m = U_c(\vec{r}). \quad (1)$$

Это уравнение, вообще говоря, является нелинейным, поскольку магнитная проницаемость  $\mu_r$  для многих материалов зависит от величины и направления вектора напряженности магнитного поля. Решение интегро-дифференциального уравнения (1) позволяет определить характеристики магнитного поля в любой точке пространства.

Полученное уравнение обладает существенными особенностями в сравнении с пространственным интегральным уравнением, сформированным относительно вектора намагниченности  $\vec{M}$ , нашедшем широкое применение для расчета стационарных магнитных полей. Во-первых, при аналогичной дискретизации пространства, заполненного намагниченным материалом, интегро-дифференциальное уравнение (1) характеризуется значительно меньшим количеством неизвестных величин, поскольку оно сформировано относительно скалярной величины. Во-вторых, напряженность магнитного поля, найденная в результате решения уравнения (1) автоматически удовлетворяет одному из уравнений Максвелла для области, свободной от электрических токов:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0,$$

в то время, как интегральное уравнение для намагниченности  $\vec{M}$  не позволяет получать численные решения, обладающие этим свойством. Благодаря этим преимуществам интегро-дифференциальное уравнение (1) представляет собой перспективную теоретическую платформу для развития численных интегральных методов расчета магнитного поля, особенно применительно к трехмерным задачам.

Важной особенностью интегро-дифференциального уравнения (1) является то, что при любой непрерывной и дифференцируемой зависимости скалярного магнитного потенциала от координат интегральное слагаемое имеет конечное, абсолютно сходящееся значение в любой точке пространства. Доказательство этого свойства интегрального уравнения приводится в материалах диссертации.

Для дискретизации расчетной области и последующего численного решения интегро-дифференциального уравнения (1) в диссертационной работе использован аппарат метода конечных элементов, причем в качестве базовых элементов выбраны тетраэдр и треугольная призма, а для аппроксимации неизвестной функции применялись финитные функции первого и второго порядков.

Верификация предложенного метода расчета магнитных полей была проведена путем сравнения результатов численного моделирования характеристик магнитного поля в тестовых задачах с результатами аналитических расчетов, а также с результатами, полученными с использованием апробированных пакетов программ по расчету электромагнитных полей. В частности, был проведен расчет магнитного поля внутри сферы с постоянной магнитной проницаемостью. Результаты исследований приведены

на Рис. 1. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что точность расчетов практически не зависит от величины магнитной проницаемости материала сферы, несмотря на значительное уменьшение напряженности магнитного поля внутри исследуемого объекта по сравнению с напряженностью внешнего поля.

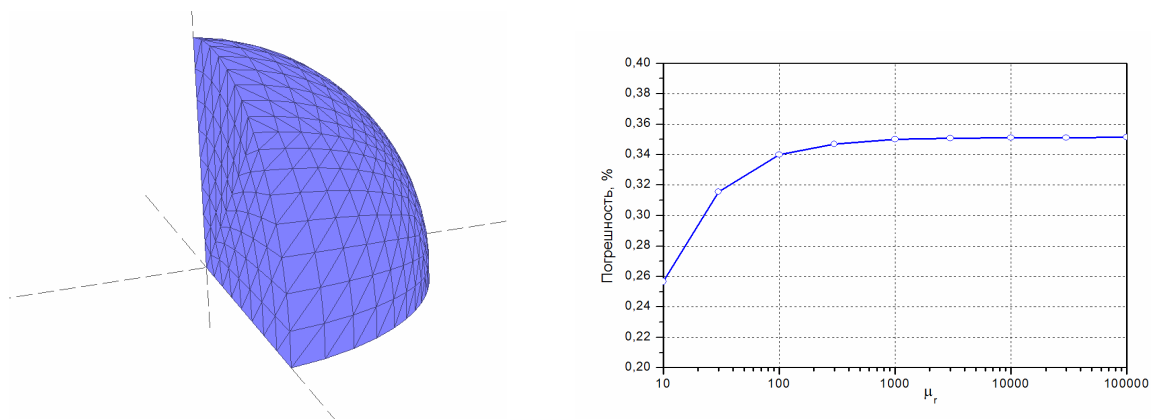


Рис.1. Модельная задача, использованная для тестирования интегро-дифференциального метода расчета магнитных полей (а) и зависимость погрешности расчета напряженности магнитного поля внутри сферы от величины магнитной проницаемости (б).

В первой главе диссертации приводятся, также, результаты исследования точности расчета характеристик магнитного поля и затрат вычислительных ресурсов в зависимости от выбора аппроксимирующих функций, степени дискретизации расчетной области. Важно отметить, что все пространственные интегралы, использовавшиеся для расчета характеристик магнитного поля, создаваемого намагниченными элементами с постоянной и линейно меняющейся намагниченностью, рассчитывались аналитически. Это обстоятельство позволило избежать потери точности, неизбежной при использовании численных процедур вычисления сингулярных интегралов.

**Вторая глава** диссертации «Расчет магнитного поля, создаваемого тонкими магнитными оболочками» посвящена вопросам применения разработанного диссертантом интегро-дифференциального метода расчета стационарных магнитных полей для магнитных систем, включающих тонкостенные магнитные оболочки. Основными отличительными характеристиками таких объектов являются:

- существенная разница в общих размерах оболочки и ее толщины;
- высокий возможный уровень величины магнитной проницаемости ( $1000 \mu_0$  и более) материала оболочки.

Указанные особенности объектов исследования значительно ограничивают эффективность применения дифференциальных методов расчета электромагнитных

полей, в частности метода конечных элементов. Для достижения приемлемой точности в рамках МКЭ необходимо обеспечить подробное разбиение оболочки по толщине и соответствующую дискретизацию по другим направлениям. В результате резко возрастает количество переменных, описывающих распределение магнитного поля, в особенности для трехмерных задач, и, соответственно, возрастают вычислительные ресурсы, необходимые для решения задачи. Для трехмерных задач особо следует отметить и общую, до настоящего времени не решенную проблему эффективной генерации конечноэлементных сеток для магнитных систем со сложной геометрией. В связи с этим группа интегральных методов во многих случаях обладает значительными преимуществами при решении подобных задач.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) может быть использовано для расчета магнитного поля в присутствии произвольных ферромагнитных объектов. Однако его непосредственное применение для анализа тонкостенных ферромагнитных оболочек на практике приводит к значительным вычислительным ошибкам, в первую очередь в связи с относительно большой погрешностью численной аппроксимации производной потенциала в направлении, нормальном к поверхности оболочки. В связи с этим для описания тонкостенного ферромагнитного объекта предлагается использовать две переменные:

- скалярный магнитный потенциал, усредненный по толщине оболочки  $\tilde{U}$  и зависящий от двух координат, определяющих положение точки на поверхности оболочки;
- нормальную к поверхности оболочки компоненту намагниченности  $M_n$ .

Для описания распределения потенциала внутри тонкостенной оболочки вводится криволинейная в общем случае система координат  $(s_1, s_2, z)$  с осями  $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n})$  так, чтобы первые два вектора лежали бы в плоскости, касательной к поверхности оболочки, а третий был бы ей перпендикулярен. Начало координатной оси  $z$  располагается в середине оболочки так, что сама оболочка оказывается заключенной в пределах  $-\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}$ . В такой системе координат скалярный магнитный потенциал может быть разложен в степенной ряд по переменной  $z$ :

$$U(s_1, s_2, z) = U(s_1, s_2, 0) + z \frac{\partial U(s_1, s_2, z)}{\partial z} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 U(s_1, s_2, z)}{\partial z^2} + \dots$$

Рассматривая толщину оболочки в качестве малого параметра, ограничимся первыми

двумя слагаемыми в приведенном разложении. Первое из них представляет собой потенциал на поверхности, расположенной в центре оболочки  $U(s_1, s_2, 0)$ , или, с учетом произведенного ограничения ряда, потенциал, усредненный по ее толщине  $\tilde{U}(s_1, s_2)$ , поскольку в этом случае справедливо равенство:

$$\tilde{U}(s_1, s_2) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \left[ U(s_1, s_2, 0) + z \frac{\partial U(s_1, s_2, z)}{\partial z} \right] dz = U(s_1, s_2, 0).$$

Градиент скалярного магнитного потенциала в силу сделанного допущения о малости толщины оболочки может быть представлен выражением:

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = \vec{\nabla}_s \tilde{U}(s_1, s_2) + \frac{\partial U(s_1, s_2, z)}{\partial z} \vec{n} = \vec{\nabla}_s \tilde{U}(s_1, s_2) - \frac{M_n(s_1, s_2) \vec{n}}{\mu_r - 1}. \quad (2)$$

Таким образом, в терминах введенных переменных  $\tilde{U}$ ,  $M_n$  интегро-дифференциальное уравнение (3) приобретает вид:

$$\tilde{U}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{(\mu_r - 1) \vec{\nabla}_s \tilde{U}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_m = U_c(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{M_n(\vec{r}') \cdot \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_m.$$

Поскольку нормальная компонента намагниченности, вообще говоря, неизвестна, для корректной постановки задачи к полученному уравнению необходимо добавить аналогичное интегральное уравнение для  $M_n$ , которое в терминах введенных выше переменных имеет вид:

$$\frac{M_n(\vec{r})}{\mu_r - 1} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{(\mu_r - 1) \vec{\nabla}_s \tilde{U}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_m = H_{cn}(\vec{r}) - \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{M_n(\vec{r}') \cdot \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_m.$$

На практике второе уравнение может быть исключено из системы без существенной потери точности. Действительно, второе слагаемое в правой части уравнения (2) описывает вклад нормальной компоненты намагниченности оболочки в наведенный потенциал. Для тонких оболочек этот вклад, как правило, очень мал. Это обстоятельство может быть проиллюстрировано на примере тонкой пластины с  $\mu_r \gg 1$ , помещенной во внешнее поле. Если вектор напряженности поля перпендикулярен поверхности пластины, то напряженность поля внутри самой пластины уменьшается в  $\mu_r$  раз. Если же пластину развернуть на  $90^\circ$ , то уровень магнитного поля внутри пластины возрастает до уровня внешнего поля. Таким образом, тангенциальная компонента намагниченности в среднем в  $\mu_r$  раз превышает нормальную. Благодаря этой особенности вклад нормальной компоненты намагниченности может

рассматриваться как малая добавка, которой в первом приближении можно пренебречь. В результате для описания поля, созданного тонкостенным экраном, получаем независимое интегро-дифференциальное уравнение для скалярного магнитного потенциала  $\tilde{U}(s_1, s_2)$ , усредненного по толщине экрана вида (1).

Решение интегро-дифференциального уравнения (1) применительно к тонким оболочкам, также как и в общем случае, проводится с использованием аппарата метода конечных элементов, однако в качестве базового элемента используется тонкостенная призма с двухмерной зависимостью скалярного магнитного потенциала от планарных координат. В диссертации приводится анализ зависимости точности моделирования характеристик магнитного поля от вида финитных функций, используемых для аппроксимации неизвестной величины, а также от способа приведения интегро-дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений.

Особое внимание в диссертационной работе уделяется решению задачи магнитного экранирования. Для исследования свойств предлагаемого метода была выбрана тестовая задача, имеющая аналитическое решение - тонкая сферическая оболочка с постоянной магнитной проницаемостью, помещенная во внешнее однородное поле. Для аппроксимации интегро-дифференциального уравнения (1) эта оболочка была предварительно разбита на тонкие треугольные призмы. При формировании расчетной модели дискретизации подвергалась только 1/8 часть сферы. Остальная часть оболочки включена в модель с учетом симметрии задачи по отношению к отражению в трех главных координатных плоскостях.

Была исследована точность расчета магнитного поля внутри и за пределами экранированного объема при различной степени дискретизации оболочки, для аппроксимирующих функций 1-го и 2-го порядков, а также для различных значений магнитной проницаемости  $\mu_r$  и толщины оболочки  $d$ . Общее количество тонких треугольных призм при проведении расчетов варьировалось в пределах от 160 до 2560, при этом соответствующее количество узлов треугольной сетки изменялось от 93 до 1329. Таким образом, было исследовано влияние степени дискретизации расчетной области на точность получаемых результатов. С этой целью были проведены расчеты коэффициента экранирования сферической оболочки с  $\mu_r=1000$  и  $d/R=0.01$ , где  $R$  - средний радиус сферы. Соответствующие данные для аппроксимирующих функций 1-го и 2-го порядков приведены на Рис. 2. В результате проведенных численных

экспериментов был сделан, также, вывод о том, что применение процедуры Галеркина для аппроксимации интегро-дифференциального уравнения позволяет добиться более высокой точности моделирования в сравнении с методом коллокаций. Соответствующие результаты приведены в таблице Таб. 1.

Как видно из приведенных результатов, наименьшая погрешность, менее 0.5% при максимальной дискретизации, достигается при использовании аппроксимирующих функций 2-го порядка. Важно отметить, что использование аппроксимирующих функций 1-го порядка дает более низкую точность (в 4 - 5 раз) при том же самом количестве узлов с неизвестными потенциалами, что соответствует приблизительно тем же самым вычислительным затратам.

Одним из важных факторов, ограничивающих точность интегральных методов при их применении к задачам экранирования, является порядок расчета характеристик магнитного поля. Традиционный подход к этой проблеме состоит в непосредственном суммировании векторных компонент магнитного поля, наводимого первичными и вторичными источниками. В задачах экранирования эти две компоненты обычно сравнимы по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны, что приводит к резкому возрастанию погрешностей вычислений. Для преодоления указанного недостатка в диссертации предлагается

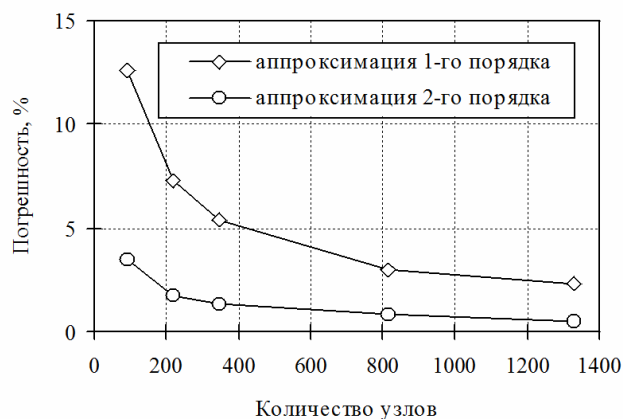


Рис. 2. Зависимость погрешности расчета напряженности внутри экранируемого пространства от дискретизации оболочки.

Число узлов	93	217	345	817	1329
Точность, % Метод взвешенных невязок	1.9	1.15	0.91	0.68	0.61
Точность, % Метод коллокаций	12.6	7.3	5.4	3.0	2.3

Таб. 1. Сравнение точности расчета напряженности магнитного поля для различных алгоритмов аппроксимации интегро-дифференциального уравнения

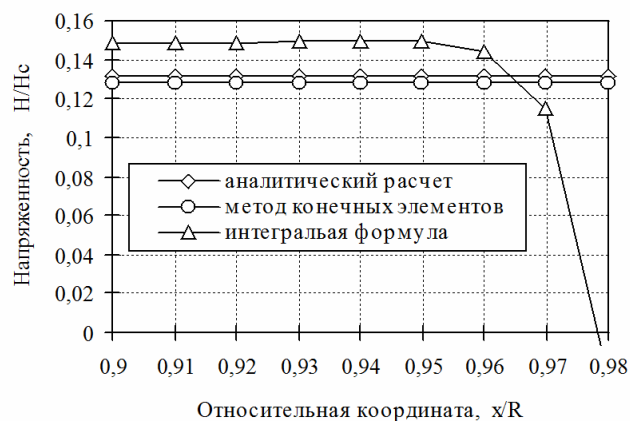


Рис.3. Сравнение точности расчета напряженности магнитного поля для разных алгоритмов ее моделирования.



двухэтапная процедура расчета напряженности магнитного поля внутри экранируемого пространства. На первом из них в результате решения интегро-дифференциального уравнения (1) формируется массив потенциалов на внутренней поверхности оболочки. На втором этапе напряженность магнитного поля определяется путем решения дифференциального уравнения Лапласа с известными граничными условиями. На этом этапе применяется метод конечных элементов второго порядка. Данные, приведенные на Рис. 3, иллюстрируют эффект, достигаемый за счет применения этой процедуры. Как видно, использование интегральных формул для расчета поля внутри этой области действительно приводит к значительным погрешностям в сравнении с МКЭ, особенно для точек, расположенных в непосредственной близости от поверхности оболочки.

**Третья глава** диссертации «Моделирование электромагнитных полей и магнитогидродинамических процессов в промышленных установках по производству алюминия» посвящена описанию математической модели сложного комплекса электрофизических явлений в промышленных установках по производству алюминия.

Промышленное производство некоторых легких металлов, таких как алюминий, магний, кальций и некоторых других основано на электролизе растворов их окислов или солей в различных электролитах. В частности, электрохимическое восстановление алюминия происходит в специальных плоских ваннах со стенками из термостойкой керамики при высокой температуре в 900 – 960 градусов, превышающей температуру плавления алюминия ( $t_{пл} = 640$  градусов). В результате разложения исходного сырья жидкий металл осаждается на дне ванны и затем откачивается специальными насосами по мере накопления.

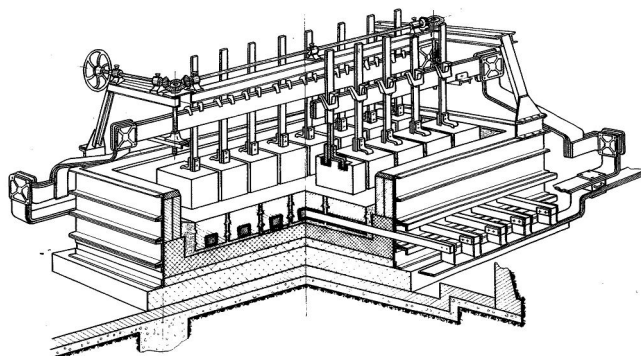


Рис. 4. Типичный промышленный электролизер.

Процесс производства алюминия является чрезвычайно энергозатратным. Поэтому даже небольшое повышение эффективности работы электролизных установок позволяет добиться существенной экономии энергетических ресурсов. В связи с этим особое внимание при проектировании электролизных ванн уделяется детальному анализу протекающим в них электрофизическим процессам, напрямую влияющим на

технико-экономические эксплуатационные характеристики производственного процесса. Одним из наиболее очевидных путей повышения эффективности работы электролизера является уменьшение толщины слоя электролита, в котором происходит значительное тепловыделение из-за низкой электропроводности материала. Однако на практике этому препятствует целый комплекс электрофизических процессов, происходящих в активной зоне электролизера. Основной причиной возникновения этих процессов является протекание электрического тока в жидких слоях алюминия и электролита. В результате взаимодействия этих токов с наведенным ими магнитным полем возникает целый комплекс магнитогидродинамических процессов, при протекании которых возникает циркуляция жидкого расплава, а также искажается изначально плоская форма границы раздела металл – электролит. Возникающие деформации границы изменяются во времени и при неблагоприятных условиях развиваются вплоть до формирования зоны короткого замыкания между анодом и катодом, что приводит к возникновению аварийной ситуации. Моделирование всего этого комплекса явлений является необходимым элементом разработки и проектирования современных эффективных электролизеров.

Для расчета магнитного поля в диссертационной работе предлагается использовать интегро-дифференциальный метод. При его реализации необходимо учитывать, что проводники с током (блужсы) пересекают боковые стенки катодного кожуха. В подобной ситуации применение скалярного

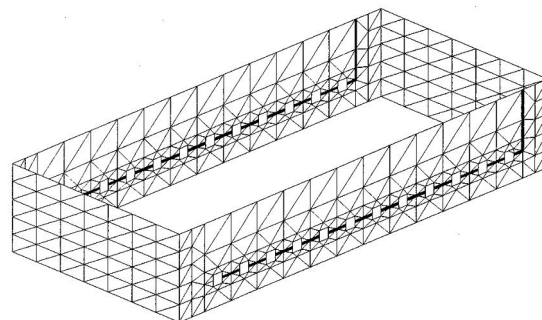


Рис. 5. Типичная треугольная сетка на боковой поверхности электролизера

магнитного потенциала возможно при условии введения разрезов в расчетной области, которые обеспечивают ее односвязность. Удобно выполнить такие разрезы вдоль линии катодов, как это показано на Рис. 5. Скачок потенциала при переходе через разрез определяется токами, протекающими по катодным стержням. Основные особенности реализации процедуры расчета магнитного поля описаны в главе 2.

Результаты расчета магнитного поля в промышленном электролизере Саянского алюминиевого завода приведены на Рис. 6. Сравнение этих данных с результатами экспериментального исследования показывает высокий уровень достоверности созданной математической модели и использованных для ее реализации расчетных

методов. При проведении расчетов особое внимание обращалось на степень дискретизации расчетной области. Для достижения приемлемой точности приходилось разбивать ферромагнитные элементы конструкции ванны электролизера на максимально доступное количество простейших элементов, достигавшее значения  $N = 10000$ .

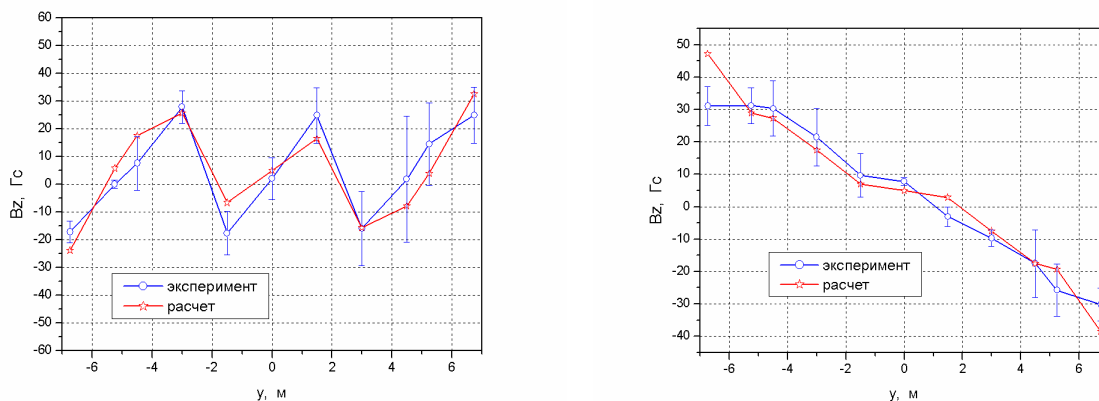


Рис. 6. Компонента магнитного поля  $B_z$  в середине слоя металла под линией анодов электролизера 255 кА Саянского алюминиевого завода.

Расчет магнитогидродинамических характеристик алюминиевого электролизера проводится на основе решения уравнений магнитной гидродинамики для двухслойной жидкости. Основы соответствующей теории разработаны в рамках модифицированной модели Моро – Эванса и модели волновых процессов Давидсона - Линдсея. В процессе выполнения диссертационной работы разработана оригинальная модель расчета статических перекосов поверхности раздела металл – электролит, которая позволила корректно определять распределение плотности тока внутри жидких слоев.

В результате выполненных работ по моделированию магнитогидродинамических процессов в электролизной ванне получена возможность расчета основных технико-экономических параметров электролизных установок. Сравнение результатов моделирования с экспериментальной информацией демонстрирует их удовлетворительное совпадение, что свидетельствует о достоверности и надежности разработанных процедур моделирования МГД - процессов. Сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными для одного из

№№ п/п	Наименование	Ед. изм.	Эксперимент	Расчет
1	Сила тока	кА	$164.9 \pm 0.1$	165,0
2	Уровень металла	см	27	27
3	Уровень электролита	см	21	21
4	Рабочее напряжение	В	$4.53 \pm 0.04$	4,57
5	Критическое напряжение	В	$4.07 \pm 0.08$	3.99
6	Запас МГД-устойчивости	В	$0.46 \pm 0.12$	0,58

Таб. 3. Результаты численного моделирования и экспериментального исследования МГД – стабильности в электролизерах С160 Красноярского алюминиевого завода.

электролизеров приведены в Таб. 3.

**Четвертая глава** «Применение интегральных методов для расчета вихревых токов в тонкостенных проводящих оболочках» посвящена вопросам моделирования переменных электромагнитных полей в присутствии тонкостенных немагнитных проводящих оболочек. Для моделирования вихревых токов в оболочках применяется векторный потенциал электрических токов (функция тока)  $T$ , который удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению:

$$\Delta T(\vec{r}) - \frac{\mu_0 \gamma}{4\pi} \int_V \left[ \text{rot} \left( \frac{dT(\vec{r}')}{dt} \cdot \vec{n} \right) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \cdot \vec{n} \cdot dV = \gamma \mu_0 \cdot \frac{d\vec{H}_0(\vec{r})}{dt} \cdot \vec{n}. \quad (3)$$

В односвязной расчетной области функция тока удовлетворяет условию  $T = 0$  на ее границах. При относительно невысоких частотах плотность тока может быть принята постоянной по толщине оболочки. В том случае, если проводящая оболочка не является односвязной, например, содержит отверстия, необходима постановка дополнительных условий на границах этих отверстий. С этой целью можно воспользоваться интегральной формой уравнения Максвелла, связывающего интеграл по замкнутому контуру от напряженности электрического поля с магнитным потоком, проходящим через поверхность, ограниченную этим контуром.

Рассмотренный в диссертации метод был применен для исследования распределения вихревых токов в тонком диске с круглым отверстием в центральной части. Геометрические характеристики диска показаны на Рис. 8, толщина диска составляет 0.02 м. Стороннее магнитное поле создается тонким кольцом, в котором протекает ток, зависящий от времени по закону  $i(t) = \sqrt{2}I \cdot \sin(\omega t)$ ,  $I = 100$  А. Само кольцо, радиус которого равен  $r = 0.25$  м, расположено над диском на расстоянии  $h = 0.5$  м от его средней линии.

Распределения плотности тока в диске были рассчитаны для различных значений параметра  $k^2 = j\omega\mu_0\gamma$  и при различной степени дискретизации расчетной области. Типичная картина линий тока в диске изображена на Рис. 8. Она получена для случая  $|k^2| = 1000$  и зафиксирована в момент времени, соответствующий  $t = 0$ . Для контроля точности получаемых результатов было проведено сравнение активной мощности, рассеиваемой в материале диска  $P = \frac{1}{\gamma} \int_V |j|^2 dv$  с активной мощностью, генерируемой

источником, подключенным к кольцу с током. Величина этой мощности рассчитывалась как  $P_{\text{ист}} = I \cdot \omega \Phi_{21} \cdot \cos(\phi)$ , где  $\Phi_{21}$  - действующее значение магнитного потока, наводимого в кольце вихревыми токами диска, а угол  $\phi$  представляет собой разность фаз между этим потоком и током в кольце  $i(t)$ . При абсолютно точном решении задачи эти две мощности должны совпадать. В то же время степень их несовпадения может служить критерием оценки точности получаемых распределений. Величина полученной погрешности при различных частотах осцилляции внешнего магнитного поля показана на Рис. 9.

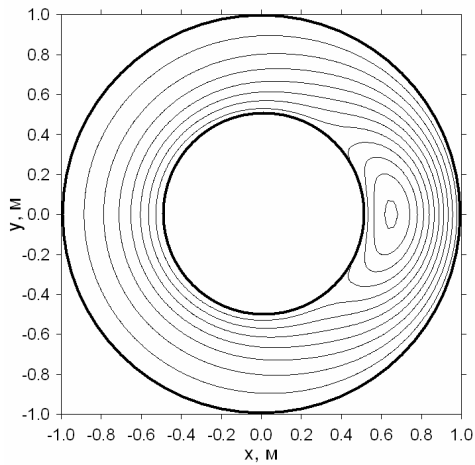


Рис.8. Картина линий тока в диске для момента времени

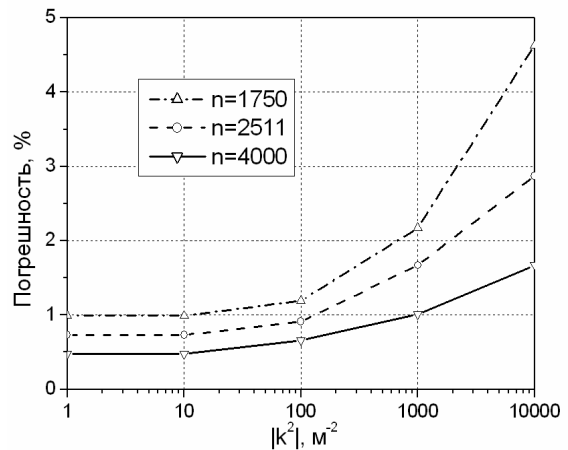


Рис. 9. Зависимость интегральной погрешности расчета вихревых токов от дискретизации расчетной области и величины параметра  $k^2$ .

Особое внимание в диссертационной работе уделяется вопросам применения разработанной технологии расчета вихревых токов в тонких оболочках для решения задачи электромагнитного экранирования. Традиционные формулировки рассматриваемой задачи позволяют получить удовлетворительные результаты только при относительно невысоких частотах, когда толщина оболочки  $d$  сравнима или много меньше глубины проникновения магнитного поля  $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\gamma}$ . В противном случае плотность тока существенно зависит от положения точки внутри оболочки и эта зависимость должна учитываться при расчете магнитного поля. В настоящей работе особо выделяется случай хорошего экранирования, соответствующий относительно высоким частотам изменения внешнего магнитного поля. В этой ситуации мы можем считать, что напряженность магнитного поля на внешней поверхности оболочки существенно превышает ее значение на внутренней поверхности. Следовательно, для внутренней поверхности можно записать приближенное равенство:

$$d\vec{J}/d\vec{n} \approx 0. \quad (4)$$

Это допущение, очевидно, справедливо и для низких частот. В общем случае зависимость распределение плотности тока в тонкой оболочке может быть представлено в виде наложения двух волн:

$$J(z) = J_1 e^{-kz} + J_2 e^{k(z-d)}, \quad (5)$$

ось  $z$  в этом выражении перпендикулярна поверхности оболочки, а нулевое значение эта координата принимает на внутренней поверхности. Коэффициенты  $J_1$  и  $J_2$  соответствуют амплитудам волн. Граничное условие (4) совместно с зависимостью (5) позволяет представить плотность тока в виде:

$$J(z) = J_m [e^{-kz} + e^{kz}]; J_m = J_2 \cdot e^{-kd}.$$

Решение интегрального уравнения (3) при подобном граничном условии позволяет определить распределения векторного потенциала  $T$  и плотности тока  $\vec{J}$  внутри оболочки.

Численное решение уравнения (3) требует разработки процедуры, обладающей высокой точностью расчета характеристик магнитного поля при условии аппроксимации потенциала финитными функциями второго порядка. На первой стадии решения задачи тонкая оболочка разбивается на совокупность элементов, имеющих форму призмы. Потенциалы рассматриваются на средней плоскости каждого элемента. В свою очередь элементы разбиваются на тонкие слои таким образом, чтобы плотность тока могла бы считаться постоянной внутри каждого слоя. В результате зависимость (5) аппроксимируется кусочно-

постоянной функцией по координате  $z$ . Разработанный алгоритм расчета вихревых токов в тонких оболочках был проверен на тестовой задаче, в которой тонкая сферическая оболочка помещалась во внешнее переменное поле, созданное катушкой с током. Результаты математического моделирования

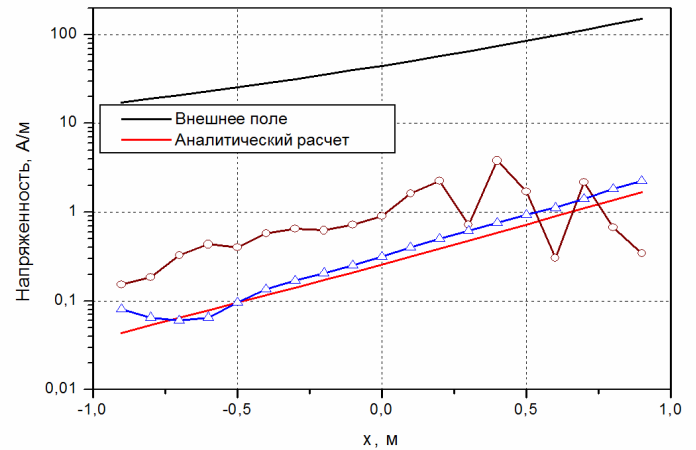


Рис.10. Напряженность магнитного поля в экранируемом пространстве для  $d/\delta = 2$ .

Треугольниками показаны результаты численного моделирования, полученные на основе комбинированного метода, кружками – результаты, полученные прямым суммированием внешнего и наведенного магнитных полей.

Результаты математического моделирования

представлены на Рис. 10. При расчете напряженности магнитного поля внутри экранируемого пространства применялась комбинированная процедура, аналогичная описанной в главе 2. Решение интегро-дифференциального уравнения в рамках этой процедуры использовалось для постановки граничных условий, а напряженность магнитного поля определялась путем решения дифференциального уравнения Лапласа с использованием методом конечных элементов.

В пятой главе «Развитие интегральных формулировок методов расчета вихревых токов в проводящих немагнитных телах» рассматривается применение методов пространственных интегральных уравнений для расчета вихревых токов в трехмерных проводящих немагнитных телах. Подробно анализируются две формулировки проблемы, одна из которых базируется на комбинации метода конечных элементов и пространственных интегральных уравнений, вторая – на применении векторных конечных элементов Уитни для решения интегрального уравнения относительно вектора плотности электрического тока  $\vec{J}$ . Интегральное уравнение для плотности тока имеет вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{J}} + \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = -k^2 \dot{\vec{H}}_m \quad (6)$$

Вторая из рассмотренных формулировок, подробный анализ которой проводится для гармонического характера зависимости от времени, предполагает представление комплексного вектора  $\dot{\vec{J}}(\vec{r})$  в виде разложения по нормальным финитным функциям:

$$\dot{\vec{J}}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^K \dot{J}_k \cdot \vec{\psi}_k(\vec{r}), \quad (7)$$

заданным на множестве тетраэдров, заполняющих расчетную область. Коэффициент разложения  $\dot{J}_k$  в этой формуле фактически представляют собой проекцию плотности тока на направление, перпендикулярное к  $k$ -ой грани тетраэдра.

Граничные условия вида  $\dot{J}_n = 0$  естественным образом будут выполнены, если приравнять нулю коэффициенты  $\dot{J}_k$  для ребер, выходящих на границу расчетной области. Особо следует остановиться на уравнении, характеризующем отсутствие источников для вектора плотности тока  $\operatorname{div} \dot{\vec{J}} = 0$ . Изначально нормальные финитные функции не обладают необходимыми для обеспечения этого условия свойствами. Поэтому необходимо предварительно провести калибровку независимых функций.

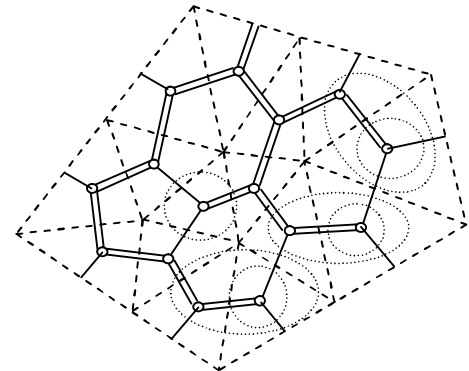
Поскольку  $J_k$  в (7) представляет собой плотность тока, проходящего через  $k$ -ую грань, то полный ток через границу тетраэдра, очевидно равный нулю, можно представить в виде:

$$i = \sum_{k=1}^4 J_k \cdot l_k = 0, \quad (8)$$

где  $l_k$  - площадь  $k$ -ой грани (длина  $k$ -ого ребра в двухмерной постановке). Из последнего равенства следует, что не все переменные  $J_k$  являются независимыми. В то же время, если для каждого из конечных элементов выполняется условие (8), то дивергенция плотности тока в расчетной области всюду равна нулю и рассматриваемая задача сводится к необходимости решения единственного интегро-дифференциального уравнения (6) с граничными условиями вида  $J_n = 0$ .

В общем случае задача по определению количества независимых переменных и их идентификации нетривиальна, и для ее решения удобно использовать теорию графов. В общем случае допустим следующий алгоритм поиска независимых переменных.

- Прежде всего, расчетная область разбивается на совокупность простейших элементов тетраэдральной формы.
- Строится полный граф, образующийся из ветвей, соединяющих центры соседних тетраэдров.
- Строится дерево графа. В это дерево включаются, в том числе, ветви, выходящие на границу расчетной области. Поскольку дерево графа не содержит замкнутых контуров, то одна из ветвей границы (для односвязной системы) в дерево не войдет.



=== дерево графа  
 — связи графа  
 ○ сечения графа

Рис. 11. Формирование графа сетки на примере двухмерной области

Замыкание любой связи графа приводит к образованию замкнутого контура. Поэтому в результате проведения предложенной процедуры нормальная компонента плотности тока, соответствующая этому ребру может быть выражена через аналогичные значения, характеризующие ветви дерева, входящие в контур. Отсюда следует, что независимыми являются только токи, пересекающие ветви дерева графа. Фактически ветви, располагающиеся на границе расчетной области и входящие в дерево графа, не входят в число независимых переменных, поскольку соответствующие им токи заранее



известны и равны нулю.

Разработанный метод расчета вихревых токов в проводящих телах был применен для анализа квазистационарного режима в длинном проводящем цилиндре, сечение которого показано на Рис. 12. Частота осцилляций внешнего однородного магнитного поля соответствовало значению параметра  $|k^2| = 100$ .

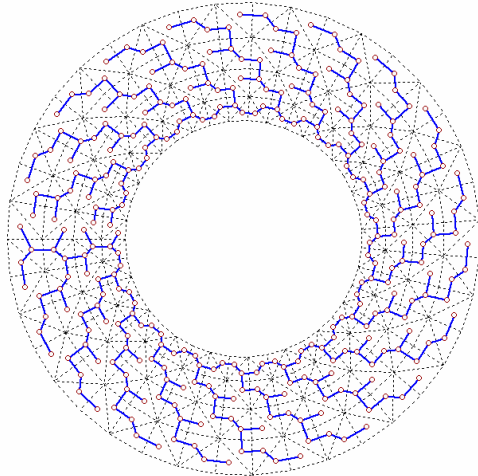


Рис. 12. Типичная треугольная сетка в поперечном сечении полого цилиндра

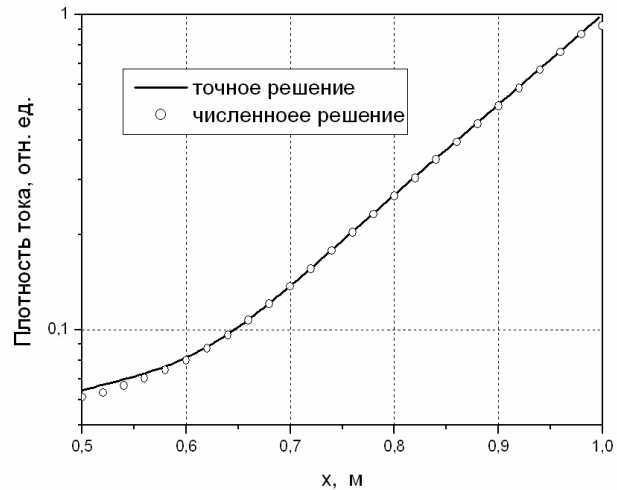


Рис.13. Распределение плотности тока внутри полого цилиндра.

Приведенное на Рис. 13 распределение плотности тока демонстрирует хорошее совпадение результатов численного моделирования с теоретическими данными.

**В шестой главе** «Применение интегро-дифференциальных уравнений электромагнитного поля для расчета переходных процессов в ферромагнитных шихтованных структурах» описывается методика расчета переменных электромагнитных полей в шихтованных ферромагнитных средах. В основе методики лежит совместное решение пространственного интегрального уравнения относительно вектора намагниченности и интегро-дифференциального уравнения относительно векторного потенциала плотности электрического тока.

Постановка задачи базируется, прежде всего, на особенностях моделирования магнитного поля, вызванных анизотропией магнитных свойств среды. Полное магнитное поле, циркулирующее в замкнутом или почти замкнутом шихтованном магнитопроводе, можно условно разделить на две компоненты.

- Индукция первой из них  $\vec{B}^{(\tau)}$  всюду параллельна плоскости шихтовки. Как правило, именно эта компонента магнитного поля является основной и в целом определяет

рабочие характеристики устройства.

- Индукция второй составляющей магнитного поля  $\vec{B}^{(n)}$  всюду перпендикулярна плоскости шихтовки. Несмотря на относительно невысокое значение этой компоненты, индуцируемые ей вихревые токи беспрепятственно циркулируют в проводящих стальных листах и могут существенно повлиять на рабочие характеристики электромагнитных устройств.

Поскольку электрические свободно циркулируют в плоскости шихтовки, для их описание можно ввести функцию тока. В этих условиях все характеристики электромагнитного поля подчиняются системе интегральных уравнений для вектора намагниченности и уравнению для функции тока  $T$  вида (3).

Полученная таким образом система интегральных уравнений была решена на основе алгоритмов, описанных в главе 1 и главе 2. Для проверки качества получаемых распределений была решена тестовая задача, в которой шихтованная пластина с магнитной проницаемостью  $\mu = 100\mu_0$  помещалась в линейно меняющееся со временем магнитное поле (Рис. 13). Результаты численного моделирования сравнивались с полученным аналитическим решением задачи и продемонстрировали удовлетворительное совпадение (Рис. 14).

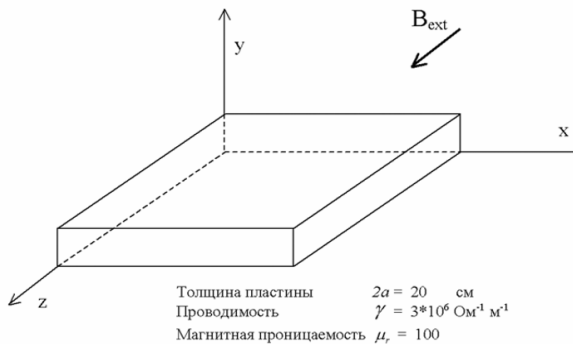


Рис. 13. Вид расчетной области тестовой задачи.

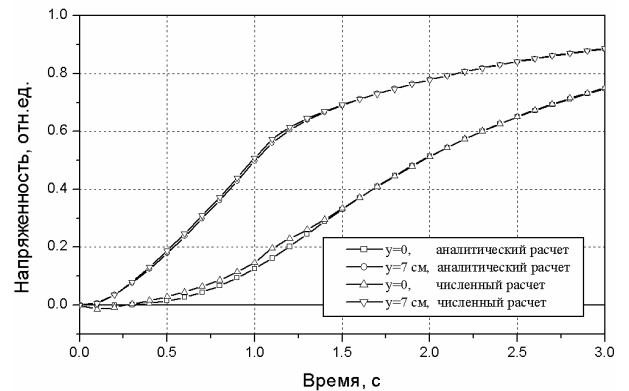


Рис. 14. Зависимости напряженности полного магнитного поля в пластине от времени при различных значениях вертикальной координаты

Разработанный и описанный выше метод расчета переходных процессов в шихтованных структурах был использован для теоретического исследования переходных процессов в ускорительных магнитах различных типов. Были проведены сравнения с результатами экспериментального исследования некоторых из них и подтверждена достоверность и высокая точность применяемой математической модели.

## **Заключение.**

Диссертационная работа посвящена решению важной научной проблемы по развитию численных методов расчета трехмерных электромагнитных полей на основе решения пространственных интегральных уравнений. Разработаны теоретические основы новых методов решения этой задачи, разработаны алгоритмы и компьютерные программы, реализующие разработанные математические модели; проведена верификация получаемых результатов численного моделирования; полученные результаты нашли практическое применение в различных областях промышленности и научного приборостроения. Наиболее существенными достижениями являются следующие результаты:

1. Разработан новый метод расчета трехмерных стационарных магнитных полей, основанный на решении интегро-дифференциального уравнения относительно скалярного магнитного потенциала.
2. Получены аналитические выражения для различных характеристик электромагнитного поля, наведенных трехмерными элементами канонической формы с постоянными или линейно меняющимися по объему плотностями источников электромагнитного поля (намагниченность, плотность электрического тока). Полученные выражения позволили избежать численных проблем, возникающих при расчете сингулярных ядер интегральных уравнений при различной степени аппроксимации неизвестных функций.
3. Разработана методика, позволившая применить разработанный метод расчета стационарных магнитных полей для моделирования характеристик поля, создаваемого в системах, включающих тонкостенные ферромагнитные конструкции.
4. Создана комплексная математическая модель для описания электрофизических процессов в промышленных электролизных установках по производству алюминия. Разработанная модель позволяет совместно решать задачи по расчету распределений плотности электрического поля, напряженности магнитного поля, циркуляции и волновых процессов в слоях расплавленного металла и электролита. Использование интегро-дифференциального метода расчета магнитостатических полей позволило достигнуть качественно нового уровня достоверности результатов моделирования.
5. Исследовано применение интегро-дифференциального метода расчета вихревых токов в тонкостенных немагнитных оболочках при различной точности

аппроксимации неизвестной функции. Результаты исследования применены для моделирования магнитных полей внутри экранирующих систем. Достигнуто значительное повышение точности расчета характеристик электромагнитного поля за счет совместного использования методов интегральных уравнений и метода конечных элементов.

6. Предложен новый трехмерный интегральный метод расчета вихревых токов в проводящих немагнитных телах, основанный на технике векторных конечных элементов.
7. Разработана методика и алгоритмы ее реализации, позволяющие моделировать переходные процессы в шихтованных ферромагнитных средах, основанные на совместном решении пространственных интегральных уравнений для вектора намагниченности и векторного потенциала плотности электрического тока. Созданные на базе разработанных алгоритмов компьютерные программы успешно применялись для расчета вихревых токов и магнитных полей в ускорительных магнитах.

## **Основные работы автора по теме диссертации**

1. Калимов А.Г. Комбинированная постановка задачи магнитостатики с граничными условиями интегрального типа./ Калимов А.Г., Сведенцов М.Л.// Изв. ВУЗов «Электромеханика». - 1991. - №8. – С. 12-13 (из списка публикаций ВАК).
2. Kalimov, A. Three-dimensional magnetostatic field calculation using integro-differential equation for scalar potential / Kalimov A., Svedentsov M. // IEEE Trans. on Magnetics. – 1996. - V. 32. - P. 670-673 (из списка публикаций ВАК).
3. Kalimov A. Eddy current calculation using finite element method with boundary conditions of integral type. / Kalimov A., Vaznov S., Voronina T. // IEEE Trans. on Magnetics – 1997. - V. 33. - P. 1326-1329 (из списка публикаций ВАК).
4. Kalimov A. Application of a Hybrid Integrodifferential Method for Analysis of Thin Magnetic Shields / Kalimov A., Svedentsov M. // IEEE Trans. on Magnetics - 1998. - V. 34. - P. 2453-2456 (из списка публикаций ВАК).
5. Kalimov A. Low aberration focusing system for a proton nanoprobe. / Kalimov A., Wollnik H., Yavor M.I. // Review of Scientific Instruments. - 1998. – V. 69. - № 12. –P.

4116-4119 (из списка публикаций ВАК).

6. **Kalimov A.G. Concept of a compact achromatic proton gantry with a wide scanning field. / Kalimov A.G., Vorobiev L.G., Wollnik H., Winkler M. // Nuclear Instruments and Methods in Physical Research. - 1998. — V. A 406. - P. 307-310 (из списка публикаций ВАК).**
7. **Kalimov A. Wide-aperture magnets for an isocentric gantry for light-ion cancer therapy. / Kalimov A., Wollnik H. // Nuclear Instruments and Methods in Physical Research. – 1999. – V. A 428. - P. 508-512 (из списка публикаций ВАК).**
8. **Kalimov A. Magnetic modeling and magneto-hydro-dynamic simulation of an aluminium production electrolytic cell / Chiampì M., Kalimov A., Repetto M., Chechurin V. // COMPEL. - 1999. – V. 18, № 3. – P. 528-538 (из списка публикаций ВАК).**
9. **Калимов, А.Г. Применение интегро-дифференциального уравнения магнитостатики для расчета тонкостенных ферромагнитных экранов / Калимов А.Г. // Электричество. – 1999. - № 11. – С. 54-59 (из списка публикаций ВАК).**
10. **Kalimov A. A Simulation of Magneto-Hydrostatic Phenomena in Thin Liquid Layers of an Aluminum Electrolytic Cell / Kalimov A., Chechurin V., Minevich L., Svedentsov M., Repetto M. // IEEE Trans. on Magnetics - 2000. V. 36. - P. 1309-1312 (из списка публикаций ВАК).**
11. **Kalimov A. Dynamic Processes in Laminated Magnets: Simulation and Comparison with Experimental Results. / Kalimov A., Langenbeck B., Moritz G. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2002. - V. 12. - № 1. - P. 98-101 (из списка публикаций ВАК).**
12. **Kalimov A. Pulsed Magnetic Quadrupole Lenses for High Rigidity Beams. / Kalimov A., Li G., Chok U., Winkler M., Wolnlik H. // Review of Scientific Instruments. – 2002. - V. 71. - № 2.– P. 376 – 379 (из списка публикаций ВАК).**
13. **Kalimov A. Design of an Iron Dominated Quadrupole Magnet with a High Pole-Tip Flux Density. / Kalimov A., Chernosvitov A., Wollnik H. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2002. - V.12. - № 1. - P. 1430-1433 (из списка публикаций ВАК).**
14. **Kalimov A. Strong Pulsed Magnetic Quadrupole Lens. / Kalimov A., Chichkine V., Winkler M., Behr K.H., Geissel H., Li G., Muenzenberg G., Scheidenberger C., Weick H., Wollnik H. // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. - 2002. – V. 12. - № 1. – P. 699 - 702 (из списка публикаций ВАК).**

15. Kalimov A. A design for a wide-aperture 90° bending magnet for heavy-ion cancer therapy. / Kalimov A., Langenbeck B., Mühle C. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2002. - V.12. - № 1. - P. 94 - 97 (из списка публикаций ВАК).
16. Kalimov A. Optimization of a Superferric Nuclotron Type Dipole for the GSI Fast Pulsed Synchrotron / Kalimov A., Kovalenko A.D., Khodzhibagyan H.G., Moritz G., Mühle C. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2002. - V. 12. - № 1. - P. 161 - 165 (из списка публикаций ВАК).
17. Kalimov A.G. Modeling Magnetization Using Whitney Facet Elements. / Kalimov A.G., Vishnevsky A.M., Lapovok A.A. // IEEE Trans. on Magnetics. – 2002. - V.38. - № 2. – P. 489 - 492 (из списка публикаций ВАК).
18. Kalimov A. Development and Test of Iron-Free Quadrupole Lenses with High Magnetic Flux Densities./ Kalimov A., Winkler M., Geissel H., Eliseev S., Li G., Plass W., Wang Z., Wollnik H., Chichkine V., Behr K., Munzenberg G., Scheidenberger C., Weick H. // Nuclear Instruments and Methods in Physical Research. – 2002. B-204. - P. 454-459 (из списка публикаций ВАК).
19. Kalimov A. Investigation of the Power Losses in a Laminated Dipole Magnet with Superconducting Coils / Kalimov A., Fischer E., Hess G., Moritz G., Muehle C. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2004. - V.14. - № 2. - P. 267-270 (из списка публикаций ВАК).
20. Kalimov A. Design of a Superferric Dipole Magnet with High Field Quality in the Aperture / Kalimov A., Moritz G., Zeller A. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. - 2004. - V.14. - № 2. - P. 271-274 (из списка публикаций ВАК).
21. Kalimov A. Magnets for the Heavy-Ion Therapy Accelerator Facility (HICAT) for the Clinic in Heidelberg. / Kalimov A., Muehle C., Langenbeck B., Kloss F., Moritz G., Schlitt B.. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2004. – V. 14. - № 2. – P. 461-464 (из списка публикаций ВАК).
22. Kalimov A. Design of a Superferric Quadrupole Magnet with a High Field Gradient. / Kalimov A., Fischer E., Kornyshev R., Moritz G., Muehle C., Shcherbakov P. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2006. - V.16. - №.2. - P. 403-406 (из списка публикаций ВАК).
23. Kalimov A. Optimization of the Pole Shape of Quadrupole Magnet by MULTIMAG. / Kalimov A., Potienko A., Wollnik H. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. - 2006. –V.16. - № 2. - P. 1282-1286 (из списка публикаций ВАК).
24. Калимов А.Г. Оценка коэффициента экранирования низкочастотного магнитного поля корабельными конструкциями. / Калимов А.Г. Лаповок А.Я.,

- Судов Н.Л. // Труды ЦНИИ им. Крылова. – 2008. - № 36. - С. 45-51 (из списка публикаций ВАК).
25. Калимов А.Г. Применение интегро-дифференциальных уравнений электромагнитного поля для расчета переходных процессов в ферромагнитных шихтованных структурах. / Калимов А.Г. // Электричество. – 2008. - № 12. - С. 48-55 (из списка публикаций ВАК).
26. Калимов А.Г. Применение пространственных интегральных уравнений для расчета магнитного поля и потоков рассеяния трансформатора с шихтованным ферромагнитным сердечником. / Калимов А.Г. Важнов С.А. // Изв. РАН «Энергетика». – 2009. - №2.– С. 27-36 (из списка публикаций ВАК).
27. Калимов А.Г. Применение интегро-дифференциальных уравнений для расчета вихревых токов в многосвязных тонкостенных проводящих оболочках / Калимов А.Г. // Электричество. – 2010. - № 5. – С. 63-69 (из списка публикаций ВАК).
28. Калимов А.Г. Анализ эффективности тонкостенных ферромагнитных экранов на основе решения интегро-дифференциального уравнения для скалярного потенциала. / Калимов А.Г., Важнов С.А. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. – 2010. - №1(95). – С. 265 – 270 (из списка публикаций ВАК).
29. Калимов А.Г. Применение интегральных уравнений для расчета магнитных полей вихревых токов в условиях резкого поверхностного эффекта. / Калимов А.Г., Важнов С.А., Сведенцов М.Л. // Изв. РАН «Энергетика». – 2010. - № 1. - С. 128-134 (из списка публикаций ВАК).
30. Калимов А.Г. Совместное использование методов интегральных уравнений и конечных элементов для повышения точности расчета магнитного поля внутри замкнутых экранирующих систем. / Калимов А.Г., Важнов С.А. // Электричество. – 2011. - № 9. - С. 67-73 (из списка публикаций ВАК).
31. Калимов А.Г. Применение граничных условий интегрального типа для решения трехмерных задач магнитостатики./ Калимов А.Г., Сведенцов М.Л. // Научное приборостроение. Формирование пучков заряженных частиц. - Ленинград: НТО АН СССР. - 1990. – С. 49-53.
32. Калимов А.Г. Комбинированный метод расчета вихревых токов в немагнитных проводящих объектах. / Калимов А.Г., Воронина Т.Ю., Кожухова Н.В. // Математическое моделирование в энергетике. Тезисы докладов научно-технической конференции. – Киев. – 1990. - С. 144-145.

33. Калимов А.Г. Применение комбинированного метода расчета С-образного магнита статического масс-анализатора. / Калимов А.Г., Сведенцов М.Л. // Тез. Док. XI семинара «Методы расчета ЭОС». - Алма-Ата, 1992. – С. 82-83.
34. Kalimov A.G. Calculation of non-linear 3D magnetic fields using integro-differential equation of magnetostatics. / Kalimov A.G., Svedentsov M.L. // Abstracts of 4–th International Conference on Charge Particle Optics, Tsukuba, Japan. - 1994.
35. Kalimov A.G. Calculation of nonlinear 3D magnetic fields using hybrid integro-differential methods / Kalimov A.G., Svedentsov M.L. // Abstracts of the 14-th International Conference on Magnetohydrodynamics. – Riga. - 1995. - P. 123.
36. Kalimov A.G. Calculation of High-Frequency Electromagnetic Fields in the Presence of Conducting Objects. / Kalimov A.G., Vaznov S.A., Svedentsov M.L. // The 7-th Biannual IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation. Advance Program. – Okayama, Japan. - 1996. – P. 71.
37. Kalimov A. Application of Integral Methods for Computation of 3D Magnetic Fields in Aluminum Electrolyzers / Kalimov A. // Proceedings of the 11<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields. – 1997. - P 85-86.
38. Калимов А.Г. Международное сотрудничество СПбГТУ в области исследования процессов в промышленных электролизерах по производству алюминия / Боронин В.Н., Калимов А.Г., Чечурин В.Л. // Материалы международной конференции «Интернационализация высшего образования и научных исследований в XXI веке». – 1999. – С. 241-243.
39. Калимов А. Трехмерная модель расчета МГД-параметров алюминиевого электролизера. / Калимов А., Деркач А., Скворцов А., Цыбуков И., Шрамко В., Сведенцов М. // Цветные металлы. – 2000. - №1. – С. 31-34.
40. Калимов А.Г. Определение магнитной проницаемости ферромагнитных материалов алюминиевого электролизера. / Калимов А.Г., Важнов С.А., Павлов А.В., Скворцов А.П. // Сб. научных трудов «Научные и теоретические исследования в металлургии легких металлов». - СПб. – 2000. – С. 129-137.
41. Kalimov A.G. Software complex to model magnetic fields and MHD effects in aluminum reduction cells / Arkhipov G.V., Kalimov A.G. // Workshop in numerical simulations for aluminum industry. - 2004. - Lausanne, Switzerland - P. 9-11.
42. Kalimov A. Modeling of the Magnetic Fields and MHD Stability in Aluminum Reduction Cells / Kalimov A., Potienko A., Vazhnov S. // Proc. of the international symposium «Aluminium 2006». - Montreal - 2006. - P. 467-478.