УДК 621.001.5:331.01

А.Г. Ташевский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

A.G. Tashevsky

MATHEMATICAL MODELS OF LIFE CYCLE DURATION OF TECHNICAL SYSTEMS

Рассмотрены несколько многопараметрических распределений, сводящихся к экспоненциальному при подходящем выборе одного из параметров в процессе построения математической модели продолжительности жизненного цикла технических систем.

ТЕХНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА; ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ; ЖИЗНЕННЫЙ ЦИКЛ; СЛОЖНОЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ; ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ; РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГОМПЕРЦА-МАКЕГАМА.

The article considers several multiparameter distributions, reducing to the exponential with a suitable choice of one of the parameters in process of constructing a mathematical models of duration life cycle of technical systems.

TECHNICAL SYSTEM; DISTRIBUTION LAW; LIFE CYCLE; COMPLICATED EXPONENTIAL DISTRIBUTION; EXTREME RANDOM VARIABLES; DISTRIBUTION OF GOMPERTZ-MAKEGAMA.

Масштабность и сложность задач создания и применения современных технических, организационно-технических и других сложных систем сконцентрирована в техноинформационном процессе, который именуют жизненным циклом. Детальный анализ этапов жизненных циклов сложных технических систем показывает необходимость решения различающихся по постановке и используемым методам задач общей теории технических систем. Накоплен большой опыт применения методов анализа и синтеза технических объектов различной структурной и технической сложности. Вместе с тем выявились существенные трудности, препятствующие получению удовлетворительных результатов как теоретическим, так и экспериментальным путем.

Объективно существует потребность разработки специфической методологии системно-информационного анализа и общей теории технических объектов. Основной целью такой методологии должно быть обеспечение наиболее эффективной переработки ограниченного объема информации, которым располагает исследователь, учета фактора неопределенности и стохастичности как объективных условий, в которых происходит процесс управления развитием технических систем на всех этапах их жизненных циклов. Реализация такого подхода позволит придать выявленным закономерностям развития технических систем количественно-качественное содержание и обеспечить их статистическую (вероятностную) интерпретацию.

Содержание работы составляют методы формирования математических моделей, адекватно отражающих конструктивную эволюцию технических систем и процессы их модернизации. Показано, что традиционные модели оценки длительности жизненного цикла (кривые Гомперца, распределение Гомперца — Макегама) в своей основе исходят из идеализированной модели экспоненциального распределения в предположении постоянства его параметра, что неприемлемо для широкого класса технических систем.

Предложена модификация экспоненциальной зависимости и общий способ построения широкого класса моделей жизненного цикла на основе рандомизации параметра экспоненциального распределения и использования аппарата характеристических функций.

Разработан и применен метод формирования математических моделей продолжительности жизненного цикла для технических систем, ретроспективная информация о которых представляет собой короткий динамический ряд (случайная конечная выборка малого объема). Сущность метода заключается в целенаправленном преобразовании пуассоновского потока событий в непуассоновский, адекватный реальному процессу. В качестве аналитического аппарата этого метода использован аппарат теории суммирования случайного числа случайных величин. Показано, что полученные законы распределения продолжительности жизненного цикла относятся к классу непредельных распределений сумм случайного числа случайных величин, имеют тяжелый «хвост» и большую дисперсию по сравнению с «осредненными» законами распределений, что делает эти модели наиболее ценными для получения надежных оценок продолжительности жизненного цикла.

Уже разработано значительное число математических моделей продолжительности жизненного цикла технических систем и продолжает неуклонно расти.

Теория надежности появилась как следствие возникшей потребности в обеспечении безотказной работы сложных технических систем, в основном стимулированной нуждами военных [1–3, 12, 17].

Новейший период развития этой теории относится к концу прошлого века, когда состоялась первая международная конференция «Математические методы в теории надежности (MMR-97)» (Бухарест, Румыния, 1997 г.).

Последующие конференции проходили в Бордо (Франция, 2000), Трондхейме (Норвегия, 2002), Санта Фе (Нью Мехико, США, 2004), Глазго (Шотландия, Великобритания, 2007), Москве (Россия, 2009). По материалам этих конференций опубликованы сборники трудов [22–25].

В настоящее время активно разрабатываются математические модели долговечности, старения и деградации [5, 7, 9–11, 13, 15, 19–21, 26, 27]. Многие из них посвящены моделированию процессов износа и старения сложных биотехнических систем в здравоохранении, при анализе качества жизни и экологической безопасности агрегатов энергетических комплексов.

Существуют активно работающие международные семинары по указанным проблемам [19, 20].

Провести сравнительный анализ различных моделей старения и долговечности в рамках данной статьи в силу трудоемкости и значительного объема не представляется возможным. Этим проблемам были посвящены:

Международная конференция по критериям согласия и соответствию моделей (International Workshop GOF2000 on Goodness-of-fit Tests and Validity of Models), Париж;

Международная конференция по моделям долговечности, старения и деградации (LAD'2004), Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург.

В анализе данных типа продолжительности жизненного цикла особенно интересны технические системы, для которых может быть определено событие, часто называемое отказом. Отказ происходит после некоторого интервала времени (наработки до отказа).

С сентября 2010 года в РФ введен в действие национальный стандарт — ГОСТ Р 27.004–2009 «Надежность в технике. Модели отказов» [18]. Он распространяется на изделия любых видов техники, для которых предусматривают и решают задачи прогнозирования безотказности и обработки статистических данных об отказах на различных стадиях их жизненного цикла.

Этот стандарт устанавливает модели отказов невосстанавливаемых и восстанавливаемых изделий с простым техническим обслуживанием и ремонтом, проводимым на месте эксплуатации данных изделий. Стандарт не распространяется на сложные восстанавливаемые изделия, безотказность которых существенно связана с количеством и чередованием режимов функционирования, наличием и способами резервирования составных частей, разнообразием способов их технического обслуживания и ремонта.

Для точного определения наработки до отказа необходимо выполнить три условия: четко установить начало отсчета времени; выбрать масштаб для измерения отсчета времени и определить само понятие отказа. Будем считать отказом момент времени, когда некоторая характеристика (параметр) технической системы, измеряемая каким-либо количественным способом, падает ниже допустимого уровня, определенного техническими условиями (условиями функционирования). В самом общем случае это может быть момент времени, когда обобщенный показатель технического уровня системы станет меньше значения нижней доверительной границы прогнозируемого мирового технического уровня систем-аналогов.

Таким образом, объект исследования сопоставляется с единственной неотрицательной случайной величиной T, представляющей собой эффективный срок жизни системы. Тогда функция «выживания», соответствующая T, определится как вероятность того, что время жизни (наработка) окажется больше t:

$$F(t) = Вер\,(T \geq t), \quad \text{или} \quad F(t) = \int_t^\infty f(t)\,dt\,.$$

Исследуем некоторые распределения, полезные для решения рассматриваемого класса задач.

Наиболее простое аналитическое выражение имеет вид экспоненциального распределения с плотностью вероятностей

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

Постоянная интенсивности λ отражает свойство экспоненциального распределения, названное отсутствием последействия, т. е. при любом $t_0 > 0$ условное распределение $T - t_0$ при условии, что $T > t_0$, совпадает с безусловным распределением T.

Коэффициент вариаций, т. е. отношение стандартного отклонения к среднему, равен единице, и его можно использовать в качестве относительного разброса.

Постановка проблемы и пути ее решения

Экспоненциальное распределение широко применяется в работах по надежности, к нему приводят различные идеализированные модели. Однако в связи с тем, что это распределение определяется только одним параметром, основанные на нем методы часто оказываются чувствительными даже к незначительным отклонениям «хвоста» распределения. Поэтому рассмотрим несколько многопараметрических распределений, сводящихся к экспоненциальному при подходящем выборе одного из параметров.

Сложно-экспоненциальное распределение. Обозначим длительность периода жизненного цикла t. Очевидно, что t — случайная величина, которая зависит от ряда экзогенных факторов. Область существования такой случайной величины может быть задана только одним ограничением, а именно ограничением в интервале $(0, \infty)$.

По принципу Джейнса «минимальным произволом» обладает экспоненциальное распределение, поэтому целесообразно представить

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где $\lambda = I/\bar{t}$.

Однако предположение о постоянстве параметра λ нереалистично. Это обусловлено причинами кумулятивного характера. Кроме того, величина параметра λ в значительной мере зависит от объема выборки (как правило, исследователь имеет в распоряжении выборку малого объема), а также от типа технической системы. Можно принимать параметр λ в качестве случайной величины с плотностью вероятности $f(\lambda)$. Тогда

$$f(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda\,. \tag{2}$$

В простейшем случае вариация параметра λ имеет γ-распределение

$$f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k)} \rho^k \lambda^{k-1} e^{-\rho\lambda}\,, \tag{3}$$

где k — параметр формы, $k = \bar{\lambda}^2 / S^2$; $1/\rho$ — параметр масштаба, $\rho = \bar{\lambda} / S^2$; $\bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$; $\lambda_i = \frac{1}{\bar{t}_i}$; $1 = \overline{1,n}$; $\bar{t}_i$ — средняя длительность жизненного цикла i-го типа технической системы.

Распределение (3) характеризуется гибкостью, поскольку оно имеет два подгоночных параметра. Принимая $\rho = k / \bar{\lambda}$, $\bar{\lambda} = \lambda_0$, получим

$$f(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} \frac{1}{\Gamma(k)} \left(\frac{k}{\lambda_0} \right)^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda \frac{k}{\lambda_0}} d\lambda .$$

Решив интеграл, определим плотность вероятности сложно-экспоненциального распределения

$$f(t) = k \left(\frac{k}{\lambda_0} \right)^k \left(\frac{k}{\lambda_0} + t \right)^{-k-1}$$

и интегральный закон распределения

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{k \left(k / \lambda_0 \right)^k}{\left(\frac{k}{\lambda_0} + t \right)^{k+1}} dt = 1 - \frac{\left(k / \lambda_0 \right)^k}{\left(t + k / \lambda_0 \right)^k} .$$

Этот закон является модификаций распределения Парето. Его дисперсия превышает дисперсию того предельного экспоненциального распределения, к которому оно сходится при $k \to \infty$. Графики полученных зависимостей представлены на рис. 1 и 2.

Распределение Гомперца — Макегама. Теперь предположим, что параметр интенсивности экспоненциального распределения имеет временной тренд, который может быть описан уравнением модифицированной экспоненты. В этом случае интенсивность будет определяться двумя составляющими: константой *a,* не зависящей от длительности жизненного цикла технической системы, и слагаемым, экспоненциально растущим с «возрастом»:

$$\lambda(t) = a + b \exp(\lambda t) . \qquad (4)$$

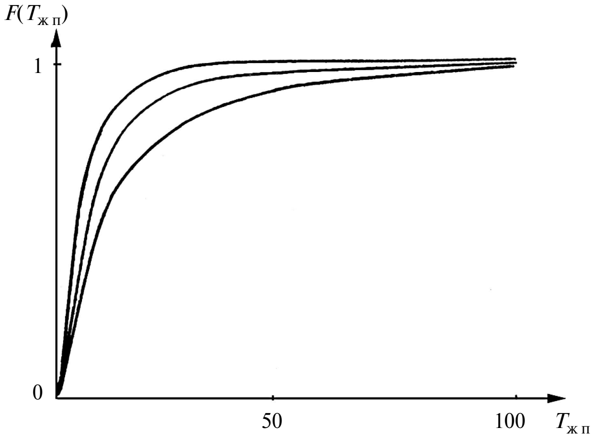

Рис. 1. Интегральный закон распределения

Эта функция, постоянные которой α, b и λ распределяются статистически на основе известных алгоритмов (например, методом трех сумм или методом трех точек) имеет горизонтальную асимптоту, равную α. Ее график стремится к асимптоте при $t \to \infty$ но никогда ее не пересекает. Параметр b равен разности между ординатой кривой (при $t = \infty$) и асимптотой. Тогда, подставляя выражение (4) в зависимость (1), получим

$$f(t) = \left(a + b e^{\lambda t} \right) e^{-at - \frac{b}{\lambda}\left(e^{\lambda t - 1} \right)} . \qquad (5)$$

Это дифференциальный закон распределения Гомперца — Макегама. Его частным случаем при $a = 0$ (то есть в случае представления уравнения тренда интенсивности простой экспонентой) является распределение Гомперца. Последнее при прогнозировании длительности жизненного цикла технических систем представляют особый интерес, т. к. является стохастическим аналогом кривой Гомперца (Бенджамин Гомперц, 1799–1865, — английский математик). Принимая во внимание его асимметричность, его широко применяют при аппроксимации статистических данных тренда развития сложных технических систем.

Распределение Гомперца — Макегама пользуется возрастающим вниманием специалистов. Рассмотрим один из моделирующих алгоритмов, позволяющих получать случайные величины, распределенные по этому закону.

Моделирующий алгоритм для получения случайных величин, распределенных по закону Гомперца-Макегама

Для построения необходимого алгоритма был использован метод операторных рядов, позволяющий, употребив известную теорему, представить заданную случайную величину в виде

$$X = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(Y + y_0 \right)^\nu}{\nu!} D_x^\nu \Big|_{x_0} , \qquad (6)$$

где Y — случайная величина, равномерно распределенная на интервале (0, 1); D_x^ν — оператор преобразования ν -го порядка вида

$$D_x^\nu = \frac{1}{\dot{\varphi}(x)} \frac{d}{dx} \qquad (7)$$

со следующими свойствами:

$$D_x^{\nu+1} = D\left(D_x^{\nu}\right); \quad D_x^0 = X_0; \quad D_x^1 = \frac{1}{\dot{\varphi}(x)},$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция распределения искомой случайной величины; $y_0 = \varphi(x_0)$ — значение функции в выбранной опорной точке x_0, в которой $\dot{\varphi}(x_0) \neq 0$.

Распределение Гомперца — Макегама анализировалось в виде

$$g(x) = a + be^{-ax-\frac{b}{\lambda}\left(e^{\lambda x-1}\right)}, \tag{8}$$

где a, b, λ — некоторые константы при $x \geq 0$.

Выбрав опорную точку $x_0 = 0$ и используя выражение (7), можно получить первые пять членов операторного ряда:

$$D = \frac{e^{ax+\frac{b}{\lambda}e^{\lambda x-1}}}{a+be^{\lambda x}}\frac{d}{dx};$$

$$D_{x_0}^0 = 0;$$

$$D_x^1 = \frac{e^{ax+\frac{b}{\lambda}e^{\lambda x-1}}}{a+be^{\lambda x}}\Big|_{x_0} = \frac{e^{b/\lambda e}}{a+b};$$

$$D_x^2 = \left(D_x^1\right)^2\left[a+be^{\lambda x-1}-\frac{b\lambda e^{\lambda x}}{a+be^{\lambda x}}\right]\Bigg|_{x_0} =$$

$$= \left(D_{x_0}^1\right)^2\left[a+\frac{b}{e}-\frac{b\lambda}{a+b}\right];$$

$$D_x^3 = \left(D_x^1\right)^3 \times$$

$$\times\left[2\left(a+be^{\lambda x-1}-\frac{b\lambda e^{\lambda x}}{a+be^{\lambda x}}\right)^2 + b\lambda e^{\lambda x-1} - \frac{ab\lambda^2 e^{\lambda x}}{\left(a+be^{\lambda x}\right)^e}\right]\Bigg|_{x_0} =$$

$$= \left(D_{x_0}^1\right)^3\left[2\left(a+\frac{b}{e}-\frac{b\lambda}{a+b}\right)^2 + \frac{b\lambda}{e} - \frac{ab\lambda^2}{\left(a+b\right)^2}\right];$$

$$D_x^4 = \left(D_x^1\right)^4\left[6\left(a+be^{\lambda x-1}-\frac{b\lambda e^{\lambda x}}{a+be^{\lambda x}}\right)^3 + \right.$$

$$+7\left(a+be^{\lambda x-1}-\frac{b\lambda e^{\lambda x}}{a+be^{\lambda x}}\right)\left(b\lambda e^{\lambda x-1}-\frac{ab\lambda^2 e^{\lambda x}}{a+be^{\lambda x2}}\right)+$$

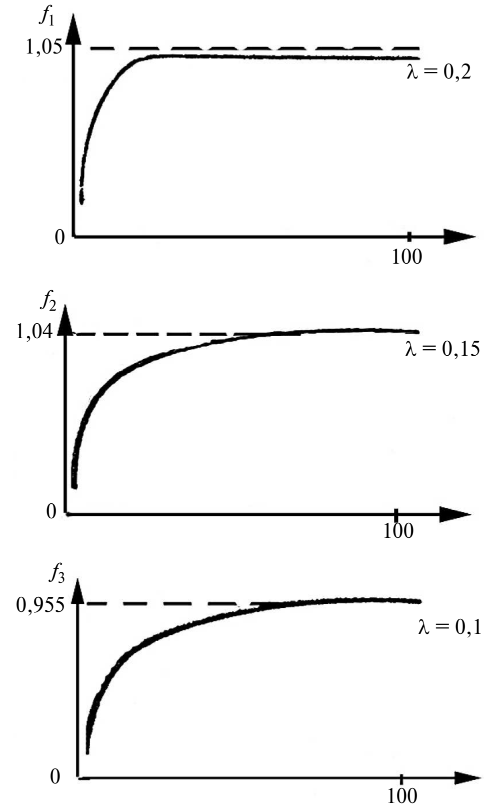

Рис. 2. Интегральный закон распределения

$$\left.\left. + b\lambda^2 e^{\lambda x-1} - \frac{ab\lambda^3 e^{\lambda x}\left(a-be^{\lambda x}\right)}{(a+be^{\lambda x})^3}\right]\right|_{x_0} =$$

$$= \left(D_{x_0}^1\right)^4\left[6\left(a+\frac{b}{e}-\frac{b\lambda}{a+b}\right)^3 + 7\left(a+\frac{b}{e}-\frac{b\lambda}{a+b}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{b\lambda}{e}-\frac{ab\lambda^2}{\left(a+b\right)^2}\right)+\frac{b\lambda^2}{e}-\frac{ab\lambda^3\left(a-b\right)}{\left(a+b\right)^3}\right].$$

Путем использования этих выражений и выражения (6) получен алгоритм и смоделирована случайная величина для конкретных a, b и λ.

Двойное экспоненциальное распределение экстремальных случайных величин. При прогнозировании длительности жизненного цикла технических систем встречаются задачи, связанные с экстремальными (максимальными или минимальными) значениями из некоторого набора случайных величин. Наиболее наглядной из них является задача о времени внедрения (длительности реализационного периода жизненного цикла) технической системы, состоящей из n однотипных модулей. Если i_i — время внедрения i-го модуля, то время, равное длительности реализационного периода системы, определяется самым протяженным лагом внедрения, т. е. равно максимуму:

$$T_n = \max(t_1, ..., t_n).$$

Классическая теория экстремальных значений в основном имеет дело со свойствами распределения максимума n независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Более подробно данный вопрос рассмотрен в [2], где показано, что экстремальные распределения экстремальных случайных величин имеют одну из следующих трех экспоненциальных форм, называемых тремя распределениями экстремальных значений:

тип 1 — $g(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$ при $-\infty < x < \infty$;

тип 2 — $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right) \end{cases}$ для $\alpha > 0$ и $x > 0$;

тип 3 — $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \ge 0; \\ \exp\left(-(x)^{\alpha}\right) \end{cases}$ для $\alpha > 0$ и $x \le 0$.

Продолжая рассматривать семейство экспоненциальных распределений, приведем алгоритм моделирования двойного экспоненциального распределения экстремальных случайных величин, имеющего следующую плотность вероятностей (частный случай распределения типа I):

$$g(x) = -\frac{\alpha}{E_i(1/\lambda)} \exp\left[-\frac{1}{\lambda}\exp(\alpha x)\right] \text{ для } x \ge 0,$$

где α, λ — параметры распределения; E_i — интегральная показательная функция.

Данное распределение имеет максимум $E[\exp(\alpha x)]$ при заданной энтропии. Для выбранных значений $\alpha = 1$ и $\lambda = 1$ выражение для плотности распределения имеет следующий вид:

$$g(x) = \exp\left[-\exp(x)\right] / 0{,}2194.$$

Тогда оператор

$$D = \frac{d}{dx} g(x) = k \exp\left[\exp(x)\right] d/dx, \qquad (9)$$

где $k = 0{,}2194$.

Поскольку $g(0) \neq 0$, то в качестве опорной точки целесообразно выбрать $x_0 = 0$. В соответствии с формулой (9) получим

$$D_x^1 = k \exp(x)\Big|_{x_0=0} = ke;$$

$$D_x^2 = k^2 \exp\left[2\exp(x) + x\right]\Big|_{x_0=0} = (ke)^2;$$

$$D_x^3 = k^3 \exp\left[3\exp(x) + x\right]\left[2\exp(x) + 1\right]\Big|_{x_0=0} = \\ = 3(ke)^3;$$

$$D_x^4 = k^4 \exp\left[4\exp(x) + x\right] \times \\ \times \left[6\exp(2x) + 7\exp(x) + 1\right]\Big|_{x_0=0} = 14(ke)^4 \dots \text{ и т. д.}$$

Нетрудно заметить, что в общем случае

$$D_x^{\nu}\Big|_{x_0=0} = \\ = k^{\nu} \exp\left[\nu\exp(x) + x\right]\varphi_{\nu}(x)\Big|_{x_0=0} = (ke)^{\nu}\varphi_{\nu}(0),$$

где $\varphi_{\nu}(x)$ — полином степени $(\nu - 2)$, определяемый из следующего рекуррентного соотношения:

$$\varphi_{\nu+1}(x) = \dot{\varphi}_{\nu}(x) + \left[\nu\exp(x) + 1\right]\varphi_{\nu}(x),$$

где $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 1$, получаемого в результате последовательного применения оператора (I) к $(\nu + 1)$-му члену разложения операторного ряда:

$$D_x^{\nu+1} = D\left(D_x^{\nu}\right) = \\ = k\exp\left[\exp(x)\right]\frac{d}{dx}\left\{k^{\nu}\exp\left[\nu\exp(x) + x\right]\varphi_{\nu}(x)\right\} = \\ = k^{\nu+1}\exp\left[\exp(x)\right]\left\{\exp\left[\nu\exp(x) + x\right]\dot{\varphi}_{\nu}(x) + \right. \\ \left. + \exp\left[\nu\exp(x) + x\right]\left[\nu\exp(x) + 1\right]\varphi_{\nu}(x)\right\} = \\ = k^{\nu+1}\exp\left[(\nu + 1)\exp(x) + x\right]\varphi_{\nu+1}(x).$$

Если ограничиться несколькими первыми членами ряда, то моделирующий алгоритм при условии выбора начальной точки $x_0 = 0$ примет следующий вид

$$x = \alpha ke/1! + (\alpha ke)^2/2! + 3(\alpha ke)^3/3! + \\ + 14(\alpha ke)^4/4! + 89(\alpha ke)^5/5! \dots,$$

где α — случайная величина, равномерно распределенная в интервале (0, 1).

Далее приведен один из возможных вариантов программы, реализующий этот алгоритм.

Результаты решения в виде графика плотности распределения и гистограммы приведены в [3].

Для реализации моделирующего алгоритма, приведенного выше, используется процедура VNL1, написанная на языке PL/I для платформ Windows [4]. Кратко рассмотрим порядок работы этой программы.

Операторы с первого по пятый производят описание типа используемых переменных и внешних процедур:

RANDU — датчик случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0, 1); IX, IY, R — параметры внешней процедуры RANDU; N — количество разыгрываемых случайных чисел (R_i); X — переменная (аргумент функции $g(x)$); G — функция $g(x)$; K — вспомогательная переменная, используемая для упрощения расчета величины x; B — вспомогательная переменная, применяющаяся для оцифровки осей координат графика; C, D — вспомогательные переменные для вычисления номеров соответственно столбца и строки в символьном массиве GRAF, где хранятся значения $g(x)$.

Оператор 6 осуществляет ввод числа N, а оператор 7 обеспечивает построение оси ординат.

Непосредственные расчеты величин K, X, G, C и D осуществляют операторы с 8 по 13, после чего полученные значения выводятся на печать (операторы 14–29).

Детерминистская схема решения задачи определения длительности жизненного цикла технических систем. Детерминистский подход базируется на дальнейшей трансформации математической модели, используемой для определения периода упреждения прогноза. В основу этой модели положены ретроспективные данные.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что элементарное приращение продолжительности жизненного цикла технической системы ΔT будет пропорционально абсолютному (полному) периоду T, приращению показателя, характеризующего технический уровень ΔQ и некоторой функции $F(Q)$, зависящей от изменения технического уровня во времени t. Таким образом,

$$\Delta T = TF(Q)\Delta Q. \qquad (10)$$

Исходя из того, что любой образец в процессе своего развития и совершенствования достигает предела, можно заключить: при достаточно большом времени t, приближающемся к длительности жизненного цикла T, значение функции $F(Q)$ стремится к 0 или постоянной величине, т. е.

$$\lim_{t\to T} F(Q) = 0.$$

Этому условию соответствует функция

$$F(Q) = 1 - Q, \qquad (11)$$

когда при $t \to T$ нормированное значение технического уровня стремится к своему максимуму, т. е. к единице.

Переходя в (10) от приращений к дифференциалам и учитывая (11), получим дифференциальное уравнение для определения продолжительности жизненного цикла образца в зависимости от его технического уровня:

$$\frac{dT}{T} = (1 - Q)\,dQ. \qquad (12)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\ln T = Q - \frac{1}{2}Q^2 + \ln C.$$

При условии, что новая техническая система создается на уровне прототипа, ее жизненный цикл практически не будет отличаться от жизненного цикла, который имела система-прототип. Постоянная C может быть найдена из условия $Q = Q_0$ при $T = T_0$, где Q_0 и T_0 — показатели соответственно технического уровня и продолжительности жизненного цикла прототипа.

В этом случае

$$\ln C = \ln T_0 - Q_0 + Q_0^2/2;$$

$$T = T_0 \exp\left[Q - 0{,}5Q^2 + Q_0\left(0{,}5Q_0 - 1\right)\right].$$

Если нормирование показателя технического уровня произвести по отношению к значению Q, то последнее выражение примет вид

$$T = T_0 \exp\left[0{,}5 + Q_0/Q\left(0{,}5Q_0/Q - 1\right)\right].$$

Таким образом, мы получим детерминистский аналог одного из распределений семейства экспоненциальных.

В качестве примера определим прогнозное значение длительности жизненного цикла технической системы, имеющей нормированный показатель технического уровня, равный 0,9, при условии, что прототип характеризуется следующими параметрами: $Q_0 = 0{,}2$ и $T_0 = 9$ лет. Тогда

$$T = 9\exp\left[0{,}5 + 0{,}2/0{,}9(0{,}5 \cdot 0{,}2/0{,}9 - 1)\right] = 12 \text{ лет.}$$

Экспоненциальное распределение широко применяется в работах по надежности, к нему приводят различные идеализированные модели. Однако в связи с тем, что это распределение определяется только одним параметром, основанные на нем методы часто оказываются чувствительными даже к незначительным отклонениям «хвоста» распределения.

Рассмотренные в статье многопараметрические распределения позволяют создавать более корректные модели жизненного цикла технических систем, сводящиеся к экспоненциальному распределению при подходящем выборе одного из параметров.

Приведен эффективный алгоритм моделирования двойного экспоненциального распределения экстремальных случайных величин, получено дифференциальное уравнение для определения продолжительности жизненного цикла образца в зависимости от его технического уровня.

Разработан моделирующий алгоритм для получения случайных величин, распределенных по закону Гомперца — Макегама.

Для подтверждения основных положений статьи рассмотрен пример определения прогнозного значения длительности жизненного цикла технической системы, имеющей нормированный показатель технического уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мартыщенко Л.А., Ташевский А.Г.** Военно-научные исследования и разработка вооружения и военной техники. Ч. II. Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1993. 253 с.

2. **Мартыщенко Л.А.** Экстремальные распределения экстремальных случайных величин. Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1989. 40 с.

3. **Ташевский А.Г., Голик Е.С.** Модели расчета длительности жизненного цикла технических систем. Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1991. 26 с.

4. **Фролов Г.Д., Олюнин Б.Ю.** Практический курс программирования на языке PL/1.— М: Наука, 1983. 384 с.

5. **Антонов А.В., Никулин М.С.** Статистические модели в теории надежности.— М.: Изд-во «Абрис», Высшая школа, 2014. 392 с.

6. **Ушаков И.А., Беляев Ю.К., Богатырев В.А., Болотин В.В. [и др.].** Надежность технических систем: Справочник. М: Радио и связь, 1985. 608 с, ил.

7. **Никулин М.С., Анисимов В.Н., Никулин А.М.** Статистические модели долговечности, старения и деградации в демографии, геронтологии и онкологии // Успехи геронтологии. 2011. №3. С. 366–379.

8. **Ташевский А.Г., Петров В.М.**Оценка продукции судостроения по результатам оперативного контроля технологического процесса // Труды V междунар. симпозиума по транспортной триботехнике «Транстрибо — 2013». 10–11 октября. Санкт-Петербург, СПБ.: Изд-во ФГБОУ ВПО «Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова», 2013. С. 53–58.

9. **Ташевский А.Г.** Основные понятия и показатели износостойкости и надежности деталей машин.— СПб.: Изд-во института машиностроения, 2008. 44 с., ил.

10. **Рябинин И.А.** Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007.— 278 с.

11. **Ташевский А.Г.** Верификация результатов испытаний сложных технических систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2013. № 2 (171). С. 203–210.

12. **Мартыщенко Л.А., Ташевский А.Г., Немчинов В.И.** Подтверждение ТТХ сложных систем по малому числу испытаний / МО СССР. 1985. 48 с.

13. **Ташевский, А.Г.** Интерпретация результатов испытаний после модернизации систем энергомашиностроения // Инструмент и технологии. 2012. № 36. С. 34–39.

14. **Ташевский А.Г.** Метод оценки надежности сложных изделий энергомашиностроения при ограниченном числе испытаний // Труды Санкт-Петербургского института машиностроения. 1996. Вып. 2. 96 с.

15. **Ташевский А.Г.** Модели аварийных ситуаций для обеспечения безопасности функционирования сложных технических систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2013. № 1 (166). С. 256–263.

16. **Ташевский А.Г., Мартыщенко Л.А.** Корректировка математических моделей сложных технических систем по результатам комплексных испытаний. Л.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1990. 60 с.

17. **Ташевский А.Г., Мартыщенко Л.А.** Экспресс-оценка показателей эффективности сложных систем по результатам ограниченного числа натурных испытаний и исследовательских учений // Оборонная техника. 1989. № 12. С. 37–48.

18. **ГОСТ Р 27.004–2009** Надежность в технике. Модели отказов. М.: Стандартинформ, 2010.

19. Математические методы теории надежности (MMR-2009): Сб. докл. VI международной конференции. 7–9 июня 2004 г. С.-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический государственный университет. СПб., 2004.

20. Математические методы в теории надежности. Теория. Методы. Приложения. Москва: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 2009.

21. **Лемешко Б. Ю.**, **Лемешко С.Б., Никулин М.С., Саидиа Н.** Моделирование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона // Автоматика и телемеханика, 2010. № 7. С. 83–102.

22. Statistical and Probabilistic Models in Reliability // Proceedings of the International Conference on Mathematical Methods in Reliability. Bucharest, Romania / Eds. Ionesku D., Limnios N. Birkhauser: Boston, Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics. 1999.

23. Recent Advances in Reliability Theory, Methodology Practice and Inference // Proceedings of the Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability. Bordeaux, France / Eds. N. Limnios, M. Nikulin. Birkhauser: Boston. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics. 2000.

24. Mathematical and Statistical Methods in Reliability // Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Methods in Reliability. Trondheim, Norway / Eds. Lindqvist B., Kjell A. Doksum., World Scientific Publishing: Boston // Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, 2003. Vol. 7.

25. Modern Statistical and Mathematical Methods in Reliability / Eds. N. Limnios, S. Keller-McNulty, Y. Armijo. World Scientific Publishing: Boston // Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics. 2005. Vol. 10.

26. **Nikulin M., Gerville-Reache L. Couallier V.** Statistique des essais acceleres. London: Hermes. 2007.

REFERENCES

1. **Martyshhenko L.A., Tashevskij A.G.** Voenno-nauchnye issledovaniya i razrabotka vooruzheniya i voennoj tekhniki. CH. II. L.: Izd-vo Ministerstva oborony SSSR, 1993. 253 s. (rus.)

2. **Martyshhenko, L.A.** Ekstremal’nye raspredeleniya ehkstremal’nykh sluchajnykh velichin. L.: Izd-vo Ministerstva oborony SSSR, 1989. 40 s. (rus.)

3. **Tashevskij A.G., Golik E.S.** Modeli raschyota dlitel’nosti zhiznennogo tsikla tekh-nicheskikh system. L.: Izd-vo Ministerstva oborony SSSR, 1991. 26 s. (rus.)

4. **Frolov, G.D., Olyunin B.Yu.** Prakticheskij kurs programmirovaniya na yazyke PL/1. M: Nauka, 1983. 384 s. (rus.)

5. **Antonov A.V., Nikulin M.S.** Statisticheskie modeli v teorii nadezhnosti. M.: Izd-vo Abris, Vysshaya shkola, 2014. 392 s. il. (rus.)

6. **Ushakov, I.A. Belyaev, Yu.K., Bogatyrev V.A., Bolotin V.V. [i dr.].** Nadezhnost’ tekhnicheskikh sistem: Spravochnik. M: Izd-vo Radio i svyaz’, 1985. 608 s, il. (rus.)

7. **Nikulin M.S., Anisimov V.N., Nikulin A.M.** Statisticheskie modeli dolgovechnosti, stareniya i de-gradatsii v demografii, gerontologii i onkologii. *Uspekhi gerontologii.* 2011. №3. S. 366–379. Bibl. 56 nazv. (rus.)

8. **Tashevskij A.G., Petrov V.M.** Otsenka produktsii sudostroeniya po rezul’tatam ope-rativnogo kontrolya tekhnologicheskogo protsessa . *Trudy pyatogo mezhdunarodnogo simpoziuma po transportnoj tribotekhnike «Transtribo-2013»*. 10–11 oktyabrya. 2013. Sankt-Peterburg: Izd-vo FGBOU VPO «Gosudarstvennyj universitet morskogo i rechnogo flota ime-ni admirala S.O. Makarova», 2013. S. 53–58. (rus.)

9. **Tashevskij A.G.** Osnovnye ponyatiya i pokazateli iznosostojkosti i nadyozhnosti detalej mashin. SPb.: Izd-vo instituta mashinostroeniya, 2008. 44s., il. (rus.)

10. **Ryabinin I.A.** Nadezhnost’ i bezopasnost’ strukturno-slozhnykh sistem. SPb.: Izd-vo SPb universiteta, 2007. 278 s. (rus.)

11. **Tashevskij A.G.** Verifikatsiya rezul’tatov ispytaniy slozhnykh tekhnicheskikh sistem. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU.* 2013. № 2(171). S. 203–210. (rus.)

12. **Martyshhenko L.A., Tashevskij A.G., Nemchinov V.I.** Podtverzhdenie TTKH slozhnykh sistem po malomu chislu ispytaniy/ MO SSSR. 1985. 48 s. (rus.)

13. **Tashevskij A.G.** Interpretatsiya rezul’tatov ispytanij posle moder-nizatsii sistem ehnergomashinostroeniya, *Instrument i tekhnologii.* 2012. № 36. S. 34–39 (rus.)

14. **Tashevskij A.G.** Metod otsenki nadezhnosti slozhnykh izdelij ehnergo-mashinostroeniya pri ogranichennom chisle ispytanij. *Trudy Sankt-Peterburgskogo instituta mashinostroeniya.* SPb., 1996. Vyp. 2. 96 s. (rus.)

15. **Tashevskij A.G.** Modeli avariynykh situatsiy dlya obespecheniya bezopasnosti funktsionirovaniya slozhnykh tekhnicheskikh sistem. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU.* 2013. № 1 (166). S. 256–263. (rus.)

16. **Tashevskij A.G., Martyshhenko L.A.** Korrektirovka matematicheskikh modeley slozhnykh tekhnicheskikh sistem po rezul’tatam kompleksnykh ispytaniy. L.: Izd-vo Ministerstva oborony SSSR, 1990. 60 s. (rus.)

17. **Tashevskij A.G., Martyshhenko L.A.** EHkspress-otsenka pokazatelej ehffektivnosti slozhnykh sistem po rezul’tatam ogranichennogo chisla naturnykh ispytanij i issledo-vatel’skikh uchenij. *Oboronnaya tekhnika*, 1989. № 12. S. 37–48. (rus.)

18. **GOST R 27.004–2009.** Nadezhnost' v tekhnike. Modeli otkazov. M.: Standartinform, 2010. (rus.)

19. Matematicheskie metody teorii nadezhnosti (MMR-2009). VI mezhdunarodnaya konferentsiya. 7–9 iyunya 2004. S.-Peterburg, Sankt-Peterburgskiy politekhnicheskiy gosudarstvennyy universitet. (rus.)

20. Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti. Teoriya. Metody. Prilozheniya. Izd-vo Rossijskogo un-ta druzhby narodov, 2009. (rus.)

21. **Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Nikulin M.S., Saaidia N.** Modelirovanie raspredeleniy statistik neparametricheskikh kriteriev soglasiya pri proverke slozhnykh gipotez otnositel'no obratnogo gaussovskogo zakona. *Avtomatika i telemekhanika*, 2010. № 7. S. 83–102. (rus.)

22. Statistical and Probabilistic Models in Reliability. *Proceedings of the International Conference on Mathematical Methods in Reliability*. Bucharest, Romania / Eds. D. Ionesku, N. Limnios. Birkhauser: Boston. *Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics*. 1999. (rus.)

23. Recent Advances in Reliability Theory, Methodology, Practice and Inferences. *Proceedings of the Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability*. Bordeaux, France / Eds. N. Limnios, M. Nikulin. Birkhauser: Boston. *Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics*. 2000. (rus.)

24. Mathematical and Statistical Methods in Reliability. *Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Methods in Reliability*. Trondheim, Norway / Eds. B. Lindqvist, Kjell A. Doksum. World Scientific Publishing: Boston. *Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics*. 2003. Vol. 7. (rus.)

25. Modern Statistical and Mathematical Methods in Reliability / Eds. N. Limnios, S. Keller-McNulty, Y. Armijo. World Scientific Publishing: Boston. *Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics*. 2005. Vol. 10. (rus.)

26. **Nikulin M., Gerville- Reache L. Couallier V.** Statistique des essays acceleres. Hermes: London, 2007. (rus.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТАШЕВСКИЙ Арнольд Германович — доктор технических наук профессор кафедры автоматизации технологических комплексов и процессов института машиностроения (ЛМЗ-ВТУЗ) Санкт-Петербургского государственного политехнического университета; 195197, Полюстровский пр., д. 14, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: taarnold@yandex.ru

AUTHOR

TASHEVSKY Arnold G. — St. Petersburg State Polytechnical University, Institute of mechanical engineering (LMZ-VTUZ); 195197, Polyustrovsky pr., 14, St. Petersburg, Russia; e-mail: taarnold@yandex.ru