Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М. А. Соколов В. Е. Шерман

ФИЗИКА
Элементы специальной теории относительности

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2014

Аннотация

Целью настоящего пособия является изложение минимального набора принципов, понятий, законов и эффектов специальной теории относительности (СТО), необходимых для общего физического образования. Первая (теоретическая) часть пособия представляет собой слегка расширенный материал одной лекции. Во второй части приводится несколько типичных задач по СТО с подробными решениями и один - два теоретических вопроса, не вошедших в первую часть.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения, лекционный курс физики которых включает не более 72 академических часов (одна лекция в неделю, два семестра), и 36 часов практики (одно занятие в две недели, два семестра).

Содержание

1 Элементы специальной теории относительности **2**

1.1 Законы механики Ньютона 2

1.2 Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея 3

1.3 Относительность Эйнштейна. Постулат постоянства скорости света . . . 5

1.4 Замедление времени. Парадокс близнецов 7

1.5 Преобразования Лоренца и их следствия 8

1.5.1 Сокращение масштабов 10

1.5.2 Относительность одновременности 10

1.5.3 Релятивистский закон сложения скоростей 11

1.6 Импульс в теории относительности. Релятивистский закон динамики . . 12

1.7 Энергия в теории относительности 13

1.8 Законы сохранения 16

1.9 Эффект Доплера 20

1.10 Список дополнительной литературы 21

2 Задачи и упражнения **23**

2.1 Инвариантность интервала 23

2.2 Релятивистское сокращение длины стержня (1) 23

2.3 Релятивистское сокращение длины стержня (2) 24

2.4 Преобразование скорости 25

2.5 Изменение временных интервалов 25

2.6 Относительная скорость. Закон сложения скоростей (1) 26

2.7 Закон сложения скоростей (2) 26

2.8 Движение под действием постоянной силы 27

2.9 Неупругое столкновение 28

2.10 Красное смещение 30

1 Элементы специальной теории относительности

1.1 Законы механики Ньютона

Законы Ньютона составляют основу классической механики, на которую, в свою очередь, опирается СТО. Мы сформулируем их так, как это сделал сам Исаак Ньютон в знаменитых "Математических началах натуральной философии" [1].

- Первый закон Ньютона

"Всякое тело продолжает пребывать в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не понудят его изменить это состояние".

Первый закон называют законом инерции, и в современной трактовке он постулирует существование инерциальных систем отсчета, только в которых выполняется сам и все остальные законы Ньютона. Любая система отсчета K', движущаяся по отношению к инерциальной системе K равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной. Неинерциальные системы отсчета по отношению к инерциальным движутся ускоренно.

- Второй закон Ньютона

"Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует".

"Количеством движения" тела в современных курсах называют импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где m - масса тела, $\mathbf{v}$ - его скорость.

Математическим выражением второго закона является формула

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{F}$ - сила, действующая на тело. Если масса тела постоянна, то (1.1) можно переписать в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{a}$ - ускорение тела. Из формулы (1.2) немедленно следует, что результирующая сила, действующая на тело, которое покоится или движется с постоянной скоростью, равна нулю. Это лишний раз показывает, что второй закон выполняется только в инерциальных системах отсчета.

Если сила, действующая на тело, известна в каждой точке его траектории $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$, то формулы (1.1), (1.2) выступают как уравнения движения или динамические уравнения. В этом случае, задание радиус-вектора и импульса тела в некоторый момент времени однозначно определяют его траекторию движения.

- Третий закон Ньютона

"Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе - воздействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны".

В приведенной формулировке естественно подразумевается, что силы "направлены в противоположные стороны" вдоль линии, соединяющей тела. Если обозначить $\mathbf{F}_{12}$ - силу, с которой первое тело действует на второе, $\mathbf{F}_{21}$ - силу, с которой второе тело действует на первое, то третий закон можно выразить формулой

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \tag{1.3}$$

1.2 Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея

Выше было отмечено, что любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно некоторой инерциальной системы, также является инерциальной. Следовательно, если удается установить инерциальность хотя бы одной системы, мы немедленно получаем возможность выбирать из бесконечного множества инерциальных систем. Чем же различаются инерциальные системы отсчета? Равноправны ли они? Ответ на эти вопросы дает

- Принцип относительности Галилея

"Никакими механическими опытами нельзя определить, в какой из инерциальных систем отсчета они выполняются".

Поясним принцип относительности на примере. Находясь в доме, подбросим вертикально вверх мяч. Он вернется к нам в руки, двигаясь вертикально вниз. Если мы проделаем опыт с подбрасыванием мяча на корабле, плывущем равномерно и прямолинейно (предварительно закрыв все люки), то получим тот же результат.

Пусть в закрытом трюме корабля есть лаборатория, где можно ставить любые механические опыты: подбрасывать мячики, вращать блоки и т.д.

Принцип относительности Галилея утверждает, что **одинаковые** опыты, проведенные в условиях, когда корабль стоит на якоре или движется равномерно и прямолинейно, будут давать одинаковые результаты. Следовательно, если мы не знаем в покоящемся или движущемся корабле мы находимся, то никакие результаты механических опытов не дадут нам информации о движении корабля. В этом смысле не существует преимущественной системы отсчета - все инерциальные системы отсчета эквивалентны. Тем не менее, во времена Ньютона и вплоть до начала XX века не было никаких сомнений относительно выделенности, как казалось, абсолютной системы отсчета, связанной с неподвижными звездами.

Математическим выражением принципа относительности Галилея является **ковариантность** уравнений движения (свойство уравнений выглядеть одинаково в подвижной и неподвижной системе координат) при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Рассмотрим две системы отсчета K и K' и связанные с ними прямоугольные декартовы системы координат (X, Y, Z) и (X', Y', Z'). Пусть система отсчета K' "скользит" осью $O'X'$ вдоль оси OX со скоростью $\mathbf{v}$ (см. Рис. 1). Для простоты положим, что в начальный момент времени точки O и O' совпадали.

В классической физике считается, что время абсолютно. Это означает, что оно течет одинаково для всех наблюдателей во Вселенной, покоящихся или движущихся, и что все часы можно синхронизировать, те. раз и навсегда "поставить" на одно время. Будем считать, что в системах K и K' выполняется равенство $t' = t$.

До появления теории относительности считалось, что пространственные размеры тела также абсолютны. Это эквивалентно тому, что расстояние между двумя точками, измеренное в один и тот же момент времени одинаково для всех наблюдателей во Вселенной, покоящихся или движущихся.

Рассмотрим частицу, покоящуюся в системе отсчета K. Будем считать, что ее координаты в K определяются числами (x, y, z). В системе отсчета K', движущейся как определено ранее, координаты y' и z' такие же, как и в системе K: $y' = y$, $z' = z$. Координаты вдоль оси $0X$ связаны чуть сложнее $x' = x - vt$. Суммируя, получаем

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1.4}$$

Преобразования (1.4) являются частным случаем преобразований Галилея. В общем случае, когда система K' движется по отношению к системе K в произвольном направлении со скоростью $\mathbf{v}$, связь координат такова

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор частицы в системе K, $\mathbf{r}'$ - радиус-вектор частицы в системе K'.

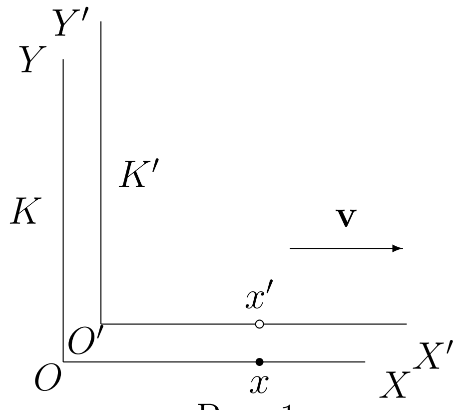

Рис. 1.

Покажем на примере, что ньютоновские уравнения движения ковариантны. Рассмотрим систему частиц, силы взаимодействия между которыми $\mathbf{F}_{ij}$ определяются только их взаимным расположением в пространстве $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Уравнение движения для частицы с номером i записывается в виде

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где суммирование по j распространяется на все частицы, кроме частицы с номером i. При переходе в движущуюся систему координат с помощью преобразования Галилея получаем

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t'^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j),$$

т.к.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} - \mathbf{v}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

Следовательно, второй закон Ньютона ковариантен относительно преобразований Галилея.

1.3 Относительность Эйнштейна. Постулат постоянства скорости света

За два с половиной столетия, прошедших со времени открытия Галилеем принципа относительности, произошло становление физики как науки.

Совершенствование техники позволяло проводить очень точные эксперименты, а бурное развитие математики давало мощные инструменты для теоретических исследований.

Изучение электрических и магнитных явлений в середине XIX века привело Дж. Максвелла к открытию уравнений (названных в его честь) лежащих в основе электродинамики. Из этих уравнений, в частности, следовала электромагнитная природа световых волн. Согласно существовавшим тогда представлениям, свет, как волновой процесс, должен был обладать носителем, т.е. средой, возмущениями которой и были световые волны. Эта среда называлась "светоносным эфиром". Эфир должен был обладать удивительными свойствами, например, практически не препятствовать движению тел (планет) в пространстве. Кроме этого, эфир должен был служить основой для абсолютной системы отсчета. Попытки экспериментально обнаружить эфир предпринимались неоднократно (например, опыты Майкельсона и Морли в 1881 и последующие годы), но неизменно давали отрицательный результат.

Проанализировав возникшие трудности в электромагнитной теории и оптике, А. Эйнштейн предложил (1905) положить в основу теории расширенный принцип относительности и постулат постоянства скорости света. Развитая Эйнштейном теория дала ему возможность дать непротиворечивую трактовку экспериментам. Приведем принцип относительности и постулат в форме, в которой их сформулировал сам Эйнштейн.

- Принцип относительности, или первый постулат Эйнштейна

"Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся".

Этот принцип можно сформулировать как принцип относительности Галилея, только заменив слово "механическими" на "физическими": никакими физическими опытами нельзя определить, в какой из инерциальных систем отсчета они выполняются.

- Постулат постоянства скорости света, или второй постулат Эйнштейна

"Каждый луч света движется в "покоящейся" системе координат с определенной скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом".

Иногда к этому добавляют, что скорость света является максимальной возможной скоростью движения тел и передачи сигналов. Отметим, однако, что последнее утверждение есть следствие двух постулатов Эйнштейна, а не является независимым постулатом. Мы увидим это ниже.

1.4 Замедление времени. Парадокс близнецов

В этом разделе мы получим первые следствия из постулатов СТО. Для этого рассмотрим мысленный эксперимент со "световыми часами". Эти часы представляют собой цилиндр с зеркалами, заменяющими основания и обращенными внутрь. Созданный в часах световой импульс распространяется вдоль оси цилиндра. Отражение от любого из зеркал основания сопровождается "переводом стрелки часов на одно деление".

Пусть цилиндр движется как показано на Рис. 2 со скоростью $\mathbf{v}$. За распространением импульса внутри часов следят два наблюдателя: неподвижный (K) и движущийся вместе с часами (K').

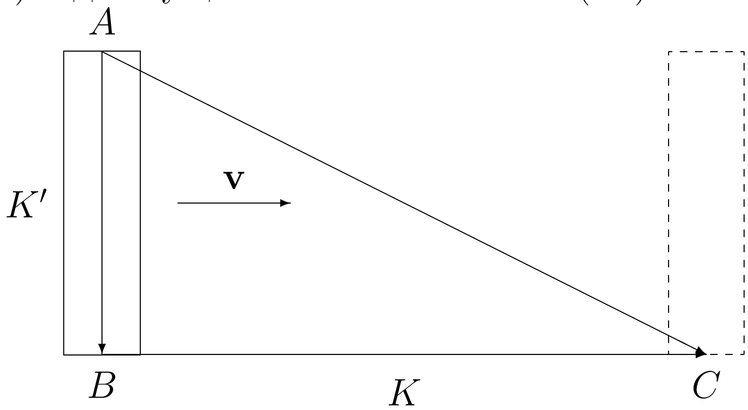

Рис. 2

Пусть в некоторый момент времени световой импульс отразился от верхнего зеркала и, с точки зрения наблюдателя K', через промежуток времени t_0 достиг нижнего зеркала. Путь, который импульс при этом пройдет, равен $|AB| = ct_0$, где c - скорость света в вакууме. С точки зрения неподвижного наблюдателя K световой импульс пройдет путь $|AC|$, двигаясь не только от зеркала к зеркалу вертикально, но и горизонтально вместе с часами, при этом скорость света для неподвижного наблюдателя, в соответствии с постулатами Эйнштейна, не зависит от скорости движения часов и тоже равна c.

Положим, по покоящимся часам проходит время t. Принимая во внимание теорему Пифагора $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ и выражая длины сторон прямоугольного треугольника ABC через промежутки времени и скорости $|AC| = ct,\ |BC| = vt$, приходим к соотношению

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (ct_0)^2.$$

Из этого равенства легко получить связь между t и t_0,

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) показывает, что промежутки времени, отсчитываемые движущимися часами, не равны промежуткам, отсчитываемые часами неподвижными - скорость хода часов зависит от системы отсчета. Время, отсчитанное по покоящимся часам - **собственное время** - всегда течет медленнее, чем в движущейся системе отсчета.

Теперь в мысленном опыте, который был проведен выше, мы переместим световые часы в неподвижную систему отсчета и посмотрим на скорость их хода со стороны наблюдателя K'. Рассуждения аналогичные предыдущим позволяют утверждать, что наблюдателю K' ход часов, покоящихся в системе наблюдателя K, будет казаться замедленным. Такая симметричность выводов позволила критикам СТО предложить **парадокс близнецов** как аргумент против этой теории. Парадокс заключается в том, что астронавт, участвуя в межзвездной экспедиции, после возвращения обнаружит, что постарел меньше, чем его брат - близнец, оставшийся на Земле. С другой стороны, учитывая симметричность вывода о замедлении хода часов, можно утверждать обратное.

На самом деле в СТО никакого парадокса нет. Если оба близнеца двигаются прямолинейно и равномерно, их встреча может состоятся только однажды, и сравнить временные интервалы не удастся. Если же они встречаются, то, по крайней мере, один из них часть времени находился в неинерциальной системе отсчета. Рассматривая движение близнецов в ИСО, можно однозначно рассчитать возраст каждого к моменту их встречи. Отсылая за подробностями читателя к литературе, здесь только заметим, что система отсчета астронавта в межзвездной экспедиции не эквивалентна инерциальной системе отсчета "землянина" , и вернувшийся астронавт будет действительно моложе своего земного близнеца (на секунду или столетие зависит от скорости звездолета).

1.5 Преобразования Лоренца и их следствия

Поскольку время течет неодинаково в разных системах отсчета, преобразования, связывающие координаты и время в разных системах отсчета, уже не будут преобразованиями Галилея. Основываясь на эйнштейновском принципе относительности и на постулате постоянства скорости света, можно получить следующие формулы перехода от одной системы к другой

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.7}$$

Преобразования (1.7), связывающие координаты и время в разных инерциальных системах отсчета, носят название преобразований Лоренца. Хотя приведенные формулы относятся только к случаю, когда система K' "скользит" своей осью $0'X'$ вдоль оси $0X$ системы K (см. Рис. 1), это не очень ограничивает их общность, поскольку система координат выбирается наблюдателем из соображения удобства.

Рассматривая выражения (1.7) как систему уравнений относительно координат (x, y, z, t), получаем обратные преобразования Лоренца

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.8}$$

Поскольку система K движется со скоростью $-v$ относительно системы K', формулы (1.8) можно получить просто поменяв местами в (1.7) штрихованные символы и не штрихованные $(x, y, z, t) \leftrightarrow (x', y', z', t')$, и изменив знак скорости на обратный $v \to -v$.

В формулах (1.7) стирается грань между пространственными координатами и временной, поскольку переход от одной системы отсчета к другой их смешивает: время в движущейся системе отсчета зависит не только от времени в неподвижной системе, но и от ее координат. Такая тесная связь пространственных и временной координат дает право говорить о едином объекте - пространственно - временном континууме или проще о **пространстве-времени**. Более того, в СТО удобно ввести пространство Минковского - 4-х мерное пространство с координатами (ct, x, y, z), где ct - время, из соображений размерности, умноженное на скорость света. В этом пространстве есть свое расстояние между двумя точками - **интервал**, определяемый формулой

$$\Delta S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \tag{1.9}$$

Этот интервал является инвариантом преобразований Лоренца, поскольку в отличие от временных и пространственных промежутков он не изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Сравнивая преобразования Лоренца с преобразованиями Галилея, нетрудно заметить, что формулы (1.7) переходят в формулы (1.4) при предельном переходе $v/c \to 0$. Физически этот предел означает малость скоростей рассматриваемых тел, по сравнению со скоростью света. Поскольку скорость света ($\approx 3 \cdot 10^8$ м/с) значительно превышает скорости, с которыми мы имеем дело в обыденной жизни, эффекты теории относительности оставались незамеченными до конца XIX века.

1.5.1 Сокращение масштабов

Преобразования Лоренца позволяют просто вычислить длину стержня, движущегося относительно наблюдателя со скоростью v. Пусть стержень расположен вдоль оси $0'X'$ в движущейся системе отсчета K' так, что его концы имеют координаты x_1', x_2'. В некоторый, выбранный по часам неподвижной системы, момент времени t измерим положение концов стержня вдоль оси $0X$. Допустим, мы получим координаты x_1, x_2. Эти координаты связаны с координатами x_1', x_2' преобразованиями Лоренца

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Почленно вычитая из второго уравнения первое, и вводя обозначения $l_0 = x_2' - x_1'$, $l = x_2 - x_1$, получаем

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1.10}$$

Формула (1.10) показывает, что длина стержня в его системе покоя l_0 - наибольшая.

1.5.2 Относительность одновременности

События, которые произошли в разных местах в одно время, называются одновременными. В ньютоновской механике с ее абсолютным временем очевидно, что два события, одновременные в одной системе отсчета, будут одновременны и в любой другой. В СТО это уже не так.

Синхронизацию часов в одной системе отсчета можно провести в помощью обмена световыми импульсами. Допустим в системе K, вдоль оси $0X$ расставлены синхронизированные часы. Будут ли они показывать одно и то же время для движущегося наблюдателя? Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим обратное преобразование времени из (1.8)

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Положим в этой формуле $t' = 0$, тем самым синхронизировав определение времени наблюдателями из системы K' по часам системы K

$$t = \frac{\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Полученная формула наглядно показывает, что показания неподвижных часов для движущихся наблюдателей зависят от расположения часов и они разные. Таким образом, если по часам системы K некоторые события одновременны, то по часам системы K' они уже одновременными не будут. Следовательно, одновременность событий - относительна.

1.5.3 Релятивистский закон сложения скоростей

Запишем преобразования Лоренца в дифференциальной форме

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поделив левую часть первого равенства на левую часть второго, а затем в полученной дроби числитель и знаменатель на $\mathrm{d}t$, придем к формуле

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \tag{1.11}$$

В (1.11) $u = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ - скорость движения тела вдоль оси $0X$ в неподвижной системе K, $u' = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ - скорость того же тела вдоль оси $0'X'$ в движущейся системе K', v - скорость движение K' по отношению к K (ось $0X$ движется вдоль $0'X'$). Таким образом, формула (1.11) представляет собой закон изменения скорости тела, движущегося вдоль оси $0X$, при переходе из системы отсчета K в K'. Выражая скорость u через u', приходим к соотношению

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{1.12}$$

которое можно интерпретировать как новый (релятивистский) закон сложения скоростей. Действительно, если по вагону, который движется со скоростью v (система K') по отношению к земле (система K), идет человек со скоростью u' по отношению к вагону, то его скорость по отношению к земле будет даваться формулой (1.12).

Проверим эту формулу на согласованность с постулатом постоянства скорости света. Предположим, что по вагону распространяется световой импульс со скоростью c. Подставим в (1.12) $u' = c$. После элементарных преобразований получаем $u = c$, что и соответствует постулату.

Нетрудно видеть, что при сложении двух скоростей, меньших скорости света согласно релятивистскому закону (1.12) результирующая скорость всегда меньше скорости света. Таким образом, скорость света является максимальной возможной скоростью движения тел (и передачи сигналов).

1.6 Импульс в теории относительности. Релятивистский закон динамики

В предыдущих разделах мы изучали релятивистскую кинематику. Теперь нам предстоит выяснить, какие изменения вносит СТО в динамику Ньютона. Прежде чем сформулировать релятивистский закон динамики, вспомним, что его классическая форма (1.1) утверждает: скорость изменения импульса тела $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ равна силе, действующей на это тело. Из второго и третьего законов Ньютона немедленно следует закон сохранения импульса в замкнутой системе тел. Для абсолютно упругого столкновения двух тел закон сохранения импульса записывается в виде

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{w}_1 + m_2\mathbf{w}_2. \tag{1.13}$$

В этой формуле $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ скорости тел до и после столкновения. Прибавляя к обеим частям равенства (1.13) слагаемое $(m_1 + m_2)\mathbf{u}$ (то есть, применяя преобразование Галилея), получаем соотношение

$$m_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}) + m_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}) = m_1(\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}) + m_2(\mathbf{w}_2 + \mathbf{u}),$$

по форме совпадающее с (1.13), и выражающее закон сохранения импульса в движущейся с постоянной скоростью системе координат. Таким образом, закон сохранения импульса ковариантен относительно преобразований Галилея.

Если мы применим к равенству (1.13) преобразование Лоренца, вместо преобразования Галилея, то обнаружим, что в движущейся системе отсчета оно изменит форму. Это означает, что закон сохранения импульса не ковариантен по отношению к преобразованиям Лоренца.

Эйнштейн нашел, что изменив классическое определение импульса на

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.14}$$

он вернет ковариантность закону сохранения импульса. Релятивистский импульс отличается от классического множителем $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, который при скоростях малых по сравнению со скоростью света становится равным единице.

Для понятия массы в СТО существует некоторое терминологическое разночтение. В прошлом веке часть ученых, в том числе и Эйнштейн, массу m в формуле (1.14) называли массой покоя, а массу m_r, определяемую формулой

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = m_r\mathbf{v} \tag{1.15}$$

- релятивистской массой или массой движения. При таком определении релятивистская масса стремится к бесконечности при приближении скорости тела к скорости света. Это свойство согласуется с предельностью скорости света. Тем не менее, в современной физике, особенно в физике высоких энергий и в самой теории относительности, более употребительным является **определение массы как физической величины, независящей от скорости частицы**, т.е. инвариантной относительно преобразований Лоренца.

При эйнштейновском определении импульса (1.14) релятивистский закон динамики формально совпадает со вторым законом Ньютона (1.1)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{1.16}$$

однако надо помнить, что в (1.16) подразумевается именно релятивистский импульс (1.14).

1.7 Энергия в теории относительности

Кинетическая энергия в механике Ньютона вводится как величина, изменение которой характеризует работу силы, перемещающей тело. Следуя этому подходу, найдем выражение для релятивистской кинетической энергии частицы. Для простоты, ограничим себя движением по прямой. По определению работы

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{d}\,l = \mathrm{d}\,p\frac{\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}\,t} = v\,\mathrm{d}\,p = v\mathrm{d}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Как и в классической механике, из приведенной выкладки следует, что совершенная работа реализовалась в изменение энергии тела

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.17}$$

Чтобы понять полученное выражение, посмотрим, какой классической величине соответствует предел (1.17) при малых скоростях $v/c \to 0$. Разложим функцию E в ряд по степеням v/c. Получим

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \ \dots\,.$$

Из этого разложения следует, что энергия тела включает слагаемое, которое вообще не зависит от скорости. Это слагаемое естественно называть энергией покоя

$$E_0 = mc^2. \tag{1.18}$$

Второе слагаемое в разложении является классической кинетической энергией, а далее идут малые релятивистские поправки. Следовательно, релятивистской кинетической энергией надо называть разность

$$E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{1.19}$$

В классической механике полная механическая энергия определяется с точностью до произвольной постоянной, поскольку физический смысл имеет только разность потенциальных энергий. Включение энергии покоя в полную энергию в СТО приводит к исчезновению произвола в определении энергии и к большей универсальности закона сохранения энергии (см. ниже раздел 1.8). Энергия определяет массу тела. Нулевой потенциальной энергии соответствуют невзаимодействующие частицы. Сжатая пружина, нагретое тело обладают большей массой, чем свободная пружина, холодное тело. Внутренняя энергия может высвобождаться (как в ядерных или же химических реакциях), но при этом тело теряет часть своей массы. Естественно, может происходить и обратный процесс. В химических процессах изменение массы ничтожно, хотя и не равно нулю. Поэтому в химических реакциях справедлив (приближенно) закон сохранения массы. Выделение одного джоуля энергии в соответствии с (1.18) уменьшает массу тела на $1.1 \cdot 10^{-14}$ г. Уменьшение массы тела на 1 г. соответствует взрыву атомной бомбы.

Используя определение релятивистских импульса (1.14) и энергии (1.17), можно установить связывающую их формулу

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{1.20}$$

Для доказательства требуется просто подставить в разность $E^2 - p^2c^2$ (1.14) и (1.17)

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1 - v^2/c^2} - \frac{m^2v^2c^2}{1 - v^2/c^2} = m^2c^4.$$

В механике Ньютона кинетическую энергию частицы можно выразить через импульс $E_k = p^2/(2m)$ и получить полезную формулу

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}p} = v.$$

Оказывается, такая же связь существует между скоростью и релятивистской энергией. Для ее доказательства возьмем производную по импульсу от обеих частей равенства (1.20)

$$2E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = 2pc^2,$$

откуда

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{pc^2}{E}.$$

Подставляя в правую часть выражения для энергии (1.17) и (модуля) импульса $p = |\mathbf{p}|$ (1.14), возвращаемся к классической формуле

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = v. \tag{1.21}$$

В заключении раздела заметим, что есть еше одно замечательное свойство формулы (1.20) - она позволяет связать друг с другом энергию и импульс частицы с нулевой массой ($m = 0$)

$$E = pc. \tag{1.22}$$

Такой частицей является фотон - квант электромагнитного поля. Поскольку свет в вакууме распространяется с предельной скоростью, то единственной возможностью согласовать квантовую теорию с СТО - считать фотон безмассовым. Формула (1.22) показывает, что соотношение (1.21) выполняется и для фотонов.

1.8 Законы сохранения

Законы сохранения энергии и импульса исключительно важны в механике Ньютона, поскольку с их помощью точно решаются многие динамические задачи. В классической физике эти законы разделены в том смысле, что в некоторых случаях выполняется только закон сохранения импульса, но не выполняется закон сохранения энергии (неупругие соударения). В отличие от классической механики, законы сохранения энергии в СТО всегда выполняются одновременно, поскольку при переходе в движущуюся систему отсчета, компоненты импульса и энергия смешиваются

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.23}$$

При неупругих процессах "исчезнувшая" механическая энергия, которая в классической физике переходит в тепло или другие виды энергии, в СТО соответствующим образом увеличивает массу покоя взаимодействующих объектов. Например, в суперколлайдере два столкнувшихся протона порождают множество новых частиц с суммарной массой в тысячи раз превосходящей первоначальную.

Проще всего рассматриваемые законы сохранения применять к системам частиц в ситуации, когда эти частицы можно считать свободными до взаимодействия и после (кратковременного) взаимодействия. Тогда законы сохранения энергии и импульса можно записать в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{i'=1}^{n'} \frac{m_i' c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i'^2}{c^2}}}, \tag{1.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{i'=1}^{n'} \frac{m_i' \mathbf{v}_i'}{\sqrt{1-\frac{v_i'^2}{c^2}}}. \tag{1.25}$$

Обратите внимание, что формулах (1.24), (1.25) штрихованные символы m_i', v_i' и n' относятся не к движущейся системе отсчета, а к характеристикам частиц (массам, скоростям и даже их количеству) после взаимодействия, когда частицы можно считать свободными.

Преобразования (1.23) по виду похожи на преобразования Лоренца (1.7). Компоненты импульса (p_x, p_y, p_z) ведут себя как пространственные координаты (x, y, z) а энергия (точнее E/c^2), как время t. На самом деле это схожесть не случайна. Мы не будем здесь углубляться в существо вопроса, отметим только одно важное следствие. Как из преобразований Лоренца вытекает инвариантность пространственно-временного интервала (1.9), так и из преобразований (1.23) следует, что величина μ, определяемая равенством

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i\right)^2 c^2 = \mu^2 c^4, \tag{1.26}$$

одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Эту величину принято называть инвариантной массой системы тел. Замечательное свойство инвариантной массы заключается в том, что для замкнутой (изолированной) системы материальных точек, взаимодействующих между собой, в силу законов сохранения энергии-импульса инвариантная масса системы не зависит не только от системы отсчета, но и от времени. Для одной частицы инвариантная масса совпадает с ее массой (массой покоя) m (см. (1.20)).

Чтобы продемонстрировать применение релятивистских законов сохранения на практике, приведем вывод формулы, объясняющей эффект Комптона (1923). Эффект заключается в строгой зависимости изменения длины рассеянного на свободных электронах рентгеновского излучения от угла рассеяния. Теория, основанная на классической электродинамике Максвелла не объясняла этот эффект. Тогда Комптон рассмотрел процесс рассеяния на электронах не электромагнитных волн, а световых квантов - фотонов. Формула, которую он на таком пути получил, хорошо согласовывалась с опытом. Впоследствии теория эффекта Комптона была усовершенствована в рамках квантовой электродинамики, явившейся синтезом электродинамики Максвелла, специальной теории относительности и квантовой механики.

Для вывода формулы Комптона из квантовой физики нам необходимо помнить, что энергия фотона определяется формулой Планка

$$E = h\nu, \tag{1.27}$$

где h - постоянная Планка, ν наблюдаемая в опыте частота излучения, а релятивистский импульс фотона определяется из формулы (1.22) и формулы Планка

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}. \tag{1.28}$$

Рассмотрим рассеяние фотона на неподвижном электроне. Закон сохранения энергии в этом случае имеет вид

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.29}$$

Закон сохранения импульса запишем сразу в виде проекций на горизонтальную (см. Рис)

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\phi + \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\cos\psi, \tag{1.30}$$

и вертикальную оси

$$0 = \frac{h\nu}{c}\sin\phi - \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\sin\psi. \tag{1.31}$$

Далее, с помощью основного тригонометрического равенства $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$ исключаем из уравнений (1.30) и (1.31) угол ψ

$$\left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu_0\nu}{c^2}\cos\phi + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Теперь из полученного выше соотношения и закона сохранения энергии (1.29) исключаем квадрат скорости и в результате приходим к равенству

$$mc^2(\nu - \nu_0) = h\nu_0\nu(1 - \cos\phi).$$

Поделив обе части полученного равенства на произведение $\nu_0\nu$ и принимая во внимание связь частоты и длины волны $\lambda = c/\nu$, приходим к соотношению

$$mc(\lambda - \lambda_0) = h(1 - \cos\phi),$$

или, обозначив $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, к формуле Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi). \tag{1.32}$$

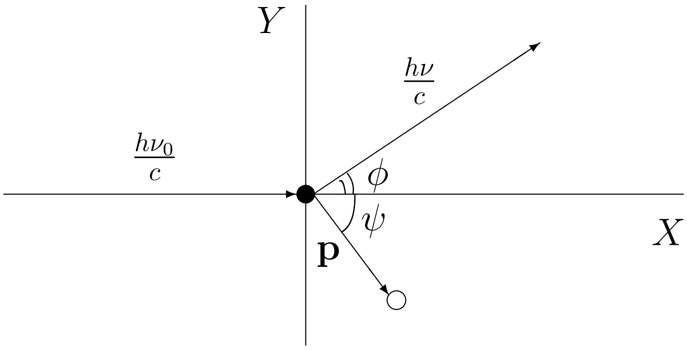

Рис. 3

Представляется полезным привести другой, более инвариантный вывод формулы Комптона. Для этого напомним, что импульс фотона связан с волновым вектором соответствующей волны соотношением де Бройля

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Законы сохранения энергии и импульса запишутся в виде

$$\hbar k_0 c + mc^2 = \hbar kc + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \tag{1.33}$$

$$\hbar\mathbf{k}_0 = \hbar\mathbf{k} + \mathbf{p}. \tag{1.34}$$

Из уравнений (1.33) и (1.33), соответственно, получаем

$$p^2 = (\hbar k_0 - \hbar k + mc)^2,$$

$$\mathbf{p}^2 = p^2 = \hbar^2(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2 = \hbar^2(k_0^2 - k_0 k\cos\phi + k^2).$$

Приравнивая правые части полученных соотношений и приводя подобные члены получаем формулу (1.31).

1.9 Эффект Доплера

Оптическим эффектом Доплера называется зависимость частоты света, принимаемого детектором, от относительной скорости движения этого детектора и источника излучения. Здесь мы рассмотрим только продольный эффект, когда направления излучения света и относительной скорости движения совпадают.

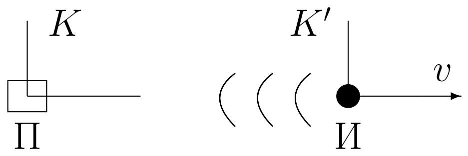

Рис. 4

Пусть источник излучения И движется вместе с системой отсчета K' со скоростью v в направлении от детектора излучения П, связанного с неподвижной системой K. Предположим, что источник периодически излучает короткие импульсы света в направлении приемника (для удобства мы заменили излучение монохроматического света импульсами). Пусть интервал между импульсами в системе покоя источника K' равен T_0. Тогда интервал между двумя последовательными импульсами в системе K выражается формулой (1.6)

$$T' = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Однако из-за движения источника, каждому световому импульсу приходится преодолевать до приемника большее расстояние, чем предыдущему импульсу, на расстояние пройденное источником (измеряемое в системе K)

$$l = T'v.$$

Последнее означает, время между двумя последовательными импульсами, регистрируемое приемником будет равно

$$T = T' + \frac{T'v}{c} = (1 + \frac{v}{c})T' = (1 + \frac{v}{c})\frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = T_0\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Так как частота обратна периоду излучения $\nu = T^{-1}$, получаем

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}. \qquad (1.35)$$

Кроме этого, учитывая связь межу скоростью света частотой и длиной волны $c = \lambda\nu$, из (1.35) приходим к равносильной формуле

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \tag{1.36}$$

В формулах (1.35), (1.36) следует считать скорость положительной, если источник и приемник удаляются друг от друга и отрицательной в противном случае.

1.10 Список дополнительной литературы

Заканчивая короткое теоретическое введение в СТО, мы хотим привести небольшой список дополнительной литературы, снабдив его комментариями. Мы считаем это уместным, поскольку теория относительности, несмотря на свой почтенный, более чем вековой возраст, своей необычностью вызывает постоянный интерес студентов. Кроме того, мы надеемся, что настоящее пособие подтолкнет читателей ближе познакомиться с одним из самых замечательных достижений человеческой цивилизации.

Список популярных и специальных трудов, посвященных СТО безграничен. Наш выбор обусловлен личными пристрастиями авторов и включает хорошо известные и легкодоступные книги (в библиотеках или в сети)

Сначала о совсем популярных книгах (книгах "для пешеходов"). Одна из самых первых книг такого рода написана школьным учителем

- К. Дьюрелл, Азбука теории относительности, М., Мир, 1970.

Книга

- Мартин Гарднер, Теория относительности для миллионов, М., Атомиздат, 1967.

переиздается почти каждый год. Она написана мастером научно-популярной литературы, особенно - математической. Перу МГ принадлежат великолепные комментарии к знаменитым "Алисе в стране чудес" и "Алисе в зазеркалье" Льюиса Кэрола.

Популярные работы самого А. Эйнштейна показывают, что даже великий ученый может писать книги, доступные для понимания школьника

- О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение), в сб. А. Эйнштейн, Физика и реальность, М., Наука, 1965.

- А. Эйнштейн и Л. Инфельд, Эволюция физики, М., 1965.

Книга

- Э.Ф. Тейлор и Дж. А. Уилер, Физика пространства-времени, М., Мир, 1971.

занимает промежуточное положение между популярной и учебником. Она мастерски написана и в ней объясняется 4-мерный формализм пространства Минковского.

Для вузовского уровня обучения рекомендуем простое изложение основ СТО в книге

- Р. Фейнман, Р. Лейтон и М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, Вып. 2, М., Мир, 1966.

Для читающих по-английски, лекции выложены на сайте Калифорнийского технологического института (http://feynmanlectures.caltech.edu/), где нобелевский лауреат Ричард Фейнман работал долгие годы и где читал эти лекции (записанные его студентами Лейтоном и Сэндсом). Лекции часто переиздавались в разных форматах.

Одно из самых подробных изложений СТО и ОТО находится в классической монографии

- В. Паули, Теория относительности, М., Наука, 1991.

написанной будущим создателем квантовой теории во время обучения в институте в возрасте 21 года.

Хорошо известно, что разобраться в каком-либо либо разделе физики можно только решив некоторое количество задач из этого раздела. Прежде всего, рекомендуем задачник, включающий задачи по СТО с подробными решениями

- В.К. Иванов, С.Н.Колгатин, ФИЗИКА. Упражнения по механике, молекулярной физике и термодинамике, Учебное пособие, С.-Пб, Идательство Политехнического университета, 2013.

Хорошая подборка задач дана в

- Сборник задач по общему курсу физики под ред. И.А. Яковлева, Механика, М., ФИЗМАТЛИТ, ЛАНЬ, 2006.

2 Задачи и упражнения

2.1 Инвариантность интервала

- Доказать инвариантность интервала (1.9) при преобразованиях Лоренца.

Поскольку при преобразованиях Лоренца (1.7) координаты y и z не изменяются, требуется только доказать, что имеет место равенство

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = \Delta s'^2.$$

Воспользуемся преобразованиями Лоренца (1.7), связывающими координаты неподвижной системы K с координатами движущейся относительно нее системы K'. Прямым вычислением получаем

$$\Delta S^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2\frac{(\Delta t - v/c^2\Delta x)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{(\Delta x - v\Delta t)^2}{1 - v^2/c^2} = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2.$$

Утверждение доказано.

2.2 Релятивистское сокращение длины стержня (1)

- Какую скорость должен иметь стержень, движущийся вдоль своей оси, чтобы его длина, измеренная неподвижным наблюдателем, была в n раз меньше его длины в системе покоя?

Длина стержня, движущегося со скоростью v по отношению к неподвижному наблюдателю, определяется по формуле (1.10)

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где l_0 - длина стержня в неподвижной системе отсчета. Поделив обе части (1.10) на l_0 и, в соответствии с условиями задачи, заменив отношение $l/l_0 = 1/n$, получим

$$\frac{1}{n} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Выражая из этого равенства скорость, приходим к окончательному результату

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

2.3 Релятивистское сокращение длины стержня (2)

- Найти собственную длину стержня, если его скорость относительно неподвижного наблюдателя равна $v = kc$, $k < 1$, длина в системе этого наблюдателя равна L, угол наклона по направлению к скорости движения - θ.

Пусть K - система отсчета связанная с наблюдателем, K' - система в которой неподвижен стержень. Если L, L_x, L_y - длина стержня и его проекции на оси $0X$, $0Y$ системы K, то имеет место соотношение $L^2 = L_x^2 + L_y^2$. Так как оси $0'X'$ и $0X$ параллельны, то

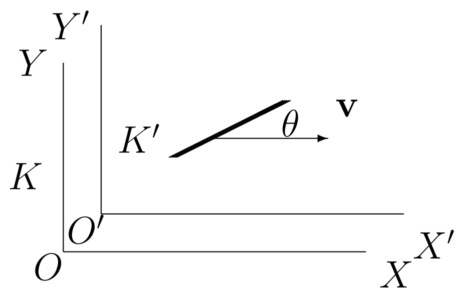

Рис. 5.

лоренцеву сокращению подвергается только проекция L_x. Если обозначить длину стержня и его проекций в системе K' как L_0, L_{0x}, L_{0y}, то имеем $L_0^2 = L_{0x}^2 + L_y^2$, так как $L_{0y} = L_y$. Компоненты L_x и L_{0x} связаны соотношением (1.10)

$$L_x = L_{0x}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

поэтому получаем

$$L_0^2 = L_{0x}^2 + L_y^2 = \frac{L_x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + L_y^2 = L^2 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Окончательно, извлекая квадратный корень и подставляя $v = kc$, приходим к формуле

$$L_0 = L\sqrt{\frac{1 - k^2\sin^2\theta}{1 - k^2}},$$

которая в частных случаях $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$ сводится к известным ответам.

2.4 Преобразование скорости

- Вывести формулы релятивистского преобразования скорости при переходе к движущейся системе координат.

Пусть в системе отсчета K движется частица со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. Найдем скорость $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(t')$ этой частицы, измеренную наблюдателем, движущимся вдоль оси $0X$ со скоростью v. Возьмем производные по t' от левых и правых частей соотношений (1.7)

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}, \quad u'_y = u_y\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}, \quad u'_z = u_z\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}, \quad 1 = \frac{1-\frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'},$$

где u_x, u_y, u_z и $u'_{x'}, u'_{y'}, u'_{z'}$ - компоненты скоростей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ соответственно. Выражая из последнего равенства производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t'$ и подставляя ее в первые три, получаем

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = u_y\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_z = u_z\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}, \tag{2.1}$$

что дает искомые формулы преобразования компонент скоростей.

2.5 Изменение временных интервалов

- Собственное время жизни π^+-мезона около $2,6\cdot 10^{-8}$ с. С какой скоростью двигался π^+-мезон, если весь его путь составил 4 метра?

Согласно (1.6), временной интервал t_0 в системе покоя мезона связан с интервалом в лабораторной системе t формулой

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Умножив t на скорость π^+-мезона v, получим путь L, пройденный частицей за ее время жизни

$$tv = \frac{t_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = L.$$

Выражая из этой формулы скорость, окончательно получим

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{t_0^2}{L^2}+\frac{1}{c^2}}} \approx 1,13\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

2.6 Относительная скорость. Закон сложения скоростей (1)

- Две частицы удаляются в противоположные стороны от некоторого наблюдателя со скоростью $v = 2c/3$ каждая. Определить их относительную скорость.

Для определения относительной скорости частиц необходимо перейти в систему отсчета одной из частиц, скажем, частицы (1). Тогда система отсчета будет удаляться от этой частицы со скоростью $v_1 = 2c/3$. Частица (2), движется в том же направлении, со скоростью $v_2 = 2c/3$ по отношению к самой системе отсчета. В этой ситуации можно применить закон сложения скоростей (1.12). Получаем

$$v_{\text{отн}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{12}{13}c.$$

2.7 Закон сложения скоростей (2)

- Найти разность скоростей света для лучей света в воде, направленных вдоль течения и против течения Невы относительно Зимнего Дворца. Считать, что показатель преломления невских вод $n = 1,33$, скорость течения в Неве $v = 1$ м/с.

В системе отсчета, связанной с водой, скорость света одинакова во всех направлениях и равна $u' = c/n$. В соответствии с релятивистским законом сложения скоростей для луча света в воде вдоль течения имеем

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 - \frac{v}{nc}}.$$

Поскольку скорость реки много меньше скорости света в воде, можно ограничиться поправками первого порядка малости по v/c

$$u_1 \approx \frac{c}{n} + v(1 - \frac{1}{n^2}).$$

Для луча света направленного против течения получим, соответственно

$$u_1 \approx \frac{c}{n} - v(1 - \frac{1}{n^2}).$$

Разность скоростей дается формулой

$$\Delta u = u_1 - u_2 = 2v(1 - \frac{1}{n^2}) \approx 0,87 \text{ м/с}.$$

Сопроводим приведенное выше решение небольшим историческим комментарием. Полученная в задаче приближенная формула для скорости света в движущейся среде - это знаменитая формула, выведенная Френелем в 1818 г. Френель исходил из механических соображений на основе представлений о свете как волне в "светоносном эфире" . Если бы эфир не увлекался движущейся средой, то скорость света не зависела бы от скорости среды. Если бы эфир полностью увлекался средой, то скорости света и среды просто бы складывались. Полученный Френелем коэффициент $1 - 1/n^2$, оказался промежуточным между нулем и единицей и соответствовал модели "частичного увлечения эфира" . Формула Френеля в XIX веке многократно проверялась экспериментально, в частности, в опытах Физо, и позволила объяснить отсутствие видимых оптических эффектов от движения Земли относительно эфира в первом порядке по v/c.

2.8 Движение под действием постоянной силы

- На частицу массы m действует постоянная сила F. Найти зависимость скорости частицы и ее координат от времени, если в начальный момент частица покоилась.

Выберем ось $0X$ направленной вдоль вектора силы и будем считать, что при $t = 0$ частица находилась в начале координат. Очевидно, что двигаться частица будет вдоль оси $0X$. Уравнение движения (1.16)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F,$$

при условии $F = const$, легко интегрируется

$$p = Ft.$$

Учитывая определение импульса (1.14), это соотношение переписывается в виде

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft.$$

Из последней формулы получаем зависимость скорости от времени

$$v(t) = \frac{Ft}{\sqrt{m^2 + \frac{F^2t^2}{c^2}}}. \tag{2.2}$$

В классической физике тело, на которое действует постоянная сила, будет двигаться с постоянным ускорением, неограниченно наращивая скорость. Полученный выше результат (2.2) согласуется с выводами СТО, поскольку при $t \to \infty$ скорость тела стремится к скорости света снизу

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = c.$$

С другой стороны, в классическом пределе при $c \to \infty$ получаем хорошо известный ответ

$$v(t) \longrightarrow \frac{F}{m}t.$$

Чтобы найти зависимость координаты частицы от времени, необходимо проинтегрировать соотношение (2.2). Это сделать нетрудно с помощью замены переменных $z = t^2$. Результат, согласованный с начальным условием $x(0) = 0$, имеет вид

$$x(t) = c\sqrt{t^2 + \frac{m^2c^2}{F^2}} - \frac{mc^2}{F}. \tag{2.3}$$

2.9 Неупругое столкновение

- Две частицы, имеющие одинаковые массы m, но разные скорости v_1 и v_2 движутся навстречу друг другу. Какую скорость и какую массу будет иметь частица, образовавшаяся после абсолютно неупругого столкновения?

Законы сохранения энергии и импульса будут иметь следующий вид

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$\frac{m\mathbf{v}_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m\mathbf{v}_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

В приведенных уравнениях M - масса образовавшейся частицы, $\mathbf{v}$ - ее скорость. Поскольку частицы до столкновения движутся вдоль прямой, то скорость образовавшейся частицы будет направлена вдоль той же прямой, и второе уравнение можно спроектировать на нее

$$\frac{mv_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{mv_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{Mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Умножив полученное уравнение на c^2 и заменив энергию второй частицы левой частью первого уравнения, приходим к линейному уравнению относительно v. Его решение

$$v = \frac{\frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}\,v_1 - \sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\,v_2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} + \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}. \tag{2.4}$$

Чтобы найти массу образовавшейся частицы, надо подставить скорость из (2.4) в закон сохранения импульса. Выкладки на этом пути достаточно громоздки, поэтому мы найдем M, используя инвариантную массу (1.26).

После столкновения инвариантная масса равна массе образовавшейся частицы $\mu = M$. Поскольку для изолированной системы μ не зависит от времени, то в начальный момент она имела то же самое значение. Из соотношения (1.26), записанного для рассматриваемой задачи

$$(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2 = M^2 c^4,$$

раскрывая скобки, получаем

$$E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2 - p_1^2c^2 + 2p_1p_2c^2 - p_2^2c^2 = M^2c^4. \tag{2.5}$$

В этой формуле знак " + " перед произведением импульсов поставлен в силу их направленности в противоположные стороны

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -p_1p_2.$$

Используя формулу (1.20), имеем

$$E_1^2 - p_1^2c^2 = E_2^2 - p_2^2c^2 = m^2c^4.$$

Выразим из соотношения (2.5) M^2 и подставим вместо E_1, E_2, p_1, p_2 их выражения из формул (1.17) и (1.14)

$$M^2 = 2m^2 + 2\frac{m^2 + \frac{m^2}{c^2}v_1v_2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Извлекая квадратный корень, окончательно получаем

$$M = m\sqrt{2 + 2\frac{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}}. \tag{2.6}$$

Нетрудно заметить, что подкоренное выражение больше 4, так как числитель дроби больше единицы

$$1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} > 1,$$

а знаменатель - меньше

$$\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} < 1.$$

Из этого следует, что масса образовавшейся частицы больше сумме масс частиц $2m$ до столкновения.

2.10 Красное смещение

- В видимой части спектра атома водорода есть фиолетовая и синяя линии с длинами волн $\lambda_{\text{ф}} = 410,17$ нм и $\lambda_{\text{с}} = 434,05$ нм соответственно. С какой скоростью должен удаляться источник излучения от наблюдателя, чтобы фиолетовая линия им воспринималась как синяя? Ответ дать в долях скорости света c.

Изменение наблюдаемой длины волны излучения от движущегося источника, в соответствии с эффектом Доплера, определяется формулой (1.36). С данными задачи ее можно записать в виде

$$\lambda_{\text{с}} = \lambda_{\text{ф}}\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Выражая из этой формулы отношение v/c, получаем

$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{\lambda_{\text{с}}}{\lambda_{\text{ф}}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda_{\text{с}}}{\lambda_{\text{ф}}}\right)^2 + 1} \approx 0,057.$$

Итак, скорость удаляющегося источника доолжна быть равна

$$v = 0,057c.$$

Список литературы

[1] Ньютон Исаак, Математические начала натуральной философии, М., Наука, 1989.

[2] Эйнштейн А., К электродинамике движущихся тел, Ann. Phys., 1905, 17, 891-921, русский перевод: Эйнштейн А., Собрание научных трудов в четырчх томах, Том 1, Работы по теории относительности 1905-1920, М,. Наука, 1965.

[3] Эйнштейн А., Диалог по поводу возражений против теории относительности, Naturwiss., 1918, 6, 697-702, русский перевод: Эйнштейн А., Собрание научных трудов в четырчх томах, Том 1, Работы по теории относительности 1905-1920, М,. Наука, 1965.