

Министерство образования и науки Российской Федерации

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

Е. Н. Боборыкина М. А. Соколов

**ФИЗИКА**  
Термодинамические циклы

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2014

## Аннотация

Целью настоящего пособия является изложение определений и законов элементарной термодинамики, необходимых для анализа работы простейших тепловых двигателей. Первая (теоретическая) часть пособия примерно соответствует материалу одной лекции и включает второй закон термодинамики и определение энтропии. Во второй части приводятся несколько типичных задач о свойствах разнообразных газовых циклов с подробными решениями.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов машиностроительных специальностей (141100, 150700, 151900, 220700), дневной, вечерней и заочной форм обучения, лекционный курс физики которых включает не более 72 академических часов.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Термодинамические циклы</b>	<b>1</b>
1.1	Циклические процессы. Обратимость тепловых процессов . . . . .	1
1.2	Принцип действия теплового двигателя. КПД теплового двигателя . . . . .	2
1.3	Идеальные тепловые машины. КПД машины Карно . . . . .	3
1.4	Второй закон термодинамики . . . . .	5
1.5	Теорема Карно . . . . .	6
1.6	Обратный цикл Карно. Холодильная машина . . . . .	7
1.7	Неравенство Клаузиуса и термодинамическая энтропия . . . . .	7
1.8	Изменение энтропии при обратимом процессе в идеальном газе . . . . .	11
1.9	Анализ термодинамических циклов и вычисление их КПД . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Задачи с решениями</b>	<b>14</b>
2.1	Цикл Карно (1) . . . . .	14
2.2	Цикл Карно (2) . . . . .	14
2.3	Холодильник на обратном цикле Карно . . . . .	15
2.4	Сравнение КПД прямого и обратного циклов Карно . . . . .	16
2.5	Цикл из изотерм и изобар . . . . .	17
2.6	Цикл из изохор и изобар . . . . .	18
2.7	Цикл из политропы и прямой . . . . .	20
2.8	Треугольный цикл на $(S - T)$ плоскости . . . . .	21
2.9	Цикл Отто . . . . .	22
2.10	Цикл Дизеля . . . . .	24
2.11	Цикл Ленуара . . . . .	26
<b>А</b>	<b>Элементарные сведения о газах</b>	<b>27</b>

## 1 Термодинамические циклы

### 1.1 Циклические процессы. Обратимость тепловых процессов

Среди всех термодинамических процессов выделяются **циклические**, в которых термодинамическая система, пройдя ряд промежуточных со-

стояний, возвращается в исходное. Именно такие процессы протекают в тепловых двигателях. На любых диаграммах график циклического процесса выглядит как замкнутая линия. На Рис. 1 и 2 в  $(p - V)$  и  $(V - T)$  координатах приведены два примера циклических процессов.

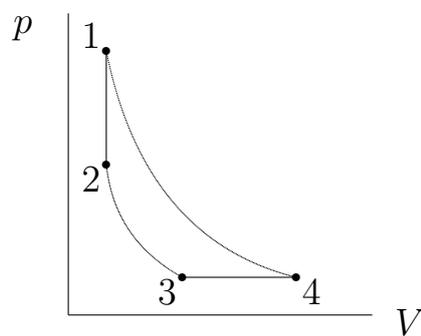


Рис. 1.

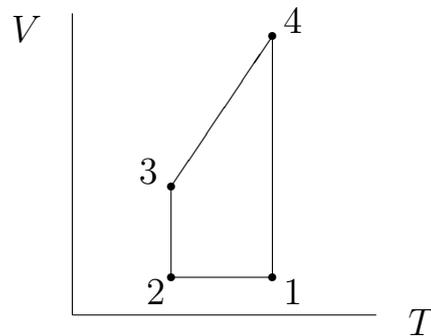


Рис. 2.

В качестве упражнения, читателю предлагается установить, из каких элементарных процессов состоят циклы на этих рисунках.

Термодинамический процесс называется **обратимым**, если он может проходить между двумя состояниями как в прямом, так и в обратном направлении, причем при возвращении в исходное состояние в окружающей среде не происходит никаких изменений. В природе обратимых процессов не существует. Однако процесс, проходящий настолько медленно, что система в каждый момент времени находится в состоянии близком к состоянию термодинамического равновесия, считается обратимым. Процессы такого рода называются **квазистатическими**. Любой из элементарных газовых процессов (изотермический, изобарический, изохорический и адиабатический) может быть проведен обратимо. В качестве примеров необратимых процессов выступают процесс диффузии (например, процесс растворения капельки сиропа в воде) и процесс передачи тепла между двумя телами при **конечной** разности температур этих тел.

Термодинамический **цикл** называется **обратимым** или **идеальным**, если все составляющие его процессы обратимы. Например, циклы, представленные на Рис. 1,2 - идеальны.

## 1.2 Принцип действия теплового двигателя. КПД теплового двигателя

**Тепловым двигателем или машиной** называется периодически действующее устройство, которое позволяет за счет полученного тепла совершать механическую работу. С точки зрения термодинамики, простейшая тепловая машина состоит из трех основных элементов: **нагревателя, рабочего тела и холодильника** (Рис. 3).

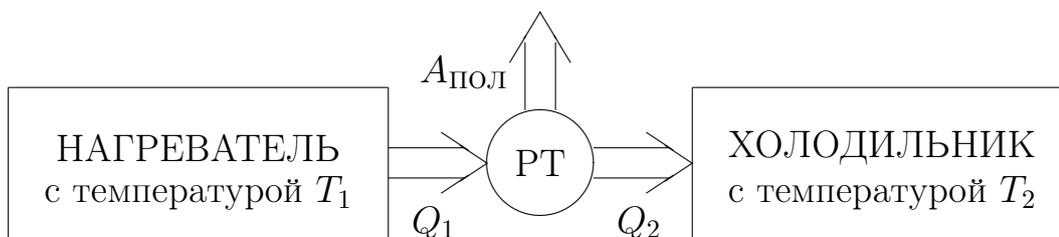


Рис. 3

Нагреватель представляется неограниченным резервуаром тепла, которое поступает к рабочему телу. Рабочее тело с поступлением тепла расширяется и совершает работу. Затем часть тепла передается холодильнику и рабочее тело возвращается в исходное термодинамическое состояние.

Отношение совершенной полезной работы к работе затраченной называется коэффициентом полезного действия (КПД) тепловой машины

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}}.$$

Пусть в течение цикла нагреватель передает рабочему телу количество тепла  $Q_1$ , а рабочее тело возвращает холодильнику  $Q_2$ . Тогда полезная работа, совершенная машиной, находится как разность

$$A_{\text{пол}} = Q_1 - Q_2.$$

Затраченной работой следует считать эквивалентное ей количество тепла  $A_{\text{затр}} = Q_1$ , взятое у нагревателя. Таким образом, коэффициент полезного действия тепловой машины вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (1.1)$$

Из формулы (1.1) следует, что КПД двигателя меньше единицы из-за передачи рабочим телом части тепла холодильнику. В следующем разделе, на примере машины Карно, мы увидим, что это необходимое условие цикличности теплового двигателя.

### 1.3 Идеальные тепловые машины. КПД машины Карно

Рассмотрим подробнее идеальную тепловую машину, работающую на цикле Карно (см. Рис. 4). Отметим, что это единственная идеальная машина, цикл которой может быть реализован с одним нагревателем и одним холодильником.

Пусть рабочее тело машины Карно (идеальный газ) находится в состоянии, характеризующемся параметрами  $(p_1, V_1, T_1)$ . На первом этапе цикла газ получает от нагревателя тепло  $Q_1$  и изотермически расширяется. Напомним, что при таком расширении изменение внутренней энергии идеального газа равно нулю ( $\Delta U_{12} = 0$ ) и все полученное рабочим телом тепло идет на совершение работы против внешних сил ( $A_{12} = Q_1$ ). Достигнув состояния  $(p_2, V_2, T_1)$ , газ начинает расширяться адиабатически ( $Q = 0$ ) и переходит в состояние  $(p_3, V_3, T_2)$ . При этом работа тепловой машины против внешних сил совершается только за счет уменьшения внутренней энергии газа ( $A_{23} = -\Delta U_{23}$ ). Как следствие, при адиабатическом расширении уменьшается температура газа (см. формулу (A.18)) и его давление (см. (A.16)). Изотермический переход системы из состояния  $(p_3, V_3, T_2)$  в состояние  $(p_4, V_4, T_2)$  требует передачи тепла холодильнику. Поскольку давление на каждом этапе этого процесса меньше, чем давление на верхней изотерме, то работа внешних сил  $A'_{34}$  по сжатию системы и равное ей тепло  $Q_2$ , переданное холодильнику, будут меньше  $Q_1$ . На последнем этапе адиабатический процесс возвращает рабочее тело в исходное состояние, при этом повышается температура газа до первоначальной за счет совершения над газом работы  $A'_{41}$ .

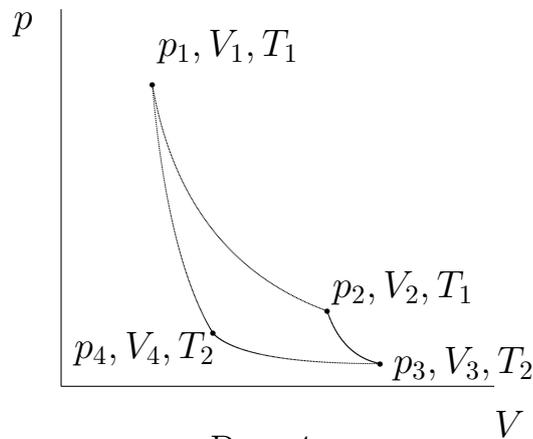


Рис. 4.

Работа, совершенная тепловой машиной за цикл Карно, численно выражается как площадь фигуры, ограниченной кривой цикла в  $(P - V)$  координатах. При прохождении цикла в прямом направлении (по часовой стрелке) работа будет положительна и, следовательно работа, совершенная рабочим телом на этапе  $(p_1, V_1, T_1) \rightarrow (p_2, V_2, T_1) \rightarrow (p_3, V_3, T_2)$  будет больше, чем работа внешних сил по сжатию рабочего тела к исходному состоянию  $(p_3, V_3, T_2) \rightarrow (p_4, V_4, T_2) \rightarrow (p_1, V_1, T_1)$ . Разница работ достигается

за счет более низкой температуры и давления рабочего тела на обратной части цикла, которые, в свою очередь, обусловлена передачей тепла холодильнику. Таким образом тепло, передаваемое холодильнику, является платой за возможность проходить один и тот же цикл многократно.

Вычислим величину КПД машины Карно. Из определения КПД (1.1) и разъяснений, данных в начале настоящего раздела, следует, что

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{12} - A_{34}}{A_{12}},$$

где  $A_{12}$  - работа, совершенная рабочим телом при изотермическом расширении, и  $A_{34}$  - работа, совершенная над рабочим телом при изотермическом сжатии. Используя формулу для работы идеального газа в изотермическом процессе (A.12), получаем после сокращений

$$\frac{A_{12} - A_{34}}{A_{12}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Из закона Бойля-Мариотта (A.11) и уравнения Пуассона (A.16) имеем равенства

$$P_1 V_1 = P_2 V_2, \quad P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma, \quad P_3 V_3 = P_4 V_4, \quad P_4 V_4^\gamma = P_1 V_1^\gamma$$

для каждого из четырех звеньев цикла. Перемножив по отдельности левые части этих равенств и их правые части, после простых алгебраических преобразований приходим к пропорции

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4},$$

откуда немедленно следует формула

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1.2)$$

#### 1.4 Второй закон термодинамики

Разобранный выше пример с тепловой машиной, работающей по циклу Карно, показывает, что не все тепло, получаемое от нагревателя, можно превратить в механическую работу. Глубокий анализ, проведенный для любых тепловых машин, как идеальных, так и неидеальных, подтверждает этот вывод позволяет сформулировать **второй закон термодинамики**:

невозможно создать периодически действующую тепловую машину, которая совершала бы работу за счет переданного ей тепла, не возвращая части тепла холодильнику. Это утверждение принадлежит **Кельвину и Планку**. Иногда тепловую машину, нарушающую второй закон термодинамики, называют **вечным двигателем второго рода**.

Наряду с приведенной формулировкой, существует эквивалентная ей **формулировка Клаузиуса**: невозможна самопроизвольная передача тепла от менее нагретого тела более нагретому. Эквивалентность формулировок означает, что, принимая за истину первую из них, можно доказать вторую, и наоборот. Докажем эту эквивалентность. Метод доказательства - от противного - типичен для термодинамики.

Допустим, в нарушение формулировки Клаузиуса, тепло переходит от менее нагретого тела (1), к более нагретому телу (2). Пусть все тепло, полученное телом (2) от тела (1) за некоторый промежуток времени будет израсходовано частично на работу, а частично будет передано телу (1) как холодильнику. Поскольку при этом термодинамическое состояние тела (2) не изменилось, получается, что тепловой двигатель, в нарушении утверждения Кельвина-Планка, совершил механическую работу только за счет тепла тела (1).

Обратно, пусть с помощью тепловой машины, в нарушение формулировки Кельвина - Планка, за цикл совершена механическая работа за счет всего тепла, полученного рабочим телом от теплового резервуара (1). Но всю эту работу можно с помощью трения превратить в тепло внутри более нагретого резервуара (2). Т.е. в нарушение формулировки Клаузиуса, передать тепло без совершения работы от менее нагретого тела более нагретому.

## 1.5 Теорема Карно

Коэффициент полезного действия тепловой машины (1.1)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

из-за ограничения, накладываемого вторым законом термодинамики, не может достигать единицы. Его величина определяется отношением  $Q_2$  к  $Q_1$ . Можно ли сделать это отношение сколь угодно малым? Ответ оказывается отрицательным и дается **теоремой Карно**: среди всех тепловых машин, работающих с нагревателем, имеющим температуру  $T_1$ , и холодильником, с температурой  $T_2$ , максимальным КПД

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

обладают идеальные тепловые машины, т.е. машины, работающие на обратимом цикле. Из формул (1.1) и (1.2) получаем следующее ограничение на количество тепла, передаваемого тепловым двигателем холодильнику

$$\eta \leq \eta_{\text{ид}}.$$

Знак равенства в этой формуле достигается в случае, когда  $\eta$  относится к другой идеальной тепловой машине.

### 1.6 Обратный цикл Карно. Холодильная машина

Рассмотрим тепловой двигатель, рабочее тело которого (идеальный газ) проходит цикл Карно в обратном направлении (см. Рис. 4), т.е. против часовой стрелки. При этом у холодильника (с температурой  $T_2$ ) отнимается тепло  $Q_2$ , за счет которого изотермически расширяющийся газ совершает работу против внешних сил. Внешние силы совершают работу сжатия (при температуре  $T_1 > T_2$ ) и тепло  $Q_1$  передается нагревателю. Переданное нагревателю тепло  $Q_1$  больше тепла  $Q_2$ , отнятого у холодильника, вследствие совершенной над газом работы. Таким образом, благодаря работе внешних сил, тепло от менее нагретого тела передается более нагретому.

КПД любой холодильной машины определяется отношением отнятого от холодильника (менее нагретого тела) тепла  $Q_2$ , к совершенной при этом работе  $A = Q_1 - Q_2$

$$\eta_{\text{холод}} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (1.3)$$

В случае идеальной машины, получаем

$$\eta_{\text{ид. холод}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (1.4)$$

Из приведенной формулы следует, что при  $T_1 > T_2$  КПД холодильной машины может принимать как значения близкие к абсолютному нулю (при очень малом  $T_2$ ), так и сколь угодно большие (при  $T_1 - T_2 \ll T_2$ ).

### 1.7 Неравенство Клаузиуса и термодинамическая энтропия

Как говорилось выше, теорема Карно устанавливает предельную величину КПД тепловой машины, имеющей один нагреватель с температурой

$T_1$ , и один холодильник с температурой  $T_2$

$$\eta_{\text{обр}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \geq \eta_{\text{необр}}.$$

Поскольку общее определение КПД

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

относится как к идеальным, так и к неидеальным машинам, из приведенного неравенства следует

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \geq \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} \leq \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Для дальнейших рассуждений нам удобно несколько модифицировать обозначения. Будем считать тепло, которым обменивается рабочее тело с нагревателем и холодильником, **алгебраической** величиной. Положим, что тепло, полученное рабочим телом - положительно, а отданное тепло - отрицательно. В соответствии с этим переобозначением, в последнем неравенстве следует заменить  $Q_2 \rightarrow -Q_2$ . Тогда оно примет вид

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (1.5)$$

Знак равенства в (1.5) соответствует обратимому (идеальному) циклу. Если цикл неидеален, то нестрогое неравенство " $\leq$ " заменяется строгим " $<$ ".

Неравенство (1.5) можно обобщить на произвольный цикл  $\gamma$ . Здесь мы только поясним, как это сделать. Изобразим данный цикл (например, круговой) на фоне густой сетки адиабат (Рис. 5). Эти адиабаты делят кривую

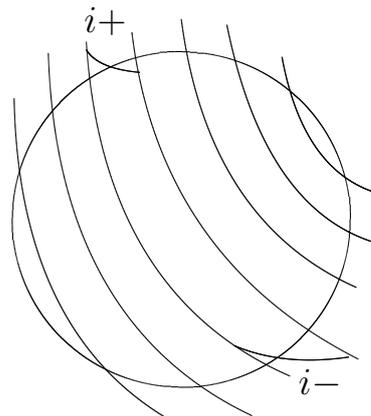


Рис. 5

цикла на отдельные участки. Соединим каждую пару соседних адиабат участками изотерм, так, чтобы образовалось множество циклов Карно. Эти

изотермы следует проводить так, чтобы они ближе всего примыкали к соответствующим участкам исходного цикла. На Рис. 5 изотермами соединены только две адиабаты. Номером  $i+$  отмечена "горячая" изотерма, номером  $i-$  - изотерма "холодная", замыкающая цикл.

Итак, произвольный цикл разбивается на совокупность циклов Карно, каждый из которых характеризуется своими температурами нагревателя и холодильника. Поскольку обмен теплом происходит только при изотермическом процессе, неравенство (1.5) можно написать для каждого из полученных в результате разбиения  $n$  циклов Карно, и затем сложить результаты

$$\sum_{i\pm}^n \left( \frac{\delta Q_{1i+}}{T_{1i+}} + \frac{\delta Q_{2i-}}{T_{2i-}} \right) \leq 0. \quad (1.6)$$

Увеличивая густоту адиабатической сетки, то есть переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$ , получаем неравенство

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (1.7)$$

называемое **неравенством Клаузиуса**. Интеграл в (1.7) берется по циклу  $\gamma$ . Если цикл обратим, то интеграл равен нулю и соотношение называется **равенством Клаузиуса**.

Напомним, что силовое поле называется консервативным, если работа его сил по любому замкнутому контуру равна нулю

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = 0. \quad (1.8)$$

В этом случае каждой точке поля можно приписать такое число  $E_p$ , называемое потенциальной энергией, что работа сил поля между любыми двумя точками  $a$  и  $b$

$$\int_a^b (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -(E_{pb} - E_{pa}) \quad (1.9)$$

не зависит от пути от  $a$  к  $b$  и равна разности потенциальных энергий в начальной и конечной точках. В механике обычно идет речь о перемещении силами поля какого-либо тела из одной точки пространства в другую. В этом случае говорят о потенциальной энергии тела в поле и сама потенциальная энергия зависит не только от свойств поля, но и от характеристик

тела (от массы или заряда). Из формулы (1.9) следует, что потенциальная энергия определяется только с точностью до постоянной.

В термодинамике, руководствуясь подобными соображениями, можно ввести физическую величину, называемую **энтропией**. Поскольку равенство контурного интеграла (1.8) нулю имеет место для любого обратимого процесса, можно сказать, что интеграл

$$S_b - S_a = \int_{\gamma_a}^b \frac{dQ}{T} \quad (1.10)$$

не зависит от того, каким обратимым процессом  $\gamma$  термодинамическая система переходит из состояния  $a$  в состояние  $b$ . Величина  $\Delta S_{ab} = S_b - S_a$  называется изменением энтропии системы при переходе из состояния  $a$  в состояние  $b$ . Бесконечно малое изменение энтропии определяется формулой

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (1.11)$$

Учитывая формулу (1.11), первый закон термодинамики для обратимых процессов можно переписать в виде

$$TdS = dU + dA. \quad (1.12)$$

В заключение раздела скажем несколько слов о законе возрастания энтропии. Пусть термодинамическая система переходит из состояния  $a$  в состояние  $b$  посредством необратимого процесса, а возвращается в состояние  $a$  обратимым процессом. Из неравенства Клаузиуса следует

$$\int_{a(\text{необр})}^b \frac{dQ}{T} + \int_{b(\text{обр})}^a \frac{dQ}{T} \leq 0.$$

Формула (1.10) дает

$$\int_{a(\text{необр})}^b \frac{dQ}{T} \leq S_b - S_a. \quad (1.13)$$

Если термодинамическая система не обменивается теплом с внешней средой, т.е. она термически изолирована, то  $\delta Q = 0$  и, следовательно, интеграл в (1.13) равен нулю. Получаем неравенство

$$S_a \leq S_b, \quad (1.14)$$

которое означает **возрастание энтропии изолированной термодинамической системы при необратимых процессах**. Равенство в соотношении (1.14) реализуется только в обратимых процессах.

### 1.8 Изменение энтропии при обратимом процессе в идеальном газе

Рассмотрим произвольный обратимый процесс перехода идеального газа из состояния, характеризующегося параметрами  $(p_1, V_1, T_1)$ , в состояние с параметрами  $(p_2, V_2, T_2)$ . Переданное при этом тепло определяется первым законом термодинамики

$$\delta Q = dU + pdV.$$

Используя уравнение состояния идеального газа, правую часть этого соотношения можно выразить через любую пару термодинамических параметров из  $p, V, T$ . Пусть это будет, например, пара  $T$  и  $p$ . Из уравнения состояния идеального газа имеем

$$pdV = \nu R dT - dpV.$$

Подстановка полученного выражения в первый закон термодинамики, с учетом формулы  $dU = \nu C_V dT$ , дает

$$\delta Q = \nu C_v dT + \nu R dT - V dp = \nu C_p dT - V dp.$$

Поделив это выражение на температуру, получаем

$$\frac{\delta Q}{T} = \nu C_p \frac{dT}{T} - \nu R \frac{dp}{p}.$$

Для преобразования второго слагаемого в полученном выражении мы еще раз воспользовались уравнением состояния идеального газа. Поскольку  $\nu, R, C_p$  - постоянные, правую часть последнего соотношения можно представить в виде полного дифференциала

$$\frac{\delta Q}{T} = d \left( \nu C_p \ln \frac{T}{T_0} - \nu R \ln \frac{p}{p_0} \right) = dS$$

функции

$$S = \nu C_p \ln \frac{T}{T_0} - \nu R \ln \frac{p}{p_0}, \quad (1.15)$$

которая дает выражение энтропии идеального газа в переменных  $T$  и  $p$ . В формуле (1.15) фигурируют произвольные постоянные  $T_0$  и  $p_0$  введенные для того, чтобы аргумент логарифма был безразмерной величиной. Поскольку с физической точки зрения определено только изменение энтропии, эти постоянные не играют никакой роли. Из (1.15) следует, что изменение энтропии из состояния  $(p_1, V_1, T_1)$  в состояние  $(p_2, V_2, T_2)$  выражается формулой

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.16)$$

Формула (1.16) для изотермического процесса ( $T_1 = T_2$ ) дает

$$\Delta S_{12} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2},$$

для изобарического процесса ( $p_1 = p_2$ ) дает

$$\Delta S_{12} = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Используя уравнения состояния идеального газа, можно переписать изменение энтропии (1.16) в  $(T, V)$  или  $(p, V)$  координатах.

## 1.9 Анализ термодинамических циклов и вычисление их КПД

Циклические процессы являются важным объектом изучения как в физической, так и в технической термодинамике. Прежде всего их важность определяется той ролью, которую циклы играют при формулировке фундаментальных законов термодинамики. Не менее важна их роль в теории циклических тепловых двигателей. Процессы, проходящие в реальных двигателях, сложны для описания, поэтому часто используются их простые модели. Рабочим телом в моделях является, как правило, идеальный газ или газ Ван дер Ваальса, а циклический процесс предполагается обратимым. Несмотря на кардинальные различия реальных двигателей и их идеальных образов, анализ модельных циклов может дать важную информацию об эффективности работы и пределах возможных КПД реальных двигателей.

Типичной задачей на работу тепловых двигателей является вычисление КПД термодинамических циклов, совершаемых их рабочим телом. Прежде всего надо выделять цикл Карно - единственный цикл, который можно

провести обратимо, используя только два тепловых резервуара. Для обратимой реализации других циклов необходимо, вообще говоря, бесконечно большое количество тепловых резервуаров. Как следствие, только КПД обратимого цикла Карно рассчитывается по формуле (1.2)

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Расчет КПД других циклов следует начинать с общей формулы (1.1)

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

При анализе произвольного термодинамического цикла необходимо установить, на каких стадиях цикла рабочее тело получает тепло, а на каких - отдает. Знание полученного за цикл тепла  $Q_1$  и тепла отданного  $Q_2$  позволяет применить формулу (1.1).

Кроме этого, иногда существует возможность несколько сократить вычисления, используя тот факт, что полезная работа  $A_{\text{пол}}$  равна площади фигуры, ограниченной кривой цикла как в  $(p - V)$  координатах, так и в

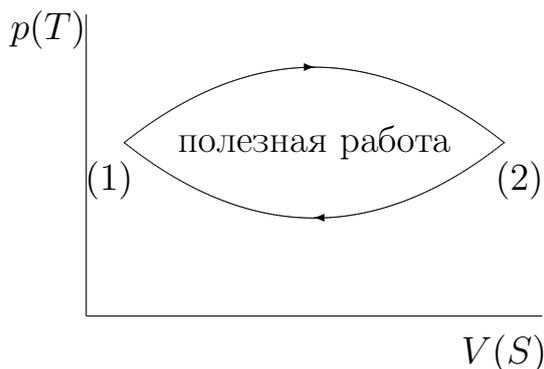


Рис. 6

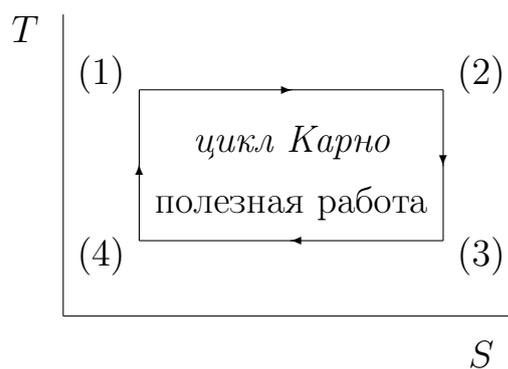


Рис. 7

координатах  $(T - S)$ . Особенно просто рассчитать полезную работу и КПД цикла Карно, поскольку в  $(T - S)$  координатах он изображается прямоугольником (см. Рис. 7). В этом прямоугольнике горизонтальные стороны соответствуют изотермам, вертикальные - адиабатам. Переданное рабочему телу в изотермическом процессе тепло равно  $Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$ , тепло, переданное рабочим телом холодильнику, равно  $Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$ . Подставляя  $Q_1$  и  $Q_2$  в формулу КПД теплового двигателя (1.1), сокращая множитель  $(S_2 - S_1)$ , получаем знаменитую формулу (1.2).

## 2 Задачи с решениями

### 2.1 Цикл Карно (1)

- Найти КПД цикла Карно, в котором объем рабочего тела - газа гелия - при адиабатическом расширении, увеличивается в два раза.

КПД идеального цикла Карно находится по формуле (1.2)

$$\eta_{\text{карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Адиабатическое расширение является вторым этапом в цикле Карно (см. Рис. 4). Уравнение адиабатического процесса в  $(T - V)$  координатах (А.18)

$$T^{C_V} V^R = \text{const}$$

перепишем в виде

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{R}{C_V}} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{i}},$$

где  $C_V$  - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (А.7)

$$C_V = \frac{i}{2} R,$$

$i$  - число степеней свободы молекул газа. Подставляя полученное отношение температур в выражение для КПД, приходим к формуле

$$\eta_{\text{карно}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{i}}.$$

С учетом данных задачи  $V_1/V_2 = 1/2$  и  $i = 3$  (гелий - благородный газ), получаем числовой ответ

$$\eta_{\text{карно}} \approx 0,37$$

или 37 %.

### 2.2 Цикл Карно (2)

- Как эффективнее увеличить КПД машины Карно: увеличивая температуру нагревателя на  $\Delta T$  или уменьшая температуру холодильника на ту же величину  $\Delta T$ ? Как связаны увеличение температуры нагревателя на  $\Delta T_1$  и уменьшение температуры холодильника на  $\Delta T_2$ , дающие одинаковые КПД?

В обозначениях имеется в виду, что  $\Delta T_1 > 0$ ,  $\Delta T_2 > 0$ ,  $\Delta T > 0$ . Изменение температур нагревателя и холодильника приводит к следующим изменениям КПД

$$\eta_1 = \frac{T_1 + \Delta T_1 - T_2}{T_1 + \Delta T_1}, \quad \eta_2 = \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T_2)}{T_1}.$$

Ответим на первый вопрос. Рассмотрим разность  $\eta_1 - \eta_2$  при условии, что  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T} - \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T)}{T_1} = \frac{\Delta T(T_2 - (T_1 + \Delta T))}{T_1(T_1 + \Delta T)} < 0,$$

так как  $T_1 > T_2$ . Следовательно, эффективнее уменьшить температуру холодильника на  $\Delta T$ , чем увеличить температуру нагревателя на те же  $\Delta T$ . Однако заметим, что увеличение КПД машины Карно за счет уменьшения температуры холодильника может оказаться значительно дороже и привести к усложнению конструкции машины.

Перейдем ко второму вопросу. Приравняем  $\eta_1$  и  $\eta_2$

$$\frac{T_1 + \Delta T_1 - T_2}{T_1 + \Delta T_1} = \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T_2)}{T_1},$$

откуда

$$\Delta T_2 = \frac{\Delta T_1 T_2}{\Delta T_1 + T_1}.$$

В более симметричной форме этот результат можно записать, вводя относительное увеличение температуры

$$\delta T_1 = \frac{\Delta T_1}{T_1}, \quad \delta T_2 = \frac{\Delta T_2}{T_2}.$$

Получаем

$$\delta T_1 - \delta T_2 = \delta T_1 \delta T_2.$$

### 2.3 Холодильник на обратном цикле Карно

- Холодильная машина работает по обратному циклу Карно. Какое количество тепла перейдет от холодильника к нагревателю, если мотор совершит работу 4 кДж. КПД прямого цикла Карно 50% ?

Из следующих ниже формул для КПД прямого цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

и КПД обратного цикла (1.4)

$$\eta_x = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$$

легко показать, что имеет место соотношение

$$\eta_x = \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

Из определения КПД холодильной машины (1.4)

$$\eta_x = \frac{Q_2}{A}$$

получаем

$$Q_2 = \frac{1 - \eta}{\eta} A = A = 4 \text{ кДж.}$$

#### 2.4 Сравнение КПД прямого и обратного циклов Карно

- При каком соотношении температур горячего и холодного тепловых резервуаров КПД прямого цикла Карно в  $k$  раз отличается от КПД того же цикла, проведенного в обратном направлении?

Пусть, как обычно,  $T_1$  и  $T_2$  - температуры нагревателя и холодильника, соответственно. Из условия задачи получаем соотношение между КПД прямого и обратного циклов Карно

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = k \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Правая и левая часть будут равны при условии выполнения следующего соотношения

$$T_1^2 + T_2^2 = (2 + k)T_1T_2.$$

Поделим обе части полученного равенства на  $T_2$  и введем обозначение  $x = T_1/T_2$ . В результате получим квадратное уравнение

$$x^2 - (2 + k)x + 1 = 0.$$

Его решение

$$x = \frac{k + 2 \pm \sqrt{k(k + 4)}}{2}.$$

При  $k = 1$  наш результат

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку  $T_1 > T_2$ , то  $x > 1$  и должен быть выбран ответ с плюсом

$$T_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} T_2 \approx 2.69 T_2.$$

## 2.5 Цикл из изотерм и изобар

- Найти КПД цикла, состоящего из двух изотерм и двух изобар (предельные значения температур -  $T_2 > T_1$ , давлений -  $p_1 > p_2$ ). Рабочее тело - азот.

Чтобы использовать определение КПД

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

необходимо выяснить, на каких этапах цикла рабочее тело обменивалось теплом с нагревателем и холодильником и вычислить  $Q_1$  и  $Q_2$ . Начнем с

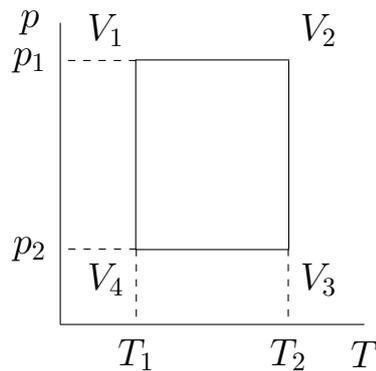


Рис. 8

изобарического перехода  $(p_1, T_1, V_1) \rightarrow (p_1, T_2, V_2)$ . Это процесс с увеличением температуры и, следовательно, с увеличением объема (А.13). Такой

процесс происходит с поглощением тепла, которое можно вычислить по формуле

$$Q'_1 = C_p \nu (T_2 - T_1).$$

Переход  $(p_1, T_2, V_2) \rightarrow (p_2, T_2, V_3)$  является изотермическим процессом с уменьшением давления, следовательно - с увеличением объема.

Поскольку газ считается идеальным, в этом процессе не изменяется его внутренняя энергия, а работа расширения (А.12) совершается за счет полученного тепла - следствие первого закона термодинамики

$$Q''_1 = A_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}.$$

Поскольку для изотермического процесса  $p_1 V_2 = p_2 V_3$ , последнюю формулу можно переписать в виде

$$Q''_1 = \nu R T_2 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Из вида цикла ясно, что переход  $(p_2, T_2, V_3) \rightarrow (p_2, T_1, V_4)$  есть изобарический процесс с передачей тепла

$$Q'_2 = C_p \nu (T_2 - T_1) = Q'_1$$

холодильной установке (способной обратимо обмениваться теплом с рабочим телом), а переход  $(p_2, T_1, V_4) \rightarrow (p_1, T_1, V_1)$  есть изотермический процесс сжатия, при котором холодильной установке передается тепло

$$Q''_2 = \nu R T_1 \ln \frac{V_4}{V_1} = \nu R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Осталось воспользоваться формулой КПД, учитывая  $Q_1 = Q'_1 + Q''_1$  и  $Q_2 = Q'_2 + Q''_2$ . После простых сокращений, получаем

$$\eta = \frac{(T_2 - T_1) \ln \frac{p_1}{p_2}}{\frac{i+2}{2}(T_2 - T_1) + T_2 \ln \frac{p_1}{p_2}},$$

где было учтено, что  $C_p = \frac{i+2}{2} R$ .

## 2.6 Цикл из изохор и изобар

- Обратимый цикл состоит из двух изохор и двух изобар (Рис. 9). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями  $C_p$

и  $C_V$  температуры в точках (1), (2), (3) и (4) связаны соотношением  $T_1 T_3 = T_2 T_4$ .

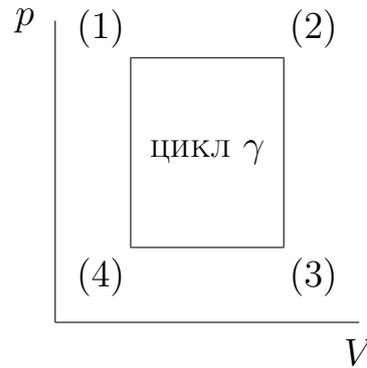


Рис. 9

Обратимость цикла позволяет использовать равенство Клаузиуса

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = 0,$$

где интегрирование производится по всему циклу  $\gamma$ . Поскольку передаваемое тепло в изохорическом и изобарическом процессах находится по формулам  $dQ = C_V \nu dT$ ,  $dQ = C_p \nu dT$ , соответственно, то равенство Клаузиуса можно представить в следующем виде

$$\oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} + C_V \int_2^3 \frac{dT}{T} + C_p \int_3^4 \frac{dT}{T} + C_V \int_4^1 \frac{dT}{T} = 0.$$

При выводе последнего равенства мы воспользовались свойством аддитивности интегралов и сократили  $\nu$  - количество молей вещества. Интегрирование в этом равенстве дает

$$C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + C_V \ln \frac{T_3}{T_2} + C_p \ln \frac{T_4}{T_3} + C_p \ln \frac{T_1}{T_4} = 0,$$

откуда немедленно следует формула

$$(C_p - C_V) \ln \left( \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} \right) = 0.$$

Поскольку  $C_p \neq C_V$ , то равен нулю логарифм. Это означает что

$$\frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} = 1, \text{ или } T_1 T_3 = T_2 T_4.$$

Утверждение доказано.

## 2.7 Цикл из политропы и прямой

- Найти КПД цикла, представленного на Рис 10, состоящего из политропы, с показателем  $\kappa$  и прямой. Рабочим телом является моль идеального двухатомного газа, степень сжатия которого в цикле равна  $V_a/V_b = n$ .

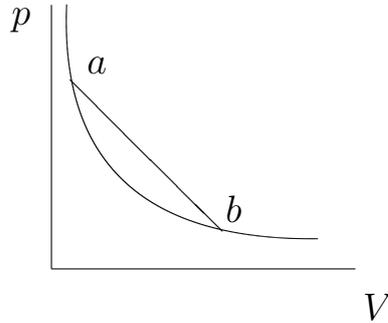


Рис. 10

При расширении по прямой рабочее тело получает тепло извне, при сжатии по политропе передает часть тепла холодильнику. Внутренняя энергия газа, учитывая уравнение Менделеева-Клапейрона (А.1), в начале цикла равна

$$U_a = \frac{i}{2}RT_a = \frac{i}{2}p_aV_a.$$

Поскольку давление  $p_b$  можно определить из уравнения политропы (А.19)

$$p_aV_a^\kappa = p_bV_b^\kappa,$$

для внутренней энергии газа в точке  $b$  имеем

$$U_b = \frac{i}{2}RT_b = \frac{i}{2}p_bV_b = \frac{i}{2}p_aV_b \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^\kappa = \frac{i}{2}p_aV_a \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\kappa-1}.$$

Работу газа при расширении можно найти, вычислив площадь трапеции под прямолинейным отрезком  $ab$

$$A_{ab} = \frac{1}{2}(V_b - V_a)(p_a + p_b) = \frac{1}{2}(V_b - V_a)(p_a + p_b) = \frac{1}{2}(V_b - V_a)p_a \left(1 + \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^\kappa\right).$$

Теперь, с помощью первого начала термодинамики, можно найти тепло, переданное рабочему телу при расширении

$$Q_1 = (U_b - U_a) + A_{ab}.$$

Работу, совершенную над рабочим телом в политропическом процессе вычисляем по формуле (A.20)

$$A_{ba} = \frac{P_b V_b - P_a V_a}{1 - \kappa} = p_a V_a \frac{\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\kappa-1} - 1}{1 - \kappa},$$

а переданное холодильнику тепло - по формуле

$$Q_2 = A_{ba} + (U_b - U_a).$$

Теперь, чтобы получить ответ, остается только воспользоваться определением КПД

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{ab} - A_{ba}}{(U_b - U_a) + A_{ab}} = \frac{(\kappa - 1)(n^{\kappa+1} - 1) - (\kappa + 1)(n^\kappa - n)}{(n^{\kappa+1} - (i + 1)n^\kappa + (1 + i)n + 1)(\kappa - 1)}.$$

## 2.8 Треугольный цикл на $(S - T)$ плоскости

- Тепловые машины с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершают обратимые термодинамические циклы, представленные на Рис. 11а и 11б. Выразить КПД этих циклов через максимальную  $T_1$  и минимальную  $T_2$  температуры вещества.

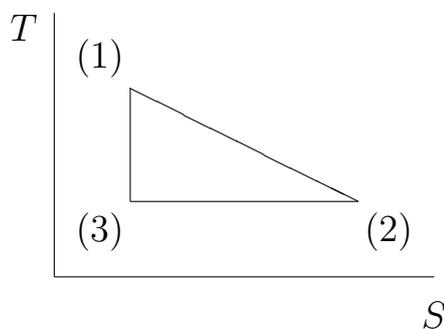


Рис. 11а

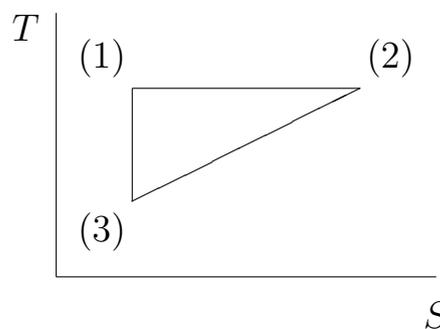


Рис. 11б

### Цикл 11а

Пусть в точке (1) цикла, изображенного на Рис. 11а, температура и энтропия равны, соответственно,  $T_1$ ,  $S_1$ , точке (2) -  $T_2$ ,  $S_2$ , точке (3) -  $T_2$ ,  $S_1$ . Тепло  $Q_1$  передается передается рабочему телу на этапе  $(1) \rightarrow (2)$ , и оно численно равно площади трапеции под отрезком (12)

$$Q_1 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_2 - S_1).$$

Тепло  $Q_2$  отдается рабочим телом на этапе изотермического процесса (2)  $\rightarrow$  (3), и оно численно равно площади прямоугольника под горизонтальным отрезком (23).

$$Q_2 = T_2(S_2 - S_1).$$

Участок (3)  $\rightarrow$  (1) соответствует адиабатическому процессу, в котором теплообмена не происходит. Следовательно, КПД цикла 11а вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}.$$

### Цикл 11б

Положим в этом цикле, в точке (1) цикла, изображенного на Рис. 11б, температура и энтропия равны, соответственно,  $T_1, S_1$ , точке (2) -  $T_1, S_2$ , точке (3) -  $T_2, S_1$ . Тепло  $Q_1$  передается рабочему телу на этапе изотермического расширения (1)  $\rightarrow$  (2), в то время, как отдается  $Q_2$  в процессе (2)  $\rightarrow$  (3), которому соответствует наклонный участок. Расчет полученного и отданного тепла происходит аналогично предыдущему случаю

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1), \quad Q_2 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_2 - S_1).$$

Используя полученные величины, вычисляем КПД цикла 11б

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}.$$

## 2.9 Цикл Отто

- Найти КПД идеального цикла Отто, если степень сжатия двухатомного газа, составляющего рабочее тело, равна  $n = 2$ . Во сколько раз изменится КПД цикла Отто, если степень сжатия увеличить с 2 до 4?

Идеальный цикл Отто является моделью реального процесса в двигателе внутреннего сгорания. Он состоит из двух адиабат (участки (1)  $\rightarrow$  (2) и (3)  $\rightarrow$  (4) на Рис. 12), и двух изохор (участки (2)  $\rightarrow$  (3) и (4)  $\rightarrow$  (1)). Тепло  $Q_1$  поступает рабочему телу при изохорическом нагревании ((2)  $\rightarrow$  (3)), а его часть  $Q_2$  передается холодильнику при изохорическом охлаждении

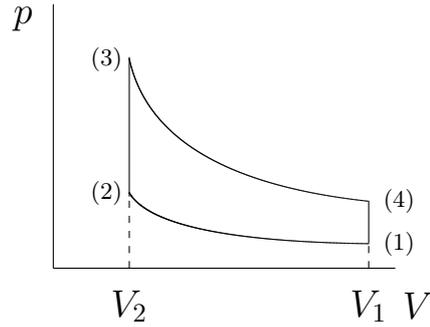


Рис. 12

(4)  $\rightarrow$  (1)). Будем считать, что температура газа в точке с номером  $k$  равна  $T_k$ . Тогда можно записать

$$Q_1 = C_V \nu (T_3 - T_2), \quad Q_2 = C_V \nu (T_4 - T_1),$$

где  $C_V$  - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\nu$  - количество молей. Поскольку процесс (1)  $\rightarrow$  (2) является адиабатическим, температуры  $T_1$  и  $T_2$ , вследствие соотношения (А.18), оказываются связанными

$$T_1 V_1^{\frac{R}{C_V}} = T_2 V_2^{\frac{R}{C_V}}.$$

Аналогичная формула выполняется для второй адиабаты

$$T_4 V_1^{\frac{R}{C_V}} = T_3 V_2^{\frac{R}{C_V}}.$$

КПД цикла Отто выражается формулой

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 - (T_4 - T_1)}{T_3 - T_2}.$$

Выразим  $T_1$  через  $T_2$ ,  $T_4$  через  $T_3$ , и подставим в формулу КПД

$$\eta = \frac{T_3 - T_2 - (T_3 - T_2) \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{R}{C_V}}}{T_3 - T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{R}{C_V}} = 1 - \frac{1}{n^{\frac{i}{2}}},$$

где  $n = V_1/V_2$  - степень сжатия газа,  $i$  - число степеней свободы молекул газа. В нашем случае  $n = 2$ ,  $i = 5$ . Подставляя эти числа в полученную формулу, получаем

$$\eta \approx 0.24.$$

Если степень сжатия увеличивается в два раза с  $n = 2$  до  $n = 4$ , то отношение

$$\frac{\eta(n=4)}{\eta(n=2)} = \frac{1 - \frac{1}{4^{\frac{2}{i}}}}{1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{i}}}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\frac{2}{i}}}\right)^2}{1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{i}}}} = 1 + \frac{1}{2^{\frac{2}{i}}} = 1.76$$

показывает, что КПД вырастет в 1.76 раз и станет равным  $\eta(n=4) \approx 0.42$ .

## 2.10 Цикл Дизеля

- Цикл идеализированного двигателя Дизеля состоит из
  1. всасывания в цилиндр воздуха  $(0) \rightarrow (1)$ ;
  2. адиабатического сжатия воздуха  $(1) \rightarrow (2)$  с показателем адиабаты  $\gamma$ ; в конце сжатия мгновенно впрыскивается топливо;
  3. сгорания топлива при изобарическом расширении  $(2) \rightarrow (3)$ ;
  4. адиабатического расширения продуктов горения  $(3) \rightarrow (4)$  также с показателем адиабаты  $\gamma$ ;
  5. изохорического отвода тепла из цилиндра - выхлопа  $(4) \rightarrow (1)$ .

Найдите КПД этого цикла в зависимости от степени сжатия  $\epsilon = V_1/V_2$  и степени предварительного расширения  $\rho = V_3/V_2$ .

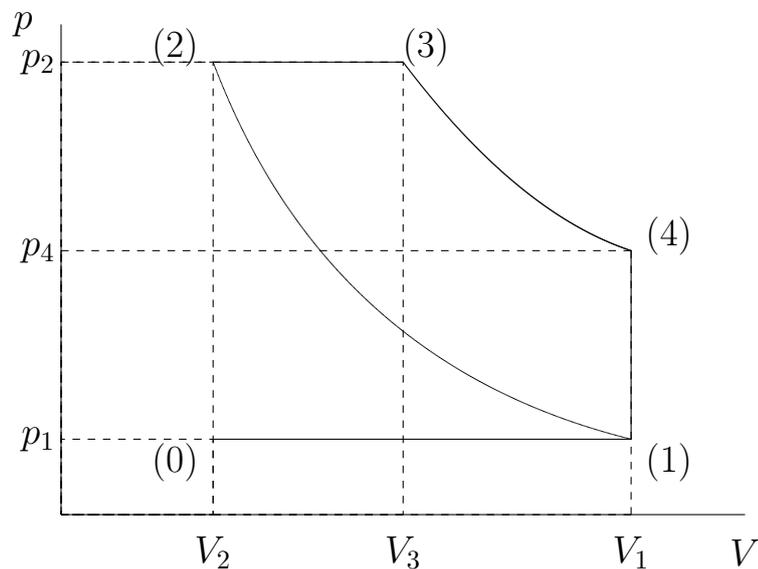


Рис. 13

В рассматриваемом цикле Дизеля рабочее тело получает тепло

$$Q_1 = C_p \nu (T_3 - T_2)$$

на этапе изобарического расширения (2)  $\rightarrow$  (3), и отдает тепло

$$Q_2 = C_V \nu (T_4 - T_1)$$

в изохорическом процессе (4)  $\rightarrow$  (1). КПД цикла Дизеля можно записать в виде

$$\eta = \frac{C_p \nu (T_3 - T_2) - C_V \nu (T_4 - T_1)}{C_p \nu (T_3 - T_2)} = \frac{\gamma(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)}{\gamma(T_3 - T_2)}.$$

Поскольку температуры  $T_1$  и  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$  связаны между собой уравнениями адиабатического процесса (A.18)

$$T_1^{C_V} V_1^R = T_2^{C_V} V_2^R, \quad T_3^{C_V} V_3^R = T_4^{C_V} V_3^R,$$

исключим из выражения для КПД температуры  $T_1$  и  $T_4$  с помощью равенств

$$T_1 = T_2 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{R/C_V} = \frac{1}{\epsilon^{R/C_V}}, \quad T_4 = T_3 \left( \frac{V_3}{V_1} \right)^{R/C_V} = T_3 \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right)^{R/C_V}.$$

Получаем

$$\eta = \frac{\gamma(T_3 - T_2) - (T_3 \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right)^{R/C_V} - T_2 \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^{R/C_V})}{\gamma(T_3 - T_2)}.$$

Примем во внимание, что температуры  $T_2$  и  $T_3$  связаны уравнением изобарического процесса

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \rho.$$

Поделив числитель и знаменатель предыдущего выражения на  $T_2$ , приходим к формуле

$$\eta = \frac{\gamma(\rho - 1) - (\rho \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right)^{R/C_V} - \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^{R/C_V})}{\gamma(\rho - 1)}.$$

Так как  $C_p - C_V = R$ , то справедливо соотношение  $R/C_V = \gamma - 1$ . Подставляя его в полученную формулу и, проделав простые преобразования, окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma \epsilon^{\gamma-1} (\rho - 1)}.$$

## 2.11 Цикл Ленуара

- Получите формулу для КПД цикла Ленуара, состоящего из изохорического, адиабатического и изобарического процессов. Параметром цикла является степень повышения давления  $\delta = p_2/p_1$ .

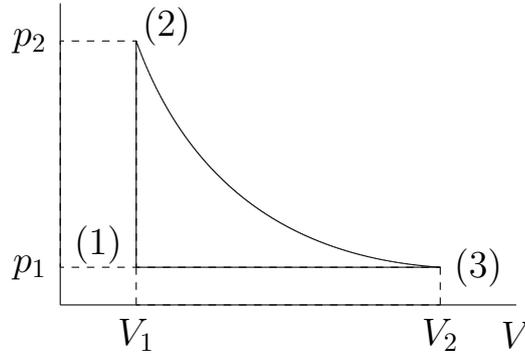


Рис. 14

Анализ цикла Ленуара показывает, что тепло  $Q_1$  передается рабочему телу только в процессе изохорического нагревания (1)  $\rightarrow$  (2), а полезная работа  $A$  совершается в процессе адиабатического расширения (2)  $\rightarrow$  (3). Простой подсчет дает, что

$$Q_1 = C_V \nu (T_2 - T_1),$$

где  $T_1, T_2$  - температуры газа в точках (1) и (2), соответственно, и

$$Q_2 = C_p \nu (T_3 - T_1),$$

где  $T_3$  - температура в точке (3). Коэффициент полезного действия можно представить в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \gamma \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} = 1 - \gamma \frac{T_3/T_1 - 1}{T_2/T_1 - 1}.$$

Отношение  $T_2/T_1$  определяется из уравнения изохорического процесса

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} = \delta,$$

отношение  $T_3/T_1$  - из уравнения изобарического и уравнения Пуассона адиабатического процесса (А.16)

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} = \delta^{1/\gamma}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу КПД, окончательно получаем

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\delta^{1/\gamma} - 1}{\delta - 1}.$$

## А Элементарные сведения о газах

Уравнение

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (\text{A.1})$$

называется уравнением состояния идеального газа или уравнением Менделеева-Клапейрона. В этом уравнении  $p, V, T$  - давление газа, его объем и абсолютная температура, соответственно,  $m$  - масса газа,  $\mu$  - его молярная масса,  $R = 8.31$  Дж/(моль · К) - универсальная газовая постоянная. Иногда отношение  $m/\mu$  - количество молей газа, обозначается буквой  $\nu$ .

Для смесей идеальных газов выполняется закон парциальных давлений: полное давление  $p$  смеси газов в сосуде равно сумме их парциальных давлений  $p_i$ , то есть давлений, которые оказывали бы эти газы на стенки сосуда каждый в отдельности

$$p = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (\text{A.2})$$

Из закона парциальных давлений и уравнения Менделеева-Клапейрона немедленно следует уравнение состояния смеси газов

$$pV = \left( \sum_{i=1}^n \nu_i \right) RT. \quad (\text{A.3})$$

Полезной формой (A.1) является уравнение

$$p = nkT, \quad (\text{A.4})$$

где  $k = \frac{R}{N_A}$  есть постоянная Больцмана  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К,  $n$  - плотность числа частиц, то есть количество частиц в единице объема.

Сумма кинетической и потенциальной энергий молекул термодинамической системы называется ее **внутренней энергией**. Потенциальной энергией межмолекулярного взаимодействия идеального газа пренебрегают, поэтому его внутренняя энергия складывается только из кинетической энергии отдельных молекул

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (\text{A.5})$$

В формуле (A.5)  $i$  - количество степеней свободы молекулы.

Удельной теплоемкостью вещества  $c$  называется количества тепла, необходимое для нагревания 1 кг этого вещества на 1 K. Молярной теплоемкостью называют теплоемкость одного моля. Обычно молярная теплоемкость обозначается заглавной буквой  $C$ , в то время как удельная теплоемкость - строчной  $c$ . Связь между ними очень проста

$$C = \mu c, \quad (\text{A.6})$$

где  $\mu$  - молярная масса газа.

Теплоемкость, вообще говоря, зависит от температуры газа и от процесса, при котором происходит его нагревание. Теплоемкость идеального газа от температуры не зависит и определяется формулами

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad (\text{A.7})$$

для изохорического процесса (теплоемкость при постоянном давлении), и

$$C_p = C_V + R = \frac{i + 2}{2} R \quad (\text{A.8})$$

для изобарического процесса (теплоемкость при постоянном объеме).

Механическая работа при бесконечно малом изменении объема в термодинамике определяется формулой

$$dA = p dV, \quad (\text{A.9})$$

при конечном изменении объема - формулой

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (\text{A.10})$$

Перечислим основные процессы идеального газа и приведем необходимые формулы.

- Изотермический процесс - изменение состояния газа, при котором остается постоянной его температура  $T = const$ .

В изотермическом процессе выполняется закон Бойля-Мариотта

$$PV = const \quad \text{или} \quad P_1V_1 = P_2V_2. \quad (\text{A.11})$$

Во второй формуле в (A.11) индексы 1 и 2 относятся к давлению  $P$  и объему  $V$  газа в начале и в конце процесса, соответственно. Работа газа в изотермическом процессе вычисляется по формуле

$$A_{\text{изотерм}} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (\text{A.12})$$

- Изобарический процесс - изменение состояния газа, при котором остается постоянным его давление  $P = const$ . В изобарическом процессе выполняется **закон Гей-Люссака**

$$\frac{V}{T} = const \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \quad (\text{A.13})$$

Работа вычисляется как

$$A_{\text{изобар}} = P(V_2 - V_1). \quad (\text{A.14})$$

- Изохорический процесс - изменение состояния газа, при котором остается постоянным его объем  $V = const$ .

В изохорическом процессе выполняется закон Шарля

$$\frac{P}{T} = const \quad \text{или} \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}. \quad (\text{A.15})$$

Поскольку объем газа не меняется, работа в изохорическом процессе не совершается.

- Адиабатический процесс - процесс, при котором термодинамическая система не обменивается теплом с внешней средой. Адиабатический процесс - частный случай политропического процесса.

Уравнение Пуассона адиабатического процесса

$$pV^\gamma = const \quad \text{или} \quad p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma, \quad (\text{A.16})$$

где  $\gamma$  - отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении  $C_P$  и при постоянном объеме  $C_V$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}. \quad (\text{A.17})$$

Другая форма адиабатического процесса

$$T^{C_v} V^R = \text{const} \quad (\text{A.18})$$

выводится из уравнения (A.1) и соотношения (A.16).

- Политропическим процессом называется изменение состояния газа, при котором его теплоемкость остается постоянной.

Уравнение политропического процесса имеет вид

$$PV^\kappa = \text{const} \quad \text{или} \quad P_1 V_1^\kappa = P_2 V_2^\kappa. \quad (\text{A.19})$$

В приведенной формуле  $\kappa$  - положительное число. Одним из представителей политропического процесса является адиабатический процесс. Работа в политропическом процессе

$$A_{\text{политр}} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - \kappa}. \quad (\text{A.20})$$

Модель идеального газа не предполагает интенсивного взаимодействия молекул газа и не учитывает их размеры. Приняв во внимание эти факторы, Ван дер Ваальс пришел к уравнению

$$\left(P + \frac{a}{V_\nu^2}\right)(V_\nu - b) = RT, \quad (\text{A.21})$$

называемое ныне его именем. Уравнение (A.21) справедливо для молярного объема  $V_\nu$ , то есть для объема одного моля газа. Чтобы перейти к уравнению, выполняющемуся для любого объема, необходимо заменить  $V_\nu \rightarrow \frac{1}{\nu}V$

$$\left(P + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

Сравнивая уравнение (A.21) с уравнением состояния 1 моля идеального газа

$$PV_\nu = RT$$

нетрудно заметить, что уравнение Ван дер Ваальса включает две поправки: к объему и к давлению. Первая из этих поправок  $b$  позволяет учесть конечный объем молекул газа или, более общо, отталкивание молекул на малых расстояниях друг от друга. Вторая поправка  $\frac{a}{V_\nu^2}$  учитывает взаимное притяжение молекул на больших расстояниях.

Внутренняя энергия газа Ван дер Ваальса включает не только кинетическую энергию его молекул, выражающуюся формулой (А.5), но и потенциальную энергию межмолекулярного взаимодействия. Именно силы притяжения между молекулами обуславливают поправку к давлению  $\delta P = \nu^2 \frac{a}{V^2}$  в уравнении Ван дер Ваальса. Следовательно, внутренняя энергия реального газа зависит не только от температуры, но и от объема, так как изменение объема ведет к изменению среднего расстояния между молекулами. Не трудно показать, что полная внутренняя энергия газа Ван дер Ваальса дается формулой

$$U_{\text{ВДВ}} = \frac{i}{2} \nu RT - \nu^2 \frac{a}{V}. \quad (\text{А.22})$$

### Список литературы

- [1] Орир Дж., Физика, в 2-х тт., Том 1, Мир, М., 1981.
- [2] Савельев И.В., Курс физики. В 3-х тт., Том 1, Механика. Молекулярная физика, Лань, М-СПб-Краснодар, 2008.
- [3] Сивухин Д.В., Общий курс физики в 5-и тт. Том 2, Термодинамика и молекулярная физика, М., ФИЗМТЛИТ, 2005.
- [4] Пригожин И., Кондепуди Д., Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур, М., Мир, 2002.

### Замечание к списку литературы

Учебная литература по термодинамике очень разнообразна по характеру и необозрима по количеству. Мы решили ограничиться списком всего из четырех книг. Первые три книги в этом списке являются частями известных курсов общей физики и размещены они в порядке возрастания объема материала и его сложности. Замыкает наш короткий список очень хороший учебник по термодинамике, одним из авторов которого является Илья Пригожин, специалист по неравновесной термодинамике и синергетике, лауреат Нобелевской премии по химии.