

УДК 621.39(075.8)

В.А. Варгаузин

**ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В КАНАЛЕ СВЯЗИ
НА ОСНОВЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СВОЙСТВ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ**

V.A. Vargauzin

**ESTIMATION OF ERROR PROBABILITY IN A CHANNEL BASED
ON THE RECURRENT PROPERTIES OF CONVOLUTIONAL CODES**

Рассмотрен метод оценки вероятности ошибки в канале связи, учитывающий рекуррентные свойства сверточных помехоустойчивых кодов. Метод может применяться при вычислении отношения правдоподобия кодовых символов на выходе демодулятора в системах связи, использующих как непосредственно сверточный код, так и сверточные турбокоды и сигнально-кодовые конструкции на основе решетчато-кодовой модуляции.

СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ; ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ПО КАНАЛУ; ПРОВЕРОЧНАЯ МАТРИЦА; ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ; ТУРБОКОД.

The method of the estimation of the probability of errors in the channel, based on recurrence property of convolution codes. The method can be used in computation of the likelihood ratio (LLR) of the code symbols at the demodulator output in communication systems that use both directly convolution code and turbo codes and trellis codes modulations.

CONVOLUTION CODES; PROBABILITY OF ERRORS IN THE CHANNEL; PARITY CHECK MATRIX; SIGNAL TO NOISE RATIO; TURBO CODE.

Цель статьи – демонстрация простого метода оценки вероятности ошибки на выходе канала передачи системы связи для случая, когда в ней используется помехоустойчивый сверточный код. Сверточные коды (СК) находят многочисленное применение в современной цифровой радиосвязи [1]. При этом в большинстве приложений применяются декодеры, использующие «мягкие» решения демодулятора. Такие решения пропорциональны отношению функций правдоподобия значений (0 и 1) кодовых двоичных символов, и их вычисление предполагает знание величины отношения сигнал/шум на выходе каналообразующей аппаратуры, т. е. демодулятора. Эта величина также требуется и во многих

сопутствующих декодированию алгоритмах в приемном устройстве обработки: синхронизации, адаптивного подавления помех, выравнивания частотной характеристики канала и т. п.

Оценка отношения сигнал/шум на выходе демодулятора, в свою очередь, может основываться на оценке \hat{p} вероятности ошибки p приема кодовых символов (Symbol Error Rate – SER), т. е. вероятности ошибки при «жестких» (двухуровневых) решениях демодулятора. Для такой оценки на практике используются различные методы.

К универсальным методам можно отнести метод передачи известной кодовой последовательности (преамбулы) и метод

регенерации кодовой последовательности приемным устройством по декодированной информационной последовательности при условии известной информационной последовательности.

Используются и менее универсальные методы, учитывающие специфику СК. Например, такой учет возможен при использовании т. н. «почти систематических» кодов или, как их еще называют, *быстропросматриваемых СК* [2], у которых векторы коэффициентов порождающих полиномов отличаются лишь в одном символе.

В этой связи следует обратить внимание на то, что независимо от специфики СК (*несистематический* или *систематический* код) и/или от структуры его формирования (*нерекурсивной* или *рекурсивной*) [1], существует возможность оценки SER по частоте нарушения *рекуррентного* уравнения (или уравнений) проверок на четность, связывающего кодовые символы СК. Это, в свою очередь, эквивалентно оценке частоты наблюдения единиц на выходе логической схемы формирователя синдрома (ФС).

В качестве простого примера рассмотрим несистематический СК с длиной кодового ограничения $K' = 3$ и скоростью $R = 1/2$, формируемый нерекурсивным кодером с порождающими полиномами $g_1(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$, $g_2(z) = 1 + z^{-2}$, или, что эквивалентно, *порождающей матрицей* вида $\mathbf{G}(z) = [g_1(z) \ g_2(z)]$, элементами которой являются полиномы. Такой нерекурсивный несистематический кодер (ННК) в ответ на каждый поступивший в момент времени t_i информационный символ $u^{(i)} = u^{(i)}$ формирует группу из двух символов $y_1^{(i)}$ и $y_2^{(i)}$ по правилу $y_1^{(i)} = u^{(i)} + u^{(i-1)} + u^{(i-2)}$, $y_2^{(i)} = u^{(i)} + u^{(i-2)}$.

Нетрудно видеть, что при этом кодовые символы удовлетворяют следующему *рекуррентному* уравнению:

$$(y_1^{(i-2)} + y_1^{(i)}) + (y_2^{(i-2)} + y_2^{(i-1)} + y_2^{(i)}) = 0, \quad (1)$$

включающему символы в пределах длины кодового ограничения. Вид такого уравнения можно описать матрицей

$$\mathbf{H}(z) = [h_1(z) \ h_2(z)] = [g_2(z) \ g_1(z)],$$

которую называют *проверочной матрицей*

СК. Как и для линейных блоковых кодов, порождающая и проверочная матрицы СК связаны соотношением *ортогональности*. Для рассматриваемого кода оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z)\mathbf{H}^T(z) &= [g_1(z) \ g_2(z)] \cdot \begin{bmatrix} g_2(z) \\ g_1(z) \end{bmatrix} = \\ &= g_1(z)g_2(z) + g_1(z)g_2(z) = 0. \end{aligned}$$

Здесь все операции над коэффициентами полиномов выполняются по правилу вычислений в арифметике по модулю два, то есть $z^{-l} + z^{-l} = 0$.

Рекуррентному уравнению удовлетворяет и систематический СК, формируемый рекурсивным кодером, для которого $y_1^{(i)} = u^{(i)}$, а символ $y_2^{(i)}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению второго порядка

$$(u^{(i-2)} + u^{(i)}) + (y_2^{(i-2)} + y_2^{(i-1)} + y_2^{(i)}) = 0$$

или, что эквивалентно, порождающей матрицей вида

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} 1 & g_2(z) \\ & g_1(z) \end{bmatrix}.$$

Это непосредственно следует из уравнения ортогональности:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z)\mathbf{H}^T(z) &= \begin{bmatrix} 1 & g_2(z) \\ & g_1(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_2(z) \\ g_1(z) \end{bmatrix} = \\ &= g_2(z) + g_2(z) = 0. \end{aligned}$$

В результате для СК, формируемого как ННК, так и РСК, логическая схема ФС может быть построена на основании одного проверочного рекуррентного уравнения (1), в котором переданные кодовые символы $y_1^{(i)}$ и $y_2^{(i)}$ следует заменить принятыми символами $y_1^{(i)'}$ и $y_2^{(i)'}$, т. е. «жесткими» решениями демодулятора. При этом оценка вероятности ошибки в канале сводится к оценке частоты нарушения такой проверки.

Безусловно, такая оценка не лишена недостатка. Действительно, при наличии нескольких ошибочных «жестких» решений в пределах длины кодового ограничения СК, нарушение проверки может быть обнаружено.

В то же время в реальных условиях этот факт может оказать незначительное влияние на достоверность оценки \hat{p} величины p . Действительно, рассматриваемый СК име-

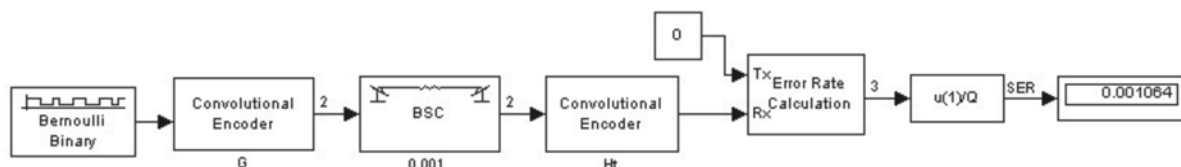


Рис. 1. Модель оценки вероятности ошибки для СК со скоростью $R = 1/2$

ет достаточно малую величину длины кодового ограничения $K' = 3$. Учтем, что в реальных каналах с независимыми ошибками, как правило, значение $p < 10^{-2}$. В таких условиях величина вероятности необнаруженного нарушения проверки при наличии двух и более ошибок в «жестких» решениях демодулятора в пределах длины кодового ограничения, очевидно, оказывается значительно меньше величины p . Поэтому при учете в оценке \hat{p} лишь одиночных ошибок в символах $y_1^{(i)'}$ и $y_2^{(i)'}$, тем не менее следует ожидать выполнения $\hat{p} \approx p$.

В указанных условиях, как нетрудно видеть, оценка \hat{p} может быть получена по формуле

$$\hat{p} = \frac{L}{NQ}, \quad (2)$$

где N – число испытаний в статистическом эксперименте при получении \hat{p} ; L – число зафиксированных нарушений в указанной выше проверке в процессе статистического эксперимента; $Q = q_1 + q_2$; $q_1 = 2$ – число ненулевых коэффициентов полинома $h_1(z)$; $q_2 = 3$ – число ненулевых коэффициентов полинома $h_2(z)$. Последние две величины учитывают тот факт, что каждая одиночная ошибка в символах $y_1^{(i)'}$ и $y_2^{(i)'}$ проявляет себя q_1 и q_2 раз соответственно на выходе схемы ФС.

Далее нетрудно оценить и значение величины отношения сигнал/шум, для чего следует учесть ее связь с величиной p . Например, для канала с аддитивным белым гауссовым шумом и модуляции ФМ-2 имеем $p = Q(\sqrt{2}h)$, где $Q(\cdot)$ – так называемая «ку-функция» [1]; $2h^2$ – величина отношения сигнал/шум на выходе демодулятора. Поэтому оценкой отношения сигнал/шум, очевидно, является величина $[Q^{-1}(p)]^2$.

Рассмотренный выше подход, в принципе, относится ко всем широко используемым СК со скоростью $R = 1/2$ с не-

большими длинами кодового ограничения $K' \leq 9$, а также к турбокодам, для которых, как правило, $K' \leq 5$ [3, 4].

На рис. 1 представлена модель, созданная в Simulink, иллюстрирующая метод оценки вероятности ошибки для широко распространенного на практике СК с длиной $K' = 7$.

Модель инициализируются следующими строками на языке MATLAB:

```
G=poly2trellis(7, [171 133]);
Ht=poly2trellis([7 7], [133; 171]);
Q=5+5;
```

Видно, что ФС представляет собой кодер с порождающей матрицей Ht . На рис. 2 представлена зависимость оценки \hat{p} вероятности ошибки в канале от вероятности ошибки p . Как и следовало ожидать, $\hat{p} \approx p$ в области $p < 10^{-2}$.

Метод можно обобщить и на случай СК с произвольной скоростью. Для примера рассмотрим СК со скоростью $R = 2/3$ и порождающей матрицей

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & 0 \\ z^{-2} & 1 & z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Это порождающая матрица несистематического СК, решетчатая диаграмма которого имеет $2^v = 8$ состояний, где v – число ячеек памяти при канонической реализации кодера. Кодовые символы этого СК удовлетворяют проверочному рекуррентному уравнению порядка $v = 3$

$$y_1^{(i-2)} + y_2^{(i-1)} + (y_3^{(i-3)} + y_3^{(i)}) = 0,$$

что эквивалентно следующей проверочной матрице вида

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= [h_1(z) \ h_2(z) \ h_3(z)] = \\ &= [z^{-2} \ z^{-1} \ z^{-3} + 1]. \end{aligned}$$

Это следует и из непосредственной проверки свойства ортогональности порожда-

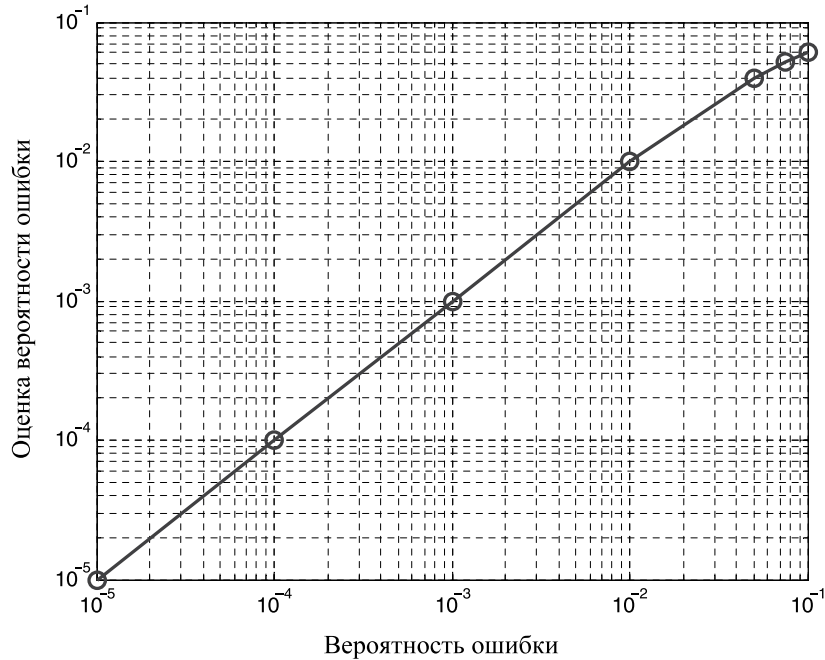


Рис. 2. Зависимость оценки вероятности ошибки в канале от вероятности ошибки

ющей и проверочных матриц:

$$\mathbf{G}(z)\mathbf{H}^T(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & 0 \\ z^{-2} & 1 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z^{-2} \\ z^{-1} \\ z^{-3} + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (z^{-2} + z^{-2} + 0) + (z^{-4} + z^{-1} + z^{-4} + z^{-1}) = 0.$$

При кодировании таким СК в систематическом виде, когда $y_1^{(i)} = u_1^{(i)}$ и $y_2^{(i)} = u_2^{(i)}$, получаем, что символ $y_3^{(i)}$ должен удовлетворять рекуррентному уравнению $u_1^{(i-2)} + u_2^{(i-1)} + (y_3^{(i-3)} + y_3^{(i)}) = 0$, вид которого можно описать матрицей

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^{-2}}{z^{-3} + 1} \\ \frac{z^{-1}}{z^{-3} + 1} \end{bmatrix},$$

где коэффициенты полинома $(z^{-3} + 1)$ определяют обратную связь в схеме РСК. При этом порождающая матрица при таком систематическом кодировании может быть представлена в виде

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{P}(z)] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{z^{-2}}{z^{-3} + 1} \\ 0 & 1 & \frac{z^{-1}}{z^{-3} + 1} \end{array} \right],$$

где пунктирной вертикальной линией для наглядности единичная подматрица \mathbf{I}_2 отделена от подматрицы $\mathbf{P}(z)$. Непосредственной проверкой снова убеждаемся в справедливости свойства ортогональности порождающей и проверочных матриц:

$$\mathbf{G}(z)\mathbf{H}^T(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{z^{-2}}{z^{-3} + 1} \\ 0 & 1 & \frac{z^{-1}}{z^{-3} + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z^{-2} \\ z^{-1} \\ z^{-3} + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (z^{-2} + 0 + z^{-2}) + (0 + z^{-1} + z^{-1}) = 0.$$

Рассмотренные последние две порождающие матрицы СК для несистематического и систематического кодирования используются при решетчато-кодовой модуляции (РКМ) сигналами с квадратурной амплитудной модуляцией (КАМ) [5]. На рис. 3 представлена модель, в которой используется такой несистематический СК.

Модель инициализируется следующими строками на языке MATLAB:

```
G=poly2trellis([2 3], [2 1 0; 1 4 2]);
Ht=poly2trellis([1 1 4], [1; 1; 11]);
Q=1+1+2;
```

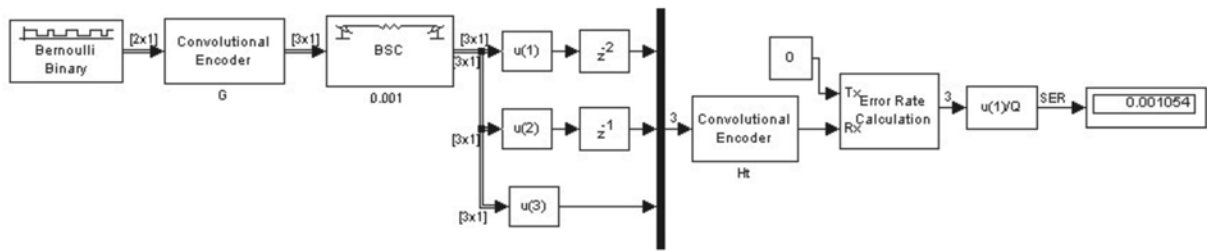


Рис. 3. Модель оценки вероятности ошибки для СК со скоростью $R = 2/3$

В общем случае СК со скоростью $R = k/n$ можно определить как *рекуррентную последовательность*, удовлетворяющую системе проверок, которая описывается проверочной матрицей $\mathbf{H}(z)$ размером $(n - k) \times n$. При этом матрица $\mathbf{G}(z)$, порождающая эту последовательность, удовлетворяет соотношению ортогональности вида

$$\mathbf{G}(z)\mathbf{H}^T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-k}$

где справа – «нулевая» квадратная матрица размера $(n - k)$. При систематическом кодировании таким кодом правила вычисления $(n - k)$ избыточных символов, очевидно, описываются матрицей $\mathbf{P}(z)$ размера $k \times (n - k)$.

Проиллюстрируем это для случая $k > 1$. Определим СК проверочной матрицей вида

$$\mathbf{H}(z) = [h_1(z) \quad h_2(z) \quad h_3(z)] =$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{0z^{-4} + 1z^{-3}}_1 + \underbrace{1z^{-2} + 1z^{-1} + 0}_6 \\ \underbrace{0z^{-4} + 0z^{-3}}_0 + \underbrace{1z^{-2} + 1z^{-1} + 0}_4 \\ \underbrace{1z^{-4} + 0z^{-3}}_2 + \underbrace{0z^{-2} + 1z^{-1} + 1}_1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица определяет рекуррентное уравнение СК с $2^v = 16$ состояниями, используемого в РКМ сигналами с КАМ [5].

Здесь также представлена восьмеричная запись полиномов проверочной матрицы, часто применяемая в литературе по сверточному кодированию. Обратим внимание, что в такой записи полиномов, в отличие от записи полиномов порождающей матрицы, старший разряд соответствует минимальной степени полинома, равной $-v$. При этом

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^{-3} + z^{-2} + z^{-1}}{z^{-4} + 1} \\ \frac{z^{-2} + z^{-1}}{z^{-4} + 1} \\ \frac{z^{-4} + z^{-1} + 1}{z^{-4} + 1} \end{bmatrix}$$

и порождающая матрица при систематическом кодировании есть

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{P}(z)] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \left| \frac{z^{-3} + z^{-2} + z^{-1}}{z^{-4} + 1} \right. \\ 0 & 1 & 0 & \left| \frac{z^{-2} + z^{-1}}{z^{-4} + 1} \right. \\ 0 & 0 & 1 & \left| \frac{z^{-4} + z^{-1} + 1}{z^{-4} + 1} \right. \end{bmatrix}.$$

Итак, в статье продемонстрирован метод оценки вероятности ошибки двоичного символа на выходе канала. Для реализации метода в приемном устройстве требуется использовать простой в реализации формирователь синдрома сверточного кода. Метод может использоваться при вычислении отношения правдоподобия значений кодовых символов для декодеров с «мягкими» решениями демодулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варгаузин В.А., Цикин И.А.** Методы повышения энергетической и спектральной эффективности в цифровой радиосвязи. СПб.: БХВ-Петербург, 2013. 352 с.
2. **Johannesson R., Zigangirov K.** Fundamentals of Convolutional Coding. IEEE Press, 1999. 426 p.
3. **Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P.** Near Shannon limit error-correcting coding: Turbo codes // In Proc. IEEE Internat. Conf. Commun. Geneva, Switzerland, 1993. Pp. 1064–1070.
4. **Viterbi A.J.** An Intuitive Justification and a Simplified Implementation of the MAP Decoder for Convolutional Codes // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 1998. Vol. 16. No. 2. Pp. 260–264.
5. **Ungerboeck G.** Channel coding with multilevel/phase signals // IEEE Transactions on Information Theory. 1982. Vol. IT-28. No. 1. Pp. 55–67.

REFERENCES

1. **Vargauzin V.A., Tsikin I.A.** *Metody povysheniya energeticheskoy i spektralnoy effektivnosti v tsifrovoy radiosvyazi*, St. Petersburg: BHV-Petersburg Publ., 2013, 352 p. (rus)
2. **Johannesson R., Zigangirov K.** *Fundamentals of Convolutional Coding*, IEEE Press, 1999, 426 p.
3. **Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P.** Near Shannon limit error-correcting coding: Turbo codes. *In Proc. IEEE Internat. Conf. Commun.*, Geneva, Switzerland, 1993, Pp. 1064–1070.
4. **Viterbi A.J.** An Intuitive Justification and a Simplified Implementation of the MAP Decoder for Convolutional Codes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 1998, Vol. 16, No. 2, Pp. 260–264.
5. **Ungerboeck G.** Channel coding with multilevel/phase signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1982, Vol. IT-28, No. 1, Pp. 55–67.

ВАРГАУЗИН Виктор Анатольевич — доцент кафедры радиотехники и телекоммуникаций Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: var@mail.spbstu.ru

VARGAUZIN, Victor A. *St. Petersburg State Polytechnical University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: var@mail.spbstu.ru