УДК 517.928

В.И. Качалов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

ГОЛОМОРФНЫЕ ПО ПАРАМЕТРУ ИНТЕГРАЛЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

На основе гомоморфизмов алгебр голоморфных функций от различного числа переменных строятся голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенного уравнения второго порядка. Из построенных интегралов следует теорема о предельном переходе.

ГОМОМОРФИЗМ, ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД, ПСЕВДОГОЛОМОРФНОЕ РЕШЕНИЕ, СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ, КОММУТАЦИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ.

Введение

Основу качественной теории сингулярных возмущений составляют предельные теоремы. Каким бы методом ни решалась сингулярно возмущенная задача, вопрос о пределе решения при стремлении параметра к нулю остается одним из главных [1–3]. Фундаментальной в теории сингулярных возмущений является теорема А.Н. Тихонова о предельном переходе [1]. Понятие псевдоаналитического решения, введенное С.А. Ломовым в рамках метода регуляризации, автоматически обеспечивает данный предельный переход [4]. Однако не все сингулярно возмущенные задачи имеют такие решения. В настоящей статье на основе гомоморфизмов алгебр голоморфных функций от различного числа переменных [9] строятся голоморфные по параметру интегралы дифференциальных уравнений второго порядка. Из построенных интегралов следуют утверждения о предельном переходе, которые рассматривались ранее (например, с точки зрения метода верхних и нижних решений [7]).

Гомоморфизмы и голоморфные по параметру интегралы уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = h(x, y), \tag{1}$$

где $h(x, y)$ – вещественно-голоморфная в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le a\}$$

функция.

Напомним, что функция $f(x, y)$ называется вещественно-голоморфной на компакте $G \subset R^2$, если существуют положительные константы M и C такие, что

$$| D^\alpha f | \le MC^{|\alpha|}(| \alpha | !)\ \forall (x, y) \in G,$$
$$| \alpha | = 0, 1, 2, \dots .$$

Здесь

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} y}, | \alpha | = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Далее, пусть функция $h(x, y)$ имеет единственный корень $y = \varphi(x)$, вещественно-голоморфный на отрезке [0; 1], причем кривая $y = \varphi(x)$ принадлежит Π. Обозначим через Π_γ множество

$$\{(x, y) \in \Pi : | h(x, y) | \ge \gamma > 0\},$$

затем сведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = h(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

и составим уравнение интегралов этой системы:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y}\right) + h(x, y)\frac{\partial U}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Пусть

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$\varepsilon LU + h(x,y)\frac{\partial U}{\partial v} = 0.$$

Будем искать решение уравнения (3) в виде ряда по степеням ε:

$$U(x,y,v,\varepsilon) = U_0(x,y,v) + \varepsilon U_1(x,y,v) + \ldots \quad (4)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов,

$$\begin{aligned} &U_0(x,y) = \psi(x,y); \\ &h(x,y)\frac{\partial U_1}{\partial v} = -LU_0; \\ &h(x,y)\frac{\partial U_1}{\partial v} = -LU_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &h(x,y)\frac{\partial U_m}{\partial v} = -LU_{m-1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \quad (5)$$

Фиксируем $\gamma > 0$. Тогда на множестве Π_γ имеем:

$$\begin{aligned} &U(x,y,v,\varepsilon) \equiv A_\varepsilon[\psi(x,y)] = \\ &= \psi(x,y) - \varepsilon\int_{v_0}^{v}\frac{L\psi}{h(x,y)}dv_1 + \\ &+\varepsilon^2\int_{v_0}^{v}\frac{dv_1}{h(x,y)}L\left(\int_{v_0}^{v_1}\frac{L\psi}{h(x,y)}dv_2\right) - \\ &-\varepsilon^3\int_{v_0}^{v}\frac{dv_1}{h(x,y)}L\left(\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv_2}{h(x,y)}\times\right. \\ &\left.\times L\left(\int_{v_0}^{v_2}\frac{L\psi}{h(x,y)}dv_3\right)\right) + \ldots . \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\psi(x,y)$ – произвольная, голоморфная на прямоугольнике Π, функция; v_0 – произвольное число.

Докажем сходимость ряда (6) в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$. Для этого нам понадобится элементарная лемма, которая доказывается методом математической индукции.

Лемма 1. *Пусть функции $g_1(t)$, ..., $g_n(t)$ дифференцируемы n раз в некоторой окрестности точки t_0. Тогда, если в выражении*

$$(g_n(t)(g_{n-1}(t)(\ldots(g_1(t))')'\ldots)'$$

раскрыть скобки по формуле производной произведения и заменить $g_r^{(s)}$, на $s!$ (где $1 \le r \le n, 0 \le s \le n\}$), то полученная сумма будет равна $(2n - 1)!!$.

Применим лемму 1 для оценки

$$\begin{aligned} &U_m(x,y,v) = \int_{v_0}^{v}\frac{dv_1}{h(x,y)}L\left(\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv_2}{h(x,y)}\times\right. \\ &\left.\times L\left(\int_{v_0}^{v_2}\frac{dv_3}{h(x,y)}\ldots L\left(\int_{v_0}^{v_{m-1}}\frac{L\psi}{h(x,y)}dv_m\right)\right)\ldots\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Если раскрыть скобки в выражении

$$L\left(\frac{1}{h}L\left(\frac{1}{h}\ldots L\left(\frac{1}{h}(L\psi)\right)\right)\ldots\right)$$

и заменить производную порядка $|\alpha|$ от $1/h$ на $M_\gamma C^{|\alpha|}(|\alpha|!)$, а производную того же порядка от ψ на $N_\gamma C^{|\alpha|}(|\alpha|!)$, где M_γ, N_γ и C – некоторые положительные константы, то полученная сумма будет иметь вид

$$M_\gamma^{m-1}N_\gamma C^m[(2m-1)!!](v+1)^m.$$

Действительно, оценка производной зависит только от ее порядка и не зависит от того, по какой переменной и сколько раз производилось дифференцирование (лишь бы $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha|$). В этом смысле можно заменить x и y на одну переменную. Обозначим ее через t. Но тогда оператор L превратится в оператор $\tilde{L} = (v+1)(\partial/\partial t)$, для которого уже верна лемма 1. В итоге имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &|U_m(x,y,v)| \le M_\gamma^{m-1}N_\gamma C^m[(2m-1)!!]\times \\ &\times\left|\int_{v_0}^{v}dv_1\int_{v_0}^{v_1}dv_2\ldots\int_{v_0}^{v_{m-1}}(v+1)^m dv_m\right| \le \\ &\le\frac{M_\gamma^{m-1}N_\gamma[(2m-1)!!]\,|v-v_0|^m\,\|v|+1|^m\,C^m}{m!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что $M_\gamma \to \infty$ при $\gamma \to 0$, поскольку неограниченно возрастает максимум модуля $1/h(x,y)$ на множестве Π_γ, когда $\Pi_\gamma \to \Pi$. Из оценки (8) следует равномерная сходимость ряда (4) на множестве

$$\tilde{\Pi}_{\gamma\delta} = \Pi_\gamma \times \{v : |v - v_0| \le \delta\},$$

где δ – произвольное положительное число в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Итак, интеграл системы (2), определяемый формулой (6), представляет собой голоморфную функцию в точке $\varepsilon = 0$. С другой стороны, формула задает линейное (при каждом ε из некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$) отображение A_ε алгебры $\mathcal{A}(\Pi)$ функций двух переменных (x, y), голоморфных на прямоугольнике Π, в алгебру $\mathfrak{A}(\tilde{\Pi}_{\gamma\delta})$ функций трех переменных (x, y, v), голоморфных на множестве $\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}$. Обозначим через

$$U^{(1)}(x, y, v, \varepsilon) = A_\varepsilon[x];\ \ U^{(2)}(x, y, v, \varepsilon) = A_\varepsilon[y]$$

два независимых интеграла системы (2), являющихся образами соответственно элементов x и y алгебры $\mathcal{A}(\Pi)$ (независимость интегралов очевидна).

Пусть $\psi(x, y) \in \mathcal{A}(\Pi)$, тогда в соответствии с общей теорией систем дифференциальных уравнений, существует дифференцируемая функция Ψ двух переменных такая, что

$$A_\varepsilon[\psi(x, y)] = \Psi(A_\varepsilon[x], A_\varepsilon[y]). \tag{9}$$

Полагая в равенстве (9) $v = v_0$ (см. формулу (6)), будем иметь

$$\psi(x, y) = \Psi(x, y).$$

Следовательно, равенство (9) примет вид коммутационного соотношения (см. работу [5]):

$$A_\varepsilon[\psi(x, y)] = \psi(A_\varepsilon[x], A_\varepsilon[y]). \tag{10}$$

С помощью полученного соотношения (10) докажем следующее утверждение.

Утверждение. A_ε *— семейство голоморфных в точке* $\varepsilon = 0$ *(равномерно на* Π_γ*) гомоморфизмов алгебры* $\mathcal{A}(\Pi)$ *в алгебру* $\mathfrak{A}(\tilde{\Pi}_{\gamma\delta})$.

Действительно, пусть

$$\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathcal{A}(\Pi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon[\alpha(x, y)\beta(x, y)] = A_\varepsilon[(\alpha\beta)(x, y)] = \\ &= (\alpha\beta)(A_\varepsilon[x], A_\varepsilon[y]) = \alpha(A_\varepsilon[x], A_\varepsilon[y]) \times \\ &\times \beta(A_\varepsilon[x], A_\varepsilon[y]) = A_\varepsilon[\alpha(x, y)]A_\varepsilon[\beta(x, y)]. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

О методе голоморфной регуляризации

Рассмотрим более общее уравнение

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = h\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \varepsilon > 0 \tag{11}$$

с начальными условиями

$$y(0,\varepsilon) = y_0,\ y'(0,\varepsilon) = v_0. \tag{12}$$

Пусть $\mathfrak{A}(\tilde{\Pi}_\delta)$ — алгебра функций трех переменных (x, y, v), голоморфных на множестве

$$\tilde{\Pi}_\delta = \Pi \times \{v : |v - v_0| \le \delta\}.$$

Теорема 1. *Если функция* $h(x, y, v) \in \mathfrak{A}(\tilde{\Pi}_\delta)$ *и не обращается на множестве* $\tilde{\Pi}_\delta$ *в нуль, то отображения*

$$B_\varepsilon : \mathcal{A}(\Pi) \to \mathfrak{A}(\tilde{\Pi}_\delta),$$

заданные формулой

$$\begin{aligned} (B_\varepsilon\varphi)(x, y, v) = \varphi(x, y) - \varepsilon\int_{v_0}^{v}\frac{L\varphi dv_1}{h(x, y, v_1)} + \\ + \varepsilon^2\int_{v_0}^{v}\left(L\int_{v_0}^{v_1}\frac{L\varphi dv_2}{h(x, y, v_2)}\right)\frac{dv_1}{h(x, y, v_1)} - \\ - \varepsilon^3\int_{v_0}^{v}\left(L\int_{v_0}^{v_1}\left(L\int_{v_0}^{v_2}\frac{L\varphi dv_3}{h(x, y, v_3)}\right)\frac{dv_2}{h(x, y, v_2)}\right)\times \\ \times\frac{dv_1}{h(x, y, v_1)} + \cdots, \end{aligned} \tag{13}$$

образуют голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ *семейство гомоморфизмов алгебры* $\mathcal{A}(\Pi)$ *в алгебру* $\mathfrak{A}(\tilde{\Pi}_\delta)$, *удовлетворяющих коммутационному соотношению*

$$\begin{aligned} &(B_\varepsilon\varphi)(x, y, v) = \varphi((B_\varepsilon x)(x, y, v), \\ &(B_\varepsilon y)(x, y, v)), \forall\varphi(x, y) \in \mathcal{A}(\Pi). \end{aligned} \tag{14}$$

При этом $\mathrm{Im} B_\varepsilon$ *состоит из интегралов системы*

$$\begin{cases} y' = v; \\ \varepsilon v' = h(x, y, v), \end{cases} \tag{15}$$

голоморфных в точке $\varepsilon = 0$ *(равномерно на* $\tilde{\Pi}_\delta$*), а интегралы, участвующие в правой части коммутационного соотношения, являются независимыми.*

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме метода, изложенного в предыдущем разделе, с использованием леммы 1.

Замечание. Приведенная теорема 1 позволяет дополнить теорему Пуанкаре о разложении [8]. Действительно, если задана задача Коши

$$y'' = h(x, y, y', \varepsilon); y(0,\varepsilon) = y_0, y'(0,\varepsilon) = v_0, \tag{16}$$

и функция $h(x, y, v, \varepsilon)$ голоморфна в точке

$(0, y_0, v_0, 0)$, то решение $y(x,\varepsilon)$ этой задачи голоморфно в точке (0, 0) и наследует, таким образом, голоморфную зависимость от ε правой части уравнения (16). Требовать того же самого от решения сингулярно возмущенного уравнения (1), очевидно, нельзя. И тем не менее, в соответствии с теоремой 1, не сами решения, так интегралы системы (15) наследуют голоморфную зависимость коэффициентов уравнения от параметра ε, который входит и в уравнение, и в систему голоморфным (даже целым) образом.

Таким образом, впервые в теории асимптотического интегрирования доказано существование такой характеристики сингулярно возмущенной задачи, которая представляет собой сходящийся в обычном смысле ряд по степеням малого параметра ε.

Изложим схему метода голоморфной регуляризации. Вначале строятся независимые, голоморфные в точке $\varepsilon = 0$, интегралы

$$(B_\varepsilon\varphi)(x,y,v);\ (B_\varepsilon(y-y_0))(x,y,v),$$

причем

$$\varphi(0)=0, \varphi'(x)<0\, \forall x\in[0,\ 1].$$

Ясно, что соответствующие им первые интегралы

$$\begin{cases}(B_\varepsilon\varphi)(x,y,v)=0;\\ (B_\varepsilon(y-y_0))(x,y,v)=0,\end{cases} \tag{17}$$

определяют решение $y(x,\varepsilon)$ задачи Коши (11),(12).

Далее, с помощью формулы (13) первое уравнение системы (17) можно представить следующим образом:

$$\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}=\varphi'(x)\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv_1}{h(x,y,v_1)}-$$
$$-\varepsilon\int\limits_{v_0}^{v}\left(L\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{\varphi'\,dv_2}{h(x,y,v_2)}\right)\frac{dv_1}{h(x,y,v_1)}+\ \dots\ . \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что если уравнение

$$\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}=\varphi'(x)\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv_1}{h(x,y,v_1)} \tag{19}$$

имеет решение

$$v=V_0\left(x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right),$$

равномерно ограниченное при $\varepsilon\to+0$ на отрезке [0, 1] при каждом фиксированном y из некоторой окрестности точки y_0, то для нахождения $y(x,\varepsilon)$ к уравнению (18) (вместе со вторым уравнением системы (17)) можно применить теорему о неявной функции. Именно так возникла концепция псевдоголоморфного решения [5, 10].

В качестве примера использования метода голоморфной регуляризации рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon y''=e^{-2xy}-(y')^2,\ x\in[0,\ 1/2];$$
$$y(0,\varepsilon)=y_0,\ y'(0,\varepsilon)=0.$$

Подставим последовательно в равенство (13) вместо $\varphi(x,y)$ сначала $-x$, а затем $y-\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – точое решение предельной начальной задачи:

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=e^{-x\bar{y}},\ \bar{y}(0)=0,$$

тогда получим систему, аналогичную системе (17), заменив во втором уравнении $(y-y_0)$ на $y-\alpha(x)$:

$$\begin{cases}-x+\varepsilon\int\limits_0^v\frac{dv_1}{e^{-2xy}-v_1^2}+o(\varepsilon)=0;\\ y-\alpha(x)+\varepsilon\int\limits_0^v\frac{\alpha'(x)-v_1}{e^{-2xy}-v_1^2}\,dv_1+o(\varepsilon)=0.\end{cases}$$

Наконец, пользуясь теоремой о неявной функции, найдем решение поставленной задачи Коши:

$$y=\alpha(x)-\varepsilon\cdot\ln\left(1+\operatorname{th}\frac{xe^{-x\alpha(x)}}{\varepsilon}\right)+o(\varepsilon),\ \varepsilon\to0.$$

Решение $\alpha(x)$ предельной задачи можно построить в виде ряда по степеням x, равномерно сходящегося на отрезке [0, 1/2]. В частности,

$$\alpha(x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Заметим, что существование ограниченного при $\varepsilon\to+0$ решения уравнения (17), составленного для рассматриваего примера, следует из свойства асимптотической устойчивости точки покоя $\tilde{v}_0=e^{-xy}$ так называемого присоединенного уравнения:

$$\frac{d\tilde{v}}{ds} = e^{-2xy} - \tilde{v}^2,$$

равномерно по $x \in [0,\ 1/2]$ и $y \in [0, \delta]$ при любом $\delta > 0$, что находится в полном соответствии с теоремой Тихонова о предельном переходе [2].

В случае уравнения (1), когда

$$h(x, y, v) \equiv h(x, y),$$

всякая функция $V_0(x,\ \varphi(x)/\varepsilon)$, удовлетворяющая уравнению (19), очевидно, будет неограниченной при любом способе стремления ε к нулю, и в этих условиях можно говорить лишь о предельном переходе.

В следующем разделе статьи на примере уравнения химической кинетики будет показано, как из голоморфности интегралов следует предельный переход. Поведение решения этого уравнения при стремлении параметра к нулю подробно описано в книге [7]. Однако мы считаем, что указанный подход можно применять и в тех случаях, когда использование метода верхних и нижних решений затруднено.

Предельная теорема

Рассмотрим интеграл $U^1(x, y, v, \varepsilon)$. Ясно, что первый интеграл $U^1(x, y, v, \varepsilon) = \sigma$, или в развернутом виде

$$x - \sigma = \varepsilon\left(\frac{v - v_0}{h(x, y)} + \varepsilon\left(h'_x\,\frac{(v - v_0)^2}{2} + h'_y\,\frac{(v - v_0)^3}{3}\right)h^{-3}(x, y) + \ldots\right) \tag{20}$$

при каждом фиксированном $\sigma \in [0,1]$ определяет решения системы (2) такие, что $v(\sigma, \varepsilon) = v_0$.

Далее будем считать, что решение $y(x, \varepsilon)$ уравнения (1) принадлежит классу $V_h[0,\ 1]$, если оно существует на отрезке [0, 1], и выполнены следующие два условия:

$$1.\ \forall\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\exists M_\sigma > 0:$$

$$\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\forall x \in [\sigma, 1-\sigma]\ |\ y'(x, \varepsilon)| \le M_\sigma;$$

$$2.\ \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \text{кривая}$$

$$\Gamma_\varepsilon = \{(x, y(x, \varepsilon));\ x \in [0,\ 1]\}$$

принадлежит П.

Если $y(x, \varepsilon) \in V_h[0,\ 1]$, то $v(x, \varepsilon) = y'(x, \varepsilon)$ ограничено на отрезке $[\sigma, 1-\sigma]$. Поэтому правая часть интеграла (20), которую мы обозначим через $W^1(x, y, v, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ также будет стремиться к нулю равномерно на множестве $\tilde{\Pi}_{\gamma\delta}$ при каждых фиксированных значениях $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, определяемых константой M_σ из условия 1.

Теорема 2 (о предельном переходе). *Если $y(x, \varepsilon) \in V_h[0,\ 1]$, то имеет место предельный переход*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \forall x \in (0;\ 1). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $y(x, \varepsilon)$ – решение уравнения (1) из класса $V_h[0,1]$. Предположим противное, т. е. что для некоторого $x \in (0,\ 1)$ предел (21) не имеет места, и выберем $\sigma \in (0,\ 1/2)$ так, чтобы $x \in (\sigma,\ 1-\sigma)$. Это означает, что существует последовательность $\varepsilon_k \to 0$ и константа $\gamma_1 > 0$ такие, что $|\ y_k - \varphi(x)| > \gamma_1$, где $y_k = y(x, \varepsilon_k)$. Но тогда найдется положительная константа γ_2, для которой будет выполнено неравенство $|\ h(x, y_k)| > \gamma_2$ при всех k = 1, 2, ..., из которого следует, что $(x, y_k) \in \Pi_{\gamma_2}$. Согласно вышеизложенным рассуждениям, $W^1(x, y, v, \varepsilon_k) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно на множестве $\tilde{\Pi}_{\gamma_2\delta}$.

С другой стороны,

$$W^1(x, y(x, \varepsilon_k), v(x, \varepsilon_k), \varepsilon_k) = x - \sigma,$$

поскольку $y(x, \varepsilon)$ есть решение уравнения (1). Отсюда следует, что $x = \sigma$, а это противоречит выбору σ.

Теорема доказана.

Пример краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = (y - \varphi(x))^{2k+1};\qquad y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0\left(k \in N,\ \varepsilon > 0\right). \tag{22}$$

Разрешимость задачи (22) следует как из теоремы об обратной функции в банаховом пространстве, так и из принципа Шаудера [6]. Наложим на функцию $\varphi(x)$ следующие условия:

1. $\varphi(x)$ вещественно-голоморфна на отрезке [0, 1];

2. $\varphi''(x) < 0 \, \forall x \in [0,1]$;

3. $\varphi(0) \geq 0,\ \varphi(1) \geq 0$.

Лемма 2. *При выполнении условий 1–3 решение задачи (22) удовлетворяет неравенству*

$$0 \leq y(x,\varepsilon) \leq \varphi(x) \, \forall x \in [0,\ 1] \, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

При этом интегральная кривая $y = y(x,\varepsilon)$ является выпуклой на рассматриваемом отрезке.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существует дуга l_ε кривой $y = y(x,\varepsilon)$, лежащая выше кривой $y = \varphi(x)$ и пересекающая ее (в силу краевых условий и условия 3) в точках T_1 и T_2 с абсциссами x_1 и x_2 соответственно ($x_1 < x_2$). Как следует из уравнения (22), дуга l_ε является вогнутой на отрезке $[x_1,\ x_2]$, а значит лежит ниже хорды $T_1 T_2$. Но, в соответствии с условием 2, дуга кривой $y = \varphi(x)$ с концами в точках T_1 и T_2 является выпуклой и поэтому лежит выше хорды $T_1 T_2$, а это противоречит предположению, что l_ε находится выше кривой $y = \varphi(x)$. Выпуклость кривой $y = y(x,\varepsilon)$ на отрезке $[0,1]$ (при каждом $\varepsilon > 0$) следует из уравнения (22).

Следующая лемма имеет тривиальный характер и доказывется с помощью простейших геометрических рассуждений.

Лемма 3. *Если* $\psi(x) \geq 0$ *и* $\psi''(x) < 0 \, \forall x \in [0,1]$, *то для любого* $\sigma \in (0,\ 1/2)$ *на отрезке* $[\sigma,\ 1-\sigma]$ *выполняется неравенство* $|\psi'(x)| < R/\sigma$, *где* $R = \max\limits_{x\in[0,1]} \psi(x)$.

Доказательство. Вернемся к краевой задаче (22). Из леммы 2 следует, что кривая $y = y(x,\varepsilon)$ является выпуклой, а также находится ниже кривой $y = \varphi(x)$ и выше оси абсцисс при каждом $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\max\limits_{x\in[0,1]} y(x,\varepsilon) \leq R_1$, где $R_1 = \max\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x)$. Поэтому к $y(x,\varepsilon)$ можно применить лемму 2:

$$|\, y'(x,\varepsilon) \,| \leq R_1 / \sigma \quad \forall x \in [\sigma,\ 1-\sigma],$$

т. е. $y(x,\varepsilon) \in V_h[0,\ 1]$.

Таким образом, в соответствии с предельной теоремой,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y(x,\varepsilon) = \varphi(x) \ \ \forall x \in (0;1).$$

Лемма 3 доказана.

Замечание. Уравнение (22) встречается в химической кинетике, и условие принадлежности его решения классу $V_h[0,\ 1]$ является естественным.

Заключение

Предложенный в работе подход может быть использован в сильно нелинейных, сингулярно возмущенных системах дифференциальных уравнений при исследовании предельного перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.

2. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

3. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф**. Регуляризованные асимптотические решения интегродифференциальных уравнений типа Фредгольма с нестабильным спектральным значением ядра интегрального оператора // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 23–33.

4. **Ломов С.А., Качалов В.И.** Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Доклады РАН. 1993. Т. 334. № 6. С. 694–695.

5. **Качалов В.И.** Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 54–62.

6. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

7. **Чанг К., Хауэс Ф.** Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. М.: Мир, 1988. 247 с.

8. **Бибиков Ю.Н.** Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 232 с.

9. **Качалов В.И**. Гомоморфизмы в теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1660–1661.

10. **Качалов В.И.** Алгебраические основы теории сингулярно возмущенных уравнений // Доклады РАН. 2012. Т. 443. № 1. С. 7–8.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

КАЧАЛОВ Василий Иванович – *кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт».*

111250, Россия, г. Москва, Красноказарменная ул., 14

kachalovvi@mpei.ru

Kachalov V.I. HOLOMORFIC IN THE PARAMETER INTEGRALS OF THE SECOND-ORDER EQUATIONS PERTURBED SINGULARLY AND LIMIT THEOREMS.

Holomorphic in the parameter integrals of the second-order equations perturbed singularly have been built up on the basis of homomorphisms of algebras of holomorphic functions of different numbers of variables. A limit transition theorem follows from those integrals.

HOMOMORPHISM, LIMIT TRANSITION, PSEUDOHOLOMORPHIC SOLUTION, EQUATION PERTURBED SINGULARLY, COMMUTATION RELATION.

REFERENCES

1. **Lomov S.A.** *Vvedenie v obshchuyu teoriyu singulyarnykh vozmushcheniy*. Moscow, Nauka, 1981, 400 p. (rus)

2. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.** *Asimptotichekie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*. Moscow, Nauka, 1973, 272 p. (rus)

3. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Regulyarizovannye asimptoticheskie resheniya integrodifferentsial'nykh uravneniy tipa Fredgol'ma s nestabil'nym spektral'nym znacheniem yadra integral'nogo operatora. *Vestnik MEI*, 2010, No. 6, pp. 23-33. (rus)

4. **Lomov S.A., Kachalov V.I.** Psevdoanaliticheskie resheniya singulyarno vozmushchennykh zadach. *Doklady RAN*, 1993, Vol. 334, No. 6, pp. 694-695. (rus)

5. **Kachalov V.I.** Golomorfnaya regulyarizatsiya singulyarno vozmushchennykh zadach. *Vestnik MEI*, 2010, No. 6, pp. 54-62. (rus)

6. **Trenogin V.A.** *Funktsional'nyy analiz*. Moscow, Nauka, 1980, 496 p. (rus)

7. **Chang K., Khaues F.** *Nelineynye singulyarno vozmushchennye kraevye zadachi*. Moscow, Mir, 1988, 247 p. (rus)

8. **Bibikov Yu.N.** *Obshchiy kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy*. Leningrad, Izd-vo LGU, 1981, 232 p. (rus)

9. **Kachalov V.I.** Gomomorfizmy v teorii differentsial'nykh uravneniy. *Differentssial'nye uravneniya*, 2011, Vol. 47, No. 11, pp. 1660-1661. (rus)

10. **Kachalov V.I.** Algebraicheskie osnovy teorii singulyarno vozmushchennykh uravneniy. *Doklady RAN*, 2012, Vol. 443, No. 1, pp. 7-8. (rus)

THE AUTHOR

KACHALOV Vasily I.

National Research University "Moscow Power Engineering Institute",

14 Krasnokazarmenya St., Moskow, 111250, Russia

kachalovvi@mpei.ru