

УДК 524.354.4

А.И. Цыган, Д.А. Шалыбков, Д.П. Барсуков, О.А. Гогличидзе

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

## АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ПОЛЯРНЫХ ШАПОК НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД ДЛЯ СЛУЧАЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ВЕЩЕСТВА ШАПОК

В статье рассматривается дифференциальное вращение жидких полярных шапок, вызванное магнитосферными токами, замыкающимися под поверхностью нейтронной звезды. При этом учтена анизотропия проводимости и вязкости вещества полярной шапки, связанная с сильным магнитным полем. Показано, что скорость этого вращения очень мала и почти весь электрический ток замыкается глубже — в твердой коре.

РАДИОПУЛЬСАР, НЕЙТРОННАЯ ЗВЕЗДА, МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ, АНИЗОТРОПНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ.

### Введение

Согласно современным представлениям, токовый механизм — это одна из основных причин торможения радиопульсаров (см., например, работы [1–5]). Рассматривается, как правило, область открытых силовых линий [6] (пульсарная трубка), по которой протекает электрический ток  $\mathbf{j}$  [5]. Для того чтобы нейтронная звезда не заряжалась по границе открытых и замкнутых силовых линий, в противоположном направлении течет возвратный ток [2, 7, 8]. В результате суммарный ток по пульсарной трубке оказывается равным нулю [5, 9]. Возвратный ток (весь или частично) может течь и внутри пульсарной трубки — вдоль силовых линий магнитного поля, на которых расположены внешние зазоры [9]. Эти токи замыкаются под поверхностью нейтронной звезды; при этом направление части электрического тока оказывается перпендикулярным вектору индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , что приводит к появлению силы Лоренца  $(1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ , действующей на вещество нейтронной звезды и тормозящей ее вращение [2]. При поверхностной температуре  $T_{surf} > 10^5$  К поверхностные

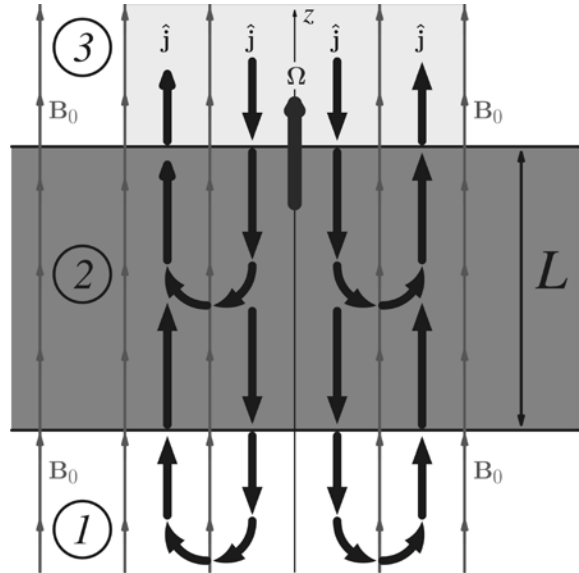


Рис. 1. Схема к постановке задачи: на поверхности твердой коры (1)  $z = -L$  нейтронной звезды лежит слой жидкости (2) толщиной  $L$  (область выделена серым тоном), а над ним расположена область магнитосферы (3) ( $z > 0$ ). Тонкие стрелки — силовые линии магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}_0$ ; жирные черные стрелки — электрические токи  $\mathbf{j}$ , поступающие из магнитосферы и протекающие в нейтронной звезде;  $\Omega$  — вектор угловой скорости вращения твердой коры вокруг оси  $z$  (направлена против силы тяжести)

слои нейтронной звезды представляют собой океан глубиной  $L$ , равной примерно 10 – 100 м, ниже которого расположена твердая кора [10]. Электрический ток может замыкаться как в глубине твердой коры, так и в океане (рис. 1). При этом сила Лоренца, приложенная к жидкости, приводит к появлению дифференциального вращения.

В данной статье мы будем рассматривать только случай нерелятивистского стационарного осесимметричного течения несжимаемой жидкости, пренебрегая всеми эффектами общей теории относительности, а также поправками порядка  $1/c^2$  [2, 11]. При этом мы будем учитывать анизотропию проводимости и вязкости вещества жидкого слоя полярных шапок, связанную с магнитным полем.

#### Уравнения магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости

Рассмотрим тонкий слой жидкости, лежащий на поверхности нейтронной звезды. Толщину слоя  $L$  будем считать малой по сравнению с радиусом нейтронной звезды  $R_{ns} \approx 10^6$  см, т. е.  $L \ll R_{ns}$  [10]. Пренебрегая в связи с этим кривизной поверхности нейтронной звезды, будем считать слой жидкости плоским и бесконечным. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \phi, z)$  с осью, направленной вверх (против силы тяжести). Жидкий слой занимает область  $-L < z < 0$ ; при  $z < -L$  расположена твердая кора, которая вращается твердотельно, с угловой скоростью  $\Omega = \Omega e_z$ , а при  $z > 0$  располагается пульсарная магнитосфера, заполненная крайне разреженной плазмой. Со стороны магнитосферы по магнитным силовым линиям пульсарной трубки подводится электрический ток  $\mathbf{j}$ , который может замыкаться как в области жидкого слоя, так и в области твердой коры (см. рис. 1). Наличие этого тока приводит к возникновению в слое дифференциального вращения жидкости. Будем считать жидкость в слое вязкой и хорошо проводящей. И чтобы найти течение жидкости, воспользуемся уравнениями магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости [12]:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -c \text{rot} \mathbf{E}; \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho (\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = \\ = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}_{vis} + \rho \mathbf{g}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0; \quad \rho = \text{const}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля;  $\mathbf{v}$  – скорость течения жидкости;  $\rho$ ,  $P$  – плотность и давление жидкости;  $F_{vis}^\alpha = \sigma_{vis}^{\alpha\beta}$  ( $\sigma_{vis}^{\alpha\beta}$  – тензор вязких напряжений);  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения ( $\mathbf{g} = g e_z$ ,  $g < 0$ ).

В силу тонкости слоя будем считать, что  $g \approx \text{const}$ . В данной работе рассматриваются только установившиеся течения, поэтому ограничимся нахождением только стационарных решений, когда все величины не зависят от времени  $t$ . Кроме того, чтобы упростить задачу, ограничимся соосным случаем и будем рассматривать только осесимметричные течения, когда все величины не зависят от азимутального угла  $\phi$ . Чтобы исключить из уравнения (1) электрическое поле  $\mathbf{E}$ , воспользуемся законом Ома, который запишем в следующем виде [13 – 15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \\ = R_\perp [\mathbf{e}_B \times [\mathbf{j} \times \mathbf{e}_B]] + R_\parallel \mathbf{e}_B (\mathbf{e}_B \cdot \mathbf{j}) - R_H [\mathbf{e}_B \times \mathbf{j}], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}_B = \mathbf{B} / B$ ;  $(R_\perp, R_\parallel, R_H)$  – компоненты тензора сопротивления [13].

Согласно работе [13], при  $B_0 \approx 10^{12}$  Гс для вещества на поверхности нейтронной звезды можно грубо оценить отношение сопротивлений как

$$\chi_H = \frac{R_H}{R_\perp} \sim \frac{1}{\omega_B \tau_{scat}} \sim 10^{-2} \ll 1;$$

$$\chi_\parallel = \frac{R_\parallel}{R_\perp} \sim \frac{1}{\omega_B^2 \tau_{scat}^2} \sim 10^{-4} \ll \chi_H,$$

где  $\omega_B$  – циклотронная частота ионов,  $\tau_{scat}$  – характерное время столкновений.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \frac{c^2}{4\pi} \text{rot}(R_\perp [\mathbf{e}_B \times [\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{e}_B]] + \\ + R_\parallel \mathbf{e}_B (\mathbf{e}_B \cdot \text{rot} \mathbf{B}) - R_H [\mathbf{e}_B \times \text{rot} \mathbf{B}]), \end{aligned} \quad (6)$$

где было учтено, что

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (7)$$

Рассмотрим сначала невозмущенное течение, когда к слою не подводится никакого электрического тока. Будем считать, что в этом случае жидкость вращается твердо-тельно, с той же угловой скоростью  $\Omega$ , что и кора, и запишем течение в виде

$$\mathbf{v} = \Omega r \mathbf{e}_\phi; \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z, \quad (8)$$

где  $\Omega = \text{const}$ ,  $\mathbf{B}_0 = \text{const}$ ;

$$\mathbf{j} = 0; \quad \sigma_{vis}^{\alpha\beta} = 0; \quad (9)$$

$$P = P_0(r, z) = \rho(-gz + \Omega^2 z^2 / 2). \quad (10)$$

Пусть теперь к слою подводится электрический ток  $\hat{\mathbf{j}} = \hat{j}_z(r) \mathbf{e}_z$ .

Создаваемое этим током течение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \Omega r \mathbf{e}_\phi + \delta \mathbf{u}; \\ \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{e}_z + \delta \mathbf{B}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$P = P_0(r, z) + \delta P.$$

Величину тока  $\mathbf{j}$  будем считать малой и в дальнейшем будем учитывать только поправки, линейные по величинам  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{B}$  и  $\delta P$ . Рассмотрим величину  $\mathbf{F}_{vis}$ . Согласно равенствам (9)), тензор натяжений  $\sigma_{vis}^{\alpha\beta}$  является величиной 1-го порядка малости. Поэтому при его вычислении можно положить  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ . Будем считать, что тензор вязких натяжений  $\sigma_{vis}^{\alpha\beta}$  задается выражением (4.41) из работы [15] (см. также [16]). Тогда с учетом (4) тензор  $\sigma_{vis}^{\alpha\beta}$  принимает вид [15, 16]:

$$\begin{aligned} \sigma_{vis}^{rr} / \rho &= -\frac{v_0 - \zeta_1}{2} W_{zz} + \\ &+ \frac{v_1}{2} (W_{rr} - W_{\phi\phi}) + v_3 W_{r\phi}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{vis}^{\phi\phi} / \rho &= -\frac{v_0 - \zeta_1}{2} W_{zz} - \\ &- \frac{v_1}{2} (W_{rr} - W_{\phi\phi}) - v_3 W_{r\phi}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sigma_{vis}^{r\phi} / \rho = v_1 W_{r\phi} - \frac{v_3}{2} (W_{rr} - W_{\phi\phi}) + v_3 W_{r\phi}; \quad (14)$$

$$\sigma_{vis}^{zz} / \rho = \left( v_0 + \frac{\zeta_1}{2} \right) W_{zz}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{vis}^{rz} / \rho &= v_2 W_{rz} + v_4 W_{\phi z}; \\ \sigma_{vis}^{\phi z} / \rho &= v_2 W_{\phi z} - v_4 W_{rz}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $v_A$  — коэффициенты кинематической сдвиговой вязкости ( $A = 1-4$ );  $\zeta_1$  — коэффициент второй кинематической объемной вязкости (коэффициент первой объемной вязкости не вошел в эти формулы ввиду условия (4));  $W_{\alpha\beta}$  — тензор «деформаций», который с учетом уравнения (4) и азимутальной симметрии течения принимает следующий вид:

$$W_{rr} = 2 \frac{\partial \delta u_r}{\partial r}; \quad W_{r\phi} = \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial r} - \frac{\delta u_\phi}{r}; \quad (16)$$

$$W_{\phi\phi} = \frac{2}{r} \delta u_r;$$

$$W_{rz} = \frac{\partial \delta u_r}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial r}; \quad W_{\phi z} = \frac{\partial \delta u_\phi}{\partial z}; \quad (17)$$

$$W_{zz} = 2 \frac{\partial \delta u_z}{\partial z}.$$

Будем для простоты предполагать, что в рассматриваемом приближении коэффициенты сдвиговой вязкости  $v_A$  ( $A = 1-4$ ), а также коэффициент второй объемной вязкости  $\zeta_1$  можно считать постоянными, т. е. не зависящими от координат. При этом, согласно работе [15], при  $B_0 \approx 10^{12}$  Гс отношения вязкостей  $\xi_A = v_A / v_0$  ( $A = 1-4$ ) могут быть оценены как

$$\xi_1 \sim \frac{1}{\omega_B^2 \tau_{scat}} \sim 10^{-4}; \quad \xi_2 \sim \frac{1}{\omega_B \tau_{scat}} \sim 10^{-2};$$

$$\xi_2 \approx 4\xi_1; \quad \xi_4 \approx 2\xi_3.$$

Заметим также, что согласно равенствам (9), величина  $\mathbf{j}$  тоже является величиной 1-го порядка малости и, соответственно, в правой части уравнений (5) и (6) можно положить  $\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_z$ ,  $\text{rot}\mathbf{B} = \text{rot}(\delta \mathbf{B})$ , а коэффициенты  $R_\perp$ ,  $R_\parallel$ ,  $R_H$  вычислять в нулевом приближении. Для того чтобы упростить задачу, предположим, что в нулевом приближении величины  $R_\perp$ ,  $R_\parallel$ ,  $R_H$  не зависят от координат.

Запишем все уравнения в безразмерном виде. Пусть  $l$  — характерный пространственный масштаб. Удобно в качестве  $l$  взять величину, сравнимую с размером полярной шапки  $R_{pc}$ ; и стоит отметить, что в этом

случае можно ожидать, что  $L \approx (10^{-2} - 10)l$ . Далее вместо  $r, z, L$  будем использовать безразмерные величины, сохранив для них те же самые обозначения, т. е.

$$r \rightarrow lr, \quad z \rightarrow lz, \quad L \rightarrow lL. \quad (18)$$

Положим

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \frac{\eta_{\perp}}{l} \mathbf{u}, \quad \delta \mathbf{B} = B_0 \mathbf{b}, \\ \delta P &= \frac{\rho v_0 \eta_{\perp}}{l^2} p, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \frac{B_0}{l} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (19)$$

и введем обозначения

$$\eta_{\perp} = \frac{c^2}{4\pi} R_{\perp}; \quad \text{Re} = \frac{\Omega l^2}{v_0}; \quad \text{Ha} = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho} \cdot \frac{l^2}{v_0 \eta_{\perp}}},$$

где  $\eta_{\perp}$  — перпендикулярная компонента тензора магнитной диффузии,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\text{Ha}$  — число Гартмана.

Для радиопулсара со значениями  $B_0 = 10^{12}$  Гс,  $P = 1$  с, полагая  $\rho \sim 10^4$  г/см<sup>3</sup> [10],  $v_0 \sim 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с [17],  $\sigma_{\parallel} \sim 10^{18}$  ед. СГС [18], а также  $\chi_{\parallel} \sim 10^{-4}$ , мы можем грубо оценить значения чисел Рейнольдса и Гартмана как  $\text{Re} \approx 10^{11}$  и  $\text{Ha} \sim 10^{12}$ .

С учетом всего вышеизложенного уравнения (6), (2) — (4) могут быть записаны как

$$-\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial^2 b_r}{\partial z^2} + L(b_r) + \chi_H \frac{\partial^2 b_{\phi}}{\partial z^2}; \quad (20)$$

$$-\frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} = \frac{\partial^2 b_{\phi}}{\partial z^2} - \chi_H \left( \frac{\partial^2 b_r}{\partial z^2} + L(b_r) \right) + \chi_{\parallel} L(b_{\phi}); \quad (21)$$

$$-\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial b_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2} -$$

$$- \chi_H \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial b_{\phi}}{\partial z} \right); \quad (22)$$

$$-2\text{Re} u_{\phi} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \text{Ha}^2 \left( \frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r} \right) +$$

$$+ (1 + \xi_1) L(u_r) + \xi_2 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - L(u_r) \right) + \quad (23)$$

$$+ \xi_3 L(u_{\phi}) + \xi_4 \frac{\partial^2 u_{\phi}}{\partial z^2};$$

$$2\text{Re} u_r = \text{Ha}^2 \frac{\partial b_{\phi}}{\partial z} + \xi_1 L(u_{\phi}) + \xi_2 \frac{\partial^2 u_{\phi}}{\partial z^2} - \quad (24)$$

$$- \xi_3 L(u_r) - \xi_4 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - L(u_r) \right); \quad (24)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \xi_2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - L(u_z) \right) + \\ &+ \xi_4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (25)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (26)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_r) + \frac{\partial b_z}{\partial z}, \quad (27)$$

где были введены обозначения

$$p_1 = \left( p - \frac{\zeta_1}{v_0} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \quad L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2}.$$

При написании уравнения (22) было учтено условие несжимаемости жидкости (26). Согласно равенству (27), можно положить

$$b_r = -\frac{\partial a_{\phi}}{\partial z}, \quad b_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_{\phi}), \quad (28)$$

и соответственно уравнения (20) и (22) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial^2 a_{\phi}}{\partial z^2} + L(a_{\phi}) = u_r + \chi_H \frac{\partial b_{\phi}}{\partial z}. \quad (29)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (21), получаем равенство

$$(1 + \chi_H^2) \frac{\partial^2 b_{\phi}}{\partial z^2} + \chi_{\parallel} L(b_{\phi}) = -\frac{\partial}{\partial z} (u_{\phi} + \chi_H u_r). \quad (30)$$

Учтем, что в рассматриваемом случае  $E_{\phi} = 0$  и поэтому  $\phi$ -ю компоненту уравнения (5) в линейном приближении можно записать в виде

$$\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r} = -\left( \chi_H \frac{\partial b_{\phi}}{\partial z} + u_r \right). \quad (31)$$

Подставим это выражение в равенство (23) и, соответственно, получим:

$$-2\text{Re} u_{\phi} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \text{Ha}^2 \left( \chi_H \frac{\partial b_{\phi}}{\partial z} + u_r \right) +$$

$$+ (1 + \xi_1) L(u_r) + \xi_2 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - L(u_r) \right) + \quad (32)$$

$$+ \xi_3 L(u_{\phi}) + \xi_4 \frac{\partial^2 u_{\phi}}{\partial z^2}.$$

Отметим также, что в рассматриваемом приближении компоненты электрического поля выражаются как

$$\frac{cE_r}{B_0} = -\Omega l r \left( 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right) - \frac{\eta_\perp}{l} (u_\phi + \chi_H u_r) - \frac{\eta_\perp}{l} (1 + \chi_H^2) \frac{\partial b_\phi}{\partial z}; \quad (33)$$

$$\frac{cE_z}{B_0} = -\Omega l r \frac{\partial a_\phi}{\partial z} + \frac{\eta_\perp}{l} \chi_{||} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_\phi); \quad (34)$$

$$E_\phi = 0, \quad (35)$$

а компоненты электрического тока  $\mathbf{J}$  можно записать в виде

$$J_r = -\frac{\partial b_\phi}{\partial z}; \quad J_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_\phi); \quad (36)$$

$$J_\phi = -\left( \frac{\partial^2 a_\phi}{\partial z^2} + L(a_\phi) \right).$$

Будем считать, что величины  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}_\phi$ ,  $\mathbf{a}_\phi$ ,  $p_1$  убывают с ростом  $r$  достаточно быстро для того, чтобы к ним можно было применять разложение в интеграл Ганкеля [19]. Тогда величины  $u_r$ ,  $u_\phi$ ,  $b_\phi$ ,  $a_\phi$  представим в виде

$$f(r, z) = \int_0^{+\infty} k \tilde{f}(k, z) J_1(kr) dk; \quad (37)$$

$$\tilde{f}(k, z) = \int_0^{+\infty} r f(r, z) J_1(kr) dk,$$

и их образы будем обозначать знаком верхней тильды: соответственно  $\tilde{u}_r$ ,  $\tilde{u}_\phi$ ,  $\tilde{b}_\phi$ ,  $\tilde{a}_\phi$ .

Величины  $u_z$  и  $p_1$  запишем в виде

$$f(r, z) = \int_0^{+\infty} k \tilde{f}(k, z) J_0(kr) dk; \quad (38)$$

$$\tilde{f}(k, z) = \int_0^{+\infty} r f(r, z) J_0(kr) dk,$$

а их образы будем обозначать соответственно как  $\tilde{u}_z$  и  $\tilde{p}_1$ .

Подставляя данные разложения в уравнения (24) – (26), (29), (30) и (32), видим, что в полученных уравнениях переменные разделяются и их можно записать в виде

$$-2\text{Re } \tilde{u}_\phi = k \tilde{p}_1 - \text{Ha}^2 \left( \tilde{u}_r + \chi_H \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z} \right) - (1 + \xi_1) k^2 \tilde{u}_r + \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} + k^2 \tilde{u}_r \right) -$$

$$-\xi_3 k^2 \tilde{u}_\phi + \xi_4 \frac{\partial^2 \tilde{u}_\phi}{\partial z^2}; \quad (39)$$

$$2\text{Re } \tilde{u}_r = \text{Ha}^2 \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z} - \xi_1 k^2 \tilde{u}_\phi + \xi_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_\phi}{\partial z^2} + \xi_3 k^2 \tilde{u}_r - \xi_4 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} + k^2 \tilde{u}_r \right); \quad (40)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} - \xi_2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} + k^2 \tilde{u}_z \right) + \xi_4 k \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial z}; \quad (41)$$

$$k \tilde{u}_r + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} = 0; \quad (42)$$

$$(1 + \chi_H^2) \frac{\partial^2 \tilde{b}_\phi}{\partial z^2} - \chi_{||} k^2 \tilde{b}_\phi = -\frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u}_\phi + \chi_H \tilde{u}_r); \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{a}_\phi}{\partial z^2} - k^2 \tilde{a}_\phi = \tilde{u}_r + \chi_H \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z}. \quad (44)$$

### Граничные условия

Рассмотрим сначала область  $z < -L$  и граничные условия при  $z = -L$ . Обозначим все величины, относящиеся к области  $z < -L$ , знаком  $\bar{\phantom{x}}$ . Согласно условиям задачи, данная область заполнена твердым телом, вращающимся с угловой скоростью  $\Omega = \Omega_e$ , и соответственно  $\delta \mathbf{u} = 0$  при  $z < -L$ . Требуя, чтобы при  $z = -L$  скорость  $\delta \mathbf{u}$  была непрерывна, получаем:

$$\tilde{u}_r|_{z=-L} = 0, \quad \tilde{u}_\phi|_{z=-L} = 0, \quad \tilde{u}_z|_{z=-L} = 0. \quad (45)$$

Предположим теперь, что при  $z < -L$  выполняется закон Ома (5) с коэффициентами сопротивления  $\bar{R}_\perp$ ,  $\bar{R}_\parallel$ ,  $\bar{R}_H$ . Введем обозначения

$$\bar{\eta}_\perp = (c^2 / (4\pi)) \bar{R}_\perp, \quad \bar{\chi}_\parallel = \bar{R}_\parallel / \bar{R}_\perp, \quad \bar{\chi}_H = \bar{R}_H / \bar{R}_\perp.$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что  $\bar{\eta}_\perp$ ,  $\bar{\chi}_\parallel$ ,  $\bar{\chi}_H$  не зависят от координат. Тогда для нахождения магнитного поля в области  $z < -L$  можно использовать уравнения (43) и (44), которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$(1 + \bar{\chi}_H^2) \frac{\partial^2 \tilde{b}_\phi}{\partial z^2} - \bar{\chi}_\parallel k^2 \tilde{b}_\phi = 0; \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{a}_\phi}{\partial z^2} - k^2 \tilde{a}_\phi = \bar{\chi}_H \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z}.$$

Их решение можно записать как

$$\tilde{b}_\phi(k, z) = \overline{B}_\phi^+(k) e^{\bar{\alpha}z} + \overline{B}_\phi^-(k) e^{-\bar{\alpha}z}; \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\phi(k, z) = & \overline{A}_\phi^+(k) e^{kz} + \overline{A}_\phi^-(k) e^{-kz} + \\ & + \frac{\overline{\chi}_H \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 - k^2} (\overline{B}_\phi^+(k) e^{\bar{\alpha}z} - \overline{B}_\phi^-(k) e^{-\bar{\alpha}z}), \end{aligned} \quad (48)$$

где введено обозначение

$$\bar{\alpha} = k \sqrt{\overline{\chi}_\parallel} / (1 + \overline{\chi}_H^2).$$

Наложим условие  $\tilde{b}_\phi \rightarrow 0$  и  $\tilde{a}_\phi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow 0$ , тогда  $\overline{B}_\phi^-(k) = 0$  и  $\overline{A}_\phi^-(k) = 0$ . Потребуем, чтобы при  $z = -L$  были непрерывны величины  $\mathbf{B}$  и  $E_r$  (в силу (35) непрерывность  $E_\phi = 0$  выполняется автоматически).

Принимая во внимание, что  $\tilde{\mathbf{u}}|_{z=-L+0} = 0$  и учитывая соотношения (28) и (33), эти условия можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{a}_\phi|_{z=-L+0} = \tilde{a}_\phi|_{z=-L-0}, \quad \frac{\partial \tilde{a}_\phi}{\partial z}|_{z=-L+0} = \frac{\partial \tilde{a}_\phi}{\partial z}|_{z=-L-0}; \quad (49)$$

$$\tilde{b}_\phi|_{z=-L+0} = \tilde{b}_\phi|_{z=-L-0}, \quad (50)$$

$$\eta_\perp (1 + \overline{\chi}_H^2) \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z}|_{z=-L+0} = \bar{\eta}_\perp (1 + \overline{\chi}_H^2) \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z}|_{z=-L-0}.$$

Подставляя сюда решение (47), (48), получаем равенства

$$\left( \frac{\partial \tilde{b}_\phi}{\partial z} - k \overline{D} \tilde{b}_\phi \right) \Big|_{z=-L+0} = 0; \quad (51)$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{a}_\phi}{\partial z} - k \tilde{a}_\phi \right) \Big|_{z=-L+0} = \overline{Q}' \tilde{b}_\phi|_{z=-L+0}, \quad (52)$$

где введены обозначения

$$\overline{D} = \frac{\bar{\eta}_\perp \sqrt{\overline{\chi}_\parallel (1 + \overline{\chi}_H^2)}}{\eta_\perp (1 + \overline{\chi}_H^2)}; \quad (53)$$

$$\overline{Q} = \frac{\overline{\chi}_H \sqrt{\overline{\chi}_\parallel}}{\sqrt{\overline{\chi}_\parallel} + \sqrt{1 + \overline{\chi}_H^2}}. \quad (54)$$

К приведенным здесь выражениям коэффициентов  $\overline{D}$  и  $\overline{Q}$  надо относиться осторожно. Дело в том, что при их выводе предполагалось, что на масштабах  $\sim 1/\bar{\alpha}$  проводимость постоянна и можно не учитывать сферичности звезды. Однако масштаб  $1/\bar{\alpha}$  вполне сравним с  $10^2$  радиу-

сов полярной шапки  $1/k$ , т. е. с радиусом нейтронной звезды  $R_{ns}$  [2]. Поэтому для реальных нейтронных звезд коэффициент  $\overline{D}$  должен весьма заметно отличаться от выражения (53). Важно отметить, что, скорее всего, он будет зависеть от  $k$  (переходя при  $k \rightarrow +\infty$  в выражение (53)).

Чтобы проиллюстрировать данное утверждение, рассмотрим ситуацию, когда проводимость в области  $-L - \Delta < z < -L$  постоянна и описывается с помощью закона Ома (5) с независимыми от координат коэффициентами  $\overline{R}_\perp$ ,  $\overline{R}_\parallel$ ,  $\overline{R}_H$ , а при  $z < -L - \Delta$  проводимость тоже постоянна, но коэффициенты равны уже  $\overline{R}'_\perp$ ,  $\overline{R}'_\parallel$ ,  $\overline{R}'_H$ . Введем обозначения  $\bar{\eta}_\perp = (c^2 / (4\pi)) \overline{R}'_\perp$ ,  $\overline{\chi}'_\parallel = \overline{R}'_\parallel / \overline{R}'_\perp$ ,  $\overline{\chi}'_H = \overline{R}'_H / \overline{R}'_\perp$  и будем считать, что  $\tilde{b}_\phi \rightarrow 0$  и  $\tilde{a}_\phi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Тогда

$$\overline{D} = \overline{D}'_\infty \frac{\bar{\alpha} \text{sh}(\bar{\alpha} \Delta) + \overline{D}'_\infty k \text{ch}(\bar{\alpha} \Delta)}{\bar{\alpha} \text{ch}(\bar{\alpha} \Delta) + \overline{D}'_\infty k \text{sh}(\bar{\alpha} \Delta)}; \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \overline{Q} = & \frac{\overline{\chi}_H \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 - k^2} \left( \bar{\alpha} - k \frac{\overline{D}}{\overline{D}'_\infty} \right) + \\ & + \frac{\bar{\alpha} e^{-k\Delta}}{\bar{\alpha} \text{ch}(\bar{\alpha} \Delta) + \overline{D}'_\infty k \text{sh}(\bar{\alpha} \Delta)} \times \\ & \times \left( \overline{Q}'_\infty - \overline{\chi}_H \frac{\bar{\alpha}^2 - \overline{D}'_\infty k^2}{\bar{\alpha}^2 - k^2} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

где введены обозначения

$$\overline{D}'_\infty = \frac{\bar{\alpha} \bar{\eta}_\perp (1 + \overline{\chi}_H^2)}{k \eta_\perp (1 + \overline{\chi}_H^2)}, \quad \overline{D}'_\infty = \frac{\bar{\alpha}' \bar{\eta}_\perp (1 + \overline{\chi}'_H^2)}{k \bar{\eta}_\perp (1 + \overline{\chi}'_H^2)}; \quad (57)$$

$$\overline{Q}'_\infty = \frac{\overline{\chi}'_H \bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}' + k}, \quad \bar{\alpha}' = k \sqrt{\frac{\overline{\chi}'_\parallel}{1 + \overline{\chi}'_H^2}}.$$

Отсюда сразу видно, что в общем случае коэффициенты  $\overline{D}$  и  $\overline{Q}$  зависят от  $k$ . При этом легко заметить, что величины  $\overline{D}'_\infty$  и  $\overline{D}'_\infty$  совпадают с выражением (53) для проводимостей  $\overline{R}_A$  и  $\overline{R}'_A$  соответственно; аналогично  $\overline{Q}'_\infty$  совпадает с выражением (54) для проводимости  $\overline{R}'_A$ . В случае если  $k \sim 1$  и  $\bar{\alpha} \Delta \ll 1$ , получаем  $\overline{D} \approx \overline{D}'_\infty$ . Поэтому при рассмотрении плавной части решения разумно положить  $\overline{D}$  равным  $\overline{D}'_\infty$ . Напротив, при рассмотрении резко меняющихся профилей тока  $\tilde{J}_z$  основной вклад в максимальное значение скорости  $u_\phi$  дают области  $k \gg 1$ . При этом вполне допустима

ситуация, когда  $\bar{\alpha}\Delta \gg 1$  и  $\bar{D} \approx \bar{D}_\infty$ . Поэтому при нахождении максимальных значений скорости  $u_\phi$  разумно использовать выражение (53). Однако следует иметь в виду, что в обоих случаях  $\bar{D} \lesssim 10^{-2} \ll 1$ .

Рассмотрим теперь область  $z > 0$  и граничные условия при  $z = 0$ . Обозначим все величины, относящиеся к области  $z > 0$ , знаком  $\hat{\phantom{x}}$ . Будем считать, что эта область заполнена веществом с очень низкой проводимостью поперек магнитного поля и с очень высокой проводимостью вдоль него [2]. В связи с этим будем считать, что

$$\hat{R}_\perp \rightarrow +\infty \text{ и } \hat{R}_\parallel \rightarrow 0 \quad (58)$$

(а также  $\hat{\chi}_H \rightarrow 0$ ).

Тогда из уравнения (5) получаем  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{J}_z \mathbf{e}_z$ , и соответственно в линейном приближении уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \hat{b}_\phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{b}_\phi) = \hat{J}_z, \quad \frac{\partial^2 \hat{a}_\phi}{\partial z^2} + L(\hat{a}_\phi) = 0. \quad (59)$$

Из первого равенства (59) следует, что в области  $z > 0$  величина  $\hat{b}_\phi$  зависит только от  $r$ . Второе равенство связывает данную величину с плотностью электрического тока  $\hat{J}_z = \text{const}(z)$ . Третье равенство дает формулу

$$\hat{a}_\phi(k, z) = \hat{A}_\phi^+(k) \exp(kz) + \hat{A}_\phi^-(k) \exp(-kz).$$

Если потребовать, чтобы  $\hat{a}_\phi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +\infty$ , то получим, что  $\hat{A}_\phi^+(k) = 0$  и, соответственно,

$$\frac{\partial \hat{a}_\phi}{\partial z} + k \hat{a}_\phi = 0.$$

Если поставить условие непрерывности магнитной индукции  $\mathbf{B}$  при  $z = 0$ , то с учетом вышеизложенного граничные условия при  $z = 0$  можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial \hat{a}_\phi}{\partial z} + k \hat{a}_\phi \right) \Big|_{z=0-0} = 0; \quad (60)$$

$$\hat{b}_\phi(k) \Big|_{z=0-0} = \tilde{b}_\phi(k), \quad (61)$$

где функция  $\hat{b}_\phi(r)$  считается заданной и ее образ обозначен как  $\tilde{b}_\phi(k)$ .

Касаясь условия непрерывности компонент  $E_r$  и  $E_\phi$ , следует отметить, что в силу равенства (35) непрерывность  $E_\phi$  вы-

полняется автоматически. Условие же непрерывности компоненты  $E_r$  совместно с уравнением (33) фактически служат для определения скорости  $\hat{u}_\phi$ .

Будем считать, что среда, заполняющая область  $z > 0$ , очень разрежена, т. е.  $\hat{\rho} \rightarrow 0$ . В связи с этим потребуем, чтобы поток вещества внутрь области  $z > 0$  отсутствовал:

$$\hat{u}_z \Big|_{z=0-0} = 0. \quad (62)$$

Налагаем также условия непрерывности потоков  $r$ - и  $\phi$ -компонент импульса на границе  $z = 0$ . Эти условия можно записать иначе, если дополнительно учесть, что компоненты вектора  $\mathbf{B}$  на данной границе непрерывны, а также положить  $\hat{\rho} \approx 0$ . Они примут следующий вид:

$$\sigma_{vis}^{rz} \Big|_{z=0-0} = 0; \quad \sigma_{vis}^{\phi z} \Big|_{z=0-0} = 0. \quad (63)$$

Используя выражения (15), (17), а также условие (62), получаем, что при  $v_2 \neq 0$  и  $v_4 \neq 0$  условия (63) можно записать как

$$\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} \Big|_{z=0-0} = 0; \quad \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial z} \Big|_{z=0-0} = 0. \quad (64)$$

Здесь необходимо отметить, что условие непрерывности  $z$ -компоненты импульса было проигнорировано. Дело в том, что в это условие входит отклонение уровня жидкости  $h(r)$  от поверхности  $z = 0$  (здесь  $z = h(r)$  — это высота, на которой в точке  $r$  заканчивается область жидкости и начинается область разреженной плазмы). С точностью до членов 1-го порядка данное условие имеет следующий вид:

$$P_0(r, z = h(r)) + (\delta P + \sigma_{vis}^{zz}) \Big|_{z=0-0} = 0. \quad (65)$$

Это равенство показывает, что фактически данное условие не налагает ограничений на течение, но может служить для определения функции  $h(r)$ .

Следует отметить, что из-за большой силы тяжести, а именно  $g \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ см/с}^2$  [10], на поверхности нейтронной звезды, даже в нулевом приближении, величина  $h(r) \lesssim 10^{-2} \text{ см}$ , т. е.  $h(r) \ll l$ . Это позволяет при вычислениях в первом порядке не учитывать условия (65) и считать, что всюду  $h(r) \approx 0$ .

Подведем итоги данного раздела. На нижней границе  $z = -L$  мы будем требо-

вать выполнения условий (45), (51) и (52), причем для простоты будем далее считать, что коэффициенты  $\bar{D}$  и  $\bar{Q}$  не зависят от  $k$  и задаются выражениями (53), (54). На верхней границе  $z = 0$  будем требовать выполнения условий (60) – (62) и (64). При этом входящая в условие (61) функция  $\hat{b}_\phi(r)$  считается известной (ее образ обозначается как  $\hat{b}_\phi(k)$ ), а величина электрического тока, падающего из магнитосферы на слой, следует выражению

$$\hat{J}_z \Big|_{z=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \hat{b}_\phi).$$

### Решение уравнений

Рассмотрим течение в области  $-L < z < 0$ . Поскольку для радиопульсаров можно ожидать, что  $\text{Ha} \sim 10^{12} \gg 1$ , то будем вычислять все величины только в первом неисчезающем порядке, пренебрегая всеми поправками порядка  $\sim 1/\text{Ha}$ . При этом будем полагать, что либо значение числа Рейнольдса  $\text{Re} \lesssim 1$  (невращающаяся нейтронная звезда), либо  $\text{Re} \sim \text{Ha}$  (нормальный радиопульсар). Для того чтобы упростить вычисления и избежать проблемы пересечения мод, будем также считать, что все величины  $\xi_A$  различны (хотя бы с точностью примерно 10 %) и ни одна из них не обращается в нуль.

Итак, будем искать решение уравнений (39) – (44) в виде

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f} \cdot \exp(\alpha z).$$

Тогда получаем:

$$S\tilde{u}_r = \text{Ha}^2 \alpha \tilde{b}_\phi + (\xi_2 \alpha^2 - \xi_1 k^2) \tilde{u}_\phi; \quad (66)$$

$$-S\tilde{u}_\phi = k\tilde{p}_1 - \xi_4 k^2 \tilde{u}_\phi - \text{Ha}^2 \chi_H \alpha \tilde{b}_\phi + (\xi_2(\alpha^2 + k^2) - (1 + \xi_1)k^2 - \text{Ha}^2) \tilde{u}_r; \quad (67)$$

$$\alpha \tilde{p}_1 = \xi_4 \alpha k \tilde{u}_\phi + (2\alpha^2 - \xi_2(\alpha^2 + k^2)) \tilde{u}_z; \quad (68)$$

$$0 = k\tilde{u}_r + \alpha \tilde{u}_z; \quad (69)$$

$$M\tilde{b}_\phi = -\alpha(\tilde{u}_\phi + \chi_H \tilde{u}_r); \quad (70)$$

$$(\alpha^2 - k^2) \tilde{a}_\phi = \tilde{u}_r + \alpha \chi_H \tilde{b}_\phi, \quad (71)$$

где введены обозначения

$$S = 2\text{Re} + \xi_4(\alpha^2 + k^2) - \xi_3 k^2,$$

$$M = (1 + \chi_H^2) \alpha^2 - k^2 \chi_H.$$

Соответственно при  $\alpha \neq 0$  и  $M(\alpha) \neq 0$  имеем соотношения

$$(S \cdot M + \text{Ha}^2 \chi_H^2 \alpha^2) \tilde{u}_r = ((\xi_2 \alpha^2 - \xi_1 k^2) \cdot M - \text{Ha}^2 \alpha^2) \tilde{u}_\phi; \quad (72)$$

$$-\alpha^2 (S \cdot M + \text{Ha}^2 \chi_H^2 \alpha^2) \tilde{u}_\phi = (M \cdot F + \text{Ha}^2 \chi_H^2 \alpha^4) \tilde{u}_r; \quad (73)$$

$$\tilde{u}_z = -\frac{k}{\alpha} \tilde{u}_r; \quad (74)$$

$$\tilde{p}_1 = \xi_4 k \tilde{u}_\phi + \left( \xi_2 \frac{(\alpha^2 + k^2)}{\alpha^2} - 2 \right) k \tilde{u}_r; \quad (75)$$

$$\tilde{b}_\phi = -\frac{\alpha}{M} (\tilde{u}_\phi + \chi_H \tilde{u}_r); \quad (76)$$

$$\tilde{a}_\phi = \frac{1}{(\alpha^2 - k^2)} \cdot \frac{1}{M} \times ((\alpha^2 - k^2 \chi_H) \tilde{u}_r - \alpha^2 \chi_H \tilde{u}_\phi), \quad (77)$$

где введено обозначение

$$F = \xi_2(\alpha^2 + k^2)^2 - (3 + \xi_1)k^2 \alpha^2 - \text{Ha}^2 \alpha^2.$$

Отсюда сразу видно, что при  $\alpha^2 = k^2$  мы получаем ненулевое решение:  $\tilde{a}_\phi \neq 0$ , а остальные величины равны нулю.

Это решение описывает потенциальное магнитное поле, очевидно, удовлетворяющее граничным условиям (45), (51), (52), (60) – (62), (64). Поскольку данная мода влияет только на полоидальное магнитное поле, то при нахождении остальных мод (они определяют скорость течения жидкости  $\tilde{\mathbf{u}}$ ) наличие данной моды необходимо учитывать только для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (52) и (60). Соответственно, пока нас не интересует полоидальное магнитное поле, мы можем спокойно игнорировать как моды  $\alpha^2 = k^2$ , так и граничные условия (52), (60). Следовательно, полагая  $\alpha^2 \neq k^2$ , получаем, что уравнение относительно величины  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha^2 S (S \cdot M + 2\text{Ha}^2 \chi_H \alpha^2) + (\xi_2 \alpha^2 - \xi_1 k^2) \times (M \cdot F + \text{Ha}^2 \chi_H^2 \alpha^4) - \text{Ha}^2 \alpha^2 F = 0. \quad (78)$$

Это уравнение является полиномом 4-й степени относительно величины  $\alpha^2$  и соот-



ветственно имеет четыре корня.

Рассмотрим сначала случай  $\alpha^2 = \text{Ha}^2 x$ , где  $x \sim 1$ ,  $\alpha^2 \gg k^2$ .

Тогда с точностью до поправок порядка  $1/\text{Ha}$  уравнение (78) принимает вид

$$(\xi_2^2 + \xi_4^2)(1 + \chi_H^2)x^2 + 2(\xi_4\chi_H - \xi_2)x + 1 = 0. \quad (79)$$

Его решение имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{1}{\xi_2 - is\xi_4} \cdot \frac{1}{1 - is\chi_H}, \quad (80)$$

где  $s = \pm 1$  задает выбор корня уравнения:  $x_1$  и  $x_2$  соответствуют  $s = +1$  и  $s = -1$  соответственно. При этом для данной моды  $\tilde{u}_r \approx is\tilde{u}_\phi$ .

Введем также обозначения

$$\alpha_1^2 = \text{Ha}^2 x_1, \quad \text{Re}(\alpha_1) > 0; \\ \alpha_2^2 = \text{Ha}^2 x_2, \quad \text{Re}(\alpha_2) > 0.$$

Рассмотрим теперь случай  $\alpha^2 = \frac{k^4}{\text{Ha}^2} x$ , где  $x \sim 1$ ,  $\alpha^2 \ll k^2$ . Тогда с точностью до поправок  $\sim 1/\text{Ha}$  уравнение (78) принимает вид

$$x^2 - \left( \xi_2 + \xi_1\chi_{\parallel} + \frac{k^2}{\text{Ha}^2} S_1^2 \chi_{\parallel} \right) + \xi_2 \xi_1 \chi_{\parallel} = 0, \quad (81)$$

где введено обозначение

$$S_1 = 2 \frac{\text{Re}}{k^2} + \xi_4 - \xi_2.$$

Тогда, соответственно, получаем, что

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \left( \xi_2 + \xi_1\chi_{\parallel} + \frac{k^2}{\text{Ha}^2} S_1^2 \chi_{\parallel} \right) + \\ + s \sqrt{\frac{1}{4} \left( \xi_2 + \xi_1\chi_{\parallel} + \frac{k^2}{\text{Ha}^2} S_1^2 \chi_{\parallel} \right)^2 - \xi_2 \xi_1 \chi_{\parallel}}, \quad (82)$$

где  $s = \pm 1$  опять задает выбор корня уравнения:  $x_3$  и  $x_4$  соответствуют  $s = +1$  и  $s = -1$  соответственно.

В случае  $\text{Re} \lesssim 1$  получаем  $x_3 \approx \xi_2$  и  $x_4 \approx \xi_1\chi_{\parallel}$ . При этом для данных мод

$$\tilde{u}_r \approx P\tilde{u}_\phi,$$

где  $P_{3,4} = (x_{3,4} - \xi_1\chi_{\parallel}) / (S_1\chi_{\parallel} - \chi_H x_{3,4})$ .

В случае  $\text{Re} \lesssim 1$  имеем

$$P_3 \approx \frac{\xi_2 - \xi_1\chi_{\parallel}}{S_1\chi_{\parallel} - \chi_H \xi_2}; \quad P_4 \approx -\frac{k^2}{\text{Ha}^2} \xi_1\chi_{\parallel} \frac{S_1 - \chi_H \xi_1}{\xi_2 - \xi_1\chi_{\parallel}},$$

а при  $\text{Re} \sim \text{Ha}$  получим

$$P_{3,4} \approx (x_{3,4} - \xi_1\chi_{\parallel}) / (S_1\chi_{\parallel}) = O(1/\text{Ha}).$$

Введем также обозначения

$$\alpha_3 = (k^2/\text{Ha})\sqrt{x_3} > 0; \\ \alpha_4 = (k^2/\text{Ha})\sqrt{x_4} > 0.$$

Пусть вклад в величину  $f(z)$  моды  $A$  равен  $\tilde{f}_A^+ C_A^+$  при  $\alpha = \alpha_A$  и  $\tilde{f}_A^- C_A^-$  при  $\alpha = -\alpha_A$ , где  $C_A^+$ ,  $C_A^-$  — амплитуды соответствующих мод,  $A = 1 - 4$ .

Тогда, пренебрегая модами  $\alpha^2 = k^2$ , которые, как уже отмечалось, влияют только на потенциал  $\tilde{a}_\phi$ , запишем полное решение в области  $-L < z < 0$  в следующем виде:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{A=1}^4 (\tilde{f}_A^+ C_A^+ e^{\alpha_A z} + \tilde{f}_A^- C_A^- e^{-\alpha_A z}). \quad (83)$$

Слагаемые  $\tilde{f}_{1,2}^+$  будем учитывать только вблизи границы  $z = 0$ , а слагаемые  $\tilde{f}_{1,2}^-$  — только вблизи границы  $z = -L$ . Подставим решение (83) в граничные условия (45), (51), (61), (62), (64).

В результате получаем, что при  $-L < z < 0$ , с точностью до поправок  $\sim 1/\text{Ha}$ ,

$$\tilde{u}_r = -\frac{i}{2} k^2 \tilde{b}_\phi \chi_{\parallel} \left( \frac{e^{\alpha_1 z}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 z}}{\alpha_2} \right) + \\ + \frac{i}{2} k \tilde{b}_\phi \bar{D} (1 + \chi_H^2) \left( \frac{1}{L} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \mathcal{N}(z) - \right. \\ \left. - (e^{-\alpha_1(z+L)} - e^{-\alpha_2(z+L)}) \right) + 2 \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} k^2 \tilde{b}_\phi \chi_{\parallel} \times \\ \times \left( z + L - \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\alpha_1 z}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 z}}{\alpha_2} \right) - \frac{L}{2} \mathcal{N}(z) \right); \quad (84)$$

$$\tilde{u}_\phi = \tilde{b}_\phi \left( k \bar{D} (1 + \chi_H^2) + k^2 \chi_{\parallel} \times \right. \\ \left. \times \left( z + L - \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\alpha_1 z}}{\alpha_1} + \frac{e^{\alpha_2 z}}{\alpha_2} \right) \right) \right); \quad (85)$$

$$\tilde{u}_z = -\frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} k^2 \tilde{b}_\phi \chi_{\parallel} z(z+L) - \\ - \frac{i}{2} k^2 \tilde{b}_\phi \bar{D} (1 + \chi_H^2) \times \\ \times \left( \frac{1}{\alpha_1} \left( e^{-\alpha_1(z+L)} + \frac{z}{L} \right) - \frac{1}{\alpha_2} \left( e^{-\alpha_2(z+L)} + \frac{z}{L} \right) \right); \quad (86)$$

$$\tilde{b}_\phi = \tilde{b}_\phi \left( 1 - \frac{k\bar{D}}{2} \left( \frac{1 + i\chi_H}{\alpha_1} e^{-\alpha_1(z+L)} + \frac{1 - i\chi_H}{\alpha_2} e^{-\alpha_2(z+L)} \right) \right), \quad (87)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{N}(z) = 1 - \frac{1}{2} (\exp(-\alpha_1(z+L)) + \exp(-\alpha_2(z+L))).$$

Давление  $\tilde{p}_1$  с точностью до поправок  $\sim 1/\text{Ha}$  не зависит от  $z$  и выражается как

$$\tilde{p}_1 = \text{Ha}^2 \tilde{b}_\phi \bar{D} (1 + \chi_H^2) \frac{i}{2L} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) - 2\tilde{b}_\phi \text{Re} \left( \bar{D} (1 + \chi_H^2) + \frac{kL}{2} \chi_{\parallel} \right). \quad (88)$$

Что касается полоидального магнитного поля, то с учетом вклада потенциальной моды и граничных условий (52), (60), с точностью до поправок  $\sim 1/\text{Ha}$ , его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\phi = & C_p^+ e^{kz} + C_p^- e^{-k(z+L)} - \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \tilde{b}_\phi \chi_{\parallel} (2z+L) - \\ & - \tilde{b}_\phi \frac{i\bar{D}}{2kL} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) (1 + \chi_H^2) + \\ & + \tilde{b}_\phi \frac{k\bar{D}}{2} \left( \frac{\chi_H - i}{\alpha_1^2} e^{-\alpha_1(z+L)} + \frac{\chi_H + i}{\alpha_2^2} e^{-\alpha_2(z+L)} \right), \end{aligned} \quad (89)$$

где амплитуды потенциальной моды  $C_p^+$  и  $C_p^-$  следуют выражениям

$$C_p^+ = \tilde{b}_\phi \frac{i\bar{D}}{4kL} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) (1 + \chi_H^2) + \frac{\tilde{b}_\phi}{k} \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \chi_{\parallel} \left( 1 + \frac{kL}{2} \right); \quad (90)$$

$$\begin{aligned} C_p^- = & -\frac{\bar{Q}}{2k} \tilde{b}_\phi - \frac{\tilde{b}_\phi}{k} \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \chi_{\parallel} \left( 1 + \frac{kL}{2} \right) + \\ & + \tilde{b}_\phi \frac{i\bar{D}}{4kL} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) (1 + \chi_H^2) - \\ & - \tilde{b}_\phi \frac{\bar{D}}{4} \left( \frac{\chi_H - i}{\alpha_1} + \frac{\chi_H + i}{\alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (91)$$

и соответственно при  $\bar{Q} \neq 0$  можно написать, что

$$\tilde{a}_\phi \approx -\tilde{b}_\phi \frac{\bar{Q}}{2k} e^{-k(z+L)}.$$

Предположим теперь, что при  $z=0$  электрический ток  $\widehat{J}_z$  можно записать как

$$\widehat{J}_z = \widehat{\mathcal{J}}_{surf} G_1(r),$$

где введены обозначения

$$G_n(r) = \int_0^{+\infty} k^n \tilde{F}(k) J_0(kr) k dk; \quad (94)$$

$$F_1(r) = \int_0^{+\infty} k^n \tilde{F}(k) J_1(kr) k dk.$$

При этом очевидно, что

$$\delta \widehat{B}_\phi \Big|_{z=0} = B_0 \widehat{\mathcal{J}}_{surf} F_0(r), \quad \tilde{b}_\phi = \widehat{\mathcal{J}}_{surf} \tilde{F}(k);$$

$$G_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF_0), \quad G_2 = -L(G_0);$$

$$F_2 = -\frac{\partial G_1}{\partial r} = -L(F_0).$$

Тогда учитывая, что в рассматриваемом приближении величины  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\bar{D}$  не зависят от  $k$ , получаем, что при  $-L < z < 0$ , с точностью до поправок  $\sim 1/\text{Ha}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u_r}{\widehat{\mathcal{J}}_{surf}} = & -\frac{i}{2} \chi_{\parallel} \left( \frac{e^{\alpha_1 z}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 z}}{\alpha_2} \right) F_2(r) + \\ & + \frac{i}{2} \bar{D} (1 + \chi_H^2) \times \left( \frac{1}{L} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \mathcal{N}(z) - \right. \\ & \left. - (e^{-\alpha_1(z+L)} - e^{-\alpha_2(z+L)}) \right) F_1(r) + 2 \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \chi_{\parallel} \times \\ & \times \left( z + L - \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\alpha_1 z}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 z}}{\alpha_2} \right) - \frac{L}{2} \mathcal{N}(z) \right) F_2(r); \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_\phi}{\widehat{\mathcal{J}}_{surf}} = & \bar{D} (1 + \chi_H^2) \mathcal{N}(z) F_1(r) + \\ & + \chi_{\parallel} \left( z + L - \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\alpha_1 z}}{\alpha_1} + \frac{e^{\alpha_2 z}}{\alpha_2} \right) \right) F_2(r); \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_z}{\widehat{\mathcal{J}}_{surf}} = & -\frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \chi_{\parallel} \cdot z(z+L) G_3(r) - \\ & - \frac{i}{2} \bar{D} (1 + \chi_H^2) \left( \frac{1}{\alpha_1} \left( e^{-\alpha_1(z+L)} + \frac{z}{L} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\alpha_2} \left( e^{-\alpha_2(z+L)} + \frac{z}{L} \right) \right) G_2(r); \end{aligned} \quad (97)$$

$$\frac{b_\phi}{\widehat{\mathcal{J}}_{surf}} = F_0(r) - \frac{\bar{D}}{2} \left( \frac{1 + i\chi_H}{\alpha_1} e^{-\alpha_1(z+L)} + \frac{1 - i\chi_H}{\alpha_2} e^{-\alpha_2(z+L)} \right) F_1(r); \quad (98)$$

$$\delta p = \frac{B_0^2}{4\pi} \cdot \widehat{\mathcal{J}}_{surf} \cdot \bar{D} (1 + \chi_H^2) \times \left( \frac{i}{2L} \left( \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) - 2 \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \right) G_0(r) - \frac{B_0^2}{4\pi} \cdot \widehat{\mathcal{J}}_{surf} \cdot \frac{\text{Re}}{\text{Ha}^2} \chi_{\parallel} L G_1(r). \quad (99)$$

Подставляя выражение (98) в формулы (36), получаем, что в области  $-L < z < 0$  величина  $J_z$  практически не зависит от  $z$ :

$$\frac{J_z}{\widehat{\mathcal{J}}_{surf}} = G_1(r) - \frac{\bar{D}}{2} \left( \frac{1 + i\chi_H}{\alpha_1} e^{-\alpha_1(z+L)} + \frac{1 - i\chi_H}{\alpha_2} e^{-\alpha_2(z+L)} \right) G_2(r) \approx G_1(r). \quad (100)$$

**Частный случай решения.** Рассмотрим частный случай, когда функция  $\tilde{F}(k)$  имеет вид

$$\tilde{F}(k) = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{b} J_1(kb) - \frac{1}{a} J_1(ka) \right) \times e^{-\beta k^2} \cdot \theta(k_{\max} - k) \cdot \theta(k - k_{\min}), \quad (101)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда ( $\theta(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ).

В пределе, когда  $\beta \rightarrow 0$ ,  $k_{\min} \rightarrow 0$ ,  $k_{\max} \rightarrow +\infty$ , получаем выражение

$$G_1(r) = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left( \frac{\theta(b-r)}{b^2} - \frac{\theta(a-r)}{a^2} \right).$$

Соответственно, в области  $0 < r < a$  имеем  $G_1(r) = -1$  и  $\widehat{J}_z = -\widehat{\mathcal{J}}_{surf}$ , что согласу-

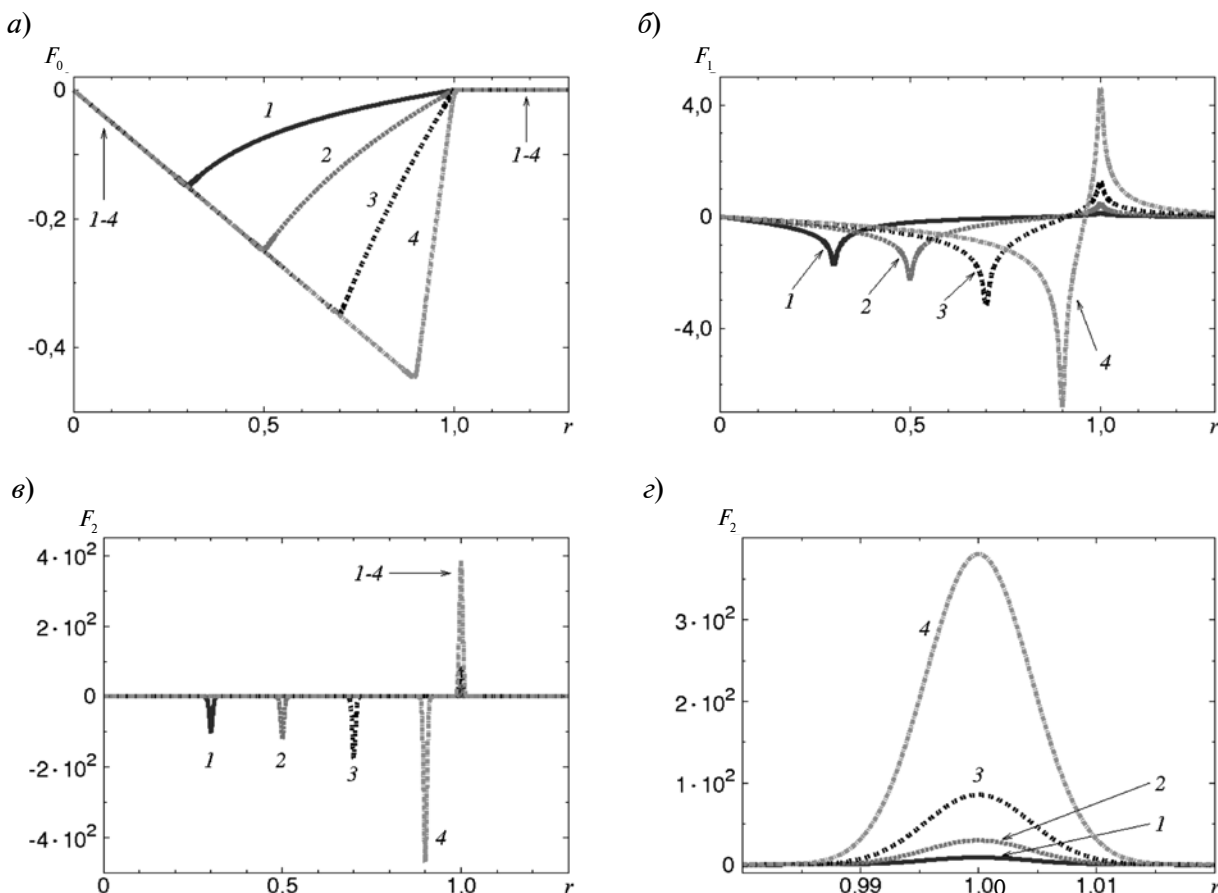


Рис. 2. Графики функций  $F_n(r)$ , рассчитанные по формуле (8б) для различных значений  $n$  ( $a - z$ ) и размера области  $a$  (1 – 4). Значения  $n$ : 0 (а), 1 (б), 2 (в, з);  $z$  – увеличенный фрагмент рис. 2, в. Значения  $a$ : 0,3 (1); 0,5 (2); 0,7 (3); 0,9 (4). Принято, что  $b = 1$ ,  $\beta = 10^{-5}$ ,  $k_{\min} = 10^{-2}$ ,  $k_{\max} = 10^3$

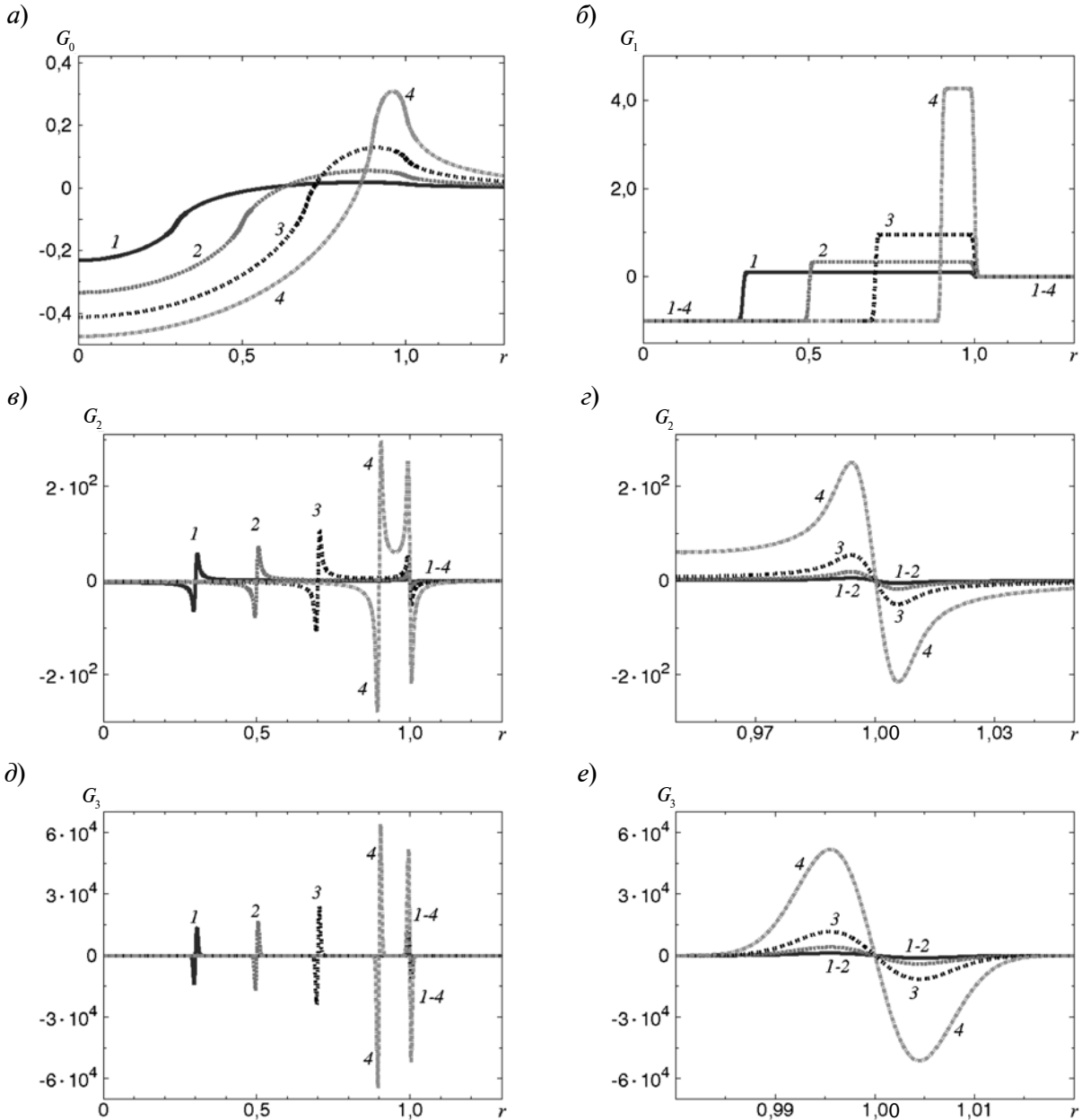


Рис. 3. Графики функций  $G_n(r)$ , рассчитанные по формуле (86) для различных значений  $n$  (а – е) и размера области  $a$  (1 – 4). Значения  $n$ : 0 (а), 1 (б), 2 (в, г); 3 (д, е); г, е – увеличенные фрагменты рис. 3, в, д. Значения  $a$  и остальных параметров – те же, что на рис. 2

ется с профилем тока, текущего через внутренний зазор в режиме свободного истечения [20]. Величина этого тока практически не зависит ни от радиуса  $r$ , ни от размера  $a$  области, занимаемой внутренним зазором (см., например, работы [21–23]). В области  $a < r < b$  ток меняет знак, что соответствует либо току, текущему через внешний зазор [9], либо (при  $(b - a) \ll a$ ) току, который

возвращается по границе пульсарная трубка – замкнутые силовые линии [2, 3, 5]. Структура магнитосферы с подобным профилем тока при условии  $(b - a) \ll a$  была рассмотрена, в частности, в работе [24]. Выражение (101) подбиралось так, чтобы в пределе, когда  $\beta \rightarrow 0$ , полный электрический ток, текущий через пульсарную трубку, был равен нулю [5, 9].

Аналогичный профиль плотности тока рассматривался для случая кольцевого зазора [25 – 27]. В частности, авторами работы [25] показано, что для случая соосного пульсара, когда  $\mathbf{\Omega} \parallel \mathbf{B}_0$ , весьма разумным выбором является  $a/b \approx 0,74$ . Однако надо иметь в виду, что расположение внутреннего, внешнего (и кольцевого) зазоров, а также доли сечения пульсарной трубки, занимаемые каждым из них, очень сильно зависят от общей структуры токов, текущих в магнитосфере пульсара [9, 28, 29].

При использовании выражения (101) следует иметь в виду, что в рассматриваемом пределе при  $\beta \rightarrow 0$  интегралы сходятся плохо из-за очень резких скачков плотности электрического тока  $\hat{J}_z$  в точках  $r = a$ ,  $r = b$  и, более того, в данных точках функции  $F_2(r)$  и  $G_2(r)$  обращаются в бесконечность. Множитель  $\exp(-\beta k^2)$  был добавлен для улучшения сходимости интегралов и устранения бесконечностей. Величина  $1/\sqrt{\beta}$  примерно соответствует толщине слоя, в котором происходит изменение электрического тока при  $r = a$  и  $r = b$ . Получившиеся при этом виды функций  $F_n(r)$  и  $G_n(r)$  для  $\beta = 10^{-5}$ ,  $k_{\max} = 10^3$ ,  $k_{\min} = 10^{-2}$  и  $b = 1$  показаны на рис. 2 и 3.

### Обсуждение полученных результатов

В данной работе было рассмотрено течение жидкости, возникающее на поверхности полярной шапки радиопулсара ввиду необходимости замкнуть электрический ток, текущий по пульсарной трубке [2, 5]. При этом учитывалась анизотропия проводимости и вязкости жидкости, связанная с наличием магнитного поля.

В частности, в размерных величинах азимутальная скорость течения жидкости  $\delta u_\phi$  имеет вид

$$\delta u_\phi \approx \frac{c}{P} \frac{\hat{J}_{surf}}{j_{GJ}} \left( \frac{1}{\sigma_\parallel} \left( \frac{z+L}{l} - \frac{1}{2l} \times \left( \frac{e^{\alpha_1 z/l}}{\alpha_1} + \frac{e^{\alpha_2 z/l}}{\alpha_2} \right) \right) F_2\left(\frac{r}{l}\right) + \frac{\bar{D}}{\sigma_\perp} \mathcal{N}\left(\frac{z}{l}\right) F_1\left(\frac{z}{l}\right) \right), \quad (102)$$

где  $\hat{J}_{surf}$  – плотность электрического тока при  $z = 0$  и  $r < a$ ,  $j_{GJ} = (\Omega B_0) / (2\pi)$ ,  $P = 2\pi / \Omega$  – период вращения звезды,  $\sigma_\parallel = 1 / R_\parallel$ ,  $\sigma_\perp = R_\perp / (R_\perp^2 + R_H^2)$  – проводимости вещества параллельно и перпендикулярно направлению магнитного поля.

Стоит отметить, что в рассматриваемом пределе, когда  $Na \gg 1$ , выражение (102) почти совпадает с изотропным случаем. И в частности, как и в изотропном случае, не зависит от значения вязкости (за исключением области гартмановских слоев). Основное отличие от указанного случая заключается в том, что в первом слагаемом выражения (102) вместо коэффициента  $1/\sigma$ , где  $\sigma$  – изотропная проводимость, стоит  $1/\sigma_\parallel$ , а во втором вместо  $\bar{D}/\sigma$  формула содержит  $\bar{D}/\sigma_\perp$ . При этом необходимо отметить, что, несмотря на справедливость соотношения [13]

$$\sigma_\perp / \sigma_\parallel \sim 1 / (\omega_B^2 \tau_{scat}^2) \sim 10^{-4} \ll 1,$$

для приведенного на рис. 3 профиля электрического тока  $\hat{J}_z$  вклады обоих слагаемых в максимальное значение скорости  $\delta u_\phi$  вполне сравнимы. Это связано с тем, что максимальные значения функции  $F_2$ , как и в изотропном случае, в  $1/\sqrt{\beta} \sim 10^2$  раз больше максимальных значений функции  $F_1$ . Кроме того, анизотропия проводимости приводит значительному уменьшению коэффициента  $\bar{D} \sim \sqrt{\chi_\parallel} \sim 10^{-2}$ , в отличие от изотропного случая, где разумно считать (особенно при  $k \gg 1$ )  $\bar{D} \approx 1$ . Дополнительно следует учесть, что при анизотропной проводимости коэффициент  $\bar{D}$  оказывается гораздо чувствительнее к росту проводимости в глубине коры, а это приводит к его дополнительному уменьшению.

Таким образом, скорость течения  $\delta u_\phi$  можно грубо оценить как

$$\delta u_\phi \sim \frac{c}{P} \frac{1}{\sigma_\parallel} \frac{b^2}{(b-a)\sqrt{\beta}} \sim 3 \cdot 10^{-8} \frac{b^2}{(b-a)\sqrt{\beta}} \text{ см/с.}$$

Точно так же, как и в изотропном случае, столь малая величина скорости вращения жидкости связана с тем обстоятельством, что возникшее дифференциальное вращение жидкости почти полностью предотвращает замыкание электрического тока в жидком слое. Это следует и из анализа

выражения (100), согласно которому величина  $j_z$  остается практически неизменной во всем жидком слое (сколько-нибудь заметное уменьшение электрического тока  $j_z$  происходит лишь в нижнем гартмановском слое).

Итак, проведенный анализ позволяет заключить, что электрический ток проходит сквозь возможную значительную толщину жидкого слоя, почти не изменяясь, и замыкается лишь в твердой коре. Такое же заключение сделано для изотропного случая, и это несмотря на тот факт, что указанная толщина может быть сравнима с размером полярной шапки  $L \sim l$ .

Что же касается полоидального течения, то оно все еще остается пренебрежимо малым, хотя теперь главные слагаемые в выражениях для  $\delta u_r$  и  $\delta u_z$  имеют скорее порядок  $\bar{D} / Na$ , в отличие от изотропного случая, когда имеется порядок  $Re / Na^2$ . Другими словами, теперь полоидальное течение генерируется главным образом в тонких гартмановских слоях, а не вызывается силой Кориолиса в основном объеме жидкости.

Поправка к полоидальному магнитному полю  $\delta a_\phi$  значительно стала превосходить таковую для изотропного случая и теперь имеет порядок  $\sim Q$ , а не  $\sim 1 / Na$ , как это было в изотропном случае. Иными словами, это поле определяется, в основном, холловскими токами, протекающими внутри твердой коры (и нижнем гартмановском слое). Однако величина поля  $\delta a_\phi$  все равно оказывается сравнимой с поправками порядка  $\sim (\Omega / c)^2 B_0$ , связанными с вращением заряженной жидкости [2] (в данной работе мы ими пренебрегаем).

Важно также отметить, что при выводе граничного условия (60) мы считали, что вся область  $z > 0$  заполнена очень разреженной плазмой, экранирующей продольное электрическое поле, т. е. мы пренебрегали наличием внутреннего зазора на поверхности нейтронной звезды.

И, более того, мы считали, что электрический ток течет строго вдоль магнитного поля  $\mathbf{j} = j \mathbf{e}_B$ . Это означает, в частности, что мы пренебрегаем влиянием  $(E \times B)$ -дрейфа на движение частиц в магнитосфере и не учитываем возможность существования

в магнитосфере холловского тока (мы положили  $\hat{\chi}_H = 0$ ).

Однако если бы мы учли эти факторы, то это в самом крайнем случае привело бы к появлению членов порядка  $\Omega l / c$  в коэффициенте  $C_p^+$  и тогда вклад граничного условия (60) в  $\delta a_\phi$  стал бы всего лишь сравним с вкладом нижнего граничного условия (52).

Также стоит отметить, что рассматриваемые граничные условия (60) – (62), (64) формально приводят к скачку тангенциальной составляющей скорости вращения

$$\mathbf{u}_\tau = u_r \mathbf{e}_r + u_\phi \mathbf{e}_\phi$$

на границе  $z = 0$ .

Необходимо дополнительно отметить, что, согласно работе [14],

$$\chi_{||} - 1 \sim 1 / (\omega_B^2 \tau_{scat}^2); \quad \chi_H \sim \omega_B \tau_{scat},$$

т. е.  $\chi_{||} \approx 1$  и  $\chi_H \sim 10^2 \gg 1$ .

Однако данный результат относится только к плазме, состоящей из ионов, имеющих одинаковое отношение заряда к массе. Нам же представляется, что более корректно считать, что жидкость на поверхности нейтронной звезды состоит из различных элементов, а значит, ионы будут иметь разное отношение заряда к массе. Поэтому в данной работе при проведении численных оценок величин полагалось, что [13]

$$\chi_H \sim 1 / (\omega_B \tau_{scat}) \sim 10^{-2} \ll 1;$$

$$\chi_{||} \sim 1 / (\omega_B^2 \tau_{scat}^2) \sim 10^{-4} \ll \chi_H.$$

Также стоит отметить, что при температуре поверхности нейтронной звезды  $T_{surf} < 3 \cdot 10^6$  К поверхность океана может затвердеть [30]. При этом из-за быстрого роста температуры в глубь звезды сам океан останется жидким [10, 30]. Это явление может привести к изменению граничных условий (60) – (62), (64), а также к замыканию части электрического тока  $j_z$  через слой «льда», покрывающего океан.

### Заключение

Итак, в результате проведенного исследования дифференциального вращения жидких полярных шапок, вызванного магнитосферными токами, показано, что скорость этого вращения очень мала и почти весь ток замыкается в глубокой коре.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

(код проекта 13-02-00112) и гранта Президента РФ по поддержке ВНШР (НШ 294.2014.2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jones P.B.** Pulsar magnetic alignment – The critical period and integrated pulse width // *Astrophysical Journal*. 1976. Vol. 209. Pt. 1, pp. 602–605.
2. **Бескин В.С.** Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. М.: Физматлит, 2005. 381 с.
3. **Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N.** Physics of the pulsar magnetosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 408 p.
4. **Бескин В.С.** Радиопульсары // *Успехи физических наук*. 1999. Т. 169. № 11. С. 1169–1198.
5. **Бескин В.С., Истомина Я.Н., Филиппов А.А.** Радиопульсары – поиски истины // *Успехи физических наук*. 2013. Т. 183. № 2. С. 179–194.
6. **Goldreich P., Julian W.H.** Pulsar electrodynamics // *Astrophysical Journal*. 1969. Vol. 157, pp. 869–880.
7. **Timokhin A.N.** On the force-free magnetosphere of an aligned rotator // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. Vol. 368, Iss. 3, pp. 1055–1072.
8. **Philippov A., Spitkovsky A.** Ab initio pulsar magnetosphere: three-dimensional particle-in-cell simulations of axisymmetric pulsars. URL: arXiv:astro-ph/1312.4970.
9. **Shibata S.** Magnetosphere of the rotation-powered pulsar – A DC circuit model // *Astrophysical Journal*. 1991. Pt. 1, Vol. 378, pp. 239–254.
10. **Haensel P., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G.** Neutron stars 1. Equation of state and structure. Springer, 2007.
11. **Бескин В.С., Желтоухов А.А., Обухова А.К., Стройнов Е.Е.** К природе аномального момента сил, действующего на вращающийся намагниченный шар в вакууме // *Журнал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН «Краткие сообщения по физике»*. 2013. № 9. С. 33–37.
12. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика в 10 тт. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
13. **Yakovlev D.G., Shalybkov D.A.** Electrical conductivity of neutron star cores in the presence of a magnetic field. Pt. 2. A free-particle model of npe-matter // *Astrophysics and Space Science*. 1991. Vol. 176. Iss. 2, pp. 191–215.
14. **Geppert U., Rheinhardt M.** Non-linear magnetic field decay in neutron stars. Theory and observations // *Astronomy and Astrophysics*. 2002. Vol. 392, pp. 1015–1024.
15. **Брагинский С.И.** Явления переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы*; под ред. М.А. Леонтовича. 1963. Вып. 1. С. 183–271.
16. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика в 10 тт. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. С. 65.
17. **Чугунов А.И., Яковлев Д.Г.** Сдвиговая вязкость и осцилляции коры нейтронных звезд // *Астрономический журнал*. 2005. Т. 82. № 9. С. 814–829.
18. **Potekhin A.Y.** Electron conduction in magnetized neutron star envelopes // *Astronomy and Astrophysics*. 1999. Vol. 351, pp. 787–797.
19. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2 Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. С. 85.
20. **Scharlemann E.T., Arons J., Fawley W.M.** Potential drops above pulsar polar caps – Ultra-relativistic particle acceleration along the curved magnetic field // *Astrophysical Journal*. 1978. Pt. 1. Vol. 222, pp. 297–316.
21. **Бескин В.С.** Влияние общерелятивистских эффектов на электродинамику пульсаров // *Письма в Астрономический журнал*. 1990. Т. 16. № 7. С. 665–672.
22. **Muslimov A.G., Tsygan A.I.** General relativistic electric potential drops above pulsar polar caps // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1992. Vol. 255, pp. 61–70.
23. **Harding A.K., Muslimov A.G.** Pulsar polar cap heating and surface thermal X-ray emission. I. Curvature radiation pair fronts // *The Astrophysical Journal*. 2001. Vol. 556. Iss. 2, pp. 987–1001.
24. **Timokhin A.N.** Force-free magnetosphere of an aligned rotator with differential rotation of open magnetic field lines // *Astrophysics and Space Science*. 2007. Vol. 308. Iss. 1–4, pp. 575–579.
25. **Qiao G.J., Lee K.J., Wang H.G., Xu R.X., Han J.L.** The inner annular gap for pulsar radiation:  $\gamma$ -ray and radio emission // *The Astrophysical Journal*. 2004. Vol. 606. Iss. 1, pp. L49–L52.
26. **Xu R.X., Cui X.H., Qiao G.J.** Current flows in pulsar magnetospheres // *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*. 2006. Vol. 6. Iss. 2, pp. 217–226.
27. **Lee K.J., Qiao G.J., Wang H.G., Xu R.X.** On the electrodynamics of counter stream in pulsar’s inner annular cap region // *Advances in Space Research*. 2008. Vol. 41. Iss. 1, pp. 180–182.
28. **Shibata S.** Pulsar electrodynamics // “Pulsar Astronomy-2000 and Beyond” ASP Conference Series. Vol. 202. Proceedings of the 177th Colloquium of the IAU, Bonn, Germany. August, 30 – September, 3, 1999. M. Kramer, N. Wex, and N. Wielebinski (eds.). 2000. Vol. 202, pp. 411–416.
29. **Yuki S., Shibata S.** A particle simulation for the pulsar magnetosphere: Relationship of polar cap, slot gap, and outer gap // *Publications of the Astronomical*



Society of Japan. 2012. Vol. 64. No.3, pp. 9-19.  
30. Potekhin A.Y., Chabrier G. Equation of state

for magnetized Coulomb plasmas // *Astronomy & Astrophysics*. 2013. Vol. 550, id. A43, 16 p.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ЦЫГАН Анатолий Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26  
tsygan.astro@mail.ioffe.ru

**ШАЛЫБКОВ Дмитрий Александрович** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26  
dasha@astro.ioffe.ru

**БАРСУКОВ Дмитрий Петрович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26  
bars.astro@mail.ioffe.ru

**ГОГЛИЧИДЗЕ Олег Анзорович** – старший лаборант Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.

194021, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26  
goglichidze@gmail.com

### *Tsygan A.I., Shalybkov D.A., Barsukov D.P., Goglichidze O.A.* AN ANALYSIS OF DIFFERENTIAL ROTATION OF NEUTRON STAR POLAR CAPS FOR THE CASE OF THE ANISOTROPIC CONDUCTIVITY OF THE CAP SUBSTANCE.

The differential rotation of liquid polar caps caused by magnetospheric currents closing up under neutron star surface has been considered. The anisotropy of cap electric conductivity and viscosity due to magnetic field was taken into account. The rotation velocity was shown to be very slow and almost all electric current was brought out to close up deeper, inside the rigid crust.

RADIOPULSAR, NEUTRON STAR, MAGNETIC HYDRODYNAMICS, POLAR CAP, DIFFERENTIAL ROTATION, ANISOTROPIC CONDUCTIVITY.

#### REFERENCES

1. Jones P.B. Pulsar magnetic alignment – The critical period and integrated pulse width. *Astrophysical Journal*, 1976, Vol. 209, Pt. 1, pp. 602-605.
2. Beskin V.S. *Ossesimmetrichnye stacionarnye techeniya v astrofizike*. Moscow, Fizmatlit, 2005, 381 p. (rus)
3. Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N. *Physics of the pulsar magnetosphere*. Cambridge University Press, 2006, 408 p.
4. Beskin V.S. Radio pulsars. *Physics Uspekhi*, 1999, Vol. 42, Iss. 11, pp. 1071-1098.
5. Beskin V.S., Istomin, Y.N., Philippov A.A. Radio pulsars: the search for truth. *Physics Uspekhi*, 2013. Vol. 56, Iss. 2, pp. 164-179.
6. Goldreich P., Julian W.H. Pulsar electrodynamic. *Astrophysical Journal*, 1969, Vol. 157, pp. 869-880.
7. Timokhin A.N. On the force-free magnetosphere of an aligned rotator. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2006, Vol. 368, Issue 3, pp. 1055-1072.
8. Philippov A., Spitkovsky A. Ab-initio pulsar magnetosphere: three-dimensional particle-in-cell simulations of axisymmetric pulsars. Available at: arXiv: astro-ph/1312.4970.
9. Shibata S. Magnetosphere of the rotation-powered pulsar – A DC circuit model. *Astrophysical Journal*, 1991, Part 1, Vol. 378, pp. 239-254.
10. Haensel P., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. *Neutron Stars 1. Equation of State and Structure*. Springer, 2007.
11. Beskin V.S., Zheltoukhov A.A., Obukhova A.K., Stroinov E.E. To the origin of anomalous torque acting on a rotating magnetized ball in vacuum. *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, 2013. Vol. 40, Iss. 9, pp. 265-267.
12. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika v 10 tt., Vol. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred*. Moscow, Nauka, 1982, 620 p. (rus)
13. Yakovlev D.G., Shalybkov D.A. Electrical conductivity of neutron star cores in the presence of a magnetic field. Part Two. A free-particle model



of npe- matter. *Astrophysics and Space Science*, 1991, Vol. 176, Iss. 2, pp. 191-215.

14. **Geppert U., Rheinhardt M.** Non-linear magnetic field decay in neutron stars. Theory and observations. *Astronomy and Astrophysics*, 2002, Vol. 392, pp. 1015-1024.

15. **Braginskiy S.I.** *Yavleniya perenosa v plazme. "Voprosy teorii plazmy"*. Pod red. M.A. Leontovicha, 1963, Iss. 1, pp. 183-271. (rus)

16. **Landau L.D., Lifshits E.M.** *Teoreticheskaya fizika v 10 tt., Vol. 10. Fizicheskaya kinetika*. Moscow, Nauka, 1979, P. 65. (rus)

17. **Chugunov A.I., Yakovlev D.G.** Shear Viscosity and Oscillations of Neutron Star Crust. *Astronomy Reports*, 2005, Vol. 49, Iss. 9, pp. 724-738.

18. **Potekhin A.Y.** Electron conduction in magnetized neutron star envelopes. *Astronomy and Astrophysics*, 1999, Vol. 351, pp. 787-797.

19. **Beytmen G., Erdeyi A.** *Vysshie transtsendentnye funktsii: T.2 Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Moscow, Nauka, 1966, P. 85. (rus)

20. **Scharlemann E.T., Arons J., Fawley W.M.** Potential drops above pulsar polar caps – Ultrarelativistic particle acceleration along the curved magnetic field. *Astrophysical Journal*, 1978, Part 1, Vol. 222, pp. 297-316.

21. **Beskin V.S.** General relativity effects on electrodynamic processes in radio pulsars. *Soviet Astronomy Letters*, 1990, Vol. 16, No. 4/Jul. pp. 286-289.

22. **Muslimov A.G., Tsygan A.I.** General relativistic electric potential drops above pulsar polar caps. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*,

1992, Vol. 255, pp. 61-70.

23. **Harding A.K., Muslimov A.G.** Pulsar polar cap heating and surface thermal X-ray emission. I. Curvature radiation pair fronts. *The Astrophysical Journal*, 2001, Vol. 556, Iss. 2, pp. 987-1001.

24. **Timokhin A.N.** Force-free magnetosphere of an aligned rotator with differential rotation of open magnetic field lines. *Astrophysics and Space Science*, 2007, Vol. 308, Iss. 1 – 4, pp. 575-579.

25. **Qiao G.J., Lee K.J., Wang H.G., Xu R.X., Han J.L.** The inner annular gap for pulsar radiation:  $\gamma$ -ray and radio emission. *The Astrophysical Journal*, 2004, Vol. 606, Iss. 1, pp. L49-L52.

26. **Xu R.X., Cui X.H., Qiao G.J.** Current flows in pulsar magnetospheres. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2006, Vol. 6, Issue 2, pp. 217-226.

27. **Lee K.J., Qiao G.J., Wang H.G., Xu R.X.** On the electrodynamics of counter stream in pulsar's inner annular cap region. *Advances in Space Research*, 2008, Vol. 41, Iss. 1, pp. 180-182.

28. **Shibata S.** Pulsar electrodynamics. "Pulsar Astronomy-2000 and Beyond" *ASP Conference Series*. Vol. 202. Proceedings of the 177th Colloquium of the IAU, Bonn, Germany, 30 August – 3 September 1999. Eds. by M. Kramer, N. Wex, and N. Wielebinski. 2000. Vol. 202, pp. 411-416.

29. **Yuki S., Shibata S.** A particle simulation for the pulsar magnetosphere: relationship of polar cap, slot gap, and outer gap. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 2012, Vol. 64, No. 3, Article No. 43, pp. 9-19.

30. **Potekhin A.Y., Chabrier G.** Equation of state for magnetized Coulomb plasmas. *Astronomy & Astrophysics*, 2013, Vol. 550, id. A43, 16 p.

#### THE AUTHORS

##### **TSYGAN Anatoly I.**

*Ioffe Physical Technical Institute of the Russian Academy of Sciences.*  
26, Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia.  
tsygan.astro@mail.ioffe.ru

##### **SHALYBKOV Dmitry A.**

*Ioffe Physical Technical Institute of the Russian Academy of Sciences.*  
26, Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia.  
dasha@astro.ioffe.ru

##### **BARSUKOV Dmitry P.**

*Ioffe Physical Technical Institute of the Russian Academy of Sciences.*  
26, Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia.  
bars.astro@mail.ioffe.ru

##### **GOGLECHIDZE Oleg A.**

*Ioffe Physical Technical Institute of the Russian Academy of Sciences.*  
26, Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russia.  
goglechidze@gmail.com