

doi: 10.5862/MCE.50.3

Применение вариационного метода к оценке устойчивости обводненных грунтовых откосов

*Д.т.н., профессор В.Н. Бухарцев;
аспирант Х.Т. Нгуен,*

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Аннотация. Одним из основных и важных вопросов, с которым приходится сталкиваться при проектировании грунтовых сооружений, является обеспечение устойчивости откосов этих сооружений. Для оценки устойчивости грунтовых откосов, подверженных воздействию фильтрационных сил, предложен расчетный метод, в котором, помимо соблюдения условий равновесия, выполняются также граничные условия в крайних точках профиля поверхности сдвигов по напряжениям и ориентации площадок сдвигов.

Для поиска наиболее опасной гипотетической поверхности обрушения используется вариационный подход, который предполагает решение дифференциального уравнения Эйлера – Лагранжа как необходимое условие существования экстремума функционала. Поскольку задача решается в рамках схемы предельного равновесия грунтовых массивов с использованием критерия прочности Кулона – Мора, в качестве функционала выступает один из параметров прочности грунта при задаваемом значении другого параметра. Достаточность существования экстремума функционала проверяется численно.

Ключевые слова: оценка устойчивости грунтовых откосов; фильтрация; кривая депрессии; вариационный метод; условия равновесия; граничные условия

Введение

Для решения первостепенной задачи – оценки устойчивости грунтовых массивов сооружений и оснований – до сих пор используются методы, в которых не соблюдаются законы механики: не выполняются условия равновесия и граничные условия [1–9]. Подробный анализ некоторых распространенных методов изложен в работах [10–21].

Несмотря на популярность этих методов среди инженеров, обусловленную относительной простотой их применения и во многих случаях скрытыми запасами устойчивости из-за несовершенства расчетных предпосылок, назрела потребность качественно улучшить оценку устойчивости грунтовых массивов за счет внедрения более совершенных расчетных методов. Развитие вычислительной техники сегодня позволяет это сделать.

Один из возможных вариантов такого улучшения связан с применением вариационного метода [22], в котором законы механики соблюдаются. В этом методе используется критерий прочности Кулона – Мора, который ограничивает значения касательных напряжений предельными значениями, а также лимитирует напряжения и направления площадок сдвигов в крайних точках профиля поверхности обрушения.

Задача решается в рамках схемы предельного равновесия, которое характеризуется достижением на поверхности сдвигов предельных (критических) значений касательного напряжения

$$\tau = f_k \sigma + c_k, \quad (1)$$

где $f_k = \operatorname{tg} \varphi_k$ и c_k – критические значения параметров механической прочности грунта, соответствующие предельному равновесию грунтового массива.

Постановка задачи

На основе вариационного принципа авторы поставили задачу разработать методику оценки устойчивости грунтовых откосов с применением метода, удовлетворяющего условиям равновесия и граничным условиям; выявить наиболее опасную форму поверхности обрушения и наиболее опасный закон распределения нормальных напряжений на упомянутой поверхности. На основе анализа существующих концепций коэффициента запаса устойчивости необходимо предложить

наиболее общую концепцию, в которой запас устойчивости трактуется как мера удаления состояния грунтового массива от предельного равновесия.

Задача исследования – установить влияние на оценку устойчивости грунтовых массивов основных факторов: граничных условий, формы поверхности обрушения, закона распределения нормальных напряжений по поверхности обрушения, а также влияние фильтрационных сил, удельного веса грунта, высоты откоса.

Предложенный метод позволяет проводить исследования по выявлению влияния на оценку устойчивости грунтовых массивов основных факторов: граничных условий, формы поверхности обрушения, закона распределения нормальных напряжений по поверхности обрушения. Влияние перечисленных факторов на оценку устойчивости грунтовых массивов исследованы нами на примере «сухого» однородного откоса [23, 24, 25].

На сегодня для выявления запаса устойчивости грунтовых массивов распространенные расчетные методы используют разные концепции коэффициента запаса, что осложняет сопоставление результатов расчетов, выполненных разными методами. Нами предлагается наиболее общая концепция, в которой запас устойчивости трактуется как мера удаления состояния грунтового массива от предельного равновесия. В этой концепции, в отличие от изложенного в [22] варианта, ориентированного на использование традиционной концепции коэффициента запаса, предложенной В. Феллениусом, коэффициент запаса устойчивости характеризуется превышением расчетных значений параметров прочности грунта над критическими значениями, соответствующими предельному равновесию. Определение численного значения коэффициента запаса требует построения линии критических значений параметров f_k и c_k для исследуемого объекта и вычисления кратчайшего расстояния от точки А, характеризующейся расчетными значениями f и c , до линии критических значений (рис. 1). При этом коэффициент запаса устойчивости определяется в общем случае выражениями:

- для поверхности сдвигов, профиль которой описывается полиномом третьей степени

$$k_3 = \frac{f_A - f_C}{f_B - f_C} = \frac{c_A - c_C}{c_B - c_C}, \quad (2)$$

- для окружности

$$k_3 = \frac{f_A - f_E}{f_D - f_E} = \frac{c_A - c_E}{c_D - c_E}. \quad (3)$$

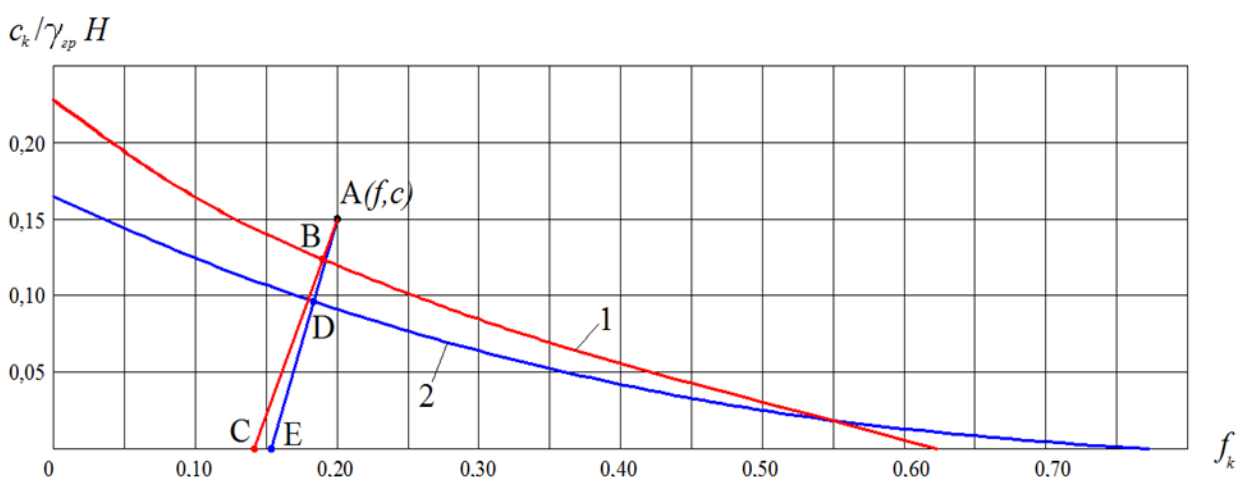


Рисунок 1. Схема к определению значений коэффициента запаса устойчивости откоса: 1 – линия критических значений для поверхности сдвигов, профиль которой описывается полиномом третьей степени; 2 – линия критических значений для окружности

В дальнейшем изложении рассматриваются однородные откосы, для которых вариационная задача может быть сформулирована следующим образом. Для произвольного профиля однородного грунтового откоса под любой нагрузкой требуется найти экстремаль, проходящую

Бухарцев В.Н., Нгуен Х.Т. Применение вариационного метода к оценке устойчивости обводненных грунтовых откосов

через две заданные точки с координатами $(x_0; z_0)$, $(x_n; z_n)$, которая соответствует максимальному значению функционала c_k при задаваемом значении f_k . При этом всеми функциями соблюдаются граничные условия и условия равновесия.

Расчетная схема оценки устойчивости такого откоса в условиях плоской деформации с произвольно намеченным профилем поверхности сдвигов представлена на рисунке 2. Уравнения равновесия вертикального элемента тела обрушения шириной dx , высотой h и единичным размером в третьем измерении в представленной на рисунке 2 системе координат имеют вид:

$$\sum X = 0: \quad q_x dx - dE + z' \sigma dx - \tau dx = 0, \quad (4)$$

$$\sum Z = 0: \quad q_z dx - dT - \sigma dx - z' \tau dx = 0, \quad (5)$$

$$\sum M = 0: \quad m dx - dM + z' E dx - T dx = 0, \quad (6)$$

где $q_x dx$, $q_z dx$ – компоненты равнодействующей поверхностной и объемной нагрузок; $m = q_x b$ – момент горизонтальной нагрузки интенсивностью q_x относительно середины подошвы элемента; E , T – компоненты сил взаимодействия между элементами, являющиеся равнодействующими соответственно нормальных и касательных напряжений, действующих на вертикальных гранях элемента; $M = E a$ – момент силы E относительно подошвы элемента; τ , σ – компоненты напряжения в скелете грунта на поверхности сдвигов; $z = z(x)$ – непрерывная и непрерывно дифференцируемая искомая функция, описывающая профиль поверхности сдвигов; z' – производная от $z(x)$ по x на интервале $[x_0; x_n]$.

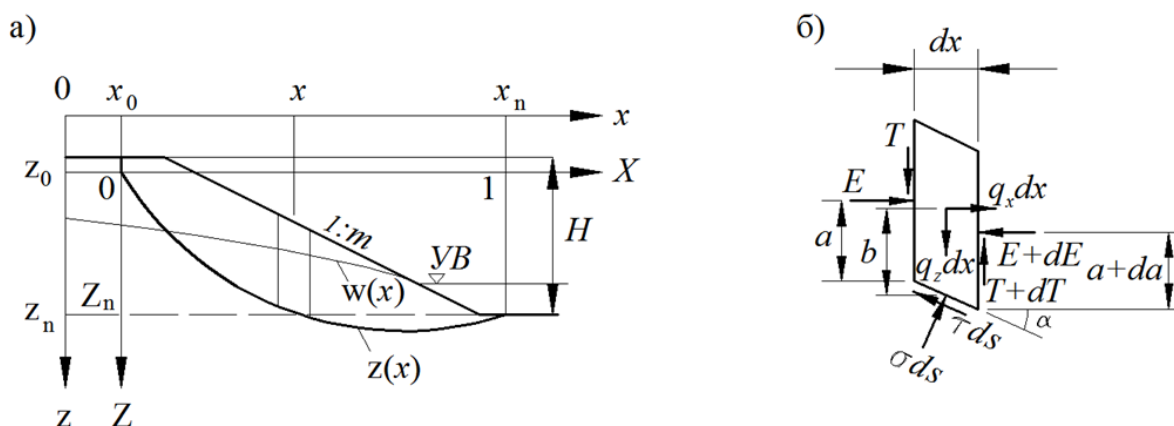


Рисунок 2. Расчетная схема: а) профили откоса, депрессионной поверхности и поверхности сдвигов; б) силы, действующие на выделенный элемент

Выражения для вычисления значений E , T , M получаются после интегрирования уравнений (4), (5), (6) в пределах от x_0 до x [22]. Выполняя интегрирование этих уравнений в пределах от x_0 до x_n , после соответствующего преобразования получим систему уравнений равновесия тела обрушения в целом:

$$F_1 - F_2 = 0, \quad (7)$$

$$F_3 - F_4 = 0, \quad (8)$$

$$F_5 - F_6 = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } F_1 = \int_0^1 \tau dX; \quad F_2 = \int_0^1 \left(q_x - \frac{E_n - E_0}{x_n - x_0} + Z' \sigma \right) dX; \quad F_3 = \int_0^1 \tau Z' dX;$$

$$F_4 = \int_0^1 \left(q_z - \frac{T_n - T_0}{x_n - x_0} - \sigma \right) dX; \quad F_5 = \int_0^1 \tau (XZ' - Z) dX;$$

$$F_6 = \int_0^1 \left[Z_n E_n - T_n - \frac{M_n - M_0}{x_n - x_0} + \frac{m}{x_n - x_0} - Z q_x + X q_z - \sigma(ZZ' + X) \right] dX;$$

$$X = \frac{x - x_0}{x_n - x_0}, Z = \frac{z - z_0}{x_n - x_0}, Z' = \frac{dZ}{dX}.$$

Критическое значение одного из параметров при задаваемом критическом значении второго параметра определяется в вариационном методе из уравнения, представляющего собой линейную комбинацию уравнений равновесия (7), (8) и (9), в которую каждое из перечисленных уравнений входит равноправно:

$$F_5 - F_6 + \lambda_1(F_1 - F_2) + \lambda_2(F_3 - F_4) = 0, \quad (10)$$

где λ_1, λ_2 – числовые коэффициенты.

В дальнейшем изложении вычисляется критическое значение параметра c_k при задаваемом критическом значении параметра f_k .

После подстановки в (10) выражений для F_i ($i=1, \dots, 6$) и соответствующего преобразования получим выражение для определения c_k в явном виде:

$$c_k = \int_0^1 \frac{P}{J} dX, \quad (11)$$

где $P = Q - \sigma \psi$, $J = \int_0^1 [K + \lambda_2 Z' - Z + \lambda_1] dX \neq 0$,

$$Q = Z_n E_n - T_n - \frac{\lambda_1(E_n - E_0) + \lambda_2(T_n - T_0) + M_n - M_0 - m}{x_n - x_0} + (X + \lambda_2)q_z - (Z - \lambda_1)q_x,$$

$$\psi = [K + \lambda_2 Z' + f_k Z'] - [K - \lambda_1 Z' - f_k].$$

Для того чтобы функция σ удовлетворяла граничным условиям в крайних точках профиля поверхности обрушения, она должна иметь, по крайней мере, два свободных параметра. Представим функцию σ в виде суммы непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций в диапазоне значений $X \in (0; 1]$:

$$\sigma = \sigma_0 + (\sigma_n - \sigma_0)X + sZ, \quad (12)$$

где $s = s(X)$.

Значения напряжений σ_0 и σ_n определяются нагрузкой в крайних точках профиля поверхности сдвигов [22]. Для рассматриваемого примера граничные условия в соответствии с теорией прочности Кулона – Мора определяются выражениями:

$$\sigma_0 = \frac{\gamma_{ep} h_0 (\sqrt{1+f^2} - f) c}{\sqrt{1+f^2}}, \quad \sigma_n = \frac{c}{\sqrt{1+f^2}}, \quad (13)$$

где γ_{ep} – удельный (объемный) вес грунта; h_0 – глубина трещины, которая может образоваться в начальном сечении тела обрушения в результате каких-либо экстремальных кратковременных воздействий на грунтовый массив (например, при землетрясении).

Результаты исследования влияния функции распределения нормальных напряжений, действующих по поверхности сдвигов, на оценку запаса устойчивости необводненного откоса подробно изложены в [25].

Параметр c_k , определяемый выражением (11), представляет собой функционал функции $Z(X)$ при неизвестной функции $\sigma(X)$.

Для решения поставленной задачи необходимо, чтобы подынтегральная функция $F = P/J$ в выражении (11) удовлетворяла дифференциальному уравнению Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{d}{dX} \left(\frac{\partial F}{\partial Z'} \right) = 0. \quad (14)$$

Подставляя в это уравнение выражения для P и J , после дифференцирования и преобразования с учетом (12) получаем:

$$\psi_1 s + \psi_2 s' + \psi_3 = 0, \quad (15)$$

$$\text{где } \psi_1 = \left[2f_k J - \psi - \left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \right) \psi' \right] Z + \left\{ J \left[f_k \left(\sigma_n + \lambda_2 \right) \right] Z - \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \right) \psi \right] \right\} Z' - J \psi;$$

$$\psi_2 = \left\{ J \left[f_k \left(\sigma_n + \lambda_2 \right) \right] Z - \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \right) \psi \right] \right\} Z;$$

$$\psi_3 = Q + \left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \right) Q' + J \frac{\partial Q}{\partial Z} + \left[2f_k J - \psi - \left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \right) \psi' \right] \left[f_0 + \sigma_n - \sigma_0 \right] X + \\ + \left\{ J \left[f_k \left(\sigma_n + \lambda_2 \right) \right] Z - \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} + \lambda_2 \right) \psi \right] \right\} \left[\sigma_n - \sigma_0 \right];$$

штрихами обозначены производные по X .

Интегрирующий множитель этого уравнения:

$$\frac{a}{\psi_2} \exp \left[\int_0^X \frac{\psi_1}{\psi_2} dX \right], \quad (16)$$

где a – произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (15) с учетом граничных условий:

$$s = s_1 e^{-u} + \eta, \quad (17)$$

$$\text{где } u = \int_0^X \frac{\psi_1}{\psi_2} dX; \quad \eta = e^{-u} \int_0^X \frac{\psi_3}{\psi_2} e^u dX; \quad s_1 - \text{числовой параметр.}$$

Подставляя это выражение в (12), с учетом граничных условий получим:

$$\sigma = \sigma_0 + \left[\sigma_n - \sigma_0 \right] X + Z \eta. \quad (18)$$

Поскольку $\psi_2(0) = 0$, функцию η при $X = 0$ следует доопределить предельным переходом. Положим, что

$$\eta(0) = \lim_{X \rightarrow 0} \eta(X) \rightarrow 0 = \frac{\psi_3}{\psi_1}, \quad \eta'(0) = \lim_{X \rightarrow 0} \eta'(X) \rightarrow 0 = 0. \quad (19)$$

Выражение (18) связывает две неизвестные функции Z и σ . Отсюда следует, что функция $Z(X)$, описывающая профиль поверхности сдвигов, зависит от функции распределения нормального напряжения $\sigma(X)$ на упомянутой поверхности, а также что каждой экстремали $Z(X)$ соответствует единственная функция $\sigma(X)$. Для решения поставленной вариационной задачи необходимо задаться одной из этих функций. Получить решение будет проще, если задаться функцией $Z(X)$, поскольку функция $\sigma(X)$ выражена явно зависимостью (18). Чтобы удовлетворить всем граничным условиям, представим:

$$Z = X \left[Z'_0 + \left[\sigma_n - 2Z'_0 - Z'_n \right] X - \left[\sigma_n - Z'_0 - Z'_n \right] X^2 \right]. \quad (20)$$

Значения параметров λ_1, λ_2 , входящие в выражение для функции η , вычисляются из уравнений предельного равновесия (7), (8). Третье уравнение предельного равновесия (9) или эквивалентное ему выражение (10) используются для вычисления критического значения параметра прочности грунта c_k .

Используя изложенный метод, авторы выполнили исследования по выявлению влияния глубины наполнения котлована на оценку устойчивости откоса. Для построения профиля депрессионной поверхности использовано предложение М.Р. Петриченко – В.Н. Бухарцева [26], которое не противоречит постановке задачи. Согласно этому предложению профиль депрессионной поверхности в относительных координатах, схема построения которого представлена на рисунке 3, описывается выражением:

$$\bar{x} = \frac{1}{\beta \operatorname{sh} 2\lambda} \left[\operatorname{arcsch} \theta + \theta \sqrt{1 + \theta^2} \right], \quad (21)$$

где $\bar{x} := \frac{x}{L}$; $\beta = \frac{H_1^2 - h_0^2}{2H_1^2}$; $\lambda := \frac{L}{H_1}$; $\theta = \sqrt{1 - \frac{h^2}{H_1^2}} \operatorname{sh} \lambda$; x и h – текущие координаты точки на кривой депрессии; L – длина области фильтрации.

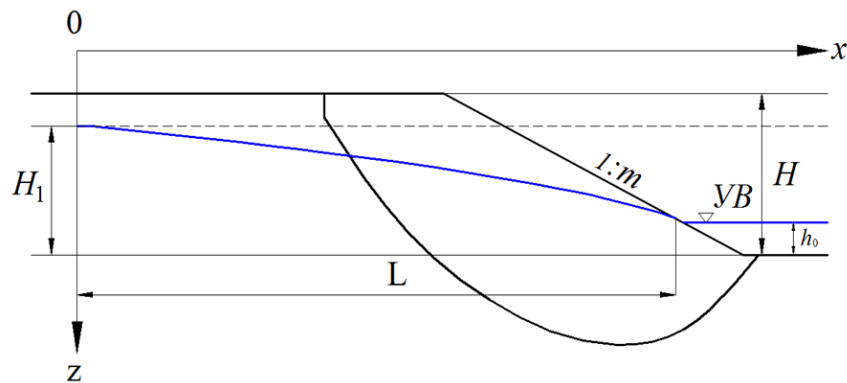


Рисунок 3. Схема к построению профиля депрессионной поверхности

Результаты решения вариационной задачи представлены графиками линий критических значений f_k и c_k при разных глубинах наполнения котлована для двух типов профилей поверхности сдвигов: описанного выражением (20) (рис. 4) и окружностью (рис. 5).

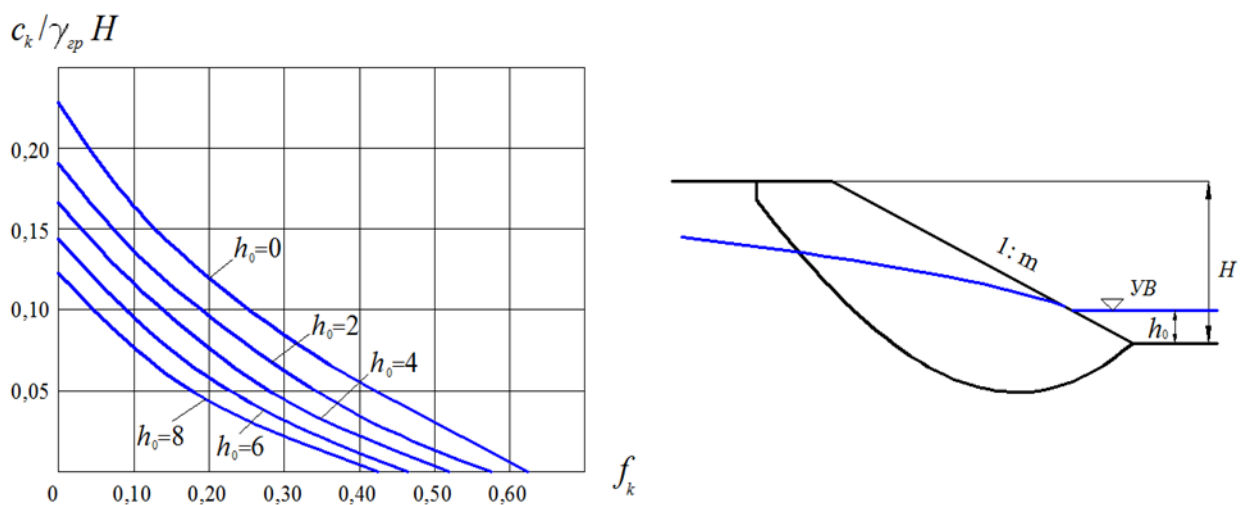


Рисунок 4. Графики линий критических значений параметров грунта для поверхности сдвигов по выражению (20)

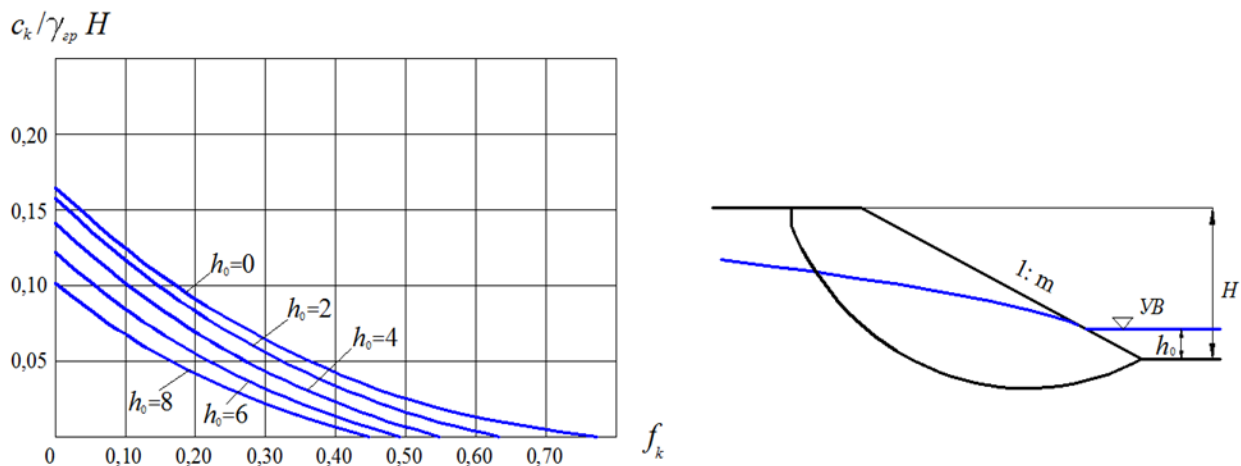


Рисунок 5. Графики линий критических значений параметров грунта для окружности

Расчетами установлено, что приемлемую аппроксимацию выражения (18) с достаточной для практики точностью дает выражение

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_n - \sigma_0 \left(X - A_2 X \left(-X^2 \right) - A_3 X \left(-X^3 \right) \right), \quad (22)$$

где A_2 и A_3 – числовые коэффициенты, значения которых определяются системой двух уравнений предельного равновесия (7) и (8).

Заключение

1. Анализ результатов расчетов, представленных графиками на рисунках 4 и 5, показывает, что использование круглоцилиндрической поверхности в расчетах устойчивости грунтовых обводненных откосов может привести к существенной погрешности (до 30 %) в сторону риска по сравнению с поверхностью по зависимости (20). Как показали наши исследования необходимых откосов [23], круглоцилиндрическая поверхность дает приемлемые результаты только для несвязных и малосвязных грунтов, к которым относятся, например, пылеватые пески и супеси.

2. Наиболее неблагоприятное распределение нормального напряжения на поверхности сдвигов определяется зависимостью (18), полученной на основе решения вариационной задачи.

3. Наиболее общая концепция коэффициента запаса устойчивости грунтового массива выражается зависимостями (2) и (3).

4. Высота откоса и удельный вес грунта, слагающего откос, линейно связаны с удельным сцеплением грунта. Поэтому для снижения числа параметров, влияющих на оценку устойчивости откоса, целесообразно их объединить в единый параметр $c/\gamma_{gp}H$.

Литература

1. Bishop A.W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes // Geotechnique. 1955. Vol. 5. No.1. Pp. 7–17.
2. Bishop A.W., Morgenstern N.R. Stability coefficients for earth slopes // Geotechnique. 1960. Vol. 10. No.4. Pp. 129–150.
3. Caquo A. Methode exacte pour le calcul de la rupture d'un massif pour dlissement cylindrique // Geotechnique. 1955. Vol. 5. No.1. Pp. 29–32.
4. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams // Proceeding of the Second Congress on Large Dams. 1936. Vol. 4. Pp. 445–463.
5. Janbu N. Application of composite slip surface for stability analysis // Proceedings of the European Conference on Stability of Earth Slopes, Stockholm. 1954. Vol. 3. Pp. 43–49.
6. Janbu N. Slope stability computation // Embankment-Dam Engineering. 1973. Casagrande volume. Pp. 47–86.

7. Krahn J. Stability Modeling with SLOPE/W. An engineering Methodology. First edition. Canada, 2004. 396 p.
8. Можевитинов А.Л., Шинтемиров М. Общий метод расчета устойчивости откосов земляных сооружений // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Беденеева. 1970. Т. 92. С. 11–22.
9. Morgenstern N.R, Price V.E. The analysis of stability of general slip surface // Geotechnique. 1965. Vol. 15. No.4. Pp. 70–93.
10. Cheng Y.M. Slope stability analysis and stabilization: new method and insight. U.K., Abingdon, Oxon: Routledge Publishers, 2008. 241 p.
11. Cheng Y.M., Zhao Z.H., Sun Y.J. Evaluation of Interslice Force Function and Discussion on Convergence in Slope Stability Analysis by the Lower Bound Method // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2010. Vol. 136(8). Pp. 1103–1113.
12. Fredlund D.G, Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis // Canadian Geotechnique Journal. 1977. Vol. 14. Pp. 429–439.
13. Duncan J.M., Wright G.S. Soil Strength and Slope Stability. New Jersey: John Wiley & Son, 2005. 297 p.
14. Bai T., Qiu T., Huang X., Li C. Locating Global Critical Slip Surface Using the Morgenstern-Price Method and Optimization Technique // International Journal of Geomechanics, 2014. Vol. 14(2). Pp. 319–325.
15. Cheng Y., Lansivaara T., Baker T., Li N. Use of internal and external variables and extremum principle in limit equilibrium formulations with application to bearing capacity and slope stability problems // Soils and Foundations. 2013. Vol. 53(1). Pp. 130–143.
16. Florkiewicz A., Kubzdela A. Factor of safety in limit analysis of slopes // Geomechanics and Engineering. 2013. Vol. 5(5). Pp. 485–497.
17. Michalowski R. Stability assessment of slopes with cracks using limit analysis // Canadian Geotechnical Journal, 2013. Vol. 50(10). Pp. 1011–1021.
18. Zheng H., Yang Z., Sun G. Extremum solutions to the limit equilibrium method subjected to physical admissibility // Natural Hazards. 2013. Vol. 65(1). Pp. 79–96.
19. Turnbull W.J, Hvorslev M.J. Special problems in slope stability // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. 1967. Vol. 93. Pp. 499–528.
20. Хуан Я.Х. Устойчивость земляных откосов. М.: Стройиздат, 1988. 238 с.
21. Чугаев Р.Р. Земляные гидротехнические сооружения. Л.: Энергия, 1967. 460 с.
22. Бухарцев В.Н. Оценка устойчивости грунтовых откосов вариационным методом // Гидротехническое строительство. 1998. №11. С. 44–47.
23. Бухарцев В.Н., Нгуен Т.Х. Влияние формы поверхности обрушения на меру запаса устойчивости грунтовых массивов // Гидротехническое строительство. 2013. №7. С. 17–20.
24. Бухарцев В.Н., Нгуен Т.Х. Учет граничных условий при оценке устойчивости грунтовых массивов // Гидротехническое строительство. 2013. №1. С. 36–43.
25. Бухарцев В.Н., Нгуен Т.Х. Влияние функции распределения нормальных напряжений по поверхности обрушения на оценку устойчивости грунтового массива // Гидротехническое строительство. 2014. №6. С. 33–38.
26. Бухарцев В.Н., Петриченко М.Р. Решение задачи о фильтрации в однородном прямоугольном грунтовом массиве на основе вариационных принципов // Гидротехническое строительство. 2012. №3. С. 32–37.

*Владимир Николаевич Бухарцев, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)9770458; эл. почта: gts.bu@cef.spbstu.ru*

*Хоанг Тхай Нгуен, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(950)0242402; эл. почта: hoang293@gmail.com*

© Бухарцев В.Н., Нгуен Х.Т., 2014

doi: 10.5862/MCE.50.3

Application of the variation method to assess stability of waterlogged soil masses

V.N. Bukhartsev

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia
+79119770458; e-mail: gts.bu@cef.spbstu.ru

H.T. Nguyen

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia
+79500242402; e-mail: hoang293@gmail.com

Key words

stability of soil mass; seepage forces; depression surface; variational method; equilibrium conditions; boundary conditions

Abstract

One of the main issues in designing earth structures is to ensure their slope stability. To analyze the stability of soil mass affected by seepage forces a new method has been proposed where all equilibrium conditions and boundary conditions at the ends of the surface profile are satisfied by strain and orientation of areas of shear.

To find the most hazardous hypothetical failure surface a variational method was used, which involves solving Euler-Lagrange differential equation as a necessary condition for the existence of functional extremum. Since the problem can be solved in the framework of the scheme of limit equilibrium of soil masses with the use of the Mohr-Coulomb strength criterion, one of the parameters of soil strength acts as a functional for the given values of another parameter. Sufficiency of the existing functional extremum is verified numerically.

References

1. Bishop A.W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. *Geotechnique*. 1955. Vol. 5. Pp. 7–17.
2. Bishop A.W, Morgenstern N.R. Stability coefficients for earth slopes. *Geotechnique*. 1960. Vol. 10. Pp. 129–150.
3. Caquo A. Methode exacte pour le calcul de la rupture d'un massif pour glissement cylindrique. *Geotechnique*. Vol. 5. No.1. 1955. Pp. 29–32.
4. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams. *Proceeding of the Second Congress on Large Dams*. 1936. Vol. 4. Pp. 445–463.
5. Janbu N. Application of composite slip surface for stability analysis. *Proceedings of the European Conference on Stability of Earth Slopes*, Stockholm. 1954. Vol. 3. Pp. 43-49.
6. Janbu N. Slope stability computation. *Embankment-Dam Engineering*. 1973. Casagrande volume. Pp. 47–86.
7. Krahn J. *Stability Modeling with SLOPE/W. An engineering Methodology*. First edition. Canada, 2004. 396 p.
8. Mozhevitinov A.L., Shintemirov M. Obshchiy metod rascheta ustoychivosti otkosov zemlyanykh sooruzheniy [The general method for calculating the stability of earthworks]. *Izvestiya VNIIG im. B.Ye. Bedeneyeva*. 1970. Vol. 92. Pp. 11–22. (rus)
9. Morgenstern N.R, Price V.E. The analysis of stability of general slip surface. *Geotechnique*. 1965. Vol. 15. No.4. Pp. 70–93.
10. Cheng Y.M. *Slope stability analysis and stabilization: new method and insight*. U.K., Abingdon, Oxon: Routledge Publishers, 2008. 241 p.
11. Cheng Y.M., Zhao Z.H., Sun Y.J. Evaluation of Interslice Force Function and Discussion on Convergence in Slope Stability Analysis by the Lower Bound Method. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2010. Vol. 136(8). Pp. 1103–1113.
12. Fredlund D.G, Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis. *Canadian Geotechnique Journal*. 1977. Vol. 14. Pp. 429–439.
13. Duncan J.M., Wright G.S. *Soil Strength and Slope Stability*. New Jersey: John Wiley & Son, 2005. 297 p.
14. Bai T., Qiu T., Huang X., Li C. Locating Global Critical Slip Surface Using the Morgenstern-Price Method and Optimization Technique. *International Journal of Geomechanics*. 2014. Vol. 14(2). Pp. 319–325.

15. Cheng Y., Lansivaara T., Baker T., Li N. Use of internal and external variables and extremum principle in limit equilibrium formulations with application to bearing capacity and slope stability problems. *Soils and Foundations*. 2013. Vol. 53(1). Pp. 130–143.
16. Florkiewicz A., Kubzdela A. Factor of safety in limit analysis of slopes. *Geomechanics and Engineering*. 2013. Vol. 5(5). Pp. 485–497.
17. Michalowski R. Stability assessment of slopes with cracks using limit analysis. *Canadian Geotechnical Journal*. 2013. Vol. 50(10). Pp. 1011–1021.
18. Zheng H., Yang Z., Sun G. Extremum solutions to the limit equilibrium method subjected to physical admissibility. *Natural Hazards*. 2013. Vol. 65(1). Pp. 79–96.
19. Turnbull W.J., Hvorslev M.J. Special problems in slope stability. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1967. Vol. 93. Pp. 499–528.
20. Khuan Ya.Kh. *Ustoychivost zemlyanykh otkosov* [Stability of earth slopes]. Moscow: Stroyizdat, 1988. 238 p. (rus)
21. Chugayev R.R. *Zemlyanyye gidrotekhnicheskiye sooruzheniya* [Earthmoving hydraulic structures]. Leningrad: Energiya, 1967. 460 p. (rus)
22. Bukhartsev V.N. Otsenka ustoychivosti gruntovykh otkosov variatsionnym metodom [Evaluation of the stability of ground slopes with variational method]. *Power Technology and Engineering*. 1998. No.11. Pp. 44–47. (rus)
23. Bukhartsev V.N., Nguyen T. K. Vliyaniye formy poverkhnosti obrusheniya na meru zapasa ustoychivosti gruntovykh massivov [Influence of surface shape on the collapse of a measure of stability margin of ground arrays]. *Power Technology and Engineering*. 2013. No.7. Pp. 17–20. (rus)
24. Bukhartsev V.N., Nguyen T. K. Uchet granichnykh usloviy pri otsenke ustoychivosti gruntovykh massivov [Accounting for the boundary conditions when assessing the stability of soil masses]. *Power Technology and Engineering*. 2013. No.1. Pp. 36–43. (rus)
25. Bukhartsev V.N., Nguyen Tkhay Khoang. Vliyaniye funktsii raspredeleniya normalnykh napryazheniy po poverkhnosti obrusheniya na otsenku ustoychivosti gruntovogo massiva [The influence of the distribution function of the normal stress on the surface of the collapse of the assessment of the stability of the soil mass]. *Power Technology and Engineering*. 2014. No.6. Pp. 33–38. (rus)
26. Bukhartsev V.N., Petrichenko M.R. Resheniye zadachi o filtratsii v odnorodnom pryamougolnom gruntovom massive na osnove variatsionnykh printsipov [Solution of the problem of filtering in a uniform rectangular soil massif based on variational principles]. *Power Technology and Engineering*. 2012. No.3. Pp. 32–37. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 24–31