

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРОККО В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

С целью расширения множества решений предельная задача Крокко для переноса консервативной примеси заменяется условием минимума положительного функционала. Показано, что существуют инварианты предельной задачи Крокко, фиксирующие моменты распределения концентрации первой и второй степени. При этом плотность распределения концентрации в формулировке экстремальной задачи удовлетворяет двойственному условию Дюгема, типичному для слабой топологии на сопряженном пространстве. Установлено, что действительные решения предельной задачи Крокко не зависят от рода предельных условий в задаче Фурье: предельные условия для уравнения Крокко инвариантны и его решения обладают инвариантностью по отношению к предельным условиям.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА, РЕШЕНИЕ, ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ, ТОПОЛОГИЯ СЛАБАЯ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ, КОНТАКТНАЯ ГРАНИЦА.

### Введение

Распространение консервативной примеси в сплошных средах, как правило, изучается в терминах предельной задачи Фурье. Такая постановка предельной задачи для уравнений переноса используется в известных автору классических работах по математическому анализу (Л. Шварца, С.Г. Михлина, С.Г. Крейна и др.), а также в курсах гидродинамики [1, 2].

Исходным пунктом для описания распространения теплоты (и иной пассивной и консервативной примеси) в одном измерении служит условие неразрывности для теплового потока:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = 0,$$

где  $dh = \rho c_p dT$  — дифференциал объемной плотности распределения энтальпии,  $\dot{q} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$  — плотность потока теплоты (вычисляется по закону Фурье).

Частное  $a := \frac{\kappa}{\rho c_p}$  известно как коэффициент переноса (коэффициент температуропроводности).

Ввиду консервативности примеси (температура, энтальпия) дивергентные члены отсутствуют. С учетом указанных условий получаем уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Вместо явления теплопроводности можно рассматривать, например, диффузию влаги в пористом теле, и пусть тогда  $z = z(t, x)$  — плотность распределения консервативной примеси. Условие неразрывности для потока примеси принимает вид:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( b(z) \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad (1a)$$

где  $b$  — коэффициент переноса консервативной примеси с плотностью распределения (концентрацией)  $z = z(t, x)$ . Во всех случаях коэффициенты переноса  $a, b$  име-

ют размерность  $m^2/c$ .

Пусть

$$D(z) = (0 < t < \infty, 0 < x < \infty);$$

$$z(0, x) = z(t, 0) - 1 = z(t, \infty) = 0$$

– предельные условия для уравнения (1а).

Вместо простейших (типичных) предельных условий можно рассматривать их смешанный вариант (см. ниже). Далее считаем, что существует гомеоморфизм

$$f: (0, 1) \rightarrow R^1, f \geq 0,$$

такой, что  $b = b_0 f(z)$ .

Достаточно предполагать, что  $f \in L_1(0, 1)$ , т. е. распределение  $f$  отличается от непрерывного распределения на множестве нулевой меры. Преобразование  $\zeta := \frac{x}{2\sqrt{b_0 t}}$  приводит предельную задачу для уравнения (1а) к следующему виду:

$$\frac{d}{d\zeta} \left( f(z) \frac{dz}{d\zeta} \right) + 2\zeta \frac{dz}{d\zeta} = 0, \quad (2)$$

$$z(0) - 1 = z(\infty) = 0.$$

Согласно известным представлениям, предельная задача (2) возникает в различных диффузионных проблемах: в неустановившейся фильтрации, в гидродинамике пограничного слоя (предельная задача Блазиуса) и других [3–6]. Как правило, ищутся либо численные, либо приближенные решения уравнения (2). Например, известно следующее приближенное решение предельной задачи (2):

$$z = \sqrt{\operatorname{erfc}(\zeta)}. \quad (3)$$

Цель настоящей статьи состоит в демонстрации преимущества преобразования переменных

$$\frac{dz}{d\zeta} = j(z), \quad \varphi(z) = \int_0^z \zeta d\tau, \quad (3a)$$

сводящего предельную задачу (2) к предельной задаче Крокко:

$$2\varphi \frac{d^2\varphi}{dz^2} + f(z) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(1) = 0. \quad (4)$$

### Основные преимущества преобразования (3а)

Действительно, уравнение в предельной задаче (2) приводится к виду

$$j \left( \frac{d}{dz} (f(z)j) + 2\zeta \right) = 0.$$

Это означает, что либо  $j = 0$ , либо

$$\frac{d}{dz} (f(z)j) + 2\zeta = 0.$$

Если провести формальное интегрирование, а именно

$$f(z)j(z) = -2\varphi(z), \quad \varphi(z) := \int_0^z \zeta(t) dt,$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \zeta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad \varphi'(1) = 0, \quad j = \frac{1}{\varphi''(z)},$$

то уравнение в предельной задаче (4) получается немедленно.

Решение предельной задачи (4) приводится в статье [3] для случая  $f(z) = z$  (задача Блазиуса); оно получено в виде степенного ряда по  $z$ , т. е. по схеме Блазиуса. Удобство полученного автором статьи [3] решения состоит в том, что радиус сходимости ряда не меньше единицы и аналитического продолжения решения (изменения шкалы), в отличие от решения Блазиуса, не требуется.

В работе [4] изучены предельные квазилинейные задачи вязкого взаимодействия, связанные с уравнением Крокко, и указаны классы точных решений. Работа [5] (это известный справочник по дифференциальным уравнениям) содержит набор групп Ли, удобных при построении автоморфизмов решений нелинейных предельных задач. Недавняя работа [6] (препринт) содержит обзор классической задачи Блазиуса. Приводятся оценки нижней и верхней границ для частичных сумм степенных и асимптотических разложений.

### Предельная задача Крокко

Типичная предельная задача Крокко (4) обладает рядом преимуществ, по сравнению с традиционной предельной задачей (2). К таким преимуществам следует отнести следующие утверждения:

1. Прежде всего,

$$D(z) = (\zeta: 0 < \zeta < \infty).$$

В задаче Крокко распределение  $\varphi: (0, 1) \rightarrow R^1$  задано на компакте;

2. Кроме того,  $z \in C^{(2)}(0, \infty)$ , тогда как для «потенциала»  $\varphi(z)$  ограничения слабее. В связи с этим справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** С предельной задачей Крокко (4) связана следующая вариационная задача:

$$S(\varphi, 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + f(z) \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right) dz \rightarrow \inf \geq 0. \quad (5)$$

Доказательство. Действительно, уравнение предельной задачи (4) равносильно канонической системе:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dz} = -\frac{f(z)}{2\varphi},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \exists H : (0 < \varphi < \varphi(1), 0 < \psi < \infty) \rightarrow R^1 &\Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Распределение  $H(z, \varphi, \psi)$  представляет собой гамильтониан системы. Плотность распределения действия (лагранжиана)  $S(\varphi, z)$ ,

$$\Lambda := \frac{dS}{dz} = -H \left( z, \varphi, \psi := \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) + \psi \frac{d\varphi}{dz},$$

есть распределение, двойственное с распределением  $H$  по Юнгу – Лежандру. Тем самым лемма 1 доказана.

Таким образом, для решения вариационной задачи достаточно, чтобы

$$\varphi \in W_2^{(1)}(0, 1); \quad C^{(2)}(0, 1) \subset W_2^{(1)}(0, 1),$$

и топология вариационной формулировки оказывается шире (сильнее) топологии предельной задачи (2), которая не допускает никакой прямой вариационной формулировки;

3. Ввиду предельных условий задачи Крокко выполняется следующее тождество:

$$\int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z) dz. \quad (6)$$

А это и означает, что

$$\zeta = \frac{d\varphi}{dz} \in L_2(0, 1),$$

и в силу неравенства Коши, тем более  $\zeta \in L_1(0, 1)$ .

Следовательно, для любой неотрицательной функции  $f \in L_1(0, 1)$ , отделенной от нуля почти всюду, существует ненулевое решение предельной задачи (4);

4. Вдоль характеристики предельной задачи Крокко (4) выполняется следующее условие:

$$\left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - f(z) \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} = \alpha \zeta^2, \quad (6a)$$

где  $\alpha$  – константа.

Для равенства (6a) справедлива и другая запись:

$$\left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 = \beta f(z) \ln \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad \beta := \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (6b)$$

При  $z = 1, \zeta = 0$  условие (6a) выполняется тождественно. Пусть

$$\zeta \rightarrow +0, \quad z \rightarrow 1-0, \quad f(1) = 1.$$

Тогда в этом случае

$$\varphi(z) = \varphi(1) \exp \left( -\frac{\zeta^2}{\beta f(z)} \right)$$

и распределение

$$\varphi: (0, 1) \rightarrow (0, \varphi(1)) \subset R^1$$

непрерывно слева в точке  $z = 1$ :

$$\varphi(z) \rightarrow \varphi(1-0), \quad z \rightarrow 1-0.$$

Константа  $\alpha$  или связанная с ней константа  $\beta$  выбираются так, чтобы при  $z \rightarrow 0$  ( $\zeta \rightarrow \infty$ ) условия (6a) и (6b) выполнялись асимптотически, т. е.

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left( \zeta^2 - \beta f(z) \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right) = 0.$$

Отсюда видно, что константы  $\alpha$  и  $\beta$  играют роль демпфирующих множителей.

Далее в наших конкретных расчетах предполагается, что  $\alpha = 0, \beta = 1$ .

Кратко сформулируем полученные важные выводы, необходимые для решения предельной задачи Крокко.

Во-первых, задача (4) связана с некоторой вариационной задачей, допускающей значительное расширение топологии.

Во-вторых, в этой задаче существуют инварианты, трактуемые как моменты первого и второго порядка концентрации  $z$ ,

а именно —

$$\varphi(1) = \int_0^1 \zeta dz = \sup_z \varphi(z);$$

$$\int_0^1 \zeta^2 dz = \frac{1}{2} \|f\|,$$

причем норма исчисляется в  $L_1(0, 1)$ .

В-третьих, ввиду равенств (5) и (6), а также неравенства Коши, оказывается справедливым неравенство

$$\int_0^1 \left( \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + f(z) \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right) dz =$$

$$= \int_0^1 f(z) \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right) dz \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 f^2(z) dz} \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right)^2 dz}.$$

Теперь допустим, что кроме этого,  $f \in L_2(0, 1)$  и

$$\sqrt{\int_0^1 f^2(z) dz} \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right)^2 dz} \rightarrow \inf \geq 0,$$

т. е. нижняя грань для распределения (5) выбрана с некоторым «запасом», достаточным для увеличения левой части (5). Это означает, что если коэффициент переноса  $f(z)$  ограничен по норме  $L_2(0, 1)$ , и, тем более по норме  $L_1(0, 1)$ , то распределения  $\varphi(z)$  и  $-j(z)$  достигают максимума. Если же ограничено распределение  $\varphi(z)$  (ограничен поток концентрации  $-j(z)$ ), то коэффициент переноса минимален по норме  $L_2(0, 1)$ , и, тем более по норме  $L_1(0, 1)$  [7]. Легко видеть, что сформулированное утверждение представляет перефразировку принципа Дюгема.

Для дальнейшего изложения материала важна следующая лемма.

**Лемма 2.** Пусть  $f(z) \geq 0$  почти всюду на промежутке  $0 < z < 1$ . Тогда в предельной задаче Крокко (4) не существует точки, сопряженной с  $z = 1$ . Другими словами, существуют ненулевые решения предельной задачи (4) такие, что либо  $\varphi(z) \geq 0$ ,  $\varphi''(z) < 0$ , либо  $\varphi(z) < 0$ ,  $\varphi''(z) > 0$ .

Доказательство мотивировано тем, что в предельной задаче (4)  $\zeta > 0$ ,  $\varphi > 0$  и

имеет место первый случай — положительного монотонно возрастающего решения (2-диффеоморфизм).

### Результаты решения предельной задачи Крокко (4)

**Решение 1.** На характеристике предельной задачи (4) запишем следующее равенство:

$$H \left( z, \varphi, \frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{f(z)}{2} \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} = 0,$$

и тогда переменные разделяются, а именно:

$$\int_0^z \sqrt{f(\tau)} d\tau = \int_0^\varphi \frac{d\omega}{\sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\omega}}};$$

$$\zeta = \sqrt{f(z) \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}}. \quad (7)$$

В правой части равенства (7) можно выполнить простые преобразования:

$$\int_0^z \sqrt{f(\tau)} d\tau = \sqrt{\pi} \varphi(1) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right), \quad (7a)$$

откуда для плотности потока концентрации сквозь плоскость  $\zeta = 0$  ( $x = 0$ ) получаем следующее выражение:

$$\varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sqrt{f(\tau)} d\tau,$$

$$-j(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi} f(1)} \int_0^1 \sqrt{f(\tau)} d\tau. \quad (8)$$

Пусть  $f(z) = z^m$ ,  $m \geq 0$ . Тогда решение (7) принимает вид

$$z = \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) \right)^{\frac{2}{m+2}}. \quad (76)$$

В этом случае справедливо выражение

$$\zeta = \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) \right)^{\frac{m}{m+2}}, \quad (7b)$$

и для степенного распределения коэффициента переноса получим:

$$\varphi(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi(m+2)}}, \quad -j(1) = \frac{4}{\sqrt{\pi(m+2)}}. \quad (8a)$$

**Тестирование решения.** Пусть  $m = 0$ . Тог-

да, в силу справедливости выражений (7б) и (7в), получаем:

$$z = \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) = \operatorname{erfc}(\zeta),$$

и, как легко видеть,  $-j(1) = 2 / \sqrt{\pi}$ , т. е. решения задачи Крокко (4) и задачи (2) совпадают.

Теперь пусть  $m = 1$ . Это «чистый» случай традиционной задачи Крокко. Тогда получаем такие выражения:

$$z = \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\zeta = \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \cdot \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\varphi(z) = \varphi(1) \exp \left( -\frac{2\zeta}{\sqrt{z}} \right).$$

Интегральные характеристики переноса приобретают следующие значения:

$$\varphi(1) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} = 0,37; \quad -j(1) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}},$$

и они близки к решению Блазиуса.

Далее, пусть  $m = 2$ . Тогда получается известная аппроксимация:

$$z = \sqrt{\operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right)},$$

и затем —

$$\zeta = \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right),$$

$$\varphi = \varphi(1) \exp \left( -\frac{2\zeta}{z} \right),$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad -j(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Наконец, если  $m \gg 1$ , то мы можем записать, что

$$z = 0, \quad \varphi < \varphi(1), \quad z = 1, \quad \varphi = \varphi(1);$$

$$\zeta = \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) \right);$$

$$\varphi(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi m}}, \quad -j(1) = \frac{4}{\sqrt{\pi m}}.$$

**Примечание.** Особая точка распределения (7в) — это  $\varphi = 0$ . Рассмотрим поведение  $\zeta(\varphi)$  в окрестности нуля. Пусть в (7в)  $\varphi \ll 1$ , тогда справедлива асимптотика:

$$\zeta \cong \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{m}{m+2}} \left( \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right)^{\frac{m}{m+2}} \left( \ln \frac{\varphi(1)}{\varphi} \right)^{\frac{2}{m+2}}.$$

Очевидно, при  $m \ll 1$  полученное асимптотическое распределение совпадает с (7в) и  $\zeta(0) = \infty$ . Наоборот, при  $m \gg 1$  получается распределение

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varphi}{\varphi(1)},$$

и  $\zeta(0) = 0$ . Следовательно, при малых значениях параметра  $m$  распределение  $\zeta(\varphi)$  представляет собой биективный диффеоморфизм, т. е.  $\zeta(0) = \infty$ ,  $\zeta(\varphi(1)) = 0$ . Другими словами, перенос плотности распределения концентрации в условиях, «близких» к линейным, охватывает весь промежуток  $0 < \zeta < \infty$ . При сильной нелинейности, когда  $m \gg 1$ , распределение  $\zeta(\varphi)$  — сюръективный диффеоморфизм и всякому значению  $\zeta$  соответствует не менее двух значений  $\varphi$  в промежутке значений  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \varphi(1)$ . Распределения  $\zeta(\varphi)$  для различных значений  $m$  представлены на рис. 1.

Левые ветви графиков показаны пунктиром. Это означает, что ненулевые значения плотности распределения концентрации локализованы на промежутке  $0 < \zeta < \zeta_{\max}$ , а при  $\zeta > \zeta_{\max}$  — концентрация нулевая. Такого рода решения нелинейных предельных задач известны, например в теории нестационарной фильтрации, и связаны с образованием локальной водяной линзы при нестационарной подаче воды в грунт [1].

**Решение 2.** Пусть теперь вместо условия при  $x = 0$  ( $\zeta = 0$ ) в предельной задаче (2) используется смешанное условие вида

$$\alpha \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} + z(0) = \beta, \quad (2a)$$

где  $\alpha, \beta$  — постоянные.

Тогда

$$D(\varphi) = (0, z_0), \quad z_0 := z(0)$$

и предельная задача Крокко формулируется следующим образом:

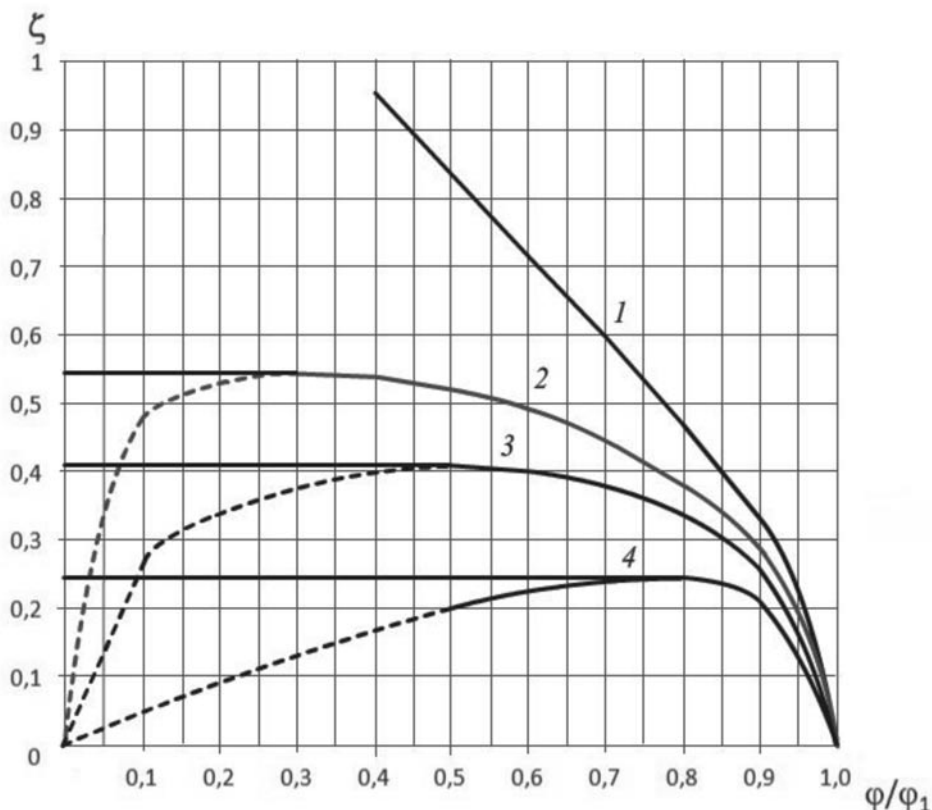


Рис. 1. Результаты тестирования решения 1 предельной задачи Крокко. Представлены плотности распределения концентрации  $\zeta(\varphi/\varphi_1)$  при различных значениях параметра  $m$ : 0 (1), 1 (2), 2 (3),  $m = \infty$  (4). Пунктиром показаны левые ветви графиков

$$2\varphi\varphi'' + f(z) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(z_0) = 0. \quad (4a)$$

Ее решение имеет вид

$$\int_0^z \sqrt{f(\tau)} d\tau = \sqrt{\pi}\varphi(z_0) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(z_0)}{\varphi}} \right), \quad (7\Gamma)$$

$$\zeta = \sqrt{f(z) \ln \frac{\varphi(z_0)}{\varphi}}.$$

В частности, для степенного изменения коэффициента переноса, т. е. когда  $f(z) = z^m$ ,

$$\frac{z}{z_0} = \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(z_0)}{\varphi}} \right) \right)^{\frac{2}{m+2}}. \quad (7\Delta)$$

В этом случае вместо (7В) получается распределение вида

$$\zeta = \sqrt{z^m \ln \frac{\varphi(z_0)}{\varphi}} = \quad (7e)$$

$$= \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}} \right) \right)^{\frac{m}{m+2}} \sqrt{\ln \frac{\varphi(1)}{\varphi}}. \quad (7e)$$

Для нахождения максимальной предельной плотности распределения концентрации  $z_0$  для степенного распределения коэффициента переноса, в силу соотношения (7Д), имеем следующее условие:

$$\frac{2}{m+2} z_0^{\frac{m+2}{2}} = \sqrt{\pi}\varphi(z_0). \quad (9)$$

Кроме этого условия, из уравнения (2а) следует еще одно:

$$z_0 = \beta - \alpha j(0) = \beta + 2\alpha \frac{\varphi(z_0)}{z_0^m}.$$

Тогда, с учетом условия (9), получаем:

$$z_0 = \beta + \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}(m+2)} z_0^{\frac{2-m}{2}}.$$

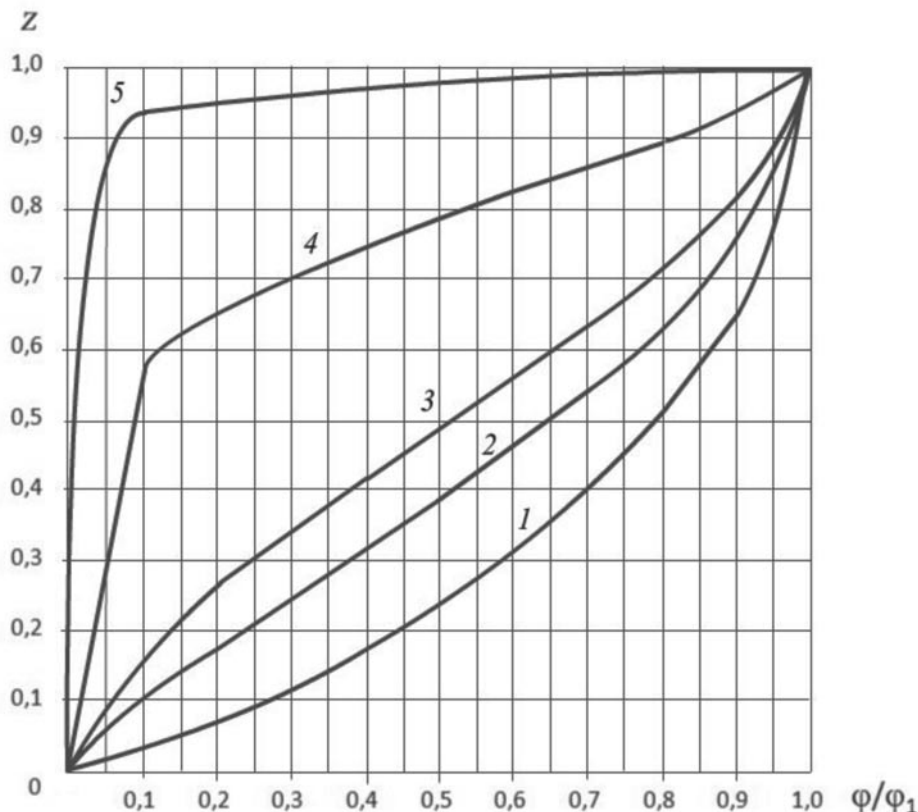


Рис. 2. Типичные распределения потенциала Крокко по концентрации при различных значениях параметра  $m$ : 0 (1), 1 (2), 2 (3), 10 (4), 100 (5)

Например, пусть  $m = 0$ . Тогда

$$z_0 = \frac{\beta}{1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}}$$

При  $m = 2$

$$z_0 = \beta + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}$$

и т. д.

Очевидно, что формулы (7б) и (7д) задают типичные для всех предельных задач распределения потенциала Крокко по концентрации (рис. 2), пригодные для всех значений параметров внешнего теплообмена  $\beta, \alpha$ .

Поток концентрации на левом конце промежутка изменения переменной  $\zeta$ ,  $-j(z_0)$ , явно зависит от параметров задачи  $\beta, \alpha$ :

$$-j(z_0) = \frac{2\varphi(z_0)}{z_0^m} = \frac{4}{\sqrt{\pi}(m+2)} z_0^{\frac{2-m}{2}} = \frac{z_0 - \beta}{\alpha}$$

**Решение 3.** Пусть  $f(z)$  — кусочно-постоянное распределение вида

$$\begin{cases} f(z) = f_0, & 0 < z < z_0; \\ f(z) = f_1, & z_0 < z < 1, \end{cases}$$

где  $z_0$  — концентрация примеси в точке контакта (на контактной плоскости).

Требуется найти положение контакта, т. е. значение  $\zeta = \zeta_0$  в предположении, что контакт идеальный, т. е. что  $z(\zeta)$  — непрерывное распределение концентрации:

$$z(\zeta_0 - 0) - z(\zeta_0 + 0) = 0.$$

В данном случае удобно применить следующее аналитическое продолжение решений предельной задачи Крокко: сперва нужно решить предельную задачу Крокко при условии  $D(\varphi) = (0, 1)$  и с коэффициентом переноса  $f_0$ . Это решение позволит найти значение  $\varphi(z_0)$  и решить предельную задачу Крокко на промежутке  $(z_0, 1)$  с предельным условием на левом конце промежутка:

$$\varphi(z_0 - 0) = \varphi(z_0 + 0),$$

причем очевидно, что непрерывность потенциала Крокко в точке  $z = z_0$  не зависит от идеальности контакта.

Итак, полагаем, что

$$\begin{aligned} 0 < z < z_0, \quad 2\varphi_* \varphi''_* + f_0 = 0, \\ \varphi_*(0) = \varphi'_*(1) = 0, \end{aligned} \quad (10a)$$

причем

$$\varphi_*(1) := \Phi_*.$$

Тогда решение предельной задачи (10a) есть

$$\sqrt{f_0} z = \sqrt{\pi} \Phi_* \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\Phi_*}{\varphi_*}} \right). \quad (11a)$$

Из решения (11a) следует выражение

$$z_0 = \sqrt{\frac{\pi}{f_0}} \Phi_* \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\Phi_*}{\varphi_*(z_0)}} \right). \quad (12a)$$

На промежутке  $z_0 < z < 1$  ставится предельная задача при  $D(\varphi^*) = (z_0, 1)$ :

$$\begin{aligned} 2\varphi^* \varphi''^* + f_1 = 0, \\ \varphi^*(z_0) - \varphi_*(z_0) = \varphi'^*(1) = 0, \end{aligned} \quad (10b)$$

которая имеет решение

$$\begin{aligned} \sqrt{f_1} (z - z_0) = \sqrt{\pi} \Phi^* \left( \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\Phi^*}{\varphi^*}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\ln \frac{\Phi^*}{\varphi_0}} \right) \right), \end{aligned} \quad (11b)$$

где введены обозначения:

$$\varphi^*(1) := \Phi^*, \quad \varphi_*(z_0) = \varphi^*(z_0) := \varphi_0.$$

Пусть в формуле (11b)  $z = 1$ ; тогда

$$1 - z_0 = \sqrt{\frac{\pi}{f_1}} \Phi^* \operatorname{erf} \left( \ln \sqrt{\frac{\Phi^*}{\varphi_0}} \right). \quad (12b)$$

Введем число Прандтля для переноса  $\sigma$  и безразмерный потенциал Крокко  $F$ , определив их как

$$\sigma := \frac{\Phi_*}{\Phi^*}, \quad F := \frac{\Phi^*}{\varphi_0}.$$

По определению  $F > 1$ , так как  $\varphi(z)$  — монотонно возрастающая функция. В этом случае формулы (12a) и (12b) можно переписать однотипно, т. е.

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{\frac{\pi}{f_0}} \sigma \Phi^* \operatorname{erfc}(\sqrt{\ln(\sigma F)}); \\ 1 - z_0 &= \sqrt{\frac{\pi}{f_1}} \Phi^* \operatorname{erf}(\ln \sqrt{F}). \end{aligned} \quad (13)$$

И, наконец, справедливо тождество, равносильное условию трансверсальности на контакте, т. е. непрерывности первой производной  $\varphi(z)$  на контакте —

$$\begin{aligned} \zeta(z_0 - 0) = \zeta(z_0 + 0): \\ f_0 \ln(\sigma F) = f_1 \ln F. \end{aligned} \quad (14)$$

Допустим, что  $n f_0 = f_1$ . Тогда из тождества (14) сразу же получается формула

$$\sigma = F^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma > 1, \text{ если } n > 1 (f_0 < f_1); \\ \text{и } \sigma < 1, \text{ если } n < 1 (f_0 > f_1). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу равенств (13), имеем:

$$\frac{z_0}{1 - z_0} = \sqrt{n} F^{n-1} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{n \ln F})}{\operatorname{erf}(\sqrt{\ln F})}. \quad (13a)$$

Теперь пусть  $n = 1$  ( $\sigma = 1$ ). Тогда в силу формулы (13a) получается тождество, справедливое для любого  $z_0$  на интервале  $0 < z_0 < 1$ .

Итак, пусть  $z_0, f_{0,1}, n$  — заданы. Тогда последовательность решения задачи, поставленной в этом разделе, такая:

1. Из равенства (13a) находим значение  $F$ ;
2. Из равенства

$$\zeta_0 = \sqrt{f_1 \ln F} = \sqrt{f_0 n \ln F}$$

находим мгновенное значение координаты контакта;

3. Из равенства

$$j(z_0 - 0) f_0 = j(z_0 + 0) f_1,$$

определяем изменение плотности потока примеси на контакте.

Получаем в результате следующие распределения потенциала Крокко на промежутках  $(0, z_0), (z_0, 1)$ :

$$\begin{cases} \varphi(z) = \varphi_*(z), & 0 < z < z_0; \\ \varphi(z) = \varphi^*(z), & z_0 < z < 1, \end{cases}$$



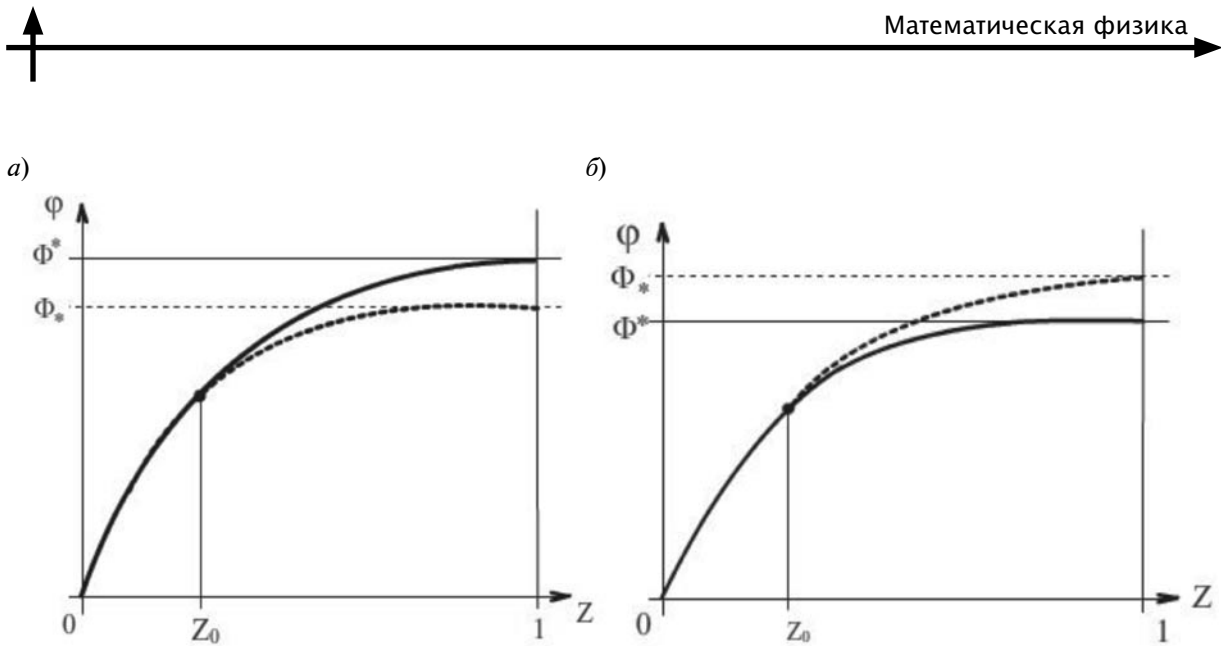


Рис. 3. Распределения потенциала Крокко на промежутке  $D(\varphi) = (0, 1)$  для случаев  $\sigma < 1, n < 1$  (а) и  $\sigma > 1, n > 1$  (б);  $\sigma = \Phi_0/\Phi^*$ ;  $\Phi_0 = \varphi_0(1), \Phi^* = \varphi^*(1)$

как один диффеоморфизм на всем промежутке  $D(\varphi) = (0, 1)$  для различных чисел  $\sigma(n)$  (рис. 3).

Видно, что потенциал  $\varphi_0$  есть сужение  $\varphi$  на промежутке  $(0, z_0)$ , а  $\varphi^*$  есть сужение  $\varphi$  на промежутке  $(z_0, 1)$ . Геометрически распределение  $\varphi_0$  совпадает с распределением  $\varphi^*$  на промежутке  $0 < z < z_0$  и служит огибающей для распределения  $\varphi(z)$  на всем промежутке  $0 < z < 1$ .

### Выводы

Предельная задача для уравнения Крокко сводится к однородным предельным условиям на концах промежутка, независимо от рода граничных условий.

Достаточное условие, разделяющее

действительные и виртуальные решения предельной задачи Крокко, обнаруживает двойственность, типичную для слабых топологий: либо ограничивается коэффициент переноса для распределения концентрации при максимальном потоке концентрации, либо минимизируется распределение коэффициента переноса при ограниченном потоке концентрации.

Существуют инварианты предельной задачи Крокко. При заданном распределении коэффициента переноса неизменны моменты второй степени плотности распределения концентрации, и при заданной наибольшей плотности потока концентрации остается неизменным момент первой степени плотности распределения концентрации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. М.: Гидрометеоздат, 1978. 204 с.
2. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997. 592 с.
3. Фаиз А. Применение уравнения Крокко – Ванга для решения уравнения Блазиуса // Техническая акустика (электронный журнал). 2007. Т. 7. № 7. Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-uravneniya-krokko-vanga-k-resheniyu-zadachi-blaziusa#ixzz38ed1AsyD>.
4. Полянин А.Д., Аристов С.Н. Системы

- уравнений гидродинамического типа: точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость // Доклады Академии наук. 2009. Т. 428. № 2. С. 180–185.
5. Полянин А.Д. Преобразования типа Мизеса и Крокко: понижение порядка нелинейных уравнений, RF-пары и преобразования Беклунда // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 2. С. 160–165.
6. Varin V.P. A solution of the Blasius problem. Moscow, KIAM Preprint. 2013. № 40. 21 p.
7. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1968. 476 с.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович** — доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
fonpetrich@mail.ru

**ХАРЬКОВ Никита Сергеевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
nkharikov@mail.ru

### *Petritchenko M.R., Kharkov N.S.* BOUNDARY PROBLEMS FOR THE CROCCO EQUATION IN THE TRANSPORT THEORY.

The Crocco boundary problem is more convenient than the Fourier limit problem when either is applied to the transfer problem of passive and conservative tracers for a number of advantages given below. Firstly, the concentration density distribution is generally sought on the standard compact interval from 0 to 1 in the distribution class of the limited growth instead of a semi-infinite interval. Secondly, the dual variational formulation of the problem being equivalent to the marginal one is admitted, and it reduces the solutions topology from  $C^2(0, 1)$  to  $W_2^{(1)}(0, 1)$ . Thirdly, there are simple invariants of the solution which are convenient for estimating the solution norms and have a simple interpretation for moments of the density distribution. And finally, the Crocco boundary problem is “insensitive” to the nonlinearity of the equation coefficients. In this problem with piecewise-constant coefficients boundary conditions on the contact within the  $(0, 1)$  interval of variation in the density distribution are equivalent to the transversality conditions. The paper presents the demonstration of these arguments and the solution examples of the limiting problem for the Crocco equation with a power variation in the transfer coefficient.

BOUNDARY PROBLEM, SOLUTION, EXTREME CONDITION, WEAK TOPOLOGY, DUALITY, CONTACT BOUNDARY.

### REFERENCES

1. **Barenblatt G.I.** *Podobiye, avtomodel'nost', promezhutochnaya asimptotika.* Moscow, Gidrometeoizdat, 1978, 204 p. (rus)
2. **Olejnuk O.A., Samokhin V.N.** *Matematicheskiye metody v teorii pogranichnogo sloya.* Moscow, Nauka, 1997, 592 p. (rus)
3. **Faiz A.** *Primeneniye uravneniya Krokko-Vanga dlya resheniya uravneniya Blaziusa. Tekhnicheskaya akustika,* 2007, Vol. 7, No. 7. Available at: <http://cyberleninka.ru/article/n/primeniye-uravneniya-krokko-vanga-k-resheniyu-zadachi-blaizusa#ixzz38ed1AsyD>.
4. **Polyanin A.D., Aristov S.N.** *Sistemy uravneniy gidrodinamicheskogo tipa: tochnye resheniya, preobrazovaniya, nelineynaya ustojchivost'.* *Doklady Akademii nauk,* 2009, Vol. 428, No. 2, pp. 180-185.
5. **Polyanin A.D.** *Preobrazovaniya tipa Mizesa i Krokko: ponizhenie poryadka nelinejnykh uravnenij, RF-pary i preobrazovaniya Beklunda.* *Doklady Akademii nauk,* 2010, Vol. 430, No. 2, pp. 160-165. (rus)
6. **Varin V.P.** *A solution of the Blasius problem.* Moscow, KIAM Preprint, 2013, No. 40, 21 p.
7. **Glazman I.M., Lyubich Yu.I.** *Konechnomernyj linejnyj analiz.* Moscow, Nauka, 1968, 476 p. (rus)

### THE AUTHORS

#### **PETRITCHENKO Mikhail R.**

*St. Petersburg State Polytechnical University*  
29, Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.  
fonpetrich@mail.ru

#### **KHARKOV Nikita S.**

*St. Petersburg State Polytechnical University*  
29, Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.  
nkharikov@mail.ru